

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

## ***Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)***

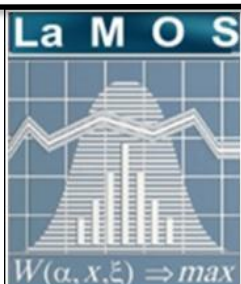
**Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications**

*Compte rendu des séances  
2011-2012*



*Professeur Alice E. SMITH Auburn  
University (ALABAMA-USA)*

**Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Kamal Kabyl**



Publication et Edition

LaMOS Research Unit  
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 11  
Béjaïa 2012

ISSN : 1112-9433



# **SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE DE BÉJAÏA**

*Compte rendu des séances 2011-2012.*

**Séminaire Mathématique de Béjaïa.**

**Responsable :** *M<sup>r</sup>* KABYL KAMAL.

**Adresse :** Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes.

Université de Béjaïa, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).

Tel/Fax : (213) 34 21 51 88.

E-mail : lamos \_ Bejaia@hotmail.com

©Publications du Laboratoire LAMOS, 2012.

Tous droits de traduction, de reproduction  
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

---

# Table des matières

---

## partie I Méthodes Cybernétiques et Optimisation

---

### 1 Programmation bi-niveaux multicritère

*Aïcha ANZI et Mohammed Said RADJEF* ..... 3

### 2 Processus de Formation de Coalitions : Aspect Algorithmique

*Salima KENDI, Fodil LAIB and Mohammed Said RADJEF* ..... 7

### 3 La Théorie des Jeux et les Problèmes de Satisfaction de Contraintes

*Kahina BOUCHAMA, Mohammed Said RADJEF et Lakhdar SAIS* ..... 11

---

## partie II Systèmes avec Rappel et Réseaux

---

### 4 Clustering inégal pour l'équilibrage de charge dans les réseaux de capteurs sans fil

*Nadjet KHOULALENE* ..... 17

### 5 Une nouvelle approche cross-layer pour les réseaux de capteurs

*Samira YESSAD* ..... 21

### 6 Modélisation analytique du protocole IEEE 802.11 mode Ad Hoc Avec qualité de service

*Zahia AZIZOU* ..... 25

### 7 Mécanisme d'accès au médium avec compromis Latence-énergie pour les WSNs

*Mouloud ATMANI* ..... 31

### 8 Un protocole de routage géographique économe en énergie pour les réseaux de capteurs sans fil.

*Samra BOULFEKHAR* ..... 35

### 9 Embedding balanced binary trees in hypercube

*Kamal KABYL* ..... 39

### 10 Solution Cross-Layer pour QoS dans les Réseaux de Capteurs sans fil

*Fouzi SEMCHEDINE* ..... 43

---

**partie III Processus Aléatoires et Applications**


---

<b>11 Estimation Non Paramétrique d'un Opérateur de Transition. Cas : La Méthode du Noyau et le Système <math>GI/M/1/N</math></b>	
<i>Mouloud CHERFAOUI, Djamil AISSANI and Smail ADJABI</i> .....	47
<b>12 File d'attente à un seul serveur avec rappels et vacances : Approche régénérative de Markov</b>	
<i>Mohamed BOUALEM</i> .....	53
<b>13 Stabilité des processus QBD (Quasi Birth and Death process)</b>	
<i>Yasmina DJABALI, Boualem RABTA, et Djamil AISSANI</i> .....	57
<b>14 Evaluation des Performances des Systèmes Prioritaires <math>M_2/M_2/1/(N_1, N_2)</math> à l'aide des Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG)</b>	
<i>Sedda HAKMI, Ouiza LEKADIR et Djamil AISSANI</i> .....	61
<b>15 Processus Régénératifs dans les Modèles de Risque Classique à Deux Dimensions</b>	
<i>Safia HOCINE</i> .....	63

---

**partie IV Contrôle Statistique de la Qualité**


---

<b>16 Application des fonctions splines</b>	
<i>Sonia AMROUN et Smail ADJABI</i> .....	69
<b>17 Quelques aspets statistiques et numériques pour l'étude de la stabilité forte des systèmes de files d'attente</b>	
<i>Aïcha BARECHE</i> .....	73
<b>18 On the Estimation of the Mode by Orthogonal Series</b>	
<i>Nora SAADI et Smail ADJABI</i> .....	77
<b>19 Régression non paramétrique à noyau : Cas multidimensionnel par la méthode du noyau</b>	
<i>Karima LAGHA</i> .....	79

---

**partie V Index des Auteurs**


---

<b>Index</b> .....	85
<b>Index</b> .....	85

**Première partie**

---

**Méthodes Cybernétiques et Optimisation**





## Programmation bi-niveaux multicritère

Aicha ANZI et Mohammed Said RADJEF

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)  
 Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie  
 Tél. (213) 34 21 51 88

### 1.1 Introduction

Le problème de programmation bi-niveaux est un problème d'optimisation hiérarchique, avec deux niveaux de décision. Le premier niveau est appelé Leader et le deuxième Suiveur. En d'autres termes, un programme bi-niveau est un programme mathématique standard avec  $y$  est contraint d'être solution optimale pour le programme

$$\max\{f(x, y) : g(x, y) \leq 0\} \quad (1.1)$$

Ce qui donne le programme bi-niveaux suivant :

$$\begin{aligned} \max_x F(x, y) \\ \text{s.c. } G(x, y) \leq 0 \\ \max_y f(x, y) \\ \text{s.c. } g(x, y) \leq 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

En se basant sur le programme bi-niveau (1.2), on donne les notations et définitions suivantes :

a. *Ensemble des contraintes du problème*

$$S = \{(x, y) : G(x, y) \leq 0, g(x, y) \leq 0\}.$$

b. *Ensemble réalisable du Suiveur pour un  $x$  fixé*

$$S(x) = \{y : g(x, y) \leq 0\}.$$

c. *Projection de  $S$  sur l'espace du Leader*

$$P(S) = \{x : \exists y, (x, y) \in S\}.$$

d. *Ensemble des réactions rationnelles du Suiveur pour  $x \in P(S)$*

$$R(x) = \{y : y = \arg \max[f(x, \hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\}.$$

e. *Région induite*

$$RI = \{(x, y) \in S, y \in R(x)\}.$$

La région induite  $RI$  représente l'ensemble réalisable du problème (1.2) sur lequel le Leader optimise sa fonction de gain. Cette région est non convexe et souvent discontinue, ce qui rend les problèmes bi-niveaux non convexes et difficiles à résoudre. Ces caractéristiques restent vraies même dans le cas où toutes les fonctions dans (1.2) sont linéaires et dans le cas d'absence des contraintes  $G(x, y) \leq 0$ .

## 1.2 Programmation bi-niveaux multicritère

Dans cette classe de problèmes, les décideurs possèdent chacun plusieurs fonctions (ou critères) à optimiser. En d'autres termes, nous avons deux niveaux de problèmes d'optimisation multicritère. mathématiquement, ces problèmes se s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \max_x F(x, y) &= (F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_{k_1}(x, y)) \\ \text{s.c. } G(x, y) &\leq 0 \\ \max_y f(x, y) &= (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_{k_2}(x, y)) \\ \text{s.c. } g(x, y) &\leq 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Où  $k_1$  et  $k_2$  sont respectivement le nombre de critères (fonctions) du leader et du suiveur.

Dans notre travail, on s'intéresse au cas linéaire qui est donné par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \max_x F(x, y) &= (c_1(x, y), c_2(x, y), \dots, c_{k_1}(x, y)) \\ \text{s.c. } A_1x + B_1y &\leq b_1, \\ \max_y f(x, y) &= (d_1(x, y), d_2(x, y), \dots, d_{k_2}(x, y)) \quad (8.a) \\ \text{s.c. } A_2x + B_2y &\leq b_2, \quad (8.b) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Soit  $E(x)$  l'ensemble des réactions rationnelles du suiveur pour une décision,  $x$ , fixée du leader. Dans ce cas, il est défini comme l'ensemble des solutions pareto optimales (efficaces) du problème (8.a) – (8.b). Il est donné par

$$\begin{aligned} E(x) &= \{y / \nexists \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n_2} \text{ tel que } d_i(x, \tilde{y}) \geq d_i(x, y) \forall i = 1, \dots, k_2 \text{ et } d_j(x, \tilde{y}) > d_j(x, y) \\ &\text{pour un certain } j \in \{1, \dots, k_2\}\} \end{aligned}$$

Soit

$$RI = \{(x, y) \in S \text{ et } y \in E(x)\}$$

la région induite. Le problème (1.4) s'écrira d'une manière équivalente comme suit

$$\begin{aligned} \max_x F(x, y) &= (c_1(x, y), c_2(x, y), \dots, c_{k_1}(x, y)) \\ \text{s.c. } (x, y) &\in RI \end{aligned} \quad (1.5)$$

Une solution optimale de (1.5) est définie par :  $(x^*, y^*)$  est une solution optimale de Pareto (solution efficace) si et seulement si

- $(x^*, y^*) \in RI$  et,
- $\nexists (x, y) \in RI / c_i(x, y) \geq c_i(x^*, y^*) \forall i = 1, \dots, k_1$  et  $c_j(x, y) > c_j(x^*, y^*)$  pour un certain  $j \in \{1, \dots, k_1\}$ .

### 1.3 Méthodes de résolution

Dans la littérature, on trouve trois cas de problèmes bi-niveaux multicritère :

- Les deux niveaux sont des problèmes d’optimisation multicritère.
- Le problème du niveau supérieur (leader) est un problème d’optimisation multicritère et le niveau inférieur (suiveur) est un problème d’optimisation classique.
- Le problème du niveau inférieur est un problème d’optimisation multicritère et le niveau supérieur est un problème d’optimisation classique.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ces problèmes. On peut citer :

- Agrégation pondérée : attribuer des coefficients positifs (poids) aux critères, puis résoudre un problème de programmation linéaire dont la fonction objectif est la combinaison linéaire de tous les critères.
- Des heuristiques telles que les algorithmes génétiques, la recherche tabou, . . . etc.
- Méthode de  $\epsilon$ -contrainte : transformer les critères en contraintes en gardant l’un de ces critères comme fonction objectif.
- Reformulation du problème en un programme linéaire multi-objectif mixte en 0-1 en introduisant les contraintes duales du problème du suiveur dans le problème initial.

### 1.4 Notre approche

Dans le cadre de notre travail, nous essayons de traiter le problème avec une technique d’optimisation non convexe, connue sous le nom de méthode DC (difference of convex). D’abord, nous transformons le problème (1.4) en un problème d’optimisation multicritère standard en remplaçant le problème du niveau inférieur (8.a) - (8.b) par les conditions d’optimalité KKT associées. Puis, nous résolvons le problème d’optimisation sous l’ensemble efficace associé au problème résultant, en utilisant la méthode DC.

### Références

1. J.F. Bard : Practical bilevel optimization : algorithms and applications. Kluwer academic publishers, Dordrecht (1998).
2. H.I. Calvete and C. Galé. Linear bilevel programs with multiple objectives at the upper level. J. of Compu. and Appl. Math., 234, 950-959, (2010).
3. H.I. Calvete and C. Galé. On linear bilevel problems with multiple objectives at the lower level. Omega 39, 33–40, (2011).
4. B. Colson, P. Marcotte and G. Savard : Bilevel programming : A survey. 4OR A Quarterly, J. Oper. Res., (2007).
5. C.O. Pieueme. Multiobjective programming approaches in bilevel programming problems. Thèse de Doctorat, (2012).



## Processus de Formation de Coalitions : Aspect Algorithmique

Salima KENDI, Fodil LAIB and Mohammed Said RADJEF

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)  
 Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie  
 Tél. (213) 34 21 51 88

### 2.1 Introduction

Le concept de coopération est très important en théorie des jeux. Coopérer veut dire agir ensemble dans un intérêt commun. Cependant, pour que deux joueurs ou plus agissent en groupe pour un intérêt commun, il est nécessaire de se séparer des utilités individuelles pour définir une sorte d'utilité commune qui va déterminer leur comportement commun. Le groupe formé de ces joueurs est appelé coalition.

### 2.2 Coalition et Structure de Coalitions

**Définition 2.1** Une coalition est n'importe quel sous-ensemble non vide de l'ensemble des joueurs  $N$ .

Une structure de coalitions  $\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  est une partition de l'ensemble des joueurs  $N$ . Tel que

$$C_i \cap C_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \text{ et}$$

$$\bigcup_{i=1}^m C_i = N$$

Généralement, l'objectif de la formation de coalitions est de trouver une partition stable de l'ensemble des agents existants en une ou plusieurs coalitions. Une coalition est stable si elle est intérieurement stable (si aucun joueur de la coalition n'a intérêt à la quitter) et extérieurement stable (si aucun joueur en dehors de la coalition n'a intérêt à s'y intégrer).

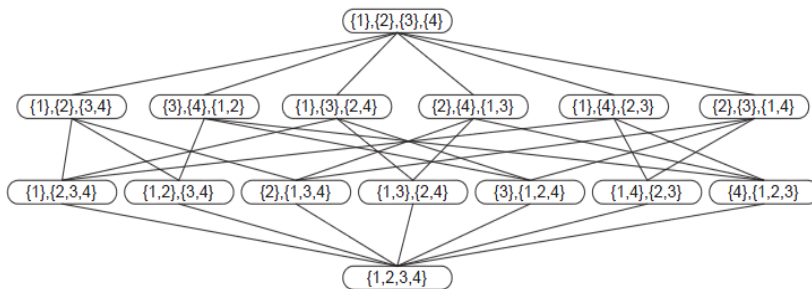


FIGURE 2.1. Arbre des structures de coalitions pour 4 agents

### 2.2.1 Classe des jeux de coalitions

1. Jeux de coalitions à utilité transférable : Chaque agent reçoit une fraction à déterminer du gain de la coalition dont il est membre.
2. Jeux de coalitions à utilité non transférable : Le gain de la coalition est représenté avec un ou plusieurs vecteurs assignant un gain individuel à chacun de ces membres.

### 2.2.2 Concept de solution pour l'utilité non transférable (Pareto-optimalité)

Une solution est optimale au sens de Pareto si elle n'est dominée par aucune autre solution. Une solution  $p$  est dominée par une solution  $p'$  si au moins un agent  $i$  obtient un gain supérieur dans  $p'$  par rapport à son gain dans  $p$  et qu'aucun agent n'a un gain inférieur dans  $p'$  par rapport à son gain dans  $p$ .

## 2.3 Agents logiciels de groupes d'acheteurs

certaines acheteurs ont pensé appliquer la technologie des agents logiciels à la formation de groupes d'acheteurs puisqu'il s'agit d'un cas particulier de la négociation multilatérale et de la formation de coalitions.

Il existe trois types de coalitions dans les groupements d'acheteurs :

1. Coalitions orientées-produit : même produit.
2. Coalitions orientées-marchand : produits différents, même marchand.
3. Coalitions entre marchands : coalitions de vendeurs.

## 2.4 Protocoles de groupement d'acheteurs

Les étapes générales d'un protocole de groupement d'acheteurs sont :

1. La négociation : prix.
2. La formation de coalitions : un agent acheteur demande à d'autres s'ils veulent rejoindre sa coalition.
3. Le choix du représentant ou vote : négocier avec les manufacturiers et gérer le groupe.
4. La collecte des paiements : un agent est choisi.
5. La distribution des produits : aux membre du groupe d'acheteurs.

## 2.5 Conception d'un protocole multiagent de groupement d'acheteurs

### 2.5.1 Préférences d'un consommateur

Pour ce protocole, il a été choisi de représenter les préférences d'un consommateur pour un type de produit selon :

- son prix de réserve.
- L'importance qu'il donne aux différents attributs du type de produits.
- L'importance qu'il donne aux différentes valeurs q'un attribut peut prendre.
- L'importance qu'il donne au prix demandé.

## 2.5.2 Préférences d'un consommateur (interface personne-machine)

Exemple : couleur d'une voiture

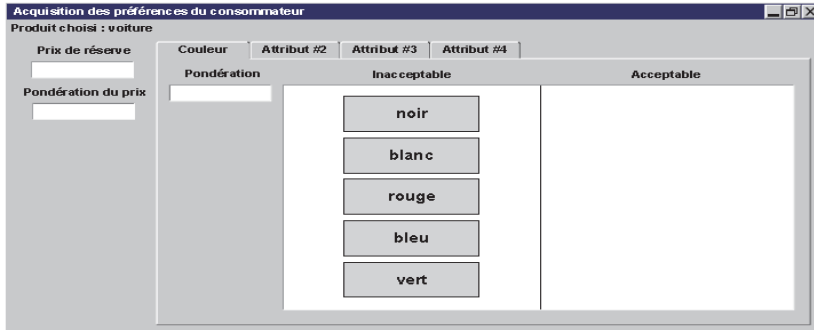


FIGURE 2.2. Interface d'acquisition des préférences du consommateur

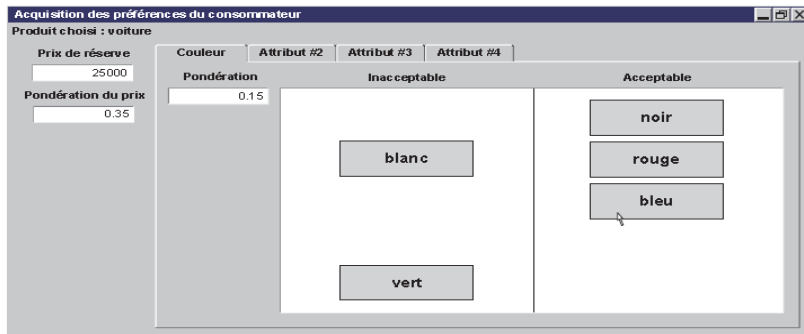


FIGURE 2.3. Interface d'acquisition des préférences du consommateur une fois remplie

## 2.5.3 Préférences d'un consommateur (différentes valeurs d'un attribut)

Exemple : couleur d'une voiture

Valeur de la couleur	Point associé	Valeur de la couleur	Rang	Point associé
noir	1	noir	1 <sup>er</sup>	1
blanc	-1	blanc	4 <sup>ième</sup>	0.4
rouge	0.8	rouge	1 <sup>er</sup>	1
bleu	0.6	bleu	3 <sup>ième</sup>	0.6
vert	-1	vert	4 <sup>ième</sup>	0.4

FIGURE 2.4. Points associés aux différentes couleurs possibles  $(1 - ((n-1)/m))$

### 2.5.4 Satisfaction globale d'un consommateur

Généralement, l'indice de satisfaction globale du consommateur est calculé selon la formule :

$$Satisfaction_{globale} = \sum_{i=1}^m (poids_{attr\ i} \cdot poids_{valeur\ attr\ i}) + poids_{prix} \cdot Satisfaction_p(prix\ paye) \quad (2.1)$$

où  $Satisfaction_p(prix\ paye) \in [0, 1]$ .

## 2.6 Conclusion

- Un protocole de groupement d'acheteurs qui ne changerait pas le comportement des consommateurs par rapport à celui d'acheter seul son produit préféré au magasin offrant le meilleur prix n'aurait pas beaucoup d'utilité économique .
- Le protocole de formation de groupes d'acheteurs n'a pas pu être appliqué pour plus de 15 agents sur la plate-forme d'évaluation choisie. Ceci est dû au manque de mémoire vive utilisée qui est de 250 MO. Pour une RAM de 500 MO, le protocole peut traiter jusqu'à 25 agents inscrits.

## Références

1. F. Asselin. Formation de coalitions d'agents logiciels pour le groupement d'acheteur. Mémoire de maître en sciences, département d'informatique et de génie logiciel, université Laval, Octobre 2002.



---

# La Théorie des Jeux et les Problèmes de Satisfaction de Contraintes

Kahina BOUCHAMA, Mohammed Said RADJEF et Lakhdar SAIS

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS

Université de Béjaïa 06000, Algérie.

Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL), Université d'Artois (France).

**résumé 3.0.1** *La programmation par contraintes et la théorie des jeux constituent chacune un domaine de recherche très actif. Elles offrent des cadres de modélisation, d'analyse et de développement des outils pour la résolution de nombreuses applications dans des domaines variés tels que l'informatique, l'intelligence artificielle, le transport et la logistique, les technologies de l'information et de la communication,... etc. Dans la dynamique de leurs développements, on recense quelques travaux novateurs ayant établi certains liens entre la théorie des jeux et les problèmes de satisfaction de contraintes.*

*Dans ce travail, nous avons établi l'équivalence entre le concept de solution pour un problème de satisfaction de contraintes (CSP) et la notion du Z-équilibre pour le jeu qui lui est associé. Par la suite, nous avons développé un algorithme de calcul du Z-équilibre, en s'inspirant des approches par retour-arrière, connues pour la résolution des CSP.*

## 3.1 Position du problème

La théorie des jeux et les CSP représentent un outil puissant pour la modélisation d'une grande classe de problèmes rencontrés dans divers domaines. Ces deux théories peuvent aussi s'appliquer l'une à l'autre, ce qui a motivé l'idée de chercher à établir des équivalences entre leurs notions. Notre objectif est de démontrer les relations entre le concept de solution d'un CSP et le Z-équilibre d'un jeu associé. Comme il n'existe aucun algorithme de calcul du Z-équilibre, nous proposons un algorithme permettant d'effectuer ce calcul, en s'inspirant des approches par retour-arrière connues pour les CSP.

### 3.1.1 Les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP)

Le concept CSP vise à représenter, sous forme de contraintes, les propriétés et les relations qui existent entre les objets manipulés. Ces contraintes peuvent être décrites de multiples façons (par une équation, une inéquation, un prédicat, une fonction booléenne, une énumération des combinaisons de valeurs autorisées, . . . etc). Elles traduisent l'autorisation ou l'interdiction d'une combinaison de valeurs.

La définition formelle, proposée par Montanari en 1974, est énoncée dans [1], comme suit :

**Définition 3.1** [2] *Un problème de satisfaction de contraintes (CSP) est un problème ( $\mathcal{P}$ ) caractérisé par un triplet  $(X, D, C)$ , où :*

$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  est un ensemble de  $n$  variables.

$D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  est un ensemble de domaines finis, où  $D_i$  est le domaine associé à la variable  $X_i$  représentant l'ensemble de ses valeurs possibles.

$C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  est un ensemble de  $m$  contraintes, où la contrainte  $C_i$  est définie par un sous-ensemble de variables  $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{n_i}}\} \subseteq X$ .

La résolution d'un CSP consiste à affecter une valeur pour chaque variable  $X_i$  de façon que toutes les contraintes soient satisfaites.

