

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)

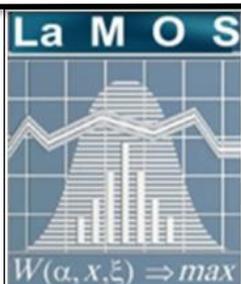
Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications

*Compte rendu des séances
2002-2003*



Pr Natalia Djellab (Univ. Annaba)

Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir



Publication et Edition

LaMOS Research Unit
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 1
Béjaïa 2003

ISSN : 1112-9433

Séminaire Mathématique de Béjaïa
(LaMOS)

Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications

Sous la direction de
Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir

Edition 2003

Séminaire Mathématique de Béjaïa.

Responsable : Mme Iamouchene Ouiza, née Lekadir.

Adresse : Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes.
Université de Béjaïa, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).
Tel/Fax : (213) 34 21 51 88.
E-mail : lamos _ Bejaia@hotmail.com

©Publications du Laboratoire LAMOS, 2003.

Tous droits de traduction, de reproduction
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

Table des matières

partie I Méthodes Cybernétiques et Optimisation	
<hr/>	
1 A-Optimalité dans les problèmes multicritères	
<i>Zohra AOUDIA</i>	3
2 Réalisation d'un logiciel de résolution des Problèmes d'Optimisation Multi-objectifs linéaires et non linéaires	
<i>R. GUETTAF</i>	5
<hr/>	
partie II Systèmes avec Rappels et Réseaux	
<hr/>	
3 Sur l'analyse de stabilité des systèmes de files d'attente avec rappels via les martingales	
<i>Louisa BERDJOU DJ</i>	9
4 Sur la propriété de décomposition du système M/G/1 avec rappels	
<i>Natalia DJELLAB</i>	13
5 Sur l'analyse des réseaux de files d'attente et le problème des flots internes	
<i>Ouiza LEKADIR</i>	17
<hr/>	
partie III Processus Aléatoires et Applications	
<hr/>	
6 Estimation de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte du processus d'attente "Waiting Process"	
<i>Zahir MOUHOU BI</i>	21

7 Stabilité Forte dans un Modèle Stochastique de Gestion des Stocks	
<i>Boualem RABTA</i>	25
8 Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/G/1//N$ à vacances multiples du serveur et service exhaustif	
<i>Fazia RAHMOUNE</i>	29
<hr/>	
partie IV Contrôle Statistique de la Qualité	
<hr/>	
9 Estimation de la courbe de régression de la moyenne par la méthode non paramétrique du noyau	
<i>Smail ADJABI</i>	39
10 Tests non Paramétriques de Fiabilité	
<i>Mohand BOURAINE</i>	43
11 Généralisation des systèmes-k-consécutifs-sur-n.	
<i>Mahmoud BOUSHABA</i>	51
12 Application des lois non paramétriques dans les systèmes d'attente et la théorie de renouvellement	
<i>Karima LAGHA</i>	53
13 Analyse du retour d'expérience pour l'optimisation de la maintenance mécanique d'une raffinerie de pétrole.	
<i>Radouane LAGGOUNE</i>	59
14 Quelques théorèmes de grandes déviations en estimation fonctionnelle	
<i>Djamal LOUANI</i>	63
15 Optimisation de la maintenance par la fiabilité des postes	
<i>Rabah MEDJOU DJ</i>	65
16 Inégalités stochastiques pour des systèmes avec rappels et pannes	
<i>Nadia OUKID</i>	67
<hr/>	
partie V Index des Auteurs	
<hr/>	
Index	71
Index	71

Première partie

Méthodes Cybernétiques et Optimisation

A-Optimalité dans les problèmes multicritères

Zohra AOUDIA

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : zo.aoudia@gmail.com

Résumé

La théorie d'optimisation vectorielle est principalement caractérisée par le fait qu'il n'y pas de concept clair d'optimalité. Ceci a suscité chez les chercheurs l'intérêt d'étudier et de proposer divers concepts d'optimalité. Parmi ces concepts, qui sont nombreux, notre attention a été attirée par la notion de A -optimalité. Dans cet article, nous donnons quelques caractéristiques des solutions dites A -optimales (notion étudiée en premier lieu par Zhukovskiy [1]) et quelques propriétés asymptotiques.

Tout au long de notre travail, nous considérons le problème suivant :

$$\langle X, f(x) \rangle, \quad (1.1)$$

où $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des décisions, $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ est une fonction vectorielle définie sur X . Pour une certaine matrice A à valeurs positives, considérons le problème suivant :

$$\langle X, Af(x) \rangle. \quad (1.2)$$

Définition 1.1 Une décision x^A est dite A -optimale au sens de Slater, si elle est de Slater pour le problème (1.2)

Définition 1.2 Une matrice stochastique A est dite irréductible, si son graphe associé est fortement connexe.