On montrera dans la section suivante comment peut-on modéliser le  $\text{CSP}(\mathcal{P})$  par un jeu noncoopératif.

### 3.2 Représentation d'un CSP sous forme d'un jeu fini

Associons à chaque variable  $X_i$  un joueur  $i$ . Ainsi, on aura autant de joueurs que de variables. Notons alors par  $I = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble de ces joueurs.

L'ensemble  $S_i$  des stratégies pures du joueur  $i \in I$  est identifié à l'ensemble  $D_i$  des valeurs possibles de la variable  $X_i$ ,  $i \in I$ . Ainsi,  $S_i = D_i$ ,  $i \in I$ .

Notons par :

$R(i)$ , l'ensemble des contraintes de  $C$  liées à la variable  $X_i$ ,  $i \in I$ .

$r$ , désigne une contrainte du  $\text{CSP}(\mathcal{P})$  et  $k(r)$ , son arité.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in S = \prod_{i=1}^n S_i$ , une instantiation complète des  $n$ -variables du  $\text{CSP}(\mathcal{P})$ .

Soit la fonction indicatrice :

$$\chi_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}) \in r, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}) \in r$  signifie que la contrainte  $r$  est vérifiée par l'instanciation  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}})$  correspondent aux valeurs des variables intervenants dans la contrainte  $r$ .

Pour une instantiation  $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$ , on associe un paiement pour chaque joueur  $i \in I$ , défini par :

$$U_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r \in R(i)} k(r) \chi_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}), \quad \forall i \in I, \quad (3.2)$$

On définit le jeu noncoopératif  $\mathcal{G}(\mathcal{P})$  associé au problème de satisfaction de contraintes ( $\mathcal{P}$ ) comme suit :

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}) = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I} \rangle, \quad (3.3)$$

### 3.3 Equivalence entre la solution d'un $\text{CSP}(\mathcal{P})$ et le Z-équilibre du jeu associé $\mathcal{G}(\mathcal{P})$

Le concept du Z-équilibre a été introduit par V.I. Zhukovski [3] pour les jeux différentiels.

**Définition 3.2 (Z-Équilibre[3])** Une issue  $s^* \in S$  est un Z-équilibre du jeu (3.3), si :

- (a)  $s^*$  est un équilibre actif, ie  $\forall i \in I, \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^*,$  il existe  $t_{-i} \in S_{-i}$  telle que  $U_i(s_i, t_{-i}) \leq U_i(s^*)$ .
- (b)  $s^* \in S$  est un équilibre de Pareto, c-à-d il n'existe pas une autre issue  $s \in S$  qui vérifie le système d'inégalités  $U_i(s) \geq U_i(s^*), \forall i \in I,$  dont, au moins, une est stricte.

Le théorème suivant donne les conditions d'existence d'un Z-équilibre en stratégies pures dans un jeu fini sous forme normale.

**Théorème 3.1** Si pour tout joueur  $i \in I,$  l'ensemble de ses stratégies  $S_i$  est fini et non vide, alors le jeu (3.3) admet un Z-équilibre en stratégies pures.

**Proposition 1** Toute solution d'un CSP(C) est un Z-équilibre pour le jeu  $G(C)$  qui lui est associé.

**Proposition 2** Supposons que l'ensemble des solutions du CSP n'est pas vide. Alors, tout Z-équilibre du jeu  $G(C)$  correspond à une solution au problème de satisfaction de contraintes (C) correspondant.

### 3.4 Calcul du Z-équilibre

Le peu de travaux existant dans la littérature ayant pour but, l'étude du Z-équilibre ne proposent que sa définition et ses propriétés [5] ainsi que les conditions de son existence [6]. Jusqu'à présent, aucun algorithme n'a été proposé pour son calcul. L'algorithme que nous proposons est construit en s'inspirant des approches par retour arrière connues pour les CSP, et se base sur la preuve du théorème 3.1. Cet algorithme de calcul prend en compte la représentation du CSP en question par un jeu sous forme normale à  $n$  joueurs, puis calcul le gain de sécurité pour chaque joueur  $i \in I.$  Les variables du jeu sont instanciées à tour de rôle, tout en vérifiant la consistance de l'instanciation courante, ce qui génère une arborescence à explorer. Chaque instanciation complète est évaluée par la fonction définie par (3.2). Seules les instances dont l'évaluation est plus grande que le gain de sécurité pour tous les joueurs, sont sauvegardées. Le Z-équilibre correspond alors à la situation du jeu maximisant la moyenne pondérée des gains des  $n$  joueurs.

Cet algorithme a été implémenté et a pu résoudre le problème des 5-reines et le problème de coloriage d'un graphe. Nous envisageons d'effectuer des tests supplémentaires sur d'autres instances de problèmes CSP, afin d'évaluer les performances de cet algorithme.

### Références

1. L. Paris (2007). Approches pour les problèmes SAT et CSP : ensembles strong backdoor, voisinage consistant et forme normale généralisée. Thèse de doctorat, Université de Provence.
2. F. Rossi and P.V. Beek and T. Walsh (2006). Handbook of Constraint Programming. Elsevier.
3. E.M. Vaisbord and V.I. Zhukovskii (1988). Introduction to Multi-Player Differential Games and Their Applications. Gordon and Breach Science Publishers.
4. F. Ricci (1991). Equilibrium Theory and Constraint Networks. International Conference on Game Theory.
5. S. Gaidov (1993). Z-equilibria in many-player stochastic differential games. Archivum Mathematicum (BRNO)29 : 123-133.

6. V. I. Zhkovskii and A. A. Tchikry (1994). Linear Quadratic differential games. Naoukova Doumka.
7. M.Jiang (2007). Finding pure nash equilibrium of graphical game via constraints satisfaction approach. LNCS :483-494.
8. A. Ferhat and M. S. Radjef (2008). Existence Conditions of a Zm-Equilibrium for Multicriteria Games. 13-th International Symposium on Dynamic Games and Applications, Wroclaw, Poland.

## **Deuxième partie**

---

### **Systemes avec Rappel et Réseaux**



## Clustering inégal pour l'équilibrage de charge dans les réseaux de capteurs sans fil

Nadjet KHOULALENE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

### 4.1 Introduction

Dans les algorithmes de clustering, les clusters-head (CHs) sont souvent nécessaires pour l'organisation des activités dans les clusters. Leur tâche ne se limite pas à l'agrégation de données, elle s'étend aussi à l'organisation de la communication intra-cluster et même inter-cluster. L'énergie consommée dans les échanges intra-cluster est proportionnelle au nombre de nœuds dans le cluster. Les algorithmes de clustering proposés tentent de former généralement des clusters de même taille, donc les CHs ont tendance à consommer la même quantité d'énergie pendant la phase intra-cluster de transfert de données.

Par contre durant la phase de communication inter-cluster, les nœuds proches de la station de base consomment beaucoup plus d'énergie à cause de la charge de trafic de relais. En effet, les nœuds transfèrent leurs données à la station de base avec un routage multi-sauts. Le modèle de trafic résultant est non-uniforme et surcharge les nœuds proches de la station de base. Ainsi, les CHs proches de la station de base consomment plus d'énergie et meurent plus vite que les autres CHs : problème des points chauds. Ce qui pourrait réduire la couverture de détection et conduire au partitionnement du réseau.

De ce fait, afin d'apporter une solution aux problèmes des points chauds nous nous sommes inspiré du principe de l'algorithme EEDUC [2] proposant de construire des clusters de taille inégales. La taille des clusters décroît en se rapprochant de la station de base. Ceci permettra de consommer moins d'énergie lors du transfert des données intra-cluster, et peut préserver plus d'énergie pour le routage inter-clusters. L'élection des CH est faite en utilisant l'algorithme CLB [3].

L'algorithme proposé est baptisé UCLB (unequal Clustering based Load Balancing).

### 4.2 Clustering inégal pour l'équilibrage de charge dans les réseaux de capteurs sans fil

Afin de proposer une stratégie d'acheminement permettant d'assurer une durée de vie maximale du réseau en équilibrant l'énergie de la manière la plus équitable possible, nous adoptant le principe du protocole EEDUC avec une prise en considération de l'énergie résiduelle et la distance d'un nœud par rapport au nœud émetteur lors du choix du nœud relais. Les différentes phases de l'algorithme de clustering proposé, sont les suivantes :

### 4.2.1 Phase d'initialisation

La phase d'initialisation consiste à diffuser un message d'annonce "Hello" par la station de base à tous les nœuds capteurs du réseau. Ainsi, chaque nœud peut calculer approximativement la distance qui le sépare de la station de base à partir de la puissance du signal reçu.

Durant cette phase, chaque capteur 'i' diffuse à son voisinage son énergie résiduelle  $e_i$ , sa capacité mémorielle  $m_i$ , sa capacité calculatoire  $c_i$  et la distance qui le sépare de la station de base  $d_i$ .

Chaque capteur calcule son rayon de concurrence dans le but de former des clusters de taille inégales, en fonction de sa distance par rapport à la station de base, du nombre de ses voisins et son énergie résiduelle.

Le rayon concurrence est calculé comme suit :

$$R_{comp} = [1 - W_1(1 - TS_i/TS_{MAX}) - W_2(1 - E_i/E_{MAX}) - W_3(N_i/N_{MAX})]R_{MAX}$$

Où :

$TS_i$  : désigne la distance entre le nœud i et la station base.

$TS_{MAX}$  : désigne la distance maximale entre un nœud voisin et la station de base.

$E_i$  : désigne l'énergie résiduelle du nœud i.

$E_{MAX}$  : désigne l'énergie maximale d'un nœud voisin.

$R_{MAX}$  : désigne la portée de transmission d'un nœud.

$W_1, W_2$  et  $W_3$  : désignent des coefficients constants entre 0 et 1.

$N_i$  : désigne le nombre de voisins du nœud i.

$N_{MAX}$  : désigne le nombre total de capteurs dans le réseau.

Une fois le  $R_{comp}$  calculé, chaque capteur calcule une note  $N_i$  comme suit :

$$N_{i,j} = e_j / \sum_{k \in V_i} e_k + m_j / \sum_{k \in V_i} m_k + c_j / \sum_{k \in V_i} c_k$$

$V_i$  étant l'ensemble des capteurs dans la portée radio du capteur i.

Chaque capteur envoie, par la suite, sa note aux capteurs adjacents.  $j$  est un capteur "adjacent" du capteur  $i$  si  $j$  appartient au rayon de concurrence de  $i$  ou  $i$  appartient au rayon de concurrence de  $j$ .

### 4.2.2 Phase d'auto-désignation des cluster-heads

Après la communication des notes par chaque capteur à l'ensemble des capteurs qui appartiennent à son rayon de concurrence, chaque capteur constitue une liste de notes et compare sa note avec celle de ses voisins non encore élus cluster-head : si sa note est plus élevée que celle de ses voisins, il s'auto-désigne cluster-head.

### 4.2.3 Phase de rattachement aux cluster-heads

Les nœuds qui ont été élus comme cluster-heads informent leur voisinage de leur élection par envoi d'un message d'auto-désignation. A la réception des annonces faites par ces CHs, chaque nœud choisit de se rattacher au cluster-head possédant l'énergie la plus élevée. Après la réception de tous les messages des nœuds désirant être membres d'un cluster, les CHs élus peuvent alors déterminer leurs membres et leur ordonnancement, et cela en créant des tables



TDMA 'Time division Multiplexed Access' (allouer à chaque membre un slot de temps de transmission) afin d'éviter les collisions inter-cluster. En outre, un code CDMA est choisi par les CHs afin d'être utilisé par les nœuds de leur cluster lors de la phase de transmission de données. Une fois que les intervalles de temps des tables TDMA et les codes CDMA sont déterminés et annoncés aux différents membres, la deuxième phase celle de transmission est lancée. Chaque nœud ne peut émettre ses données vers le CH de son cluster que durant l'intervalle de temps alloué. Ce dernier va collecter toutes les données reçues, les agréger et les router à la station de base.

#### 4.2.4 Phase d'acheminement des données vers la station de base

Le cluster Head, après la réception et l'agrégation des données capturées par les nœuds de son cluster, si la station de base ne se trouve pas dans la portée de transmission du CH, il choisit un nœud relais afin d'acheminer les données vers la station de base. Le meilleur choix du nœud relais est effectué comme suit :

$$S_i.R_{CH} = \{ S_j \mid d(S_i, S_j) \leq S_i.R_{comp}, d(S_j, SB) < d(S_i, SB) \}$$

En effet, le capteur en question détermine une liste  $S_i.R_{CH}$ , qui contient ses nœuds voisins en direction de la station base et compare leurs énergies résiduelles. Le nœud ayant plus d'énergie en direction de la station base et étant le plus proche de lui sera élu comme nœud relais. Ce processus se répète jusqu'à ce que les données soient transmises à la station de base. Pour équilibrer la charge dans le réseau, il est important de procéder à une réélection régulière des cluster-heads. En effet, les cluster-heads consommant plus d'énergie que les autres nœuds dans le réseau. Dans ce cas, si ces derniers ne changent pas régulièrement, le réseau sera partitionné rapidement.

#### 4.2.5 Simulation et analyse des performances

Afin d'évaluer les performances de la solution proposée et de valider les mécanismes déployés durant la phase de regroupement des capteurs dans un milieu hétérogène, nous avons opté pour la simulation à événements discrets sur ordinateur avec une comparaison des performances de UCLB avec celles de CLB et VCA ( An Energy-Efficient Voting-Based Clustering Algorithm for Sensor Networks) [4].

Le modèle réseau utilisé consiste en une station de base et 300 capteurs sans fil, immobiles, aléatoirement dispersés sur le terrain simulé d'une surface de  $(1000 \times 1000) m^2$  et présentant des caractéristiques différentes en mémoire et en puissance de traitement.

Le modèle radio proposé par Heinzelman et al. [1] a été utilisé pour calculer l'énergie consommée en émission et en réception des messages.

Les métriques que nous avons jugées intéressantes à étudier sont : la taille des clusters, le nombre de clusters solitaires et l'énergie consommée.

Pour chaque test effectué, 50 exécutions indépendantes sont réalisées. Le paramètre variable utilisé est la portée de chaque capteur.

A travers une comparaison du protocole UCLB par rapport aux protocoles CLB et VCA, nous avons pu montrer à travers les résultats de simulation obtenus que les objectifs de notre protocole sont atteints. En effet, l'efficacité énergétique de UCLB a été démontrée grâce à la politique de regroupement utilisée et l'obtention de clusters de taille inégale en fonction de la

distance par rapport à la station de base.

### 4.3 Conclusion

Dans le travail présenté, nous ne sommes pas intéressés à l'énergie comme seule ressource critique mais nous avons pris en considération d'autres métriques telles que la capacité mémoire et calculatoire des capteurs. Ce travail s'est concrétisé par la proposition d'un algorithme de regroupement avec équilibrage de charge nommé UCLB dont le principe est inspiré des protocoles EEDUC et CLB. L'approche proposée a été validée. D'une part, au vue des performances obtenues par simulation, en montrant la réduction considérable du nombre de clusters formés d'un unique capteur (clusters solitaires), d'autre part en montrant une réduction de la quantité d'énergie consommée grâce à une meilleure sélection des CHs et grâce à la procédure de regroupement avec équilibrage de charge adoptée. Cette dernière consiste à construire des clusters de taille inégale. Une taille qui diminue en se rapprochant de la station de base. Ceci permettra de consommer moins d'énergie lors du transfert des données intra-cluster, et peut préserver de l'énergie pour le routage inter-clusters.

### Références

1. W-R. HEINZELMAN, A. CHANDRAKASAN, and H. BALAKRISHNAN. Energy-efficient communication protocol for wireless sensor networks. In *Proceedings of the IEEE Hawaii International Conference on System Sciences*, pages 3005–3014, Janvier 2000.
2. S. LEE and H.SIN. An energie-efficient distributed unequal clustering protocol for wirless sensor networks. *Proccedings of word Academy of Science Engineering and Technology*, 36, Decembre 2008.
3. N.KHOULALENE. *Regroupement avec Equilibrage de charge dans les Réseaux de Capteurs sans Fil*. Mémoire de magistère en informatique, Université de Béjaia, Algérie, Juin 2007.
4. M. QIN and R. ZIMMERMANN. Vca : An energy-efficient voting-based clustering algorithm for sensor networks. *Journal of Universal Computer Science*, 13(1) :87–109, Janvier 2007.

---

## Une nouvelle approche cross-layer pour les réseaux de capteurs

Samira YESSAD

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

Cross Layer design est apparu comme un nouveau domaine de recherche dans les RCSFs. Le principe de base de Cross Layer design est de rendre l'information disponible à tous les niveaux de la pile des protocoles. C'est-à-dire, il permet la définition des protocoles ou de mécanismes qui ne respectent pas l'isolation des couches du modèle OSI. Le principe de base du concept Cross Layer est de permettre l'échange d'informations entre les couches adjacentes et non adjacentes afin d'améliorer les performances de transmission. Cet échange d'informations peut être mis en œuvre suivant différents schémas.

La Communication directe entre les couches : C'est le modèle le plus utilisé par les architectures Cross Layer. Il permet à une couche d'accéder directement aux paramètres et aux variables d'une autre couche sans passer par un intermédiaire. Par exemple, la couche IP accède aux champs de l'en-tête TCP pour indiquer une congestion dans le réseau.

La communication via une base de données partagée : Plusieurs architectures Cross Layer proposent l'utilisation d'une base de données partagée afin de stocker et de récupérer des paramètres. Celle-ci est accessible par toutes les couches qui peuvent, ainsi, s'informer de l'état des autres couches ou récupérer des paramètres de configuration nécessaire à leur fonctionnement interne. La base de données est considérée comme une nouvelle couche en parallèle à toutes les autres.

Dans la littérature, plusieurs techniques Cross Layer ont été proposées pour améliorer les performances des transmissions sans fil. Au début, ces mécanismes étaient limités à l'interaction entre la couche physique et la couche liaison de données. De plus, les mécanismes proposés étaient indépendants et visaient l'amélioration d'une imperfection précise. Par la suite, nous avons assisté à l'apparition de plusieurs travaux proposant des interactions avec les couches supérieures et aussi à l'apparition d'architectures Cross Layer qui tentent de faire collaborer plusieurs couches, prenant en charge plusieurs paramètres, pour une optimisation globale. trois différentes approches Cross Layer existent :

L'approche ascendante (Bottom-up) : Les couches supérieures optimisent leurs mécanismes en fonction des paramètres (conditions) des couches inférieures.

L'approche descendante (Top-down) : Les couches supérieures décident des paramètres de configuration des couches inférieures. Ou bien, les couches inférieures considèrent certaines spécificités du niveau applicatif pour exécuter leurs traitements.

L'approche mixte (Integrated) : Cette approche exploite les deux approches précédentes dans une même architecture afin de trouver la meilleure configuration inter-couches pour un fonctionnement optimal du système.

La durée de vie des RCSFs dépend fortement de pas mal de paramètres qui peuvent être considérés essentiellement soit dans les protocoles MAC ou les protocoles de routage. Pour

cela, plusieurs protocoles de routage et MAC, adressant les problèmes de limitation liés à la consommation des ressources énergétiques, ont été proposés dans la littérature. L'expérience acquise par des études analytiques et des travaux expérimentaux dans les réseaux de capteurs ont révélé d'importantes interactions entre les différentes couches de la pile protocolaire. Ces interactions sont particulièrement importantes pour la conception des protocoles de communication pour les réseaux de capteurs.

Nous présentons dans ce qui suit notre nouvelle proposition qui utilise une approche cross-layer pour améliorer un ensemble de protocoles de routage proposés pour les réseaux de capteur sans fil (EAR, FEAR et BEER) : Ces trois protocoles sont composés de trois phases et diffèrent seulement dans le calcul des probabilités du choix des routes, voila à titre d'exemple les phases de FEAR :

- Une phase d'initialisation : Un message contenant une variable coût initialisée à 0 est diffusé par la station de base puis chaque nœud recevant ce message le rediffuse à son tour vers ses voisins.

En recevant le message, Le nœud calcule la métrique d'énergie pour le nœud voisin qui a envoyé le message et l'additionne au coût total du chemin. Ainsi, si un nœud  $i$  envoie le message à un nœud  $j$ , ce dernier calcule la métrique d'énergie du nœud  $i$  ( $C_{ij}$ ) en utilisant la formule suivante :

$$C_{ij} = e_{ij}^{\alpha} R_i^{\beta}$$

ou  $e_{ij}$  est l'énergie nécessaire pour l'envoi et la réception sur le lien entre le nœud  $i$  et le nœud  $j$  et  $R_i$  est l'énergie résiduelle du nœud  $i$  normalisé à son énergie initiale. Les facteurs du poids  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être choisis pour trouver le chemin qui consomme le minimum d'énergie ou le chemin qui contient les nœuds avec le maximum d'énergie résiduelle ou bien trouver le chemin qui combine les deux.

Une fois  $C_{ij}$  est calculé, le nœud  $j$  l'additionne avec la valeur de la variable coût ( $cout_i$ ) envoyée par le nœud  $i$  pour calculer le coût du chemin vers la station de base à travers le voisin  $i$  ( $cout_{ij}$ ) :

$$cout_{ij} = cout_i + C_{ij}$$

Les routes avec des coûts minimaux sont sauvegardées dans la table de routage puis un message (FTM pour Forwarding Table Message) contenant ces routes est diffusé localement par le nœud. Chaque nœud recevant le message FTM répond par un message (NFTM pour Number Forwarding Table Message) contenant le nombre de nœuds voisins qui compte ce nœud dans leurs table de routage.

Une fois un nœud reçoit ce dernier message, il peut assigner les probabilités de choix des routes en fonction du coût de la route et le nombre de nœuds qui utilisent cette même route, et ce en utilisant la formule suivante :

$$P_{ij} = \frac{1}{C_{ij} \times N} \sum_{k \in FT_j} \frac{1}{C_{jk} \times N}$$

Cette dernière prendra en considération le coût du chemin comme dans EAR et le nombre de nœuds qui utilisent le même nœud.

La dernière étape dans cette phase consiste en la diffusion du message "route request" après avoir mis à jour la variable coût en utilisant la formule suivante :

$$cost_j = \sum_{k \in FT_j} P_{jk} Cost_{jk}$$

- Une phase de communication des données : dans laquelle les nœuds sources de données et les nœuds intermédiaires choisissent aléatoirement un voisin de la table de routage pour router les données en utilisant les probabilités.
- Phase de maintenance des routes : l'inondation locale est effectuée périodiquement pour mettre à jour la table des routes

L'objectif des protocoles EAR, FEAR et BEER est de répartir équitablement la charge de routage sur les voisins et ainsi maximiser la durée de vie des réseaux de capteurs, mais nous remarquons qu'elles augmentent le nombre de paquets de contrôle. Nous avons noté que la couche MAC peut fournir des informations à la couche réseau pour atteindre cet objectif sans augmenter l'overhead du protocole et améliorer même la durée de vie du réseau. Cette remarque nous a permis de proposer une approche cross-layer qui sera détaillée dans ce qui suit. Les nœuds peuvent utiliser des renseignements donnés par la couche MAC pour mieux répartir la charge du routage sur les voisins. En utilisant un protocole MAC avec mécanisme CSMA/CA avec RTS/CTS (IEEE 802.11, SMAC, TMAC, R-MAC,...), lors de l'envoi du CTS qui confirme la possibilité de recevoir le paquet d'un nœud voisin pour le transmettre à la station de base. Les voisins de l'émetteur du CTS informe la couche réseau de l'effort de ce dernier pour router un paquet de ses voisins.

Les nœuds n'ont plus besoin de calculer les probabilités de choix de route. Pour la première fois, chaque nœud envoie ses paquets à travers le voisin ayant un coût minimal. Au fur et à mesure qu'il y a des communications dans le réseau, les nœuds utiliseront les informations fournies par la couche MAC pour le choix du prochain saut. Un nœud possédant deux voisins dans sa table de routage et ayant entendu un CTS d'un de ces deux nœuds, envoie son prochain paquet à travers l'autre nœud.

Avec cette solution, le choix du prochain saut fournit plus d'équité dans l'utilisation des routes pour l'acheminement vers la station de base. Contrairement au choix aléatoire en fonction des probabilités utilisé dans EAR, FEAR et BEER. L'approche inter-couche réduit le nombre de messages de contrôle contrairement à FEAR et BEER qui ont rajouté deux messages de contrôle (FTM et NFTM)

En conclusion, nous avons proposé une solution pour l'exploitation des interactions entre les couches de la pile protocolaire. Parce que nous avons constaté que penser directement à des solutions inter-couches fait gagner du temps et permet de concevoir des solutions plus performantes. En guise de perspective, nous espérons prouver ces constatations par simulation.



## Modélisation analytique du protocole IEEE 802.11 mode Ad Hoc Avec qualité de service

Zahia AZIZOU

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)  
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie  
Tél. (213) 34 21 51 88

### 6.1 Introduction

Fournir une qualité de service (QoS) au sein de la norme IEEE 802.11 mode Ad Hoc est l'une des principales problématiques de recherche dans le domaine [?] [?] et [?]. Donc, l'évaluation des performances et l'optimisation des paramètres en utilisant les informations locales de l'émetteur [?] et [?] de cette norme s'avère indispensable pour les réseaux Ad Hoc. Dans ce travail, nous proposons un modèle analytique qui prend en compte le paramètre de différenciation de service ainsi que le paramètre de la fragmentation et une optimisation de processus de Backoff tout en garantissant une certaine qualité de service. Le modèle, utilisant une chaîne de Markov à deux dimensions, est développée sous les conditions de saturation. Nous avons utilisé la formule de Pollaczek-Khinchine pour calculer les métriques de performances : le débit et le délai d'accès pour chaque catégorie.

### 6.2 Le protocole DCF avec qualité de service, fragmentation et optimisation de Backoff

Ce protocole est basé sur le mécanisme CSMA/CA. Cet algorithme distribué est exécuté localement sur chaque station afin de déterminer les périodes d'accès au médium. Avant chaque émission, la station désirent émettre écoute le support. S'il est libre pendant une certaine durée AIFS, la transmission est possible, une procédure de Backoff est déclenchée. Un mécanisme de la fragmentation est ajouté à DCF afin de réduire le taux de la collision. Ce mécanisme consiste à diviser une trame MAC en un ensemble de fragments. Les fragments d'une même trame sont envoyés et acquittés séparément d'une manière séquentielle et seul une durée SIFS sépare deux séquences Fragment/ACK afin de permettre à l'émetteur de ne libérer le canal qu'une fois l'envoi de tous ses fragments terminés. Dans le cas où un ACK n'est pas reçu, l'émetteur libère le canal et essaie d'y accéder à nouveau, il tire une fenêtre de contention (Backoff) dans l'intervalle où le canal n'a pas eu une collision déjà. Pour offrir une qualité de service, un système de priorité est ajouté pour la gestion d'accès au support de transmission grâce à deux paramètres la fenêtre de contention et l'AIFS.

## 6.3 Description du modèle

### 6.3.1 Description de la chaîne de Markov

Chaque station est modélisée comme un système d'attente à temps discret M/G/1. Le service est modélisé par une chaîne de Markov à temps discret (DTMC) bidimensionnel  $\{a(t), b(t)\}$ , tel que  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des processus stochastiques qui représentent l'étage de Backoff et le compteur du Backoff respectivement pour une station donnée à un instant donné. Chaque état de station est décrit par  $(j,k)$ , tel que  $j$  représente l'étage du Backoff et  $k$  représente le délai de Backoff. Il prend des valeurs dans l'intervalle  $[W_{i-1,j} \dots W_{i,j}-1]$ , tel que  $W_{i,j}$  est la taille de la fenêtre de contention à l'étage  $j$  du processus de Backoff qui définit comme suit :

$$W_{i,j} = \begin{cases} 2^j W_{i,0} & j \leq m_i \\ 2^{m_i} W_{i,0} & x \in [m_i + 1, m_i] \end{cases}$$

Les valeurs de  $m_i$  et  $m_i$  dépendent de la catégorie du paquet (Voix, vidéo, best effort ou background).

### 6.3.2 La probabilité de transmission d'un paquet

L'analyse de cette chaîne, nous a permis d'obtenir la formule du taux de transmission  $\tau_i$ , qui est un paramètre indispensable pour déterminer les expressions des métriques de performances.

*Probabilité pour qu'une catégorie  $i$  accède au canal*

$\tau_i$  est la probabilité qu'une station essaye d'accéder par l'intermédiaire de l'une de ses quatre ACs. Ce qui veut dire qu'au moins une de ses quatre ACs essaie d'accéder au canal. Ceci se traduit analytiquement par l'équation suivante :

$$\tau_i = \frac{1 - P_i^{m_i}}{1 - P_i} \pi_{i,0,0}$$

$P_i$  : Probabilité qu'un paquet soit retransmis.

$\pi_{i,0,0}$  : 'état de la chaîne de Markov quand  $j=0$  et  $k=0$  pour un paquet de la catégorie  $i$ .

*Probabilité pour qu'une station accède au canal*

$\tau$  est la probabilité qu'une station essaye d'accéder par l'intermédiaire de l'une de ses quatre ACs. Ce qui veut dire qu'au moins une de ses quatre ACs essaie d'accéder au canal. Ceci se traduit analytiquement par l'équation suivante :

$$\tau = 1 - \prod_{i=0}^3 (1 - \tau_i)$$

*Collision interne*

La probabilité de collision interne vue par une AC $[i]$  est la probabilité qu'au moins une des ACs de priorité supérieure essaie d'accéder au canal au même instant, donc :

$$P_{c,int,i} = 1 - \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \tau_j)$$



*Collision externe*

La probabilité d'une collision externe vue par une station est la probabilité qu'au moins une des autres (N-1) stations actives accède au canal au même instant. N étant le nombre total de stations actives dans le réseau, donc

$$P_{c,ext,i} = 1 - (1 - \tau)^{N-1}$$

Donc, une AC[i] ne sera pas collisionner si et seulement si aucune autre AC de priorité supérieure et aucune des autres (N-1) stations n'est en état de tentative d'accès au canal au même instant. D'où finalement la valeur de la probabilité de collision vue par une AC[i] est donnée par l'équation :

$$P_i = 1 - (1 - \tau)^{N-1} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \tau_j)$$

*Probabilité d'atteindre la fin d'un paquet*

Elle est donnée par l'équation suivante :

$$P_f = \frac{F}{E[P]}$$

tel que

F : est la taille d'un fragment.

E[p] : est la taille de la charge utile d'un message.

*Probabilité d'occupation du canal par une station*

La probabilité d'occupation est la probabilité d'avoir au moins une des (N-1) stations actives accède au canal au même instant et il est défini comme suit :

$$P_b = 1 - (1 - \tau)^{N-1}$$

**6.3.3 Le débit atteignable par AC[i]**

Le débit est défini par le rapport de la quantité de données utiles transmises par l'AC[i] sur l'intervalle de temps entre deux transmissions successives, donc

$$S_i = \frac{P_{tr} P_{i,succ} T^{E[p]}}{\sigma(1 - P_b) + P_{tr} \sum_{i=0}^3 P_{i,succ} T^{x_{i,succ}} + P_{tr} (1 - \sum_{i=0}^3 P_{i,succ}) T^{x_{i,col}}}$$

$P_{i,succ}$  : est la probabilité qu'il y a une transmission réussie sur le réseau, donc

$$P_{i,succ} = \frac{N \tau_i (1 - \tau)^{N-1} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \tau_j)}{1 - (1 - \tau)^N}$$

$P_{tr}$  : la probabilité qu'il y ait au moins une transmission sur le réseau dans un slot donné, donc

$$P_{tr} = 1 - (1 - \tau)^N$$

$T_{i,succ}^x$  et  $T_{i,col}^x$  sont les durées de temps pendant laquelle le canal est occupé par une transmission réussie et échouée respectivement pour un paquet de catégorie i dans les deux cas fragmentation et sans fragmentation.

$P_{idle}$  : est la probabilité que le canal est libre et son expression est comme suit :

$$P_{idle} = 1 - P_b$$

### 6.3.4 Temps moyen de réponse

Selon la formule de Pollaczek-Khinchine pour M/G/1, nous obtenons le temps moyen de réponse qui est la somme du temps moyen d'attente dans la file et le temps moyen de transmission et son expression est comme suit :

$$T_i = E(S) + \frac{\lambda E(S^2)}{2(1 - \lambda_i E(S))}$$

$E(S)$  : est la deuxième formule de Pollaczek-Khintchine.

### 6.3.5 Analyse des performances

Pour pouvoir évaluer notre modèle, nous avons calculé analytiquement les probabilités de tous les états de cette chaîne de Markov ainsi que les probabilités de transition. Tout ceci est réalisé de façon à refléter correctement le fonctionnement d'EDCA. Au final, le développement des équations de notre modèle montre que la fragmentation améliore les performances du réseau et constitue une solution très efficace pour réduire le taux de collision.

Le modèle a abouti à un système non-linéaire de trois équations à trois inconnues que nous avons résolu numériquement en utilisant un logiciel Mathcad. Pour le calcul des métriques de QoS dans le cas de saturation, nous avons utilisé la formule de valeur moyenne de Pollaczek-Khinchine débit et délai d'accès. Ce ci constitue l'un des avantages essentiels de notre modèle analytique. Car ceci veut dire que le calcul des métriques de performance peut se faire à la volée après la résolution numérique du système. Pour valider notre modèle, nous avons comparé les résultats numériques par rapport aux résultats numériques obtenus dans le travail quand déjà proposé (DCF avec fragmentation et QoS).

Les métriques que nous avons jugées intéressantes à étudier sont le délai et le débit. Les résultats numériques obtenus, montrent la supériorité qu'apporte notre modèle. Nous avons montré que l'optimisation de processus de Backoff améliore les performances du réseau et constitue une solution très efficace pour réduire le taux de collision.

## 6.4 Conclusion

Ce travail présenté s'est focalisé sur la proposition d'un modèle analytique en utilisant des chaînes de Markov afin de maîtriser la gestion du trafic tout en garantissant la Qualité de Service (QoS) dans les réseaux qui consiste à privilégier certaines informations par rapport à d'autres, en offrant des services différenciés en fonction des exigences des applications. Et pour réduire le taux de collision, notre modèle a pris en compte le paramètre de la fragmentation proposé dans [?] et aussi on a optimisé le processus de Backoff. Afin de réduire le taux de collision le protocole proposé les résultats analytiques montrent une amélioration qu'apporte notre modèle sur le débit et le délai d'accès ce qui fournit une garantie pour les application multimédias.

## Références

1. W-R. HEINZELMAN, A. CHANDRAKASAN, and H. BALAKRISHNAN. Energy-efficient communication protocol for wireless sensor networks. In *Proceedings of the IEEE Hawaii International Conference on System Sciences*, pages 3005–3014, Janvier 2000.

2. S. LEE and H.SIN. An energie-efficient distributed unequal clustering protocol for wireless sensor networks. *Proceedings of word Academy of Science Engineering and Technology*, 36, Decembre 2008.
3. N.KHOULALENE. *Regroupement avec Equilibrage de charge dans les Réseaux de Capteurs sans Fil*. Mémoire de magistère en informatique, Université de Béjaia, Algérie, Juin 2007.
4. M. QIN and R. ZIMMERMANN. Vca : An energy-efficient voting-based clustering algorithm for sensor networks. *Journal of Universal Computer Science*, 13(1) :87–109, Janvier 2007.



## Mécanisme d'accès au médium avec compromis Latence-énergie pour les WSNs

Mouloud ATMANI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : [gnu.atmani@gmail.com](mailto:gnu.atmani@gmail.com)

Etant donné que la contrainte d'énergie dans les réseaux de capteurs sans fil est souvent la plus invoquée et la plus visée par les chercheurs dans ce domaine. Récemment, beaucoup de travaux ont été publiés sur la prise en charge de la contrainte temporelle et aussi la qualité de service dans ce type de réseaux. On a constaté que la prise en charge de plusieurs contraintes dans la conception des protocoles MAC ou cross layer est très intéressante. Cependant, on a pas trouvé beaucoup de travaux dans ce sens dans la littérature.

Comme il l'indique le titre de ce résumé, on a présenté dans ce séminaire notre protocole MAC qui est DLSP (Deterministic Link Scheduling Protocol) pour les réseaux de capteurs sans fil qui prend en charge à la fois la contrainte énergétique des nœuds capteurs du réseau et la latence dans la transmission des paquets de données. Peu de travaux qu'on a trouvés et qui ont pris en considération ces deux paramètres dans leurs travaux [1][2][3]

### 7.1 DLSP : Deterministic Link Scheduling Protocol

DLSP est un protocole d'accès au médium de communication pour les réseaux de capteurs sans fil déterministe ce qui veut dire qu'il se repose sur le principe TDMA (Time Division Medium Access) qui offre l'avantage d'évitement de collisions pendant la transmission des données car pour chaque entité communicante, elle a son slot de temps. D'ailleurs, plusieurs protocoles MAC pour les WSNs ont opté pour le principe TDMA (accès déterministe au médium) [1][2][3][4][5]. DLSP divise la période active des capteurs en deux sous périodes : la période appelée PDTP (Personal Data Transmission Period), dans cette période chaque nœud transmet ses propres données à leurs parents, la deuxième période est DRP (Data Retransmission Period), là aussi, les parents vont procéder à la retransmission des paquets reçus de la part de leurs nœuds descendants. On a divisé la période active des nœuds pour que les parents évitent l'attente passive si quelques nœuds descendants n'ont pas transmis des données.

#### La construction du graphe des conflits

DLSP se différencie des protocoles MAC qui prennent en considération l'énergie et la latence, par le fait, que DLSP tient compte de la réutilisation spatiale des slots de temps. L'évitement de collisions et de conflits quand deux nœuds capteurs au minimum utilisent le même slot de temps est assuré par l'utilisation des graphes de conflits. En fait, les cas de conflits possibles dans les réseaux sans fil sont présentés dans [3].

La figure 7.1 illustre comment on peut représenter les différents conflits qui existent entre les noeuds capteurs ou entre les liens de communications dans une topologie arborescente.

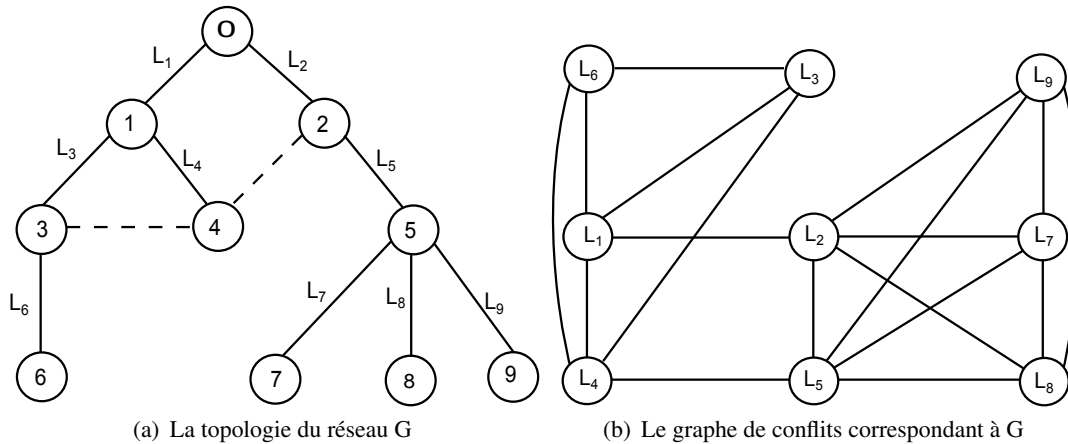


FIGURE 7.1. Transformation de G au GC

On se differt par rapport au travail de ce dernier papier, car DLSP prend en charge la contrainte énergétique des capteurs et l'attribution des slots de temps aux capteurs évite qu'un récepteur (neoud parent dans une architecture arborescente) ait de fréquentes transitions entre le mode actif et le mode veille, vu que ces fréquentes transitions du module radio des capteurs consomment beaucoup d'énergie.

### 7.1.1 Résultats de simulation

On a comparé notre protocole DLSP à deux autres protocoles, à savoir LL-MAC et GLSP (General Link Scheduling Protocol) que nous avons aussi présenté. GLSP ne prend pas en considération le cas de transition des noeuds capteurs entre le mode actif et le mode veille pour conserver l'énergie des capteurs.

la figure 7.2 montre le gain que présente DLSP par rapport à LL-MAC et il utilise presque le même nombre de slots que GLSP car les deux protocoles utilisent la réutilisation spatiale des slots de temps. Celà veut dire que la taille de la supertrame est considérablement réduite et ça engendrera une faible latence du réseau.

Le gain en terme d'énergie est illustré par la figure 7.3. On remarque que DLSP conserve plus l'énergie globale du réseau mieux que GLSP et LL-MAC.

On a constaté que DLSP offre un bon compromis entre la latence en réduisant la taille de la trame MAC et permet aussi de conserver l'énergie des capteurs.

## Références

1. I. Marin, J. Arias, E. Arceredillo, A. Zuloaga, I. Losada, J. Mabe, "LL-MAC : A low latency MAC protocol for wireless self-organised networks", *Microprocessors and Microsystems* 32 (2008) 197-209.
2. M. Macedo, A. Grilo, M. Nunes, "Distributed Latency-Energy Minimization and interference avoidance in TDMA Wireless Sensor Networks", in *Computer Networks* 53 (2009) 569-582.

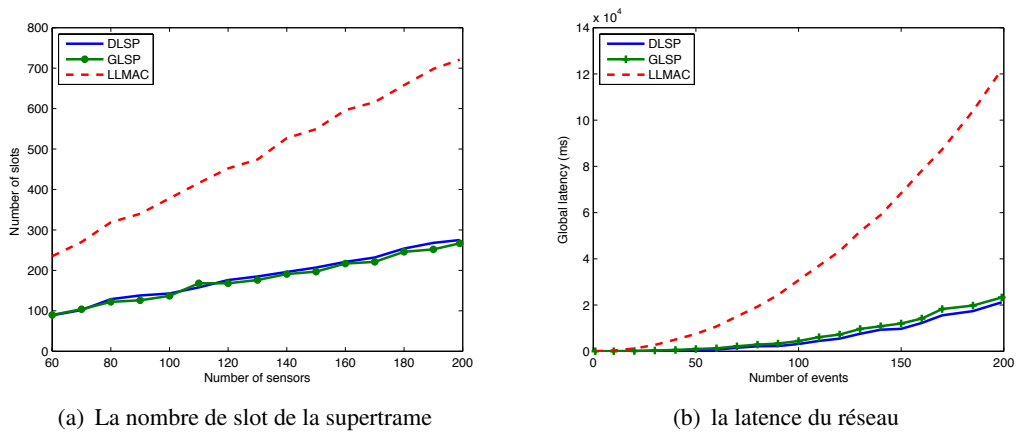


FIGURE 7.2. Réduction de la latence du réseau

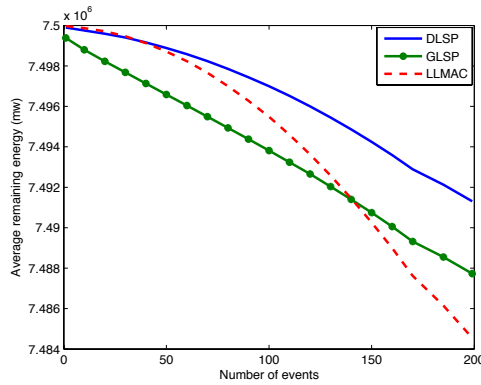


FIGURE 7.3. Energie moyenne restante dans un trafic sporadique

3. P. Djukic, S. Valae, "Delay Aware Link Scheduling for Multi-Hop TDMA Wireless Networks," in IEEE/ACM Transactions On Networking, vol. 17, no.3, june 2009.
4. V. Rajendran, K. Obraczka, and J. J. Garcia-Luna-Aceves, "Energy-efficient collision-free medium access control for wireless sensor networks," in Proc. of the first international conference on Embedded networked sensor systems. ACM Press, 2003, pp.181-192.
5. V. Rajendran, J. J. Garcia-Luna-Aceves and K. Obraczka, "Energy-Efficient, Application-Aware Medium Access for Sensor Networks," Mobile Adhoc and Sensor Systems Conference, 2005.





## Un protocole de routage géographique économe en énergie pour les réseaux de capteurs sans fil.

Samra BOULFEKHAR

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : samra.boulfekhar@gmail.com

Dans cet exposé, nous présentons un protocole de routage géographique EEGRP (pour Energy-Efficient Geographic Routing Protocol for wireless sensor networks) dédié aux applications orientées requêtes, où la station de base initie la communication par la diffusion d'une requête aux nœuds cibles, mais sauf les nœuds concernés par cette requête vont la traiter. Dans cette requête, la station de base spécifie le chemin à suivre pour retourner la donnée. Le choix des nœuds participants à la communication sera effectué suivant une stratégie minimisant la consommation d'énergie, et assurant l'équilibrage de charge.