Le résultat principal de notre travail est le suivant :

Théorème 1.1 Pour une matrice stochastique A avec des éléments positifs ($a_{ij} > 0, \forall i, j = 1, \dots, N$), le problème (1.2) est réduit à un problème mono-critère, où

$$\langle X, A^* f(x) \rangle, \tag{1.3}$$

avec A^* la limite de A^n quand $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 1.1 *Le résultat ci-dessus confirme l'idée intuitive qu'après plusieurs agrégations on est amené à attribuer des poids à tous les critères.*

Références

1. V. I. Zhukovskiy and M. E. Salukvadze, Sufficient conditions in vector-valued maxmin problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* **90** (1996), no. 3, 523–534.

Réalisation d'un logiciel de résolution des Problèmes d'Optimisation Multi-objectifs linéaires et non linéaires

R. GUETTAF

Département de mathématiques, Faculté des sciences, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 15 000, Tizi-Ouzou, Algérie.
email : Guettafr@yahoo.com

Résumé

Dans le monde réel, nombreuses sont les situations dont la complexité et les enjeux invitent à la recherche d'une aide à la décision.

Le modèle mono-critère utilisé ne répond plus aux exigences du monde moderne, du fait que les problèmes sont en réalité multi-objectifs. Notre travail s'inscrit justement dans cette dernière approche. Nous proposons un logiciel implémentant une méthode du goal programming, une méthode interactive (NAKAYAMA)[1] ainsi qu'une méthode de Vincke [2]. Dans la résolution du problème multicritère dans ce cas nous avons fait appel à la méthode mono-critère "quasi-Newton à deux côtés".

Mots clés : Optimalité de Pareto, Goal programming, Méthode quasi-Newton.

Références

1. H. Nakayama. Aspiration level Approach to interactive Multi-objective Programming and its Applications. *P.M. Pardalos et al.(eds.), Advances in multicriteria Analysis, Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, 1995.*
2. P. Vincke L'aide Multicritère à la décision. *Editions de l'Université de Bruxelles, 1989.*

Deuxième partie

Systemes avec Rappels et Réseaux

Sur l'analyse de stabilité des systèmes de files d'attente avec rappels via les martingales

Louisa BERDJOUJ¹

LAMOS Université de Béjaia.
l.berdjoudj@yahoo.fr

Introduction

Les systèmes de files d'attentes avec rappels ou avec répétition d'appels sont caractérisés par la propriété suivante : un client arrivant dans le système et qui trouve tous les serveurs et les positions d'attente occupés quitte le système définitivement ou rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Un client qui attend pour rappeler est dit en orbite. Les résultats analytiques et les techniques utilisées pour ses modèles sont résumés dans les articles de synthèse de Yang and Tempteton (1987) et Falin (1990) ainsi que dans la monographie de Falin et Templeton (1997). Il est apparu ces dernière années, dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes de files d'attente caractérisés par la présence simultanée de types d'arrivées : arrivées positives et négatives. L'intérêt porté à ces systèmes était motivé initialement par la modélisation des réseaux de neurones, puis leur domaine d'application se sont étendus pour toucher d'autres systèmes plus complexes, comme les réseaux informatiques avec infection par virus.

Plusieurs méthodes approximatives ont été élaborées pour l'analyse de ce type de systèmes. La théorie des martingales constitue sans doute la technique mathématique de base des probabilités modernes qui sont beaucoup utilisées dans des modèles de finance, mais elles sont peu utilisées dans la théorie de files d'attente. On est intéressé par les articles de Baccelli et Makowski.

La technique de Baccelli et Makowski, était utilisée dans un premier temps, dans la littérature pour démontrer les conditions de stabilité et plus tard pour prouver les fonctions génératrices de probabilité pour le nombre de clients à l'équilibre dans un système de file d'attente M/G/1 classique.

L'application de cette méthode pour le système M/G/1 avec rappels a été faite par H. Oukid dans le cadre de sa thèse de magister.

Le but de ce travail est de présenter quelques notions de la théorie des martingales et leur applications aux systèmes de files d'attente M/G/1 classique et M/G/1 avec rappels.

3.1 Quelques notions sur les martingales discrètes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} .

1. Une suite de variables aléatoires (X_n) est une \mathcal{F}_n -martingale si pour tout n :

i) X_n est \mathcal{F}_n -mesurable (on dit que la suite (X_n) est adaptée).

ii) X_n est intégrable : $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

iii) $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$, p.s.

Le mot "martingale" vient du cas, où X_n représente la fortune d'un joueur après la $n^{\text{ème}}$ partie et \mathcal{F}_n représente son information à propos du jeu à ce moment là. L'égalité (iii) dit que sa fortune espérée après la prochaine partie est la même que sa fortune actuelle.

Une martingale est ainsi un jeu équitable.

2. Si (iii) est remplacé par : $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n$ p.s, on obtient une *surmartingale*, et si (iii) est remplacé par $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq X_n$ p.s, on obtient une *sous martingale*.