Notre protocole EEGRP est conçu sur l'idée que la station de base possède une vision générale sur la topologie du réseau (les nœuds peuvent communiquer leurs informations locales à la station de base. Puis, cette dernière va combiner toutes les informations reçues pour obtenir la topologie du réseau et préciser l'itinéraire à prendre par la requête).

### 8.1 Modèle du réseau

Afin d'améliorer la compréhension de notre proposition dans la suite de ce chapitre, nous mettons quelques hypothèses. Les hypothèses sont comme suit :

- L'initiateur de communication est la destination (la station de base),
- Tous les nœuds sont homogènes, et ils ont les mêmes capacités (même énergie initiale, même capacité de stockage et de traitement de données),
- La station de base ou les nœuds capteurs sont fixes (après le déploiement),
- Nous envisageons de faire un routage saut par saut entre les nœuds accessibles,
- Les nœuds capteurs ne sont pas équipés d'un système de localisation GPS,
- Un nœud peut calculer la distance approximative qui lui sépare par rapport à un autre nœud, en se basant sur la force du signal reçue,

### 8.2 Détail du protocole

Le protocole EEGRP agit en deux phases pour établir des routes entre une station source (un capteur) et la station destination (la station de base) qui procédera éventuellement aux traitements des données reçues.

- Phase de découverte de topologie :  
Durant cette phase une diffusion vers les nœuds capteurs du réseau est lancée par la station de base afin de recenser toutes les routes possibles menant vers la destination (Construction de la table de voisinage)
- Phase de communication de données :  
Cette phase consiste à communiquer les informations senties à la station de base.  
Dans ce qui suit, nous allons détailler chaque phase à part.

### 8.2.1 Phase de découverte de la topologie

La première phase consiste à diffuser d'une manière omnidirectionnelle le message Neibors detection NEIDET afin de permettre aux nœuds capteurs de se reconnaître. Chaque nœud reçoit ce message va vérifier si le nœud qui a envoyé le message existe entre lui et la station de base. En recevant le paquet NEIDET, la distance séparant le nœud qui a envoyé ce paquet sera calculée. C'est-à-dire, si le nœud  $N_i$  reçoit le paquet NEIDET depuis le nœud  $N_j$ . Donc, le nœud  $N_i$  peut calculer la distance  $D_{ij}$ . De cette façon, chaque nœud  $i$  construit la liste de ses voisins  $L_j$ , avec les informations exactes sur : l'identifiant, la distance  $D_{ij}$ . Puis, il génère un paquet TOPDIS (Topology Discover packet) en indiquant son  $ID$ , son énergie et sa liste de voisin  $L$ . Ce paquet sera envoyé à la station de base (n'est pas diffusé).

En se basant sur les informations de la topologie (la position des différents nœuds et les liens entre eux) obtenues pendant cette phase, la station de base peut générer la topologie du réseau et construire la table de voisinage.

Les informations sur la manière de router les données (les informations sur les différents nœuds du réseau) sont stockées dans une nouvelle table, appelée "Node's information table" . cette table sera calculée à partir de la table de voisinage.

### 8.3 Phase de communication de données

Cette phase consiste à :

- Calculer toutes les routes ainsi que leurs coûts en termes d'énergie et de temps.
- Sélectionner la route optimale OP (Optimal Path)
- Envoyer sur cette route OP le paquet PATSEL (Path Selection), qui contient les identifiants des nœuds intermédiaire sur la route OP.
- Quand la station de base désire une information, elle envoie au nœud source le paquet PATSEL (PATH SELECTION). Ce dernier contient la liste Node-OP-List, dans laquelle on a stocké les ID des nœuds se trouvant sur la route OP.
- Pour envoyer la donnée de la source à la station de base, les différents nœuds utilisent la route inverse par où est passé le paquet PATSEL.
- Après l'étape de transmission de données, la table de voisinage mise à jour (en modifiant les informations des nœuds participant à la communication), et une nouvelle étape de détermination de la route optimale se commencera.

Donc, dans cet exposé, on a présenté un nouveau protocole de routage géographique nommé EEGRP. Notre protocole EEGRP est conçu sur l'idée que la station de base possède une vision générale sur la topologie du réseau (les nœuds peuvent communiquer leurs informations locales

à la station de base. Puis, cette dernière va combiner toutes les informations reçues pour obtenir la topologie du réseau et préciser l'itinéraire à prendre par la requête).

La suite de nos travaux de recherches sera orientée sur l'implémentation de EEGRP, puis son évaluation et une comparaison de ses performances avec d'autres protocoles géographiques.



## Embedding balanced binary trees in hypercube

Kamel KABYL

Laboratory of Modeling and Optimization of Systems  
University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria.

### 9.1 Introduction

An embedding of the graph  $G$  in the graph  $H$  is an application on  $V(G)$  into  $V(H)$  which preserves the adjacency. In the case where  $V(G) = V(H)$  we say that the embedding is total. In a general way, the study of an embedding of  $G$  in  $H$  turns to see if  $G$  is isomorphic to a subgraph of  $H$ .

An important class to study is the one embedding trees in the hypercube. This study results from the large using of trees in many domains : computer science, social science, operations research, combinatorial optimization. . . .

We define in this paper two new classes of balanced binary trees for which the cubical dimension is determined.

A tree  $T$  is said  $C_n$ -valuated if we can mark every edge by an integer from  $\{1, 2, \dots, n\}$  such that for any path  $P$  of  $T$ , there exists an integer  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , for which an odd number of edges are marked by  $k$ . Havel and Moravek [Havel (1984)] have proved that a graph  $G$  is embeddable in  $Q_n$  if and only if there exists a  $C_n$ -valuation of  $G$ . We introduce two new classes of balanced binary trees having  $2^n$  vertices for which the cubical dimension is given. Furthermore, these classes of graphs satisfied the conjecture of Havel [3].

### 9.2 two new classes of balanced binary trees

#### 9.2.1 The Class $AD_n$

For  $n \geq k \geq 1$ ,  $AD_n^k$  is obtained from the tree  $\widehat{D}_n$  while inserting a new vertex on the edge at distance  $k$  from the root in the copy of  $D_n$  and another new vertex on the edge at distance  $k$  from the root in the other copy of  $D_n$ .  $AD_n^1$ ,  $AD_n^2$  and  $AD_n^n$  are given by the figure below

**Theorem 1.** For any  $n \geq k \geq 1$ ,  $AD_n^k$  is a subgraph of its optimal hypercube  $Q_{n+2}$ .

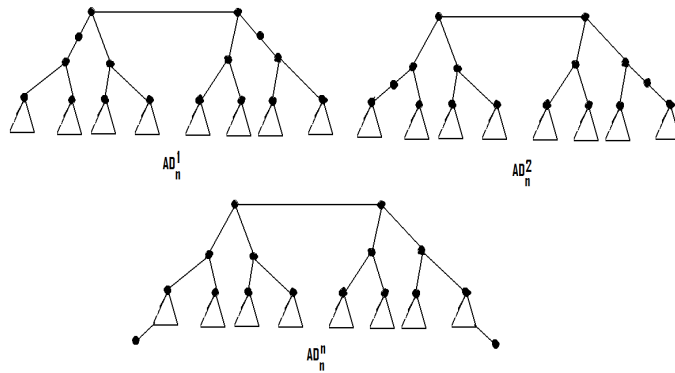


FIGURE 9.1.

### 9.2.2 The Class $AD_n^k$

For  $n \geq k \geq 0$ ,  $AD_n^k$  is obtained from the binary tree  $\widehat{D}_n$  while inserting two new vertices on the edge at distance  $k$  from the root of the  $D_n$  in the binary tree  $\widehat{D}_n$ .  $AD_n^1$ ,  $AD_n^2$  and  $AD_n^n$  given by the figure below

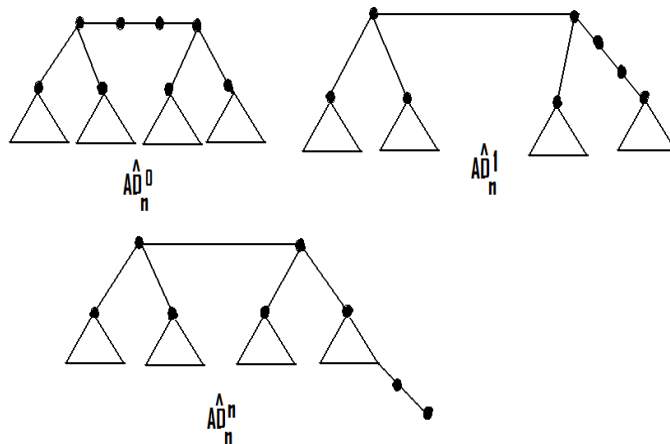


FIGURE 9.2.

**Theorem 2.** For any  $n \geq k \geq 0$ ,  $AD_n^k$  is a subgraph of its optimal hypercube  $Q_{n+2}$ .

### 9.3 Conclusion

In this work, we are interested in embedding of trees in the hypercube. Many researchers have studied this problem, their works have characterized some classes of tree. All trees are embeddable in the hypercube. The problem is to find the smallest dimension of the hypercube in which a given tree is embeddable.

we have frequently used the term of Cn-valuation to determine the dimensions of certain classes of trees. We have also introduced two new classes of of balanced binary trees obtained from the complete binary tree, which the Cubical dimension is determined

## Références

1. J. Arfati, C.H. Papadimitriou, P. Papageorgiou. The complexity of cubical graphs. *Proceedings of 11th international Kolloquium on automata, languages and programming*, 51–57, 1984.
2. D.G. Corneil, A. Wagner. Embedding trees in a hypercube is NP-complete. *Siam J. Comput.*, 19 :570–590, 1990.
3. I. Havel. On hamiltonian circuit and spanning trees of hypercubes. *Časopis pro pestovani matematiky*, 109 : 135–152, 1984.
4. M. Havel, I. *On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes*. *Cas prest. Mat* **109**, 135-152, (1984).
5. M. I. Havel, P. Liebl. *Embedding the polytomic tree into the n-cube*. *Cas prest. Mat* **98**, 307-314, (1973).
6. M. Havel, I. and Moravek, J. *B-valuation of graphs*. *Czech- Math jour .*, **22**, 338-351,(1972).
7. M. Choudum, S.A. and Raman, I. *Embedding height balanced trees and Fibonacci trees in hypercubes*. *J Appl Math Comput.*, **30**, 39-52,(2009).





---

## Solution Cross-Layer pour QoS dans les Réseaux de Capteurs sans fil

Fouzi SEMCHEDINE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

Les progrès technologiques dans les domaines des télécommunications ont fait naître une nouvelle génération de réseaux qui permettent d'offrir des solutions économiquement intéressantes pour la surveillance à distance et le traitement des données dans des environnements complexes et distribués : les réseaux de capteurs sans fil (RCSFs), en anglais Wireless Sensor Networks (WSNs). Ces réseaux se retrouvent au coeur de nombreuses applications couvrant des domaines aussi variés tel que la santé, la domotique, l'agronomie et l'environnement. Afin de surveiller et prendre des mesures dans des champs de cible, le réseau de capteurs doit être muni d'un nombre élevé de noeuds capteurs pour mieux couvrir une surface donnée. Chaque noeud est alimenté par une quantité limitée d'énergie (batterie) et communique, sans fil, en utilisant un signal radio. En effet, la consommation d'énergie des capteurs joue un rôle important dans la durée de vie du réseau qui est devenue le critère de performance prédominant. Pour remédier à ce problème de nombreux travaux de recherche sont développés afin de conserver l'efficacité énergétique à chaque couche de la pile protocolaire en proposant de nouveaux algorithmes et protocoles. Mais la disjonction des couches est devenue un obstacle à l'amélioration de ces réseaux.

C'est dans ce but, que nous avons proposé un protocole cross-layer efficace en énergie afin d'augmenter la durée de fonctionnement des réseaux de capteurs sans fil. Pour cela, nous avons étudié les réseaux de capteurs sans fil du point de vue routage, Mac et consommation d'énergie.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la problématique de l'économie d'énergie lors de la communication dans les réseaux de capteurs sans fil et l'amélioration de la durée de vie de ce type de réseaux. Pour cela, nous avons fait un état de l'art sur les protocoles de conservation d'énergie dans les RCSFs, ainsi qu'une étude critique des protocoles cross-layer. Notre principale contribution réside dans la proposition d'un nouveau protocole cross-layer à basse consommation d'énergie nommé EECP (Energy Efficient Cross-layer Protocol) dans lequel les couches physique, MAC et réseau sont optimisées conjointement. EECP traite plusieurs sources de gaspillage d'énergie : le coût énergétique du chemin de routage, les collisions, l'idle listening et l'overhearing. De plus, EECP permet d'équilibrer la durée de vie de tous les noeuds, et par conséquent, augmente la durée de vie du réseau. Cela est montré dans le dernier chapitre, lors de la comparaison de notre protocole avec le protocole CLEEP.



## **Troisième partie**

---

### **Processus Aléatoires et Applications**



## Estimation Non Paramétrique d'un Opérateur de Transition. Cas : La Méthode du Noyau et le Système $GI/M/1/N$

Mouloud CHERFAOUI, Djamil AISSANI and Smail ADJABI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

**résumé 11.0.1** *Dans le présent travail nous avons proposé d'utiliser les normes matricielles afin de sélectionner le paramètre de lissage dans l'estimation d'une matrice de transition d'une chaîne de Markov induite lorsque la loi générale est remplacée par son estimateur à noyau. Une application numérique réalisée sur l'exemple  $GI/M/1/N$  confirme l'intérêt d'utilisation des normes matricielles dans l'estimation d'une matrice de transition après une comparaison les procédures classiques de sélection du paramètre de lissage.*

### 11.1 Introduction et position du problème

Soit  $T_1, T_2, \dots, T_n$  un échantillon issu de la variable aléatoire  $T$  ayant la densité de probabilité  $g$  et la fonction de répartition  $G$ . L'estimateur à noyau de Parzen-Rosenblatt classique de la densité  $g(t)$  pour tout point  $t \in \mathbb{R}$  est donné par :

$$g_h(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - T_i}{h}\right), \quad (11.1)$$

Où  $K$  est une fonction de densité symétrique appelée noyau, et  $h$  appelé fenêtre ou encore paramètre de lissage. Dans la pratique, l'étape critique dans l'estimation d'une densité par la méthode du noyau est le choix du paramètre  $h$ , qui contrôle le lissage de l'estimateur  $g_h$  donné par (11.1). Ce problème est largement étudié et pour plus de détail en peut se référer au travail de [7].

Mais supposons que nous désirons estimer la matrice de transition d'une chaîne de Markov induite. Dans ce cas une question se pose : est-il préférable d'estimer le paramètre de lissage  $h$  par les méthodes classiques connues dans la littérature ou faut-il prendre en considération la pondération de cette densité ?

La réponse à cette question fait l'objet du présent travail, elle illustrée par des exemples numériques appliqués sur la chaîne de Markov induite du système d'attente  $GI/M/1/N$  lorsque la loi des inter-arrivées  $g$  remplacé par son estimateur à noyau  $g_h$ .

### 11.2 Choix du noyau et de la méthode de selection

#### 11.2.1 Choix du noyau

Dans plusieurs cas nous somme face à des situations où la densité  $g$  définie sur un support semi-ouvert ou borné. Dans ce cas les noyaux symétriques ne nous fournis pas de bons estima-

teurs à cause de la présence du biais aux bornes. Pour remédier ce problème plusieurs méthodes ont été proposées. On peut citer la méthode du noyau miroir (Schuster), l'utilisation des noyaux asymétrique Gamma, . . . etc.

### Noyau de Schuster

L'idée de cette méthode, développée par Deheuvels et Hominal (1979)[?] et Schuster (1985)[?], est d'ajouter une "masse manquante" par réflexion de l'échantillon et qui concerne les données aux frontières. Formellement et sous sa forme la plus simple, il consiste à remplacer  $K\left(\frac{t-T_i}{h}\right)$  par  $K\left(\frac{t-T_i}{h}\right) + K\left(\frac{t+T_i}{h}\right)$ . L'estimateur de la densité est alors de la forme :

$$g_h(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \left[ K\left(\frac{t-T_i}{h}\right) + K\left(\frac{t+T_i}{h}\right) \right]; \text{ avec } K \text{ est un noyau usuel.} \quad (11.2)$$

### Le noyau Gamma

En 2000 Chen [?] propose de remplacer l'estimateur de  $g(t)$  par  $g_h(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(t, h)(T_i)$ , ou  $h$  est le paramètre de lissage et  $K$  est une densité de la loi Gamma donné par :

$$K_{\left(\frac{x}{h}+1, h\right)}(T) = \frac{T^{(t/h)} e^{-(T/h)}}{h^{(t/h)+1} \Gamma((t/h) + 1)}. \quad (11.3)$$

#### 11.2.2 Choix du paramètre de lissage

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de sélection du paramètre de lissage  $h$  qui sont regroupées en deux grandes familles :

- Méthodes plug-in(re-injection) : Choix optimal, Estimateur de Sheather et Jones, . . .
- Méthodes Cross-Validation (Validation Croisée) : UCV (Validation Croisée Non Biaisée), BCV (Validation Croisée Biaisée), . . .

#### Choix optimal

La décision d'un choix optimal pour le paramètre de lissage suppose la spécification d'un critère d'erreur qui puisse être optimisé. L'optimalité n'est pas un concept absolu : elle est intimement liée au choix du critère, qui peut faire intervenir à la fois la densité inconnue  $f$  et l'estimateur  $g_h$  (donc  $h$  et le noyau  $K$ ). Dans ce cas, on cherche à minimiser l'Erreur Quadratique Intégrée Moyenne ( $MISE$ ).

$$MISE(g, g_h) = \int \mathbb{E}[g_h(t) - g(t)]^2 dt.$$

Vu la difficulté de manipuler cette dernière quantité, le paramètre de lissage est déterminé d'une manière à minimiser l'Erreur Quadratique Intégrée Moyenne Asymptotique ( $AMISE$ ) qui s'écrit sous forme :

$$AMISE = \frac{h^4}{4} \sigma_K^4 R(g'') + \frac{R(K)}{nh}. \text{ (où } R(f) = \int f^2(t) dt, \text{ Pour toute fonction } f.) \quad (11.4)$$

Ainsi le  $h$  optimale est donné par :  $h^* = \left[ \frac{R(K)}{\sigma_K^4 R(g'')} \right]^{1/5} n^{-1/5}$ .

### Estimateur de Sheather et Jones

En 1991, Sheather et Jones [?] recommandèrent l'utilisation de l'estimateur naturel  $\hat{R}_a(g'')$ . En effet, Sheather et Jones choisirent d'estimer  $R(g'') = \int_{-\infty}^{+\infty} (g''(x))^2 dt$  par :

$$S(a) = \frac{1}{n(n-1)a^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L^{(4)}\left(\frac{t_i - t_j}{a}\right), \quad (11.5)$$

où  $L^{(4)}$  désigne la dérivée quatrième d'un noyau suffisamment lisse  $L$  et où  $a$  est un nouveau paramètre de lissage appelé paramètre pilote. Pour  $L$  est un noyau gaussien le paramètre de lissage  $h_{SJ}$  est la solution du critère  $SJ(h)$  défini par la formule suivante :

$$SJ(\hat{h}) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/5} S(\hat{\alpha}(\hat{h}))(g'')^{-1/5} n^{-1/5} - \hat{h}, \quad (11.6)$$

avec  $\hat{\alpha}(h) = 1.357 \left(\frac{S(a)}{T(b)}\right)^{1/7} h^{5/7}$ ,  $T(b) = \frac{1}{n(n-1)b^7} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L^{(6)}\left(\frac{t_i - t_j}{b}\right)$ ,  $a = 0.920\hat{\lambda}n^{-1/7}$ ,  $b = 0.912\hat{\lambda}n^{-1/9}$ , ou  $\hat{\lambda}$  représente l'estimateur d'une mesure d'échelle (par exemple l'écart int

### Validation croisée non biaisée

Cette méthode appelée Validation Croisée non Biaisée a été proposée par Rudemo [?] en 1982 et Bowman [?] en 1984. Le critère consiste à choisir le paramètre de lissage qui minimise un estimateur convenable de :

$$UCV(h) = \int_{\mathbb{R}} [g_h(t) - g(t)]^2 dt - \int_{\mathbb{R}} g^2(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g_h^2(t) dt - 2 \int_{\mathbb{R}} g_h(t)g(t) dt.$$

Si le choix du noyau s'est fixé au noyau gaussien la formule du critère  $UCV(h)$  sera donné par :

$$UCV(h) = \frac{1}{2n^2 h \sqrt{\pi}} \left( n + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \exp\left(-\frac{(T_i - T_j)^2}{2h}\right) \right) - \frac{2}{\sqrt{2\pi} n(n-1)h} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \exp\left(-\frac{(T_i - T_j)^2}{2h^2}\right).$$

### Validation croisée biaisée

Le critère de validation croisée biaisée, a été introduit par Scott et Terrell [?] en 1987 pour remédier aux problèmes de validation croisée non biaisée. Il s'agit d'introduire un biais dans le  $UCV(h)$  afin de réduire sa variance. Scott et Trell ont donné également la forme du critère  $BCV(h)$  (voir [?]) de plus si le noyau utilisé est gaussien dans ce cas le critère  $BCV$  sera donnée par la proposition suivante :

$$BCV(h) = \frac{1}{2nh\sqrt{\pi}} + \frac{1}{64n^2 h \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[ \left(\frac{T_i - T_j}{h}\right)^4 - 12 \left(\frac{T_i - T_j}{h}\right)^2 + 12 \right] \exp\left[-\frac{(T_i - T_j)^2}{4h^2}\right]. \quad (11.7)$$

### 11.3 Description du système $GI/M/1 (FIFO, N)$

Considérons le modèle d'attente avec refus de type  $GI/M/1 (FIFO, N)$ . Nous supposons que les temps d'inter-arrivées sont indépendants et identiquement distribués issus d'une variable aléatoire de moyenne  $1/\lambda$  de fonction de répartition  $G(t)$ , et les durées de service sont indépendantes et sont identiquement et exponentiellement distribuées avec un taux  $\mu$ . L'ensemble de états de la chaîne  $X_n^{(1)}$  qui représente le nombre de clients dans le système  $GI/M/1 (FIFO, N)$  juste avant l'arrivée du  $n^{ième}$  client est  $\{0, 1, \dots, N\}$ , et on a :  $X_n^{(1)} = \min(X_{n-1} + 1, N) - D_n$ , où  $D_n$  est le nombre de départs entre les instants d'arrivée consécutifs  $T_{n-1}$  et  $T_n$ .

Il est très facile de démontrer que le processus  $X_n^{(1)}$  est une chaîne de Markov, et ses probabilités de transition s'écrivent comme suite (voir [?]) :

$$\text{Pour } 0 \leq i \leq N - 1 \quad P_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_i & \text{si } j = 0, \\ b_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i + 1, \\ 0 & \text{si } i + 1 \leq j \leq N. \end{cases} \quad \text{et pour } i = N \quad P_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{N-1} & \text{si } j = 0, \\ b_{N-j} & \text{si } 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

Où  $a_i = 1 - \sum_{k=0}^i b_k$  et  $b_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^k}{k!} dG(t)$ .

### 11.4 Estimation du paramètre de lissage dans le système $GI/M/1/N$

Le paramètre de lissage dans ce cas sera sélectionné d'une manière qu'il minimise l'une des erreurs suivantes :

$$err_1 = \sup_{i,j} \left[ \mathbb{E} \left( \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right)^2 \right], \quad err_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \mathbb{E} \left( \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right)^2 \right], \quad err_3 = \sup_i \sum_{j=1}^N \left[ \mathbb{E} \left( \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right)^2 \right], \quad \text{ou } err_4 = \sup_j \sum_{i=1}^N \left[ \mathbb{E} \left( \hat{P}_{ij} - P_{ij} \right)^2 \right]$$

sachant que  $\hat{P}_{ij}$  est l'estimateur de  $P_{ij}$  lorsque on remplace  $g(t)$  par son estimateur  $g_h(t)$ .

### 11.5 Application numérique

Cette section est consacrée aux résultats numériques obtenus par simulation et les calculs exacts. Enfin les résultats rangés dans les tableaux Tab.11.1 et Tab.11.2 sont obtenus sur le système  $M/M/1/N$ , ayant comme paramètres  $\mu = [10/3 \ 5/3 \ 10/9 \ 5/6 \ 2/3]$ ,  $\lambda = 1$  et  $N = 5$ , sur des échantillons de différentes tailles et en fonction de la charge du système  $\rho = \lambda/\mu$  à l'aide de l'algorithme suivant :

- Étape 1 Fixer les paramètres du système ( $\lambda, \mu$ , loi de service, . . .),
- Étape 2 Générer un échantillon de taille  $n$  de la loi des inter-arrivées (respectivement loi des durées de service),
- Étape 3 Estimer  $h_{classique}^*$  par la méthode classique, et calculer  $\hat{P}^{(1)}$  (respectivement  $(\hat{P}^{(2)})$ ),
- Étape 4 Estimer  $h_{proposer}^*$  par la norme matricielle, et calculer  $\hat{P}^{(1)}$  (respectivement  $(\hat{P}^{(2)})$ ),
- Étape 5 Calculer les erreurs associées à  $h_{classique}^*$  et  $h_{proposer}^*$ .

$\rho$	n	$h_{MISE}^*$	Norme 1			Norme 2			Norme 3			Norme 4		
			$h_1^*$	$err_{MISE}^*$	$err_1^*$	$h_2^*$	$err_{MISE}^*$	$err_2^*$	$h_3^*$	$err_{MISE}^*$	$err_3^*$	$h_4^*$	$err_{MISE}^*$	$err_4^*$
0.3	100	0.2029	0.0613	0.0558	0.0807	0.0632	0.0080	0.0144	0.0516	0.0985	0.1955	0.0566	0.0246	0.0403
	150	0.1955	0.0647	0.0487	0.0705	0.0665	0.0043	0.0091	0.0502	0.0824	0.1693	0.0588	0.0188	0.0353
	200	0.1766	0.0675	0.0417	0.0606	0.0768	0.0035	0.0070	0.0612	0.0693	0.1431	0.0656	0.0161	0.0303
	250	0.1469	0.0475	0.0357	0.0566	0.0487	0.0025	0.0062	0.0452	0.0643	0.1382	0.0431	0.0148	0.0283
0.9	100	0.2387	0.1621	0.0384	0.0558	0.1329	0.0035	0.0078	0.1269	0.0533	0.1174	0.1267	0.0145	0.0269
	150	0.1998	0.0899	0.0310	0.0513	0.0923	0.0025	0.0068	0.1026	0.0468	0.0979	0.0962	0.0126	0.0249
	200	0.1323	0.0306	0.0357	0.0555	0.0273	0.0034	0.0077	0.0290	0.0477	0.0965	0.0297	0.0167	0.0274
	250	0.1370	0.0462	0.0225	0.0414	0.0442	0.0014	0.0049	0.0428	0.0399	0.0859	0.0452	0.0100	0.0204
1.5	100	0.1540	0.0550	0.0272	0.0464	0.0477	0.0020	0.0052	0.0416	0.0425	0.0904	0.0423	0.0120	0.0231
	150	0.2755	0.1378	0.0211	0.0429	0.1401	0.0018	0.0054	0.1517	0.0249	0.0546	0.1496	0.0099	0.0207
	200	0.1632	0.0356	0.0259	0.0493	0.0370	0.0019	0.0057	0.0322	0.0325	0.0651	0.0418	0.0119	0.0241
	250	0.1821	0.0779	0.0229	0.0420	0.0778	0.0019	0.0049	0.0636	0.0294	0.0631	0.0737	0.0111	0.0209
300	150	0.1551	0.0620	0.0232	0.0400	0.0642	0.0022	0.0048	0.0630	0.0347	0.0613	0.0658	0.0114	0.0198
	300	0.1658	0.0730	0.0162	0.0320	0.0725	0.0009	0.0027	0.0652	0.0245	0.0530	0.0668	0.0077	0.0158

TABLE 11.1: Comparaison des erreurs et de la valeur du paramètre de lissage de chaque norme

$\rho$	n	Exacte	$N_{MISE}$	Norme 1	Norme 2	Norme 3	Norme 4
--------	---	--------	------------	---------	---------	---------	---------



0.3	0.4242	100	0.3599	0.3895	0.3892	0.3906	0.3902
		150	0.3748	0.4060	0.4049	0.4103	0.4086
		200	0.3834	0.4128	0.4104	0.4153	0.4150
		250	0.3822	0.4087	0.4093	0.4104	0.4105
		300	0.3878	0.4090	0.4094	0.4101	0.4102
0.9	2.1948	100	1.8948	2.0614	2.0877	2.0866	2.0952
		150	1.9908	2.1307	2.1273	2.1161	2.1222
		200	1.9422	2.0730	2.0761	2.0762	2.0728
		250	1.9982	2.1189	2.1212	2.1251	2.1206
		300	1.9677	2.0920	2.1011	2.1077	2.1059
1.5	3.5774	100	2.7759	2.9399	2.9357	2.9304	2.9339
		150	3.3806	3.5217	3.5206	3.5257	3.5162
		200	3.3734	3.4860	3.4862	3.5032	3.4907
		250	3.3840	3.4839	3.4824	3.4842	3.4806
		300	3.4090	3.5099	3.5106	3.5178	3.5156

TABLE 11.2: Comparaison du nombre moyen de clients dans le système

### Discussion des résultats

A partir des résultats rangés dans le tableau 11.1, on constate que la valeur du AMISE est minime lorsque nous utilisons les normes matricielles quelques soit la taille de l'échantillon des observations des inter-arrivées ainsi que la charge du système  $\rho$ , c'est-à-dire les normes matricielles nous offrent de meilleurs estimateurs au sens du AMISE.

Cette constatation est confirmée par la comparaison du nombre moyen de clients dans le système (voir le tableau 11.2) au nombre moyen théorique.

## 11.6 Conclusion et perspectives

Dans ce travail nous avons soulevé le problème du choix du paramètre de lissage dans l'estimation d'un opérateur de transition d'un système d'attente. A l'aide d'un exemple numérique appliqué sur le système  $GI/M/1/N$  (plus exactement le système  $M/M/1/N$ ) nous avons démontré qu'il est préférable d'utiliser les normes matricielles pour le choix du paramètre de lissage que les méthodes de sélection classique (minimisation du MISE).

Le présent travail peut être complété par ce qui suit :

- ✓ Confirmer les résultats précédents par une étude théorique (mathématique)
- ✓ Elaborer des procédures de sélection explicites pour le choix du paramètre de lissage  $h^* = \arg \min \|\hat{P} - P\|_v$ .
- ✓ Une étude extensive sur d'autre système d'attente ( $GI/M/1$ ,  $M/GI/1$ , ... etc.).

## Références

1. W-R. HEINZELMAN, A. CHANDRAKASAN, and H. BALAKRISHNAN. Energy-efficient communication protocol for wireless sensor networks. In *Proceedings of the IEEE Hawaii International Conference on System Sciences*, pages 3005–3014, Janvier 2000.
2. S. LEE and H.SIN. An energie-efficient distributed unequal clustering protocol for wirless sensor networks. *Proceedings of word Academy of Science Engineering and Technology*, 36, Decembre 2008.
3. N.KHOULALENE. *Regroupement avec Equilibrage de charge dans les Réseaux de Capteurs sans Fil*. Mémoire de magistère en informatique, Université de Béjaia, Algérie, Juin 2007.
4. M. QIN and R. ZIMMERMANN. Vca : An energy-efficient voting-based clustering algorithm for sensor networks. *Journal of Universal Computer Science*, 13(1) :87–109, Janvier 2007.



# File d'attente à un seul serveur avec rappels et vacances : Approche régénérative de Markov

Mohamed BOUALEM

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : robertt15dz@yahoo.fr

## 12.1 Introduction

Les modèles de files d'attente avec rappels et vacances sont caractérisés par la présence simultanée des phénomènes de répétition de demandes et de vacances à la fois. Dans ces modèles, durant la période de vacances, le serveur est occupé par les tâches supplémentaires, ainsi il n'est pas disponible aux nouvelles arrivées de clients primaires ni secondaires. Dans ce cas, tout client qui trouve le serveur non disponible (occupé ou en vacances) est bloqué, alors il quitte la zone de service et rappelle à des intervalles de temps aléatoires, jusqu'à ce qu'il le trouve oisif pour qu'il puisse être servi. La littérature liée à ces systèmes d'attente est vaste et riche, alors il est possible de trouver un grand nombre de variantes et de généralisations. Artalejo [3] a considéré une file  $M/G/1$  avec rappels constants et politique de vacances exhaustive. Plus tard, Aissani [1] a considéré une file d'attente avec rappels constants, arrivées par lots et vacances exhaustives du serveur. Les temps de service et les périodes de vacances sont arbitrairement distribués. Il a obtenu les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système et dans l'orbite en régime stationnaire. Récemment, Aissani [2] considère une file d'attente  $M/G/1$  avec la politique de rappels constants et vacances du serveur, quand les temps de rappels, les temps de service et les temps de vacances sont distribués arbitrairement. La distribution du nombre de clients dans le système en régime stationnaire est obtenue en termes de fonction génératrice. Par la suite, il donne une approximation pour une telle distribution. Cette étude constitue une analyse complète des rappels constants dans le cas de ces modèles.

Le but de notre travail est de faire une analyse stationnaire du système d'attente  $M/G/1$  avec rappels classiques et vacances du serveur. La raison fondamentale pour l'analyse de ce type de modèles est que leur structure apparaît dans plusieurs représentations de systèmes de télécommunication, de production et les problèmes de contrôle de qualité. La majorité des études précédentes donnent seulement des solutions en termes de fonctions génératrices. Dans ce travail, nous présentons une analyse plus détaillée comprenant le calcul récursif des probabilités limites, en utilisant la méthodologie mathématique basée sur le processus régénératif de Markov.

## 12.2 Description du modèle

On considère un système de files d'attente à un seul serveur où les clients primaires arrivent suivant un flux poissonnien de taux  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Un client qui arrive et trouve le serveur non disponible (occupé ou en vacances), quitte l'espace de service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelé "orbite". Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois, ..., jusqu'à ce qu'il le trouve disponible. La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi exponentielle avec une intensité donnée par  $j\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), quand le nombre de clients en orbite est  $j \in \mathbb{N}$ . Comme cette politique de rappels dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappels classiques.

Les temps de service sont supposés d'une loi arbitraire, de fonction de distribution  $B(t)$  ( $B(0) = 0$ ), de transformée de Laplace-Stieltjes  $\psi(\omega)$  et des deux premiers moments finis  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , respectivement.

Tous les clients entrant dans le système sont servis d'une manière continue et dans un ordre indépendant de leurs temps de service. De plus, on suppose que le serveur prend une vacance chaque fois que le système devient vide (service exhaustif), des deux premiers moments finis  $E(X)$  et  $E(X^2)$ , respectivement.

Les règles qui gouvernent ces périodes de vacances sont :

- (1) Le mécanisme qui détermine l'instant de la fin d'une vacance, n'anticipe pas une nouvelle occurrence du processus des arrivées poissonniennes.

- (2) Chaque temps de service est indépendant de la séquence des périodes de vacances qui précèdent ce temps de service.
- (3) Si aucun client n'arrive durant la période de vacances, on dit qu'il y'a une période d'activité pour le serveur de longueur zéro et le serveur prend une autre vacance.
- (4) Juste après la fin des vacances, s'il y a des clients en orbite, le prochain client qui arrive au service est déterminé par une compétition entre deux lois exponentielles de taux  $\lambda$  et  $\alpha$ .

Finalement, on suppose que le flux des arrivées primaires, les intervalles entre les rappels successifs et les temps de service sont mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit par le processus  $M(t) = (C(t), N_o(t), \xi(t))_{(t \geq 0)}$ , où

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est oisif,} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé,} \\ 2, & \text{si le serveur est en vacance.} \end{cases}$$

$N_o(t)$  : le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ .

$\xi(t)$  : représente le temps de service écoulé du client en service à l'instant  $t$ , si  $C(t) = 1$ , et représente le temps de la vacance écoulé à l'instant  $t$ , si  $C(t) = 2$ .

Plusieurs situations pratiques peuvent être modélisées par les systèmes de files d'attente avec rappels et vacances. Nous présentons ci-dessous un exemple illustratif.

**Exemple 1 (Boualem et al. [4])** *Dans le modèle opérationnel du serveur WWW, les requêtes HTTP arrivent au serveur WWW suivant un flux de Poisson et peuvent être interrompues par un utilisateur avant d'arriver au serveur WWW. Lorsque les requêtes arrivent dans le serveur WWW, une requête est sélectionnée pour être servie et les autres entreront dans le tampon situé à l'intérieur du serveur WWW. Dans le tampon, chaque requête attend un certain temps puis demande le service de nouveau. Un programme approprié est mis en application dans le serveur WWW pour diriger les requêtes de service à partir du tampon. À chaque fois qu'elle essaye mais échoue, elle attend un autre moment avant de réessayer de nouveau. Si la page web cible est située dans le même serveur WWW, la requête peut retourner au serveur. Pour garder le serveur WWW en bon fonctionnement, des activités de maintenance telles que scanner les virus peuvent être réalisées lorsque le serveur WWW est inactif. Ce type de maintenance peut être programmé pour fonctionner sur une base régulière. Cependant, ces activités de maintenance ne se répètent pas continuellement. Lorsque ces activités sont achevées, le serveur WWW entrera de nouveau en état d'inactivité et attendra l'arrivée de nouvelles requêtes.*

*Dans ce scénario, le tampon dans le serveur WWW, le serveur WWW, la politique de retransmission et les activités de maintenance en période d'inactivité correspondent respectivement à l'orbite, le serveur, la discipline de rappels et la politique de vacances, dans la terminologie de files d'attente.*

## 12.3 Chaîne de Markov induite

L'évolution de notre file d'attente avec rappels et vacances peut être décrite en termes d'une séquence alternée de période d'activité et d'inactivité du serveur.

À la fin de chaque service, le serveur devient libre. La prochaine période d'inactivité du serveur sera de deux types différents :

Type 1 : Si l'orbite devient vide, donc le serveur prend une vacance propre qui est régie suivant les règles de (1) à (4).

Type 2 : Si l'orbite n'est pas vide après la complétion d'un service, alors une compétition entre deux lois exponentielles de taux  $\lambda$  et  $\alpha$  déterminera le prochain client qui entrera en service.

Soit  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite d'instant de la complétion d'un service ou bien de la fin d'une vacance propre.

La séquence des vecteurs aléatoires  $Q_n = \{C(\zeta_n), N(\zeta_n)\}$  forme une chaîne de Markov induite pour notre système de files d'attente. Son espace d'état est donné par  $S = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ .

Les états de la chaîne de Markov  $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$  sont donnés par :

$$(i_{n+1}, j_{n+1}) = \begin{cases} (2, X), & \text{si } j_n = 0, \\ (1, j_n - \delta_{j_n} + v_{n+1}), & \text{si } j_n > 0, \end{cases} \quad (12.1)$$

où

- $X$  est le nombre de clients primaires qui arrivent vers le système durant une vacance.
- $v_{n+1}$  est la variable représentant le nombre de clients primaires qui arrivent pendant le  $(n+1)^{\text{ème}}$  temps de service qui se termine à l'instant  $\zeta_{n+1}$ , sa distribution est donnée par :

$$K_i = P(v_{n+1} = i) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} dB(x), \quad i \geq 0.$$

- $\delta_{j_n}$  est la variable de Bernoulli définie comme suit :

$$\delta_{j_n} = \begin{cases} 1, & \text{si le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ client servi provient de l'orbite,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa distribution conditionnelle dans le cas de rappels classiques est donnée :

$$P(\delta_{j_n} = 1/j_n = k) = \frac{k\alpha}{\lambda + k\alpha},$$

$$P(\delta_{j_n} = 0/j_n = k) = \frac{\lambda}{\lambda + k\alpha}.$$

## Condition d'ergodicité

**Théorème 12.1 (Boualem et al. [4])** *La chaîne de Markov induite  $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$  est ergodique si et seulement si*

$$\rho = \lambda\gamma_1 < 1.$$

## 12.4 Approche par les processus régénératifs

Plusieurs processus stochastiques survenant, par exemple, dans les systèmes de files d'attente et les systèmes de gestion de stock possèdent la propriété de "régénération" en certains instants, alors le comportement futur du processus après ces instants devient une réplique, c'est-à-dire, le comportement futur du processus après ces instants possède exactement la loi de probabilité qu'il aurait eu s'il avait commencé à l'instant zéro. De tels processus sont appelés "processus régénératifs".

### 12.4.1 Distributions limites

Dans cette Section, nous employons une approche récursive basée sur la théorie des processus régénératifs de Markov [5], pour calculer les distributions limites :

$$P_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Z(t) = (C(t), N(t)) = (i, j), (i, j) \in E = \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}, (P_{00} \equiv 0),$$

sous la condition d'ergodicité  $\rho < 1$ .

Pour cela, on définit quelques variables aléatoires :

$T$  : la longueur d'un cycle,

$T_{i,j}$  : la durée du temps dans un cycle durant lequel le système est à l'état  $(i, j)$ ,

$V$  : la durée d'une vacance propre,

$V_j$  : le nombre de vacances propres dans un cycle pour lesquelles  $j$  clients sont laissés en orbite,

$N_j$  : le nombre de fins de service dans un cycle pour lequel  $j$  clients sont laissés en orbite.

Alors,

$$P_{i,j} = \frac{E[T_{i,j}]}{E[T]}, \forall (i, j) \in E.$$

Le Théorème suivant donne les fonctions génératrices partielles  $P_i(z) = \sum_{j=0}^\infty P_{i,j}z^j$ , pour  $i \in \{0, 1, 2\}$  des probabilités limites.

**Théorème 12.2 (Boualem et al.[4])** *Si  $\rho < 1$ , alors les fonctions génératrices partielles  $P_i(z)$  sont données par :*

$$P_0(z) = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{P_{2,\bullet}}{E(X)} \int_1^z \left[ \frac{1-X(t)}{K(t)-t} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\alpha} \int_1^t \frac{1-K(u)}{K(u)-u} du \right\} \right] dt$$

$$\times \exp \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} \int_1^z \frac{1-K(t)}{K(t)-t} dt \right\}, \tag{12.2}$$

$$P_1(z) = \frac{K(z)-1}{z-K(z)} (P_0(z) + P_2(z)), \text{ et} \tag{12.3}$$

$$P_2(z) = \frac{P_{2,\bullet}}{E(X)} \frac{1-X(z)}{1-z}, \tag{12.4}$$

où,  $P_{2,\bullet} = (1-\rho)\lambda^{-1}$ ,  $K(z) = \psi(\lambda - \lambda z)$  et  $X(z)$  est la fonction génératrice de de la variable  $X$ .

## 12.4.2 Décomposition stochastique

Dans cette section, on donne le résultat important concernant la décomposition stochastique de la distribution du nombre de clients dans le système en un point arbitraire au régime stationnaire.

$$P_j = (1 - \delta_{0,j})(P_{0,j} + P_{1,j-1}) + P_{2,j}, \quad j \geq 0. \quad (12.5)$$

**Théorème 12.3 (Boualem et al. [4])** Si  $\rho < 1$ , alors la fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par :

$$P(z) = Q(z) \frac{P_0(z) + P_2(z)}{P_{0,\bullet} + P_{2,\bullet}}, \quad (12.6)$$

où  $Q(z)$  est la formule bien connue de Pollaczek-Khintchine pour la file classique  $(M/G/1, \infty)$ , qui est donnée par

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)K(z)}{K(z) - z}.$$

## 12.5 Quelques mesures de performance

Notre prochain objectif est de fournir des expressions explicites pour quelques mesures de performance du système  $M/G/1$  avec rappels classiques et vacances du serveur. Les résultats sont résumés dans les corollaires suivants.