3. Une application $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est dite *temps d'arrêt* si $\{T \leq n\}$ est \mathcal{F}_n - mesurable.

4. Un temps d'arrêt τ , est *régulier* par rapport à la martingale M_n si la martingale formée par $M_{\tau \wedge n}$ est uniformément intégrable.

Théorème 3.1 (*Théorème Optimal de Doob*)[2] *Si le processus M_n est une martingale intégrable et τ est un temps d'arrêt régulier alors pour tout couple de temps d'arrêt τ_1 et τ_2 tel que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau$ presque sûrement les variables aléatoires X_{τ_1} et X_{τ_2} existent, sont intégrales et vérifient $X_{\tau_1} = \mathbb{E}[X_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}]$.*

3.2 Etude de stabilité du système M/G/1 via les martingales

Considérons un système de file d'attente M/G/1 avec un taux d'arrivées λ et un taux de service moyen α . Soit $X_n (n \geq 0)$ le nombre de clients dans le système après le $n^{\text{ème}}$ départ servi et $A_n (n \geq 1)$ le nombre de client dans le système durant le temps de service du $n^{\text{ème}}$ client.

On a $X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - \mathbb{I}[X_n \neq 0], \forall n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, on considère la σ -algèbre \mathcal{F}_n engendré par X_0 et $(A_k)_{k=1}^n$. En utilisant la martingale définie par :

$$M_n(z) = \begin{cases} z^{X_0} & \text{si } n = 0 \\ \frac{z^{X_n} z^{\sum_{k=0}^{n-1} I[X_k \neq 0]}}{(a(z))^n} & \text{si } n \neq 0 \text{ dans } \mathbb{N} \end{cases}$$

Baccelli et Makowski [1] ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Sous l'hypothèse $\rho = \lambda\alpha > 1$, le système M/G/1 est instable dans le sens $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$, p.s*

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses précédentes et $\rho \leq 1$, la relation suivante*

$$\mathbb{E} \left[I[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty] \left(\frac{z}{a(z)} \right)^{\nu(\sigma)} / \mathcal{F}_\sigma \right] = I[\sigma < \infty] z^{I[X_\nu=0]} z^{X_\nu}, p.s$$

est vérifiée pour tout $0 < z \leq 1$

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses précédentes et $\rho \leq 1$*

$$\mathbb{P}[\sigma < \infty, \nu(\sigma) < \infty / \mathcal{F}_\sigma] = I[\sigma < \infty] \text{ p.s}$$

et en particulier, $\nu(\sigma) < \infty$ p.s. quand $\sigma < \infty$ p.s.

Corollaire 3.2 *Dans le cas où $\sigma < \infty$ est un \mathcal{F}_n -temps d'arrêt tel que $X_\sigma = 0$, la variable aléatoire $\nu(\sigma)$ représente le nombre de clients servis durant la période d'activité et sous les hypothèses précédentes avec $\rho \leq 1$ on a*

$$\mathbb{E}(\nu(\sigma)) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} & \text{si } \rho < 1 \\ \infty & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

3.3 Etude de la stabilité du système M/G/1 avec rappels

Cette section est consacrée à l'étude de la stabilité de la période d'activité moyenne du système M/G/1 avec rappels par la méthode des martingales. Contrairement au système classique, la période d'activité du système avec rappels contient un certain nombre de périodes d'inactivité du serveur.

La chaîne de Markov induite aux instants de départ est définie par :

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - \delta_{X_n},$$

où A_n est le nombre d'appels primaires pendant le service du $n^{\text{ème}}$ client et

$$\delta_{X_n} = \begin{cases} 1 & \text{si le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ client servi provient de l'orbite,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathbb{P}(A_n = k) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t)$, $k = 0, 1, \dots$, où λ est le taux du flot Poissonien des arrivées primaires et $B(\cdot)$ et la distribution de service de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

En utilisant la fonction génératrice $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(A_n = k)$, $0 \leq z \leq 1$, on remarque que $a(z) = B^*(\lambda - \lambda z)$ où $B^*(\cdot)$ est la T. L. S de la densité de probabilité du temps de service.

Proposition 1 *Pour $0 < z \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, le processus $M_n(z) = z^{X_n} \frac{z^{\sum_{k=0}^{n-1} \delta X_k}}{(a(z))^n}$ est une martingale positive intégrable.*

Considérons maintenant un \mathcal{F}_n -temps d'arrêt σ où \mathcal{F}_n est la σ -algèbre engendrée par $(A_k)_{k=1}^n$ et on définit la variable aléatoire : $\nu(\sigma) = \begin{cases} \inf\{n \geq 1; X_{\sigma+n} = 0\}, & \text{si } \sigma < \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans le cas où $X_\sigma = 0$; $\nu(\sigma)$ représente le nombre de clients servis dans la période d'activité.