**Corollaire 12.1 (Boualem et al. [4]).** Le nombre moyen de clients dans le système durant une période d'oisiveté, la période d'occupation et la période de vacances sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} E(N_I) &= P'_0(1) = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\lambda}{1 - \rho} P_{2,\bullet} = \frac{\lambda}{\alpha}, \\ E(N_B) &= P'_1(1) = \frac{\lambda^2}{2} \frac{\gamma_2}{1 - \rho} + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{\lambda \rho}{2} \frac{E(X^2)}{E(X)}, \text{ et} \\ E(N_V) &= P'_2(1) = \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2} \frac{P_{2,\bullet}}{E(X)} = (1 - \rho) \frac{\lambda}{2} \frac{E(X^2)}{E(X)}. \end{aligned}$$

**Corollaire 12.2 (Boualem et al. [4]).** Le nombre moyen de clients dans le système en un point aléatoire est donné par

$$\begin{aligned} L_s &= E(N_I) + E(N_B) + E(N_V) = P'(1) = \\ &= \frac{1}{1 - \rho} \left( \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\lambda^2 \gamma_2}{2} \right) + \frac{\lambda}{2} \frac{E(X^2)}{E(X)}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Le temps moyen d'attente dans le système est obtenu en utilisant les formules de Little et l'équation (12.7). Il est donné par

$$W = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{1 - \rho} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\lambda \gamma_2}{2} \right) + \frac{E(X^2)}{2E(X)}.$$

## Références

1. A. Aïssani, An  $M^X/G/1$  retrial queue with exhaustive vacations, *Journal of Statistics and Management Systems*, 3(3), 2000, pp.270-286.
2. A. Aïssani, Optimal control of an  $M/G/1$  retrial queue with vacations, *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 17(4), 2008, pp. 487-502.
3. J. R. Artalejo, Analysis of an  $M/G/1$  queue with constant repeated attempts and server vacations, *Computers and Operations Research*, 24(6), 1997, pp. 493-504.
4. Mohamed Boualem, Natalia Djellab and Djamil Aïssani, Approche Régénérative de la File d'Attente  $M/G/1$  avec Rappels Classiques et Vacances Exhaustives du Serveur. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 45 (1-3), 2011, pp. 253–267.
5. H. C. Tijms, *Stochastic models : An algorithmic approach*, Wiley, Chichester (ISBN 0-471-95123-4). 385 page, 1994.

## Stabilité des processus QBD (Quasi Birth and Death process)

Yasmina DJABALI, Boualem RABTA, et Djamil AÏSSANI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

**résumé 13.0.1** Dans ce travail, nous utilisons la méthode des moments pour approximer une distribution générale  $G$  par une distribution de type phase PH. Pour cela nous avons construit un algorithme permettant d'estimer l'erreur due à l'approximation ainsi que la norme par rapport à laquelle l'erreur est établie. De plus, nous avons élaboré un simulateur qui comportera deux procédures dont l'une permettra de simuler la distribution stationnaire du système idéal et l'autre celle du système perturbé et cela en utilisant l'environnement MATLAB.

### 13.1 Introduction

La méthode des moments peut être utilisée pour l'approximation d'une distribution générale  $G$  par une distribution de type phase PH. Elle a été employée dans plusieurs travaux [?, ?, ?]. L'idée derrière cette approche est simple : la distribution de type phase PH doit être choisie assez proche de  $G$  dans le sens où les (premiers) moments des deux distributions  $G$  et PH coïncident. Les auteurs utilisent souvent les deux ou trois premiers moments : la moyenne, la variance, et le moment d'ordre trois. En général, il faut passer à des moments d'ordre supérieurs pour obtenir une très bonne approximation.

### 13.2 Approximation par la loi hypoexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments (égaler les deux premiers moments) pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité inférieur à 1 par une loi hypoexponentielle à deux phases. Les premiers moments de la distribution hypoexponentielle sont donnés comme suit :

- Le moment d'ordre 1 (la moyenne) :  $\mu_1 = \sum_i (\frac{1}{\lambda_i})$ .
- Le moment d'ordre 2 (la variance) :  $\mu_2 = \sum_i (\frac{1}{\lambda_i^2})$ .

Supposons que la distribution générale à approximer possède une moyenne  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$  finie, on cherchera alors une distribution hypoexponentielle possédant les mêmes moments. On écrit alors :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \mu, \quad (13.1)$$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = \sigma^2. \quad (13.2)$$

En résolvant le système ci-dessus, et en prenant en considération que  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{2}{\mu - \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (13.3)$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{\mu + \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (13.4)$$

à condition que :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma^2}{\mu^2} < 1.$$

### 13.3 Approximation par la loi hyperexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité supérieur à 1 par une loi hyperexponentielle à deux phases.

Supposons que la distribution générale possède une moyenne  $\mu$  et un coefficient de variabilité  $c_X^2$ , on va les faire égaux avec les deux premiers moments de la distribution hyperexponentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\lambda_1} + \frac{\tau_2}{\lambda_2} &= \mu, \\ \frac{2\tau_1/\lambda_1^2 + 2\tau_2/\lambda_2^2}{(\tau_1/\lambda_1 + \tau_2/\lambda_2)^2} - 1 &= c_X^2. \end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus, on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{c_X^2 - 1}{2}} \right]^{-1}, \tag{13.5}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\mu} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{c_X^2 - 1}{2}} \right]^{-1}, \tag{13.6}$$

où  $\tau_1, \tau_2 \geq 0, \tau_1 + \tau_2 = 1$  et  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

### 13.4 Application numérique

#### 13.4.1 Cas d'approximation par le système HOE<sub>2</sub>/M/1

La loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ , où  $b = 1.3$ . L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le graphe suivant :

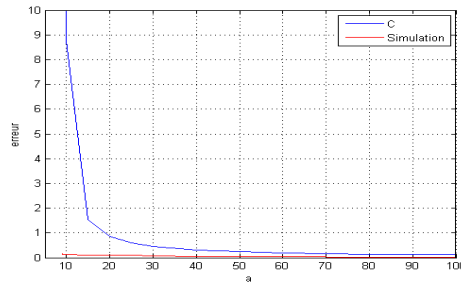


FIGURE 13.1. Courbes comparatives des erreurs

#### 13.4.2 Cas d'approximation par le système H<sub>2</sub>/M/1

En fixant la loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ , où  $b = 0.9$ . On a obtenu les résultats suivants :

#### 13.4.3 Cas d'approximation par le système M/HOE<sub>2</sub>/1

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre  $\lambda = 0.5$ . Les résultats sont représentés par le graphe suivant :



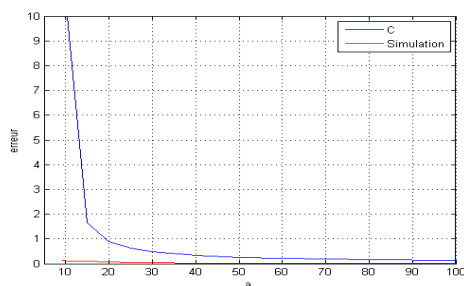


FIGURE 13.2. Courbes comparatives des erreurs

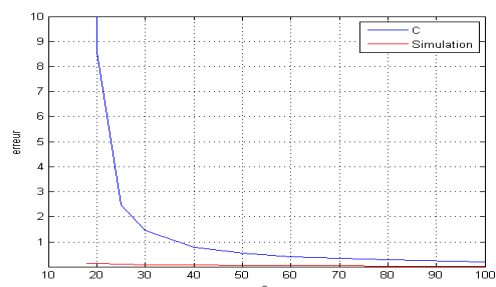


FIGURE 13.3. Courbes comparatives des erreurs

### 13.4.4 Cas d'approximation par le système M/H<sub>2</sub>/1

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre  $\lambda = 0.2$ . Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :

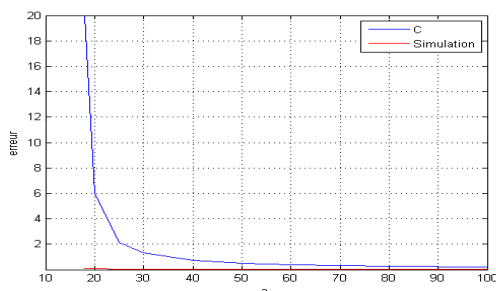


FIGURE 13.4. Courbes comparatives des erreurs

## Références

1. W-R. HEINZELMAN, A. CHANDRAKASAN, and H. BALAKRISHNAN. Energy-efficient communication protocol for wireless sensor networks. In *Proceedings of the IEEE Hawaii International Conference on System Sciences*, pages 3005–3014, Janvier 2000.
2. S. LEE and H.SIN. An energie-efficient distributed unequal clustering protocol for wirless sensor networks. *Proceedings of word Academy of Science Engineering and Technology*, 36, Decembre 2008.
3. N.KHOULALENE. *Regroupement avec Equilibrage de charge dans les Réseaux de Capteurs sans Fil*. Mémoire de magistère en informatique, Université de Béjaia, Algérie, Juin 2007.
4. M. QIN and R. ZIMMERMANN. Vca : An energy-efficient voting-based clustering algorithm for sensor networks. *Journal of Universal Computer Science*, 13(1) :87–109, Janvier 2007.



# Evaluation des Performances des Systèmes Prioritaires $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$ à l'aide des Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG)

Sedda HAKMI, Ouiza LEKADIR et Djamil AISSANI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

Dans ce travail, nous avons évalué les performances des systèmes  $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$  avec priorité relative, via le formalisme des réseaux de Petri stochastiques généralisés (RdPSG).

Les réseaux de Petri (RdP), développé par Carl Adam Petri [7], sont un ensemble d'outils qui permet à la fois la modélisation, l'analyse qualitative et l'analyse quantitative de systèmes. Ils ont le double avantage de fournir un support graphique naturel qui est d'une aide précieuse dans l'analyse, et de posséder des propriétés analytiques qui permettent une évaluation simple du comportement du système étudié. L'introduction de certains paramètres, caractéristiques et critères particuliers à la définition initiale des RdP a conduit à l'apparition de plusieurs formalismes. Parmi ces formalismes, on distingue les RdPSG introduit par Molloy [6]. Les RdPSG sont une extension des RdP stochastiques autorisant deux classes de transitions [3] :

- Des transitions instantanées : ces transitions possèdent une durée de franchissement nulle. Le marquage associé à ce type de transition est dit marquage immédiat.
- Des transitions temporisées à qui correspondent des variables aléatoires déterminant la durée de franchissement. Le marquage associé à ce type de transition est dit marquage tangible.

Les RdPSG ont été exploités pour la modélisation et l'analyse de performances des systèmes de files d'attente avec rappels [4]. L'objet de cet article est de modéliser et d'évaluer les performances des systèmes  $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$  en utilisant les Réseaux de Petri stochastiques généralisés. En effet, ce choix est dicté par le fait que les systèmes de files d'attente sont modélisés par des processus aléatoires, ainsi, que pour l'existence d'évènements immédiats à caractériser.

Dans certains systèmes de files d'attente (S.F.A) prioritaires, les clients proviennent d'au moins une population finie. On parle dans ce cas de S.F.A. à source(s) finie(s). Nous considérons dans ce travail un système de files d'attente avec priorité relative où  $k$  classes de priorités proviennent de  $k$  sources finies. L'analyse de ces systèmes est complexe, en effet, leurs études dans la littérature se base essentiellement sur des méthodes approximatives ou des méthodes algorithmiques.

Notre travail a consisté à faire usage du formalisme RdPSG pour modéliser les systèmes  $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$  avec priorité relative, et d'évaluer leurs performances. La puissance d'expression de ce formalisme nous a permis une modélisation très détaillée et sémantiquement précise qui a réduit la complexité de ces systèmes prioritaires. Par ailleurs, elle nous a offert, en plus d'une analyse qualitative, une analyse quantitative des indices de performance. En effet, l'isomorphisme existant entre les RdPSG et les processus markoviens, nous a permis d'exploiter les techniques de ces derniers pour le calcul des mesures de performances.

## Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à l'évaluation des performances des systèmes d'attente  $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$  avec priorité relative et sources finies via les RdPSG.

Dans un premier temps, nous avons proposé une modélisation de ces derniers systèmes par les RdPSG, puis nous nous sommes intéressés à leurs analyses qui consiste à définir d'une part leurs propriétés qualitatives et d'autre part à calculer leurs paramètres de performances quantitatifs. Les résultats numériques obtenus ont prouvé l'efficacité de l'approche proposée. En effet, nous avons pu constater que les RdPSG sont très puissants en terme d'expressivité et qu'ils constituent une approche fiable pour le calcul des paramètres de performances.

L'analyse d'un système prioritaire présente des difficultés puisque la description de l'état du système doit tenir compte de l'information de chaque classe. Si les sources sont finies, cela introduit de grandes difficultés analytiques et complique énormément l'analyse des performances du système. C'est pourquoi, nous avons proposé dans cet article une approche de modélisation, d'analyse et d'évaluation de performances des systèmes prioritaires à sources finies basée sur les RdPSG.

En effet, Nous avons effectué une étude comparative entre les résultats obtenus par l'approche RdPSG et ceux obtenus analytiquement [1, 2]. Cette comparaison a confirmé l'efficacité de notre approche. Ainsi, notre travail avenir, à cours terme, sera d'élargir cette étude aux systèmes avec priorité absolue ayant plusieurs sources finies.

## Références

1. M. J. Chandra and R. G. Sargent. Numerical Method to Obtain the Equilibrium Results for the Multiple Finite Sources Priority Queueing Model. *Inform Management Science*, 29(11), 1298–1308, 1983.
2. M. J. Chandra. A Study of Multiple Finite-Source Queueing Models. *The Journal of the Operational Research Society*, 37(3), 275–283, 1986.
3. M. Diaz. *Petri nets. fundamental models, verification and applications*. ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc, 2009.
4. N. Gharbi and M. Ioualalen. Numerical investigation of finite-source multiserver systems with different vacation policies. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(3), 625–635, 2010.
5. N. K. Jaiswal. *Priority Queues*. Academic press new york and london, University of southern California, 1968.
6. M. K. Molloy. On the integration of delay and throughput measures in processing models. *PhD thesis, University of California, Los Angeles, USA*, 1981.
7. C. A. Petri. *Kommunikation mit automaten, Phd dissertatio, Institut für Instrumentelle Mathematik, University of Bonn, West Germany*, 1962.

## Processus Régénératifs dans les Modèles de Risque Classique à Deux Dimensions

Safia HOCINE

L'Aboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

**résumé 15.0.1** *Risk models recently studied in the literature are becoming increasingly complex. Therefore, it is rare to find explicit analytical relations to calculate the ruin probabilities. In this work, we are interested to the approach of strong stability in the classical risk model in two dimensions with large claims. In the application of the quantitative aspect of the strong stability method in this model and in order to deduce a bound stability of the deviation of ruin probabilities, we will use the regenerative processes theory.*

*Les modèles de risque récemment étudiés dans la littérature deviennent de plus en plus complexes. Par conséquent, il est rare d'avoir des relations analytiques explicites pour le calcul de la probabilité de ruine. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approche de la stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions avec des réclamations larges. Dans l'application de l'aspect quantitatif de la méthode de la stabilité forte et afin de déduire une borne de stabilité de la déviation de la probabilité de ruine, nous utilisons la théorie des processus régénératifs.*

### 15.1 Introduction

Dans la théorie de la ruine, le problème de stabilité a été développé dans Beirlant and Rachev (1987)[6]. C'est l'académicien Kalashnikov qui, le premier, a appliqué la méthode de stabilité forte (cf. Aïssani and Kartashov (1983)[5]) au modèle de risque[4]. En particulier il a obtenu des bornes de stabilité de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique avec un calcul explicite des constantes. Par la suite, plusieurs autres applications de la méthode de la stabilité forte ont été réalisées dans différents modèles de risque (Benouaret et Aïssani (2010)[1]).

Cependant, l'estimation de la probabilité de ruine par la méthode de stabilité forte basée sur l'approche par chaînes de Markov, rencontre des difficultés dans le cas d'un modèle de risque avec des réclamations larges. Pour pallier à cette difficulté, Kalashnikov a proposé l'utilisation de la théorie des processus régénératifs [3] [4].

Dans ce travail nous appliquons la méthode de stabilité forte et nous utilisons les processus régénératifs dans un modèle de risque spécifique. Il s'agit du modèle classique à deux dimensions avec indépendance des réclamations. Dans notre cas, le processus  $\{V_n\}$  est à la fois de Markov et régénératif, si l'on choisit des instants successifs où  $V_n$  prend la valeur 0 comme époques de régénération.

### 15.2 Processus Régénératifs

Un processus stochastique  $X = \{X(t) : t > 0\}$  est appelé processus régénératif s'il existe une variable aléatoire  $R_1 > 0$  tel que :

- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$  est indépendant de  $\{X(t) : t < R_1\}$ ,
- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$  est stochastiquement équivalent à  $\{X(t) : t > 0\}$ .

$R_1$  appelée époque de régénération (ou temps de régénération), et on dit que  $X$  se régénère ou se réinitialise à ce point.

Ce type de processus est d'un grand intérêt dans plusieurs modèles stochastiques, comme les systèmes de fils d'attente [2]. En 2000, Kalashnikov a proposé la théorie des processus régénératifs comme solution pour l'application de la méthode de stabilité dans le modèle de risque avec des réclamations larges.

## 15.3 probabilités de ruine d'un modèle de risque classique à deux dimensions

Le modèle de risque classique à deux dimensions est défini comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \sum_{i=1}^{N(t)} \begin{pmatrix} Z_i^1 \\ Z_i^2 \end{pmatrix} \quad t \geq 0 \quad (15.1)$$

Ce processus stochastique, donné par la formule (15.1) représente la réserve de la compagnie d'assurance qui possède deux branches d'activité.

Le nombre de réclamations (ou de sinistres)  $N(t)$  survenus jusqu'au temps  $t \geq 0$  est représenté par un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

sont deux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes du processus de Poisson  $\{N(t), t \geq 0\}$ , de fonction de répartition  $(F_1, F_2)$  et de moyenne  $(m_1, m_2)$  respectivement.

Dans ce modèle, le temps de ruine peut être défini de plusieurs façons. Dans ce travail, nous utilisons la définition suivante :

$$T_{som} = \inf\{t / X_1(t) + X_2(t) < 0\} \quad (15.2)$$

La probabilité de ruine en fonction du temps de ruine défini précédemment est

$$\Psi_{som}(u_1, u_2) = \mathbb{P}(T_{som} < \infty / (X_1(0), X_2(0)) = (u_1, u_2)) \quad (15.3)$$

## 15.4 Processus régénératifs dans le modèle de risque classique à deux dimensions

Construisons d'abord le processus inverse d'une manière à ce que sa distribution stationnaire corresponde exactement à la probabilité de ruine étudiée.

### 15.4.1 Processus inverse

Puisque la ruine peut seulement apparaître aux instants d'arrivée des réclamations, on peut réécrire  $\Psi_{som}(u_1, u_2)$ , définie par la relation (15.3), de la manière suivante :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{n \geq 1} (X_{T_n}^1 + X_{T_n}^2) < 0 / X_0^1 + X_0^2 = u\right) \quad (15.4)$$

où  $u = u_1 + u_2$  et  $\{T_n, n \geq 1\}$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes qui représentent les instants d'arrivées des réclamations.

Le processus inverse associé au modèle de risque classique à deux dimensions est de la forme suivante :

$$\forall n \geq 0, \quad V_{n+1} = (V_n - (c_1 + c_2)\theta_{n+1} + Z_{n+1}^1 + Z_{n+1}^2)_+, \quad V_0 = 0 \quad (15.5)$$

avec  $T_n = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$  et  $\theta_n$  est une variable aléatoire qui représente la durée de temps entre la  $(n-1)$ <sup>ème</sup> et la  $n$ <sup>ème</sup> réclamation.

Suivant la forme recursive de la chaîne  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  donnée par l'équation (15.5),  $V_{n+1}$  ne dépend que de  $V_n, \theta_{n+1}, Z_{n+1}^1$  et  $Z_{n+1}^2$ , où les variables aléatoires  $\theta_{n+1}, Z_{n+1}^1$  et  $Z_{n+1}^2$  sont indépendantes de  $n$  et de l'état du système avant  $T_n$ .

D'où,  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène à espace d'état continu  $E = \mathbb{R}^+$ .

De plus, si on pose  $\sigma_0 = 0, \sigma_{k+1} = \min\{n > \sigma_k, V_n = 0\}, k \geq 0$ , alors,  $\forall k \geq 0$ , la chaîne  $\{V_{\sigma_k+n}\}_{n \geq 0}$  est de même distribution que la chaîne initiale  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  et indépendante de  $\{V_j\}_{j \leq \sigma_k}$ .

A partir de cette propriété, on déduit que  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  est un processus régénératif où  $\{\sigma_k\}$  sont ses temps (époques) de régénération.

En fonction de la chaîne de Markov  $\{V_n\}_{n \geq 0}, \Psi_{som}(u)$  s'écrit comme suit :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P}(V_n > u) = 1 - \mathbb{P}(V_n \leq u) = 1 - G_n(u) \quad (15.6)$$

avec  $G_n(u) = P(V_n \leq u)$ .

### 15.4.2 Inégalité de stabilité

Considérons le modèle de risque classique à deux dimensions où le processus inverse associé à  $\Psi_{som}$  est donné par (15.5). Pour  $\epsilon > 0$ , soit  $\mathbb{A}_d \subset \mathbb{A}$  le sous ensemble des valeurs admissibles perturbées du vecteur des paramètres gouvernant le modèle de risque défini par

$$\mathbb{A}_d = \left\{ \begin{array}{l} a : \mathbb{E} \left( \exp\{\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2 - (c_1 + c_2)\theta_1)\} \right) \leq \rho < 1 \\ \text{et} \\ \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2)) \leq \beta(\epsilon) < \infty \end{array} \right\} \text{ sont vérifiées }.$$

et qui contient tous les points  $a$  satisfaisants les relations ;

$$\mathbb{E} \left( \exp\{\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2 - (c_1 + c_2)\theta_1)\} \right) \leq \rho < 1$$

et

$$\mathbb{E} \exp(\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2)) \leq \beta(\epsilon) < \infty.$$

Prenons  $v(u) = e^{\epsilon u}$ ,  $u \geq 0$ . Alors, si  $a$  et  $a'$  appartiennent à  $\mathbb{A}_d$ , nous obtenons la borne de stabilité suivante :

$$\sup_n |\Psi_n - \Psi'_n|_v = \sup_n |G_n - G'_n|_v \leq \frac{\gamma(\epsilon) \mu}{1 - \rho} \quad (15.7)$$

où toutes les constantes sont de formes explicites.

## 15.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons réalisé, en utilisant les processus régénératifs, l'application de la méthode de stabilité forte dans le modèle de risque avec des réclamations larges.

Nous avons donc clarifié les conditions d'approximation de la probabilité de ruine d'un modèle de risque perturbé par celle du modèle de risque classique à deux dimensions avec une illustration numérique de l'inégalité de stabilité obtenu.