Corollaire 3.3 *Sous l'hypothèse $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, on a*

$$\mathbb{E}(\nu(\sigma)) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} \psi(1) & \text{si } \rho < 1 \\ \infty & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

où $\psi(1) = \exp\left\{\frac{-\lambda}{\theta} \int_0^1 \frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{x-B^*(\lambda-\lambda x)}\right\}$ avec θ est le taux des rappels exponentiels.

Conclusion

Les martingales ont été utilisées dans la théorie de files d'attente pour trouver les conditions de stabilité des systèmes classiques. Cette technique peut-être élargie pour résoudre d'autres problèmes intéressants dans la théorie des files d'attente. Comme perspective, on propose d'appliquer la méthode des martingales pour un système de files d'attente à un seul serveur avec rappels et arrivées négatives. Un client positif trouvant à son arrivée le serveur libre, sera immédiatement pris en charge, dans le cas contraire il entre en orbite. Une arrivée négative a l'effet d'éliminer un client dans l'orbite, si elle n'est pas vide. La martingale sera construite en utilisant la chaîne de Markov induite au instants de départs ou d'arrivées négatives.

Références

1. F. Baccelli and A. M. Makowski. Dynamic, transient and stationary behavior of the M/G/1 queue via martingales. *Anal. of Probability*, 17 (4) :1691–1699, 1989.
2. J. Neveu. *Discrete-time Martingales*. North-Holland, Amsterdam, 1975.

Sur la propriété de décomposition du système M/G/1 avec rappels

Natalia DJELLAB

Département de Mathématiques
Université Badji Mokhtar Annaba.
Tél. (213) 34 21 51 88
email : djellab@yahoo.fr

Résumé

Les systèmes de files d'attente avec rappels ont fait l'objet de nombreuses recherches. Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans Aissani (1994), Falin et Templeton (1997). Parmi les principales approches développées ces dernières années, on rencontre la décomposition stochastique. Elle offre les avantages de simplification de résolution de modèles complexes.

Nous nous intéressons à la propriété de décomposition du système de files d'attente M/G/1 avec rappels. Nous considérons les résultats de décomposition obtenus à l'aide de la méthode de la chaîne de Markov induite. Ces résultats concernent les modèles avec serveur fiable et celui sujet à des pannes aléatoires, ainsi que les distributions exponentielle et générale du temps inter-rappels.

La propriété de décomposition du système M/G/1 avec rappels et serveur fiable a été établie par Yang et Templeton (1987). En supposant le temps inter-rappels exponentiel, les auteurs ont prouvé que la fonction génératrice du nombre de clients dans le système M/G/1 avec rappels est le produit de deux fonctions génératrices : la première est la fonction génératrice du nombre de clients dans le système M/G/1 classique à espace d'attente illimité. La seconde est la fonction génératrice du nombre de clients dans le système M/G/1 avec rappels étant donné que le serveur est libre. Yang et al. (1994) ont exploré la propriété de décomposition du système de files d'attente avec rappels et serveur fiable et ont prouvé que la propriété est toujours vraie pour la distribution générale du temps inter-rappels.

La décomposition stochastique devient encore plus intéressante pour le système de files d'attente avec rappels et serveur non fiable. En supposant le temps inter-rappels exponentiel, et en introduisant un système auxiliaire à espace d'attente illimité, pannes du serveur et option pour quitter le système à la panne, Aissani et Artalejo (1998) ont obtenu la

décomposition stochastique pour la chaîne de Markov induite aux instants où le serveur devient libre et opérationnel. Dans ce résultat, le premier facteur de la décomposition est la fonction génératrice de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite liée au système auxiliaire sans rappels. Le second facteur est la fonction génératrice qui définit la distribution stationnaire du nombre de clients en orbite étant donné que le serveur est libre et opérationnel. Nous supposons que ce résultat est toujours vrai dans le cas de la distribution générale du temps inter-rappels, de la même manière que le résultat établi par Yang (1987), (1994) pour les modèles avec rappels et serveur fiable.

Vu la difficulté d'obtenir la solution analytique exacte à partir des résultats cités ci-dessus, nous considérons la solution approximative. La méthode d'approximation a été initialement élaborée pour le modèle avec serveur fiable et distribution arbitraire du temps inter-rappels (Yang et al., 1994). L'approximation porte sur le taux de rappels. Nous adaptons cette méthode pour le modèle avec pannes du serveur.

Pour étudier la performance de l'approximation dans le cas d'un serveur non fiable, les modèles avec rappels et pannes $M/M/1$, $M/E2/1$ et $M/H2/1$ où les distributions du temps inter-rappels sont : exponentielle, Erlang de degré 2 et hyper-exponentielle de degré 2, sont considérés. Nous comparons la solution approximative avec celle de la simulation. La conclusion suivante peut être donnée. La performance de l'approximation est très affectée par le type de distribution du temps de service ainsi que par le type de distribution du temps inter-rappels. Autrement dit, l'accroissement du coefficient de variation du temps de service et de celui du temps inter-rappels a une influence négative et significative sur la performance de l'approximation. Les pannes détériorent également sa précision. La méthode réussit quand le temps moyen inter-rappels est suffisamment petit par rapport au temps moyen de service.

Mots clés : approximation, décomposition stochastique, panne, chaîne de Markov induite.

Références

1. A. Aïssani. A survey on retrial queueing models. *Actes des Journées Statistiques Appliquées, U.S.T.H.B., Alger*,1-11, 1994.
2. A. Aïssani and J. R. Artalejo. On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing Systems* 30(3-4), 309-321, 1998.
3. G. I. Falin. A survey of retrial queues. *Queueing Systems* 7, 127-168, 1990.
4. G. I. Falin and J. G. C. Templeton. Retrial Queues. *Chapman and Hall*,1997.
5. S. W. Fuhrmann and R. Cooper. Stochastic decompositions in the $M/G/1$ queue with generalized vacations. *Operations Research*,33,1117-1129, 1985.
6. E. Gelenbe and R. Iasnogorodski. A queue with server of walking type. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B)*16(1), 63-73, 1980.

7. V. G. Kulkarni and B. D. Choi. Retrial queue with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems* 7, 191-208, 1990.
8. T. Yang et al. An approximation method for the M/G/1 retrial queue with general retrial times. *European Journal of Operational Research* 76, 552-562, 1994.
9. T. Yang and J. G. C. Templeton. A survey on retrial queues. *Queueing Systems* 2, 201-233, 1987.

Sur l'analyse des réseaux de files d'attente et le problème des flots internes

Ouiza LEKADIR

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : ouiza.lekadir@yahoo.fr

Résumé

Les réseaux de files d'attente sont souvent utilisés pour modéliser des systèmes aussi variés que les systèmes informatiques, les systèmes de production ou les protocoles de communication. Cependant, l'analyse de tels réseaux s'avère délicate. En effet, la classe de réseaux dont la solution analytique exacte existe se limite aux réseaux dits à forme produit [1].

La solution à forme produit établie initialement par Jackson en 1957 [2] permet d'expliquer les solutions stationnaires du nombre de clients dans chaque file du réseau comme le produit des probabilités marginales de la longueur de chaque file ce qui simplifie le calcul explicite ou numérique de leurs distributions.

A cause de la simplicité de sa structure, la distribution stationnaire à forme produit constitue un outil analytique puissant pas uniquement en tant qu'expression mathématique exacte pour la distribution de la longueur de la file d'attente, mais également en tant que base pour plusieurs techniques approximées telles que la méthode hiérarchique [3], les méthodes d'agrégation et de décomposition [4]. Dans cet exposé, nous avons actualisé une synthèse sur cette classe de réseaux à forme produit pour aborder par la suite l'applicabilité de la méthode de stabilité forte à ces réseaux en les considérant comme des modèles idéales. En effet, notre première tentative été d'étudier la stabilité du réseau de Jackson 'à forme produit' $[M/M/1(FIFO, \infty), M/M/1(FIFO, \infty)]$ après perturbation de la durée de service d'un réseau complexe $[M/GI/1(FIFO, \infty), M/M/1(FIFO, \infty)]$. La stabilité de ce réseau étant établie dans [5], il reste à déterminer les inégalités de stabilité. le calcul de ces dernières nécessite l'évaluation de la variation du flot de sortie de la file $M/GI/1(FIFO, \infty)$

engendrée par la perturbation de la loi de service. Cependant, l'analyse des processus de sortie des files d'attente en générale et de la file $M/GI/1(FIFO, \infty)$ en particulier reste un domaine ouvert à la recherche puisque peu de résultats sont obtenus depuis le premier travail de Burke [6]. En effet, ne considérant que la file $M/GI/1(FIFO, \infty)$ le seul cas où le processus de départ a été déterminé correspond au cas où la loi de service est exponentielle. Néanmoins, même si la détermination du flot de sortie est délicate, pour l'obtention des inégalités de stabilité une majoration de la déviation du processus de départ est suffisante sans déterminer sa distribution.

Vu que le processus de départ d'une file d'attente dans un réseau est considéré comme le flot d'arrivée vers la prochaine file, toute analyse de réseaux de files d'attente passe par le problème des flots internes. Pour cela, on a donné dans cet exposé une brève synthèse sur les rares résultats établis sur ces flots ainsi que les approches considérées pour leurs étude.

Mots clés : Réseaux de Files d'Attente, forme produit, Processus de Départ, Stabilité.