## Références

1. Z. Benouaret and D. Aïssani. Strong stability in a two dimensional classical risk model with independant claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2010, N° 2, page 83–93, 2010.
2. V. V. Kalashnikov and S. G. Foss. Regeneration and renovation in queues. *Queueing Systems Theory Appl*, vol. 08, page 211–224, 1991.
3. V. Kalashnikov. *Topics on Regenerative Process*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
4. V. Kalashnikov. The Stability concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*, 2000.
5. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R, ser. A*, 11,3–5, 1983.
6. J. Beirlant and S. T. Rachev. The problems of stability in insurance mathematics. *Insurance : Mathematics and Economics* 6, 179–188, 1987.





## **Quatrième partie**

---

### **Contrôle Statistique de la Qualité**



## Application des fonctions splines

Sonia AMROUN et Smail ADJABI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)  
 Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie  
 Tél. (213) 34 21 51 88

**résumé 16.0.1** *La régression non paramétrique est un outil statistique permettant de décrire une relation entre une variable dépendante et une variable explicative, sans spécifier la forme de cette relation. L'objectif de ce travail est de comparer deux méthodes non paramétrique, la méthode du noyau et la méthode des fonctions splines, pour estimer la courbe de régression de la moyenne. Nous avons donné l'estimateur spline de lissage et fait la comparaison par simulation sur deux modèles cibles de régression et sur un jeu de données réels. Les résultats numériques et graphiques montrent que la méthode des splines est meilleure que la méthode du noyau. Cependant quand la taille de l'échantillon observé est suffisamment grande les deux méthodes sont équivalentes.*

**Mots clefs :** *Estimation, courbe de régression de la moyenne, noyau, fonction spline, paramètre de lissage, matrice de lissage.*

### 16.1 Introduction

Le terme "fonctions splines" a été introduit par Schoenberg (1946a, b), bien que leur origine soit due aux travaux de Whittaker (1923) sur les méthodes de graduation de données. Ces recherches ont poussé Schoenberg (1964) et Reinsch (1967) à dériver les splines de lissage classiques comme classe d'estimateurs. Par ailleurs, Ahlberg, Nilson et Walsh (1964, 1967) mentionnent les splines dans un contexte d'interpolation de données sans bruit. Ce n'est donc qu'au début des années 1960 que la théorie des splines s'est développée. Les splines étaient alors considérées comme un outil d'analyse numérique pour modéliser des fonctions. Les fonctions splines se sont énormément développées et sont devenues importantes dans différentes branches des mathématiques telles que :

- la théorie de l'approximation.
- L'analyse numérique.
- Les statistiques.

### 16.2 Spline cubique naturelle

**Définition 16.1** *Soient  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$   $n$  points d'un intervalle  $[a, b]$ , une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  est une spline cubique si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Sur chaque intervalle  $(a, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $\dots$ ,  $(x_n, b)$ ,  $f$  est un polynôme cubique.*
2. *La fonction  $f$  est deux fois continûment différentiable sur  $[a, b]$ , et donc  $f$  et ses dérivées d'ordre 1 et 2 sont continues aux points  $x_i$ .*

### 16.3 Les splines de lissage

**Définition 16.2** *Les splines de lissage déterminent la valeur de l'estimateur en minimisant un critère bien précis défini par :*

$$S(m) = \sum_{i=1}^n (y_i - m(x_i))^2 + \lambda \int_a^b (m^{(\tau)}(x))^2 dx, \quad (16.1)$$

**Théorème 16.1** *Supposons que  $n \geq 0$  et que le paramètre de lissage  $\lambda$  est positif, alors  $\hat{m}_\lambda$  est une spline cubique naturelle telle que :*

$$M = (I + \lambda K)^{-1}Y = A_\lambda Y,$$

et pour toute  $m$  dans  $W_2^2[a, b]$ , on a

$$S(\hat{m}_\lambda) \leq S(m).$$

## 16.4 Résultats numériques

L'estimateur spline de lissage est comparé à celui du noyau. On considère le modèle de régression  $y = m(x) + z$ . On prend les modèles de fonctions suivantes :

**1- Le modèle 1 avec  $m_1(x) = x + 0.5 \exp(-50(x - 0.5)^2)$ .**

**2- Le modèle 2 avec  $m_2(x) = 4.26(\exp(-3.25x) - 4 \exp(-6.5x) + 3 \exp(-9.75x))$ .**

$m_3(x) = \sqrt{x(1-x)} \sin(\frac{2.1\pi}{x+0.5})$ .

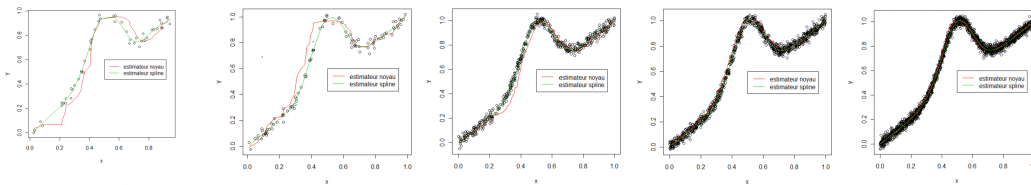


FIGURE 3.1 – Estimation de  $m_1$ ,  $n = 50$

FIGURE 3.2 – Estimation de  $m_1$ ,  $n = 100$

FIGURE 3.4 – Estimation de  $m_1$ ,  $n = 500$

FIGURE 3.5 – Estimation de  $m_1$ ,  $n = 1000$

FIGURE 3.6 – Estimation de  $m_1$ ,  $n = 2000$

L'erreur moyenne quadratique associée au modèle  $m_1$

n	MISE noyau	MISE spline
50	0.00639922	0.00061377
100	0.00516139	0.00059959
200	0.00376109	0.00055375
500	0.00311738	0.00053171
700	0.00126655	0.00052573
1000	0.00098935	0.00051186
1500	0.00088708	0.00050892
2000	0.00074196	0.00050615
2500	0.00066193	0.00049508
3000	0.00050997	0.00049338

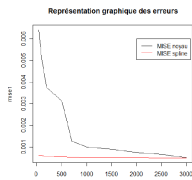


FIGURE 16.1. Estimation de  $m_1$

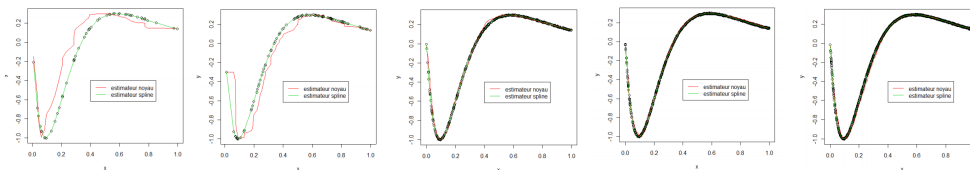


FIGURE 3.8 – Estimation de  $m_2$ ,  $n = 50$

FIGURE 3.9 – Estimation de  $m_2$ ,  $n = 100$

FIGURE 3.11 – Estimation de  $m_2$ ,  $n = 500$

FIGURE 3.12 – Estimation de  $m_2$ ,  $n = 1000$

FIGURE 3.13 – Estimation de  $m_2$ ,  $n = 2000$

L'erreur moyenne quadratique associée au modèle  $m_2$

n	MISE noyau	MISE spline
50	0.02555829	0.00000679
100	0.01329819	0.00000643
200	0.00139980	0.00000640
500	0.00072893	0.00000606
700	0.00058020	0.00000600
1000	0.00019613	0.00000595
1500	0.00019445	0.00000580
2000	0.00019248	0.00000575
2500	0.00016873	0.00000575
3000	0.00008621	0.00000564

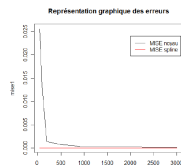


FIGURE 16.2. Estimation de  $m_2$

3- Cas réel

x	y	x	y	x	y
0.083	525	0.25	608	0.5	665
0.75	717	1	745	1.5	803
2	859	3	940	4	1007
5	1065	6	1121	7	1183
8	1238	9	1298	10	1348
10.5	1369	11	1391	11.5	1422
12	1470	12.5	1525	13	1578
13.5	1638	14	1664	14.5	1692
15	1708	15.5	1723	16	1727
16.5	1727	17	1727	18	1729
19	1738	20	1738		

TABLE 16.1. Données numériques de croissance

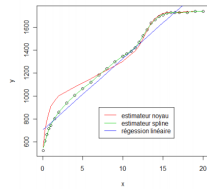


FIG. 4 – Estimation de la courbe de croissance pour la méthode du noyau, la méthode des fonctions splines et par la régression linéaire.

L'erreur moyenne quadratique associée au cas réel

MISE noyau	MISE spline	MISE régression linéaire
4427.31	31.87724	5759.474

TABLE 3.5 – Erreur moyenne quadratique associée

FIGURE 16.3. Estimation de la courbe de croissance et erreur associée par les deux méthodes.

## Références

1. W-R. HEINZELMAN, A. CHANDRAKASAN, and H. BALAKRISHNAN. Energy-efficient communication protocol for wireless sensor networks. In *Proceedings of the IEEE Hawaii International Conference on System Sciences*, pages 3005–3014, Janvier 2000.
2. S. LEE and H.SIN. An energie-efficient distributed unequal clustering protocol for wirless sensor networks. *Proccedings of word Academy of Science Engineering and Technology*, 36, Decembre 2008.
3. N.KHOULALENE. *Regroupement avec Equilibrage de charge dans les Réseaux de Capteurs sans Fil*. Mémoire de magistère en informatique, Université de Béjaia, Algérie, Juin 2007.
4. M. QIN and R. ZIMMERMANN. Vca : An energy-efficient voting-based clustering algorithm for sensor networks. *Journal of Universal Computer Science*, 13(1) :87–109, Janvier 2007.

---

# Quelques aspects statistiques et numériques pour l'étude de la stabilité forte des systèmes de files d'attente

Aïcha BARECHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : aïcha\_bareche@yahoo.fr

## 17.1 Introduction

L'objectif de ce travail est de retracer, sous forme d'une synthèse, le bilan de dix ans d'activités de recherche dans les domaines de mathématiques et de mathématiques appliquées.

Dans la continuité de nos travaux de Magister, où l'on s'est intéressé aux méthodes d'analyse statistique des systèmes d'attente [10], on a développé le cas particulier du choix de distributions des lois régissant ces derniers, lié à l'aspect identification des modèles. En effet, dans la pratique, on est généralement confronté à des situations où la fonction densité d'une des lois régissant un système de files d'attente donné est générale et inconnue. De ce fait, nous avons discuté le problème d'estimation non paramétrique de fonctionnelles intervenant dans les systèmes d'attente, plus précisément la méthode du noyau vu sa souplesse d'utilisation et ses bonnes propriétés statistiques asymptotiques [2, 5, 8, 9, 11, 12, 13]. On a traité particulièrement le problème de sélection du paramètre de lissage [15].

En outre, les distributions utilisées dans les systèmes d'attente sont pour la plupart bornées à gauche, ce qui crée un problème d'effet de bord lors de l'estimation des fonctions densité. Ce dernier a été abordé dans [7, 12, 14].

Par ailleurs, une des conditions liées à l'application de la méthode de stabilité forte aux systèmes d'attente est que la perturbation faite doit être petite, dans le sens que la densité de la loi générale régissant un système d'attente doit être proche de celle de la loi exponentielle qui est définie sur un support borné  $[0, +\infty[$ . Or, quand on applique la méthode du noyau dans ce cas on est confronté au problème des effets de bord, donc on doit recourir à certaines techniques permettant leur correction [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13].

D'autres aspects numériques liés à la simulation ont été considérés dans nos travaux, à savoir la simulation à événements discrets et le test de Student pour la comparaison de performances de deux systèmes d'attente [1, 4], les méthodes d'inversion [11] et de composition [1, 2, 3, 5, 8, 9, 11] pour la génération de variables aléatoires, ainsi que quelques méthodes numériques (méthode du point fixe [2, 5, 6, 9, 11], méthode de dichotomie [2, 8] et décomposition de Hahn-Jordan [1]).

## 17.2 Analyse statistique des systèmes d'attente

L'analyse statistique est une partie intégrale de la formulation d'un modèle mathématique pour un système réel. En effet, ce modèle n'est d'une grande utilité que s'il est lié au système par l'analyse des données empiriques. Dans la littérature connue sur l'analyse statistique des systèmes de files d'attente, les principaux aspects considérés englobent l'identification du modèle, l'estimation, les tests d'hypothèse, l'inférence,... Or tous ces problèmes ne sont pas concrètement présentés dans les ouvrages classiques de files d'attente et de processus aléatoires.

C'est pourquoi nous avons considéré dans notre thèse de Magister les points suivants :

- Actualisation de la synthèse sur les méthodes d'analyse statistique des systèmes d'attente ;
- Classification et algorithme pour certains systèmes classiques ;
- Utilisation dans la vérification de certaines propriétés qualitatives (stabilité).

Dans [10], nous avons mis l'accent sur ce domaine à la fois important et peu exploré. Il s'agit d'identifier les différentes méthodes utilisées dans l'analyse statistique des systèmes de files d'attente et d'indiquer la manière avec laquelle elles sont applicables pour l'évaluation des performances de ces derniers. Un intérêt particulier est accordé au choix des distributions dans l'identification des modèles, plus précisément au choix des distributions des lois régissant les systèmes d'attente. L'exemple de l'application de la méthode du noyau dans l'étude de la stabilité forte des systèmes d'attente est donné.

## 17.3 Stabilité forte des systèmes d'attente

Le problème de stabilité forte des modèles stochastiques est un thème d'actualité qui a engendré plusieurs travaux et résultats d'intérêt théorique et pratique. L'applicabilité de cette méthode a été bien démontrée et documentée pour plusieurs modèles stochastiques. Cependant, cette applicabilité n'est pas aussi évidente, particulièrement pour des systèmes complexes. En effet, plusieurs problèmes surviennent à la fois sur le plan théorique et pratique. Du point de vue théorique, les difficultés résident dans l'identification du paramètre à perturber, l'expression du noyau de transition et spécialement dans le choix des normes poids. Par ailleurs, notons qu'en pratique les paramètres du modèle ne sont connus que de manière partielle puisque ils sont obtenus par des méthodes statistiques. Dans ce sens, un des aspects d'intérêt à considérer est lorsque une distribution gouvernant un système d'attente est générale et inconnue, alors on fait appel aux méthodes d'estimation non paramétrique pour estimer sa fonction densité.

Notre travail s'inscrit dans ce cadre. On essaye de résoudre certains problèmes rencontrés lors de la mise en oeuvre de la méthode de stabilité forte en pratique. Notre contribution concerne, plus précisément, la discussion et la combinaison de quelques aspects statistiques et numériques dans le but de prouver, d'améliorer et d'étendre le champ d'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude de certains systèmes d'attente classiques lorsque l'une des lois les régissant est générale et inconnue. L'approche non paramétrique la plus utilisée est la méthode du noyau de Parzen-Rosenblatt. C'est une méthode commode, simple, robuste et efficace permettant d'obtenir une estimation de la densité pour une v.a. réelle, ne nécessitant pas un choix multiple de paramètres. Cet estimateur dépend de deux paramètres essentiels, à savoir le noyau  $K$  et le paramètre de lissage  $h_n$ . Il est connu que le choix du noyau  $K$  n'est pas d'une grande importance, donc le choix des paramètres se ramène uniquement au choix du paramètre  $h_n$ .

Ce dernier a longtemps été un sujet de considération et plusieurs méthodes ont été adoptées. On cite entre autres les méthodes de validation croisée et les méthodes de ré-injection (plug-in). Ce problème a été revisité dans [15].

L'estimation de la densité de probabilité par la méthode du noyau de Parzen-Rosenblatt présente des inconvénients dans le cas où le support de la distribution est borné. Le support de la distribution associée à l'estimation ne coïncide généralement pas avec le support réel, et ceci est gênant en pratique, si on dispose d'informations a priori à son sujet. On observe en pratique dans ce cas des "bavures" dans les nombres négatifs, l'estimation accordant une probabilité non nulle en général à  $\mathbb{R}^-$  en contradiction avec l'hypothèse de positivité.

Pour remédier à ce problème, plusieurs méthodes ont été développées (l'estimateur "image miroir", l'estimateur asymétrique à noyau Gamma, les histogrammes lissés).

### Test statistique de Student pour la comparaison de deux systèmes d'attente

Le problème de tests d'hypothèse survient quand on a besoin de faire des inférences sur les paramètres des distributions des arrivées et temps de service ou des mesures comme l'intensité du trafic et les formes de distributions basées sur les données échantillonnées (obtenues en général par simulation) d'un système.

Dans [1] (respectivement [4]), nous avons utilisé ce test pour la comparaison des caractéristiques des systèmes  $G/G/1$  et  $G/M/1$  (respectivement  $G/G/1$  et  $M/G/1$ ).

#### 17.3.1 Aspects numériques et simulation

Quand les résultats ne peuvent pas être obtenus analytiquement, on doit recourir à la simulation pour étudier les propriétés d'un processus particulier. La simulation fournit aussi un moyen pour examiner les résultats analytiques dans le contexte d'une situation pratique. L'un des plus importants usages de cette approche est la comparaison de performances de deux ou plusieurs systèmes.

Dans la totalité de nos travaux nous avons fait appel à des méthodes numériques et à certaines techniques de simulation, que nous décrivons brièvement dans ce qui suit :

#### Génération de nombres aléatoires

Dans nos travaux, nous avons souvent eu à supposer que l'une des lois (supposée générale) gouvernant un système d'attente devait être proche de la loi exponentielle. C'est dans ce sens que dans nos exemples numériques nous avons eu à utiliser certaines méthodes de génération de v.a., à savoir la méthode de "l'inversion" pour la génération d'une v.a. issue d'une loi exponentielle [11] et la méthode de "composition" pour générer des v.a. issues de lois hyper-exponentielle [2, 3, 5, 9, 11] et de Cox2 [1, 3, 8].

#### Simulation à événements discrets

L'une des méthodes de simulation les plus utilisées est la *simulation à événements discrets*. C'est une modélisation des systèmes dans lesquels le changement d'état s'effectue à des instants discrets de l'axe temporel. Nous avons considéré cette technique pour simuler les systèmes à approcher considérés dans [1, 4].



## Méthodes numériques

### Méthode du point fixe

Dans [2, 5, 6, 9, 11], nous avons considéré le problème de l'évaluation numérique de l'erreur sur la distribution stationnaire lors de l'approximation du système  $G/M/1$  par le système  $M/M/1$ .

Pour chercher la distribution stationnaire  $\alpha_i$  du système  $G/M/1$  donnée par :

$$\alpha_i = (1-x)x^i, \quad \forall i \geq 0, \quad (17.1)$$

nous avons utilisé la méthode du point fixe pour retrouver numériquement la solution unique  $x$  du système :

$$x = \int e^{-\gamma t(1-x)} g(t) dt, \quad (17.2)$$

où  $g$  est la fonction densité de la loi générale  $G$  des arrivées.

### Méthode de dichotomie

On a utilisé la méthode de dichotomie pour déterminer, par exemple, l'erreur minimale  $Err'$  sur la distribution stationnaire ainsi que certains paramètres liés à son évaluation, dans l'algorithme élaboré dans [2, 8] qui permet l'approximation du système  $M/G/1$  par le système  $M/M/1$ .

### Décomposition de Hahn-Jordan

La mesure  $|G - E_\mu|$  peut être réécrite comme étant la différence entre deux mesures de probabilités, en utilisant la décomposition de Hahn-Jordan. En effet, si on note par  $g$  et  $f$ , respectivement, les fonctions densité de  $G$  et  $E_\mu$ , on peut écrire :  $|m| = |g - f|$ , où la variation totale  $|m|$  est définie comme suit :  $|m| = m^+ + m^-$ , où

$$\begin{aligned} m^+ &= \max(g(x) - f(x), 0), \\ m^- &= \max(f(x) - g(x), 0). \end{aligned}$$

Cela nous a aidé dans l'analyse numérique effectuée dans notre cas d'étude considéré dans [1], lors de l'approximation du système  $G/G/1$  par le système  $G/M/1$  (où on a considéré  $g$  comme la fonction densité de la distribution générale  $G$  supposée Cox2) pour déterminer les mesures de variation  $W^*$  et  $W_0$  caractérisant la proximité des deux systèmes.

## 17.4 Application de techniques statistiques et numériques à l'étude de stabilité forte de systèmes d'attente classiques

### 17.4.1 Systèmes markoviens : Exemple du système $M/M/1$

Cette thématique a été considérée dans nos travaux de thèse de Doctorat. On s'est intéressé à deux types de perturbation :

- Perturbation du flot des arrivées : dans [2, 5], on a évalué la proximité des systèmes  $G/M/1$  et  $M/M/1$ .
- Perturbation de la durée de service : dans [8], on a évalué la proximité des systèmes  $M/G/1$  et  $M/M/1$ .

### 17.4.2 Systèmes non markoviens : Exemple du système $G/G/1$

Après nos travaux de thèse de Doctorat, on s'est penché sur le problème de la recherche d'approximations numériques pour le système  $G/G/1$ . Là aussi, nous avons considéré les deux mêmes types de perturbation :

- Dans [4], on s'est intéressé à l'approximation du système  $G/G/1$  par le système  $M/G/1$ .
- Dans [1], on s'est intéressé à l'approximation du système  $G/G/1$  par le système  $G/M/1$ .

## 17.5 Conclusion

L'objectif principal de mes activités de recherche consiste à apporter les méthodologies permettant de résoudre les difficultés rencontrées lors de l'étude de la stabilité forte de systèmes d'attente classiques. Cela devient possible en combinant certains aspects statistiques et numériques au principe de la stabilité forte.

Les résultats obtenus montrent particulièrement l'intérêt des méthodes d'estimation non paramétrique et des techniques de correction des effets de bord pour déterminer l'erreur d'approximation des distributions stationnaires entre deux systèmes de files d'attente lors de l'application de la méthode de stabilité forte afin de substituer les caractéristiques d'un système réel complexe par un autre système idéal simple.