Références

1. R. Nelson. The Mathematics of product-form queueing networks. *A.C.M. computing survey*, vol. 25, N° 3, pp. 339-369, 1993.
2. R. R. P. Jackson. Networks of waiting lines. *Op. Res.* 5, pp. 518-521, 1975.
3. H. Beilner, J. Mäter, C. Wysocki. The Hierarchical Evaluation Tool Hit 581/ 1995. *University of Dortmund, Dortmund, Germany*6-9. 1995.
4. P. J. Courtois. Decomposability. *Academic Press, New york* 1977.
5. O. Lekadir. Stabilité forte d'un réseau de Jackson en tandem. *Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, 2001. Université de Béjaïa.*
6. P. J. Burke The output of queueing system. *Oper. Res.*, vol. 4, pp. 699-704, 1956.

Troisième partie

Processus Aléatoires et Applications

Estimation de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte du processus d'attente "Waiting Process"

Zahir MOUHOUBI¹

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
 Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
 Tél. (213) 34 21 51 88,
 email : z.mouhoubi@yahoo.fr

Résumé

Sachant l'intérêt suscité pour les processus de marche aléatoire afin d'étudier le mouvement Brownien ainsi que la modélisation de certains systèmes par un processus de ce type, alors nous nous sommes intéressé à un exemple de ce genre. Les résultats obtenus sur les inégalités d'ergodicité et de stabilité, pour les chaînes apériodiques, ont été appliqués. Ce processus, de type marche aléatoire, a été déjà considéré par N.V. Kartashov dans [3] et D. Aïssani dans [2]. Cet exemple illustre concrètement l'applicabilité de la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov (qui décrivent l'évolution de certains systèmes [1]).

Soit $(\xi_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Considérons la chaîne de Markov $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+$, $n \geq 0$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Posons pour $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = P(\xi_1 + x \leq 0)$ et $\alpha(dy) = \delta_0(dy)$, où δ_0 est la distribution de Dirac concentrée en l'origine.

Pour $X_0 = 0$, on a $X_{n+1} = \max(0, \xi_{n+1}, \xi_{n+1} + \xi_n, \dots, \xi_{n+1} + \xi_n + \dots + \xi_1)$. On considère la distribution $P(x, A) = ((x + \xi_1)^+ \in A) = P(X_1 \in A / X_0 = x)$. On constate alors que

$$P(x, A) = P(0 < x + \xi_1 \in A) + h(x) \cdot \alpha(A) \quad (6.1)$$

Introduisons l'opérateur $T(x, A) = P(0 < x + \xi_1 \in A)$. On a alors l'identité $P = T + h \circ \alpha$. Nous considérons la classe de fonction v_γ définie par

$$v_\gamma = \exp(\gamma x), x \in \mathbb{R}^+, \gamma \in \mathbb{R} \quad (6.2)$$

Considérons à présent la distribution $p_n = \alpha T^{n-1} h$, $n \geq 1$.

Lemme 6.1. Soit $\tau = \inf(n : \xi_1 + \dots + \xi_n \leq 0)$, alors $P(\tau = n) = p_n$.

La classe de norme dans l'espace de mesures finies $m\mathcal{E}$ est donnée, en fonction de v_γ , par la relation

$$\|\mu\|_\gamma = \|\mu\|_v = \int_0^{+\infty} \exp(\gamma x) |\mu|(dx)$$

Dans l'espace \mathcal{J} des fonctions bornées et finies sur E , on a

$$\|f\|_\gamma = \sup_{x \geq 0} \exp(-\gamma x) |f(x)|$$

Dans l'espace des opérateurs bornés \mathcal{B} , on a

$$\|Q\|_\gamma = \sup_{x \geq 0} \exp(-\gamma x) \int_0^{+\infty} |Q|(x, dy) \exp(\gamma y)$$

Le théorème suivant donne des conditions de stabilité forte de la chaîne.

Théorème 6.1 *Soit $\mathbb{E}\xi_1 < 0$ et $\forall \delta \geq 0$, $\mathbb{E}[\exp(\delta\xi_1)] < \infty$, alors pour tout γ tel que $\rho(\gamma) = \mathbb{E}[\exp(\gamma\xi_1)] < 1$, la chaîne de Markov X est fortement v -stable, où v_γ étant définie en (6.2).*

Les résultats qui suivent sont obtenus en appliquant ceux obtenus dans [4].