## Références

1. A. Bareche, and D. Aïssani. Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of  $G/G/1$  and  $G/M/1$  queueing Systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5) :1296–1304, 2011.
2. A. Bareche, and D. Aïssani. Kernel density in the study of the strong stability of the  $M/M/1$  queueing system. *Operations Research Letters*, 36(5) :535–538, 2008.
3. A. Bareche, and D. Aïssani. Nonparametric Estimation for a Numerical Evaluation of the Proximity of  $G/G/1$  and  $G/M/1$  Systems. Accepté par le comité scientifique du "24th European Conference on Operational Research (EURO XXIV)", 11-14 Juillet 2010, Lisbon, Portugal, Conference book pp. 237.
4. A. Bareche, and D. Aïssani. Nonparametric Estimation for the Study of the Strong Stability of the  $M/G/1$  Queueing System. Accepté par le comité scientifique du "9th Balkan Conference on Operational Research (BALCOR 2009)", 02-06 Septembre, Constanta, Roumanie, ISBN : 973-86979-9-9, Publisher : EUROGEMA EXIM, Printed in Bucharest - August 2009, Book of Abstracts pp. 6.
5. A. Bareche, and D. Aïssani. Interest of kernel density in the use of strong stability method to precise the proximity of  $G/M/1$  and  $M/M/1$  systems. Proceedings of the Second International Conference Valuetools'2007 (Performance Evaluation, Methodologies and Tools), 23-25 Octobre 2007, Nantes, France, ACM International Conference Proceedings Series. ICST (Institute for Computer Sciences Social Informatics and Telecommunications Engineering), ICST, Brussels, ISBN : ICST 978-963-9799-00-4, pp. 1–5.
6. A. Bareche, and D. Aïssani. Precision of an approximation error of the systems  $G/M/1$  and  $M/M/1$ . Accepté par le comité scientifique du "XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models", 27 Août au 02 Septembre 2006, Sovata-Bai, Roumanie.
7. A. Bareche, and D. Aïssani. Boundary bias correction in nonparametric density estimation : Application to queueing systems. Colloque International "Modélisation Stochastique et Statistique (MSS'2010)", 21-23 Novembre 2010, US-THB/Alger, Recueil des résumés pp. 18.
8. A. Bareche, and D. Aïssani. Kernel density estimation in the study of the strong stability for evaluating the proximity of  $M/G/1$  and  $M/M/1$  systems. Colloque International Statistique des Processus et Applications (CISPA 2008), 18-19 Octobre 2008, Constantine, Actes pp. 55–58.
9. A. Bareche, and D. Aïssani. Application de la méthode du noyau dans l'évaluation numérique de la proximité des systèmes de files d'attente. Séminaire sur la Statistique et ses Applications "STAT'06", 29-30 Mai 2006, Tizi-Ouzou, Actes pp. 156–166.
10. A. Bareche, and D. Aïssani. Sur l'analyse statistique dans les systèmes de files d'attente. Colloque International MOAD 2004 : "Méthodes et Outils d'Aide à la Décision", 27-30 Novembre 2004, Saïda, Recueil des résumés pp. 48.
11. A. Bareche, and D. Aïssani. Application de la méthode du noyau dans l'étude de la stabilité forte des systèmes de files d'attente. 4ème Rencontre Internationale d'Analyse Mathématique & Applications, 26-29 Avril 2004, Sétif, Recueil des résumés pp. 130.
12. A. Bareche. Some statistical aspects to take into account when studying strong stability of stochastic models. Compte rendu des séances du Séminaire Mathématique de Béjaïa 2009-2010, 20 Avril 2010, pp. 41–47.
13. A. Bareche. Strong stability in a queueing system with unknown general distribution. Séminaire Mathématique de Béjaïa, 25 Février 2008, pp. 1–5.
14. A. Bareche. Correction de l'effet de bord dans la méthode du noyau. Compte rendu des séances du Séminaire Mathématique de Béjaïa 2004-2005, 02 Mai 2005, pp. 53–57.
15. A. Bareche. Choix du paramètre de lissage dans la méthode du noyau. Compte rendu des séances du Séminaire Mathématique de Béjaïa 2003-2004, 12 Avril 2004, pp. 67–70.

## On the Estimation of the Mode by Orthogonal Series

Nora SAADI et Smail ADJABI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

### 18.1 Introduction

The most fundamental problem in statistics is the determination of the unknown density of probability function  $h(\cdot)$  and the mode  $x_0$ . Several works have been devoted to the estimation of the mode under nonparametric conditions. Most of these works require regularity conditions such as the existence of the density function, the density being Lipschitz or being twice differentiable, for example. Given a sample set  $X_1, \dots, X_n$  of independent identically distributed variables, each with the unknown probability density  $h(\cdot)$  and mode  $x_0$ . We want to estimate  $x_0$  from this sample set. The classic nonparametric estimator of the mode  $x_0$  is the kernel estimator introduced by Parzen (1962). The last quinquennial has seen an increased interest and numerous papers are dealing with the problem of the mode. To quote only a few of them, Mokkadem (2006) studied mode rate and large deviation upper bounds for the kernel mode estimator. Hermann and Ziegler (2004) obtained rates of nonparametric estimation of the mode in absence of smoothness assumptions. However, the most of the available studies concentrate on kernel estimator introduced by Parzen (1962), and the majority of studies (see for example Asselin de beauville (1978), Gasser, Hall and Presnell (1998)) have consisted of Monte Carlo experiments, with very little attention being paid to theoretical results. There does not even exist a description of theoretical properties of the mode estimators using orthogonal series. But, in many areas of mathematical analysis, the smoothness of a function is more readily determined by the behaviour of its Fourier series. Our thesis in this paper is that the latter approach is natural and convenient when analyzing properties orthogonal series density and mode estimators. Orthogonal series density estimators were introduced by Cencove (1962) and have since been applied to several different areas (harmonic analysis, signal processing, image compression, functional statistics ...). Orthogonal series estimators have found favor in applications because of the ease with which they can be calculated and for their good performance with the multivariate data (see Frey (1976)). In the last decade however, several papers have appeared which deal with the estimation of orthogonal expansion of densities. Some notable examples include (Bosq and Blank (2007), Herrick, Nason and Silverman (2001), and Efromovich (2010)). This method assumes that a square-integrable  $h(\cdot)$  can be represented as a convergent orthogonal series expansion,  $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(x)$ ,  $x \in \Omega$ , where  $\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  is a complete orthonormal system of functions on a set  $\Omega$  of the real line that is, satisfying  $\int_{\Omega} e_k(x) e_j(x) dx = \delta_{ij}$ ,  $0 \leq k, j < \infty$ , where  $\delta_{ij}$  is the delta Kronecker and  $\{a_k\}$  are Fourier coefficients defined by  $a_k = \int_{\Omega} e_k(x) h(x) dx = \mathbb{E}[e_k(X)]$ ,  $k = 0, \dots$ . Orthonormal systems proposed for  $\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  are those with compact support (such as the Fourier, trigonometric, and Haar systems on  $[0, 1]$ , and Legendre systems on  $[-1, 1]$ ) and those with unbounded support such as the Hermite system on  $(-\infty, \infty)$ , and Laguerre system on  $[0, \infty[$ , (see Walter (1994)). A discussion of trigonometric systems can be found in (Efromovich (2010)). Classical orthogonal polynomials, including Legendre, Gegenbauer, Jacobi, and Chebyshev, are a popular choice as well; (see Walter (1994), Budzakis and Radavicius (2005)).

In this paper we have provide a rigorous account of several theoretical aspects of Orthogonal series's mode estimator. Our results show that some of the theoretical properties of Orthogonal series's estimator are similar to those of Parzen's estimator. For example, under the condition that the density has two bounded derivatives in a neighborhood of the mode, and the density is uniformly continuous.

#### References

- Asselin de beauville, J. (1978). Estimation non paramétrique de la densité de probabilité et du mode exemple de la distribution gamma. *Revue de Statistique Appliquée*, (Tome26, N°3) :47-70.
- Cencov, N. (1962). Evaluation of an unknown distribution density from observations. *Soviet Math. Dokl*, 3, 1559–1562.
- Bosq, D., Blanke, D. (2007). Inference and Prediction in Large Dimensions. *Wiley*.
- Efromovich, S. (2010). Orthogonal series density estimation. *Interdisciplinary review : computational statistics*, 2, 467-476.
- Fryer, M. (1976). A Review of Some Non-Parametric Estimators of Density Functions. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 18, 371-380.
- Gasser, T., Hall, P. and Presnell, B. (1998). Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *Journal of the Royal Statistical Society*. 60, 681-691.
- Herrmann, E. and Ziegler, K. (2004). Rates of consistency for nonparametric estimation of the mode in absence of smoothness

assumptions. *Statistics and Probability Letters*, 68 :359-368.

Herrick, D., Nason, G., Silverman, B. (2001). Some new methods for wavelet density estimation. *Sankhya*, A63, 94-411.

Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Stat.*, 33(3) :1065-1076.

Mokkadem, A., Pelletier, M., Worms, J. (2006). Alarge deviation supper bound for the kernel mode estimator. *Theory Probab.Appl.*50, 153-165.

Rudzkis R, Radavicius M.(2005). Adaptive estimation of distribution density in the basis of algebraic polynomials. *TTheory Probab Appl* , 49 :93-109.

Saadi, N., Adjabi, S. (2009). On the estimation of the probability density by trigonometric series. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 38, 3583-3595.

Walter, G. (1994). Wavelets and other Orthogonal Systems with Application. *London : CRC Press*.

## Régression non paramétrique à noyau : Cas multidimensionnel par la méthode du noyau

Karima LAGHA

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

### 19.1 Introduction

L'estimation à noyau de la densité est une technique d'estimation nonparamétrique très utilisée. L'estimateur à noyau de la densité a été d'abord introduit dans le cas univarié, entre 1956 et 1960, par Parzen-Rosenblatt ensuite a été étendu au cas multivarié entre 1990 et 2000 [voir Simonoff]. Dans le cas multidimensionnel, l'estimateur de la densité fait intervenir une fonction noyau  $K$  (dont le choix est arbitraire) et une matrice de lissage  $H$  (dont le choix est important) (voir Wand et Jones 1995).

Cet estimateur s'écrit sous la forme suivante

$$\hat{f}_H(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_H(X - X_i), \quad (19.1)$$

où

- $X = (x_1, \dots, x_d)^T$ ,  $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})^T$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des vecteurs  $d$ -dimensionnels ;
- $H$  est la matrice de lissage (matrice des fenêtres) d'ordre  $d$  symétrique et définie positive ;
- $\mathcal{K}$  est la fonction noyau qui est une densité multivariée symétrique ;
- $\mathcal{K}_H(X) = \det(H)^{-1/2} \mathcal{K}(H^{-1/2}X)$ .

L'espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$ , notée  $r(X) = E(Y/X)$ , a un intérêt important dans l'estimation car elle nous informe sur la liaison entre  $Y$  et  $X$ .

Dans le cas univarié, l'estimateur à noyau de la régression a été introduit en 1964 par Nadaraya-Watson. Des résultats sur la convergence presque complète, pour une estimation ponctuelle de la régression  $r$  et pour une estimation uniforme sur un compact ont été obtenus. Des résultats analogues de convergence en moyenne quadratique et de convergence en moyenne quadratiques intégrées ont été obtenus (voir Ferraty et Vieu 2002).

Dans le cas multidimensionnel, l'espérance conditionnelle s'écrit

$$E(Y/X) = E(Y/X_1, X_2, \dots, X_d) = r(X)$$

où  $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ .

La version multivariée de l'estimateur de Nadaraya-Watson, est donnée par :

$$\hat{r}_{NW}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \mathcal{K}\left(\frac{X_i - X}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{X_i - X}{h}\right)} \quad (19.2)$$

où  $\mathcal{K}$  est une fonction de  $R^d$  dans  $R$  et  $h = h(n)$  paramètre réel strictement positif.

Des résultats analogues au cas unidimensionnel, adaptés au cas multiple, sur la convergence presque complète, pour une estimation ponctuelle et uniforme de la régression  $r$  ont été obtenus (voir Ferraty et Vieu 2002).

On considère la généralisation de l'estimateur de Nadaraya-Watson, au cas d'une matrice de lissage donnée par :

$$\hat{r}_H(X) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \mathcal{K}_H(X_i - X)}{\sum_{i=1}^n \mathcal{K}_H(X_i - X)} \quad (19.3)$$

Où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est un échantillon issu de  $X$  de dimension  $d$  de fonction densité  $f$  et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  un  $n$ -échantillon issu de  $Y$ .

## 19.2 Propriétés statistique de la régression

### 19.2.1 Biais et variance asymptotiques

**Théorème 19.1** : [Ruppert et Wand (1994)]

$$\text{bias} \{ \hat{r}_H / X_1, \dots, X_n \} \simeq \mu_2(\mathcal{K}) \frac{\nabla_r(x)^T H H^T \nabla_f(x)}{f_X(x)} + \frac{1}{2} \mu_2(\mathcal{K}) \text{tr} \left\{ H^T \mathcal{H}_r(x) H \right\}. \quad (19.4)$$

$$\text{Var} \{ \hat{r}_H / X_1, \dots, X_n \} \simeq \frac{1}{n \det(H)} \|\mathcal{K}\|_2^2 \frac{\sigma^2(x)}{f_X(x)} \quad (19.5)$$

dans l'intérieur du support de  $f_X$ .

### 19.2.2 Cas particulier : la régression linéaire

**Théorème 19.2**

$$\text{bias} \{ \hat{r}_{1,H} / X_1, \dots, X_n \} \simeq \frac{1}{2} \mu_2(\mathcal{K}) \text{tr} \left\{ H^T \mathcal{H}_r(x) H \right\}. \quad (19.6)$$

$$\text{Var} \{ \hat{r}_{1,H} / X_1, \dots, X_n \} \simeq \frac{1}{n \det(H)} \|\mathcal{K}\|_2^2 \frac{\sigma^2(x)}{f_X(x)}. \quad (19.7)$$

dans l'intérieur du support de  $f_X$ .

## 19.3 Convergence presque complète de l'estimateur

### 19.3.1 Convergence ponctuelle :

Sous les hypothèses suivantes :

$$r \text{ et } f \text{ sont 2 fois continûment différentiables autour de } x, \quad (19.8)$$

$x \in \mathbb{R}^d$  est un point fixé tel que

$$f(x) > 0. \quad (19.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H = O_{(d,d)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n|H|^{1/2}}{\log n} = \infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}|H|^{-1/2} = 0 \quad (19.10)$$

$$\mathcal{K} \text{ est borné, intégrable et à support compact} \quad (19.11)$$

$$\int \mathcal{K}(u) du = 1; \quad \int u \mathcal{K}(u) du = 0; \quad \int uu^T \mathcal{K}(u) du = \mu_2(\mathcal{K}) I_d. \quad (19.12)$$

Où  $\mu_2(\mathcal{K}) = \int u_i^2 \mathcal{K}(u) du$  est finie et indépendante de  $i$ . Pour alléger les démonstrations, on considère :

$$|Y| < M < \infty \quad (19.13)$$

où  $M$  est une constante.

### 19.3.2 Vitesse de convergence presque complète ponctuelle multivariée sous condition de dérivabilité.

Considérons le modèle (19.8) et supposons que les conditions (19.9),(19.10),(19.11),(19.12) et (19.13) sont satisfaites. On a

$$\hat{r}_H(x) - r(x) = O(\text{tr}(H)) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n|H|^{-1/2}}}\right), \text{ p.co.}$$

### 19.3.3 Elements de démonstration

$$\hat{r}_H(x) - r(x) = \frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)} \quad (19.14)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i \mathcal{K}_H(X_i - x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n |H|^{-1/2} Y_i \mathcal{K}(H^{-1/2}(X_i - x)), \\ \hat{f}(x) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_H(X_i - x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n |H|^{-1/2} \mathcal{K}(H^{-1/2}(X_i - x)). \end{aligned}$$

On utilise

$$\hat{r}_H(x) - r(x) = \frac{\hat{g}(x) - g(x)}{\hat{f}(x)} + (f(x) - \hat{f}(x)) \frac{r(x)}{\hat{f}(x)}, r f = g. \quad (19.15)$$

Le résultat du théorème découle des résultats suivants :

$$E[\hat{f}(x)] - f(x) = \frac{1}{2} \text{tr}\{H \mathcal{H}_f(x)\} \mu_2(K) + o(\text{tr}(H)) = O(\text{tr}(H)) \quad (19.16)$$

$$E[\hat{g}(x)] - g(x) = \frac{1}{2} \text{tr}\{H \mathcal{H}_g(x)\} \mu_2(K) + o(\text{tr}(H)) = O(\text{tr}(H)) \quad (19.17)$$

$$E[\hat{g}(x)] - \hat{g}(x) = O\left(\frac{\log(n)}{n|H|^{-1/2}}\right) \text{ p.co.} \quad (19.18)$$

$$E[\hat{f}(x)] - \hat{f}(x) = O\left(\frac{\log(n)}{n|H|^{-1/2}}\right) \text{ p.co.} \quad (19.19)$$

et

$$\exists \delta > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P[\hat{f}(x) \leq \delta] < \infty$$

## 19.4 Convergence presque complète de l'estimateur

### 19.4.1 Convergence uniforme :

On considère, en plus, les hypothèses suivantes :

$$r \text{ et } f \text{ sont 2 fois continûment différentiables autour de } S, \quad (19.20)$$

$$\exists \theta > 0, \inf_{x \in S} f(x) > \theta \quad (19.21)$$

$$\exists \beta > 0, \exists C < \infty, \forall x \in S, \forall y \in S, |K(x) - K(y)| \leq C \|x - y\|^\beta \quad (19.22)$$

### 19.4.2 Vitesse de convergence presque complète uniforme multivariée sous condition de dérivabilité.

Considérons le modèle (19.20) et supposons que les conditions (19.10),(19.11),(19.12),(19.13),(19.21) et (19.22) sont satisfaites. On a

$$\sup_{x \in S} |\hat{r}_H(x) - r(x)| = O(\text{tr}(H)) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n|H|^{-1/2}}}\right), \text{ p.co.}$$

### 19.4.3 Elements de démonstration

On utilise le découpage suivant :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S} |\hat{r}_H(x) - r(x)| &\leq \frac{\sup_{x \in S} |\hat{g}(x) - g(x)|}{\inf_{x \in S} |\hat{f}(x)|} + \\ &\quad \sup_{x \in S} |f(x) - \hat{f}(x)| \frac{\sup_{x \in S} |r(x)|}{\inf_{x \in S} |\hat{f}(x)|}. \end{aligned} \quad (19.23)$$

D'où

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S} |E[\hat{g}(x)] - g(x)| &= O(\text{tr}(H)) \\ \sup_{x \in S} |E[\hat{f}(x)] - f(x)| &= O(\text{tr}(H)) \\ \sup_{x \in S} |E[\hat{g}(x)] - \hat{g}(x)| &= O\left(\frac{\log(n)}{n|H|^{-1/2}}\right) \text{ P.co.} \\ \sup_{x \in S} |E[\hat{f}(x)] - \hat{f}(x)| &= O\left(\frac{\log(n)}{n|H|^{-1/2}}\right) \text{ P.co.} \end{aligned}$$

et

$$\exists \delta > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P[\inf_{x \in S} |\hat{f}(x)| \leq \delta] < \infty$$

## Références

1. Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics* **29**, 832-837.
2. Parzen, E. (1962). On estiamtes models of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 1065-1076.
3. Simonoff, J.S. (1996). *Smoothing methods in statistics*. ISBN : 0387947167.
4. Wand, M.P. and Jones, M.C. (1995). Kernel Smoothing. *ISBN : 0412552701*, 36-39.
5. Deheuvels, P. (1977), Estimation non paramétrique de la densité par histogrammes généralisés (II) *Publications de l'institut de Statistique de l'Université de Paris*, **22**, 1-23.
6. Singh, R.S. (1976), Nonparametric Estimation of mixed partial derivatives of a multivariate density. *Journal Multivariate Annals*, **6**, 111-122.
7. Ruppert, D. et Wand, M.P. (1994), Multivariate locally weighted least squares regression. *Annals of Statistics*, **22(3)**, 1346-1370.
8. Ferraty, F. et Vieu, P. (2002/2003), Statistique Fonctionnelle : Modèles Non- paramétriques de régression. *Annals of Statistics, Notes de cours de DEA*.



## **Cinquième partie**

---

### **Index des Auteurs**



---

# Index

ADJABI Smail, 47, 69, 77  
AISSANI Djamil, 47, 57, 60  
AMROUN Sonia, 69  
ANZI Aicha, 3  
ATMANI Mouloud, 30  
AZIZOU Zahia, 24  
  
BARECHE Aicha, 73  
BOUALEM Mohamed, 52  
BOUCHAMA Kahina, 11  
BOULFEKHAR Samra, 34  
  
CHERFAOUI Mouloud, 47  
  
DJABALI Yesmina, 57  
  
HAKMI Sedda, 60  
HOCINE Safia, 63

KABYL Kamal, 38  
KENDI Salima, 6  
KHOULALENE Nadjat, 17  
  
LAGHA Karima, 79  
LAIB Fodil, 6  
LEKADIR Ouiza, 60  
  
RABTA Boualem, 57  
RADJEF Mohammed Said, 3, 6, 11  
  
SAADI Nora, 77  
SAIS Lakhdar, 11  
SEMCHEDINE Fouzi, 42  
  
YESSAD Samira, 21

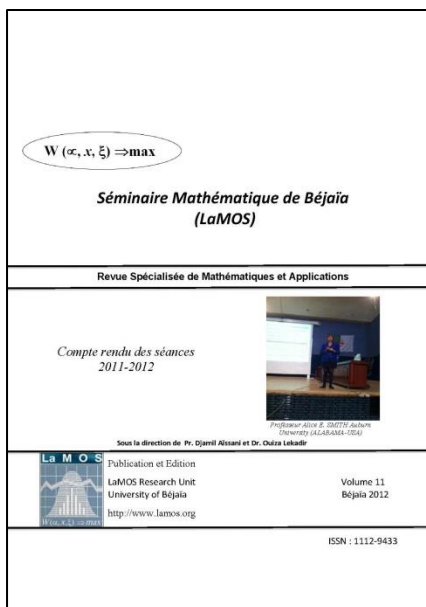
**Lamos Editions, 2011.**



## L'ouvrage :

Ce volume contient la plupart des exposés faits en 2011/2012 au Séminaire Mathématique de Béjaïa. Ils sont centrés autour des domaines d'intérêt des chercheurs du laboratoire de Recherche LAMOS (Modèles déterministes et stochastiques de la Recherche Opérationnelle, Probabilités et statistiques, Optimisation, ...) avec une attrayante dispersion vers des domaines lointains.

**Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433**



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp. 50).

Parmi les conférenciers de l'années 2011 – 2012: Salima Kendi, Lakhdar Saïs, Nora Saadi, Safia Hocine, Kahina Bouchama, ...

**Pour citer ce volume :** Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 11, 2012, 90 pages. ISSN : 1112 – 9433.

**ISSN : 1112 – 9433**