Remarque 6.1 *On a $\|P\|_\gamma = \|T + h \circ \alpha\|_\gamma \leq \|T\|_\gamma + \|h\|_\gamma \|\alpha\|_\gamma < \rho(\gamma) + 1 < 2 < \infty$. D'où,*

$$(l'ergodicité uniforme de la chaîne) \iff (la stabilité forte)$$

En énonçant le théorème fondamental suivant, on introduit la suite de nombres $\lambda(n)$ vérifiant l'équation de renouvellement (6.3) ci-dessous. Pour cela, posons

$$d = PGCD\{n \geq 0 : p_n > 0\} \geq 1$$

Théorème 6.2 *On considère la suite $(\lambda_n)_n$ vérifiant l'équation de renouvellement suivante*

$$\begin{cases} \lambda(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda(k)p_{n-k} + \delta_{0,n-1} & \text{si } n \geq 2, \\ \lambda(n) = 0 & \text{si } n \leq 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Alors,

- 1) $p_n = \alpha T^{n-1} h, n \geq 1$ est une mesure de probabilité.
- 2) $P^n = T^n + \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \lambda_{ij}^n T^i h \circ \alpha T^j$, où $\lambda_{ij}^n = \lambda(n - i - j)$ avec $\lambda(n)$ est la suite vérifiant l'équation (6.3).
- 3) De plus,

$$\begin{cases} \exists \beta \in [0, 1[, \exists \kappa > 0 : |\lambda(kd + 1) - d\lambda| \leq \kappa \beta^{kd} \text{ si } n \equiv 1[d] \\ \lambda(n) = 0 \text{ si } n \not\equiv 1[d] \text{ ou } n < 0. \end{cases}$$

avec

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(kd + 1) = \lambda = \frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} np_n}$$

On supposera le long de cet exposé que $d = 1$. En fait, une condition suffisante pour que $d = 1$ est $\mathbb{E}\xi_1 < 0$. On peut alors estimer, à titre d'exemple, $\|P^t - \Pi\|$.

Théorème 6.3 *Supposons vérifiées les conditions du théorème (6.1), alors pour tout γ tel que $\rho = \rho(\gamma) = E(\gamma\xi_1) < 1$ et pour tout $\Upsilon > 1$ tel que $\rho\Upsilon < 1$ et $\rho\Upsilon < 1$. Alors, on a*

$$\|P^t - \Pi\| \leq \rho^t + \frac{\Upsilon^{-t}}{(1 - \rho\Upsilon)^2} \max\{\pi(\{0\}), \Lambda(\Upsilon)\}$$

où π est la distribution stationnaire de la chaîne X .

De plus, $\Lambda(\Upsilon) = \sup_{t \geq 0} |\lambda(t) - \pi(\{0\})| \Upsilon^t$, et Π est défini par,

$$\Pi = \pi(\{0\}) \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} T^i h \circ \alpha T^j;$$

$\lambda(t)$ est solution de l'équation de renouvellement (6.3) et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \pi(\{0\})$.

On obtient une évaluation du potentiel de la chaîne.

Théorème 6.4 *Supposons vérifiées les conditions du théorème (6.1). Alors, on a*

$$\sum_{t \geq 0} \|P^t - \Pi\| \leq \frac{1}{1 - \rho} + \frac{\Lambda_0}{(1 - \rho)^2} + \frac{\rho(1 + \rho)}{(1 - \rho)^3} \tag{6.4}$$

où $\Lambda_0 = \sum_{t \geq 0} |\lambda(t) - \lambda| < \infty$.

L'une des inégalités de stabilité forte obtenue est donnée par le théorème suivant.

Théorème 6.5 *Sous les mêmes conditions du théorème (6.1), on considère la chaîne Y de noyau de transition Q . De plus, pour tout γ tel que $\rho = \rho(\gamma) < 1$, et pour tout $\Upsilon > 1$ tel que $\rho\Upsilon < 1$, on a*

$$\sup_{t \geq 0} \|Q^t - P^t\|_\gamma \leq \hbar \|Q - P\|_\gamma.$$

Où

$$\hbar = \frac{1}{(1 - \rho - \epsilon)^2} \left(\frac{1}{1 - \rho} + \frac{\Lambda(\Upsilon)}{(\Upsilon - 1)(1 - \rho)^2} + 2 \frac{\pi(\{0\})}{(1 - \rho)^3} \right);$$

où $\Lambda(\Upsilon) = \sup_{t \geq 0} |\lambda(t) - \lambda| \Upsilon^t$.

D'autres résultats ont été obtenus et une généralisation pour $d \geq 1$ a été effectuée (mais non exposée). De plus, une étude comparative, avec les résultats obtenus dans [3] et [2], est en cours.

Références

1. D. Aïssani. Réflexion sur la théorie mathématique de stabilité. *Laboratoire de Recherche Opérationnelle, N°06-86, D.R.S-M.D.N. Bordj-el-Bahri*, pages 1–5, 1986.
2. D. Aïssani. Perturbation des opérateurs de transition pour l'étude de la stabilité des chaînes de markov. *Cahiers Mathématiques, fascicule N°1, (04) :07–12*, Avril 1988.
3. N.V. Kartashov. Asymptotic expansions and Inequalities in Stability Theorems for Markov Chains with relatively bounded perturbations. *Plenum Publishing Corporation*, pages 509–518, 1988.
4. Z. Mouhoubi and D. Aïssani. On the Quantitatives Estimates of the Uniform Ergodicity for Markov chains. *Proceeding of the 8-th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilnius, Lithuania*, pages 7–8, 2002.

Stabilité Forte dans un Modèle Stochastique de Gestion des Stocks

Boualem RABTA

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : brabta@yahoo.fr

Introduction

Le stock peut être vu comme l'accumulation de produits qui peut être utilisée pour satisfaire une demande future. Les problèmes de gestion des stocks demeurent parmi les plus étudiés par les spécialistes de la recherche opérationnelle. On les rencontre fréquemment et lorsqu'ils peuvent être contrôlés par des techniques quantitatives, les bénéfices réalisés sont appréciables. Les modèles stochastiques de gestion des stocks sont plus réalistes, car ils prennent en considération le comportement incertain de certains paramètres. Cependant, ils sont plus difficile à analyser. Ils peuvent contenir un grand nombre de paramètres. En général, ces modèles sont très compliqués et ne peuvent être résolus que d'une manière approximative. Ajoutons à cela, le fait qu'en pratique, les paramètres sont estimés à partir de données empiriques (historiques des ventes, consommations,...). Ici, le modèle est encore une fois sujet à des perturbations. C'est pour cela que l'étude des propriétés qualitatives, en particulier la stabilité, peut avoir un intérêt pour les modèles de gestion des stocks, car elle permet de délimiter le domaine dans lequel le modèle mathématique peut être utilisé comme une représentation fidèle (dans un certain sens) du système réel.

Un système est dit stable, si écarté (perturbé) de sa position d'équilibre, il tend à y revenir. En plus de l'affirmation qualitatives de continuité, la méthode de stabilité forte permet d'obtenir des estimations quantitatives avec un calcul exact des constantes.

7.1 Stabilité forte du modèle (R, s, S)

Considérons le problème de gestion des stocks mono-article mono-échelon suivant. L'état du stocks est inspecté chaque R unités de temps. Si au début de chaque période le niveau

du stock est inférieur ou égale au point de commande s , le gestionnaire commande suffisamment d'articles pour atteindre le stock maximum S . On suppose que les commandes arrivent immédiatement. les demandes successives sont des variables aléatoires discrètes ξ_n , $n \geq 1$, indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune

$$a_k = P(x_1 = k) \quad k = 0, 1, \dots$$

Soit un autre modèle de gestion des stocks de même structure, sauf que les demandes ξ'_n sont de loi :

$$a'_k = P(\xi'_1 = k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Soient $X = (X_n, n \geq 0)$ et $X' = (X'_n, n \geq 0)$ les chaînes de Markov représentant le niveau du stock en main à la date $t_n = nR$ dans les deux systèmes respectivement. Soit $P = (P_{ij})$ et $Q = (Q_{ij})$ leurs opérateurs de transition respectifs. L'état du stock X_{n+1} à la fin de la période $n + 1$ est alors donné par :

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - \xi_{n+1})^+ & \text{Si } X_n > s, \\ (S - \xi_{n+1})^+ & \text{Si } X_n \leq s. \end{cases}$$

où $(A)^+ = \max(A, 0)$.

La variable aléatoire X_{n+1} ne dépend que de X_n et ξ_{n+1} , où ξ_{n+1} est indépendante de n et de l'état du système avant t_n . X est donc une chaîne de Markov homogène, à espace d'état $E = \{0, 1, \dots, S\}$.

Théorème 7.1 *Soit le modèle de gestion des stocks de type (R, s, S) avec livraisons instantanées. La chaîne de Markov $X = (X_n, n \geq 0)$, où X_n représente le niveau du stock en main à la fin de la période n , est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout $\beta > 1$.*

Démonstration. Soit la fonction mesurable $h = \begin{cases} 1 & \text{Si } 0 \leq i \leq s, \\ 0 & \text{Si } s < i \leq S. \end{cases}$ et la mesure $\alpha_j = P_{0j}$.

Alors, on vérifie que $\|P\|_v < \infty$ et que :

- $\pi h = \sum_{i=0}^s \pi_i > 0$, $\alpha \mathbb{1} = 1$, $\alpha h > 0$ et le noyau $T = P - h\alpha$ est non négatif.
- Il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(k) \leq \rho v(k)$ pour $k \in E$.

$$\rho = \frac{\sum_{i=s+1}^{\infty} a_i}{\beta^{s+1}} + \sum_{i=0}^s a_i \beta^{-i} \quad (7.1)$$

7.2 Inégalités de stabilité

Le système de gestion des stocks considéré est fortement v -stable. Ces caractéristiques peuvent approcher celles d'un autre modèle identique en structure sauf en distribution de demande si les lois de demande des deux systèmes sont proches dans un certain sens. La proximité des deux lois sera mesurée par la mesure

$$W = \sum_{i=S}^{\infty} |a_i - a'_i| + \sum_{i=0}^{S-1} |a_i - a'_i| \beta^{S-i} \tag{7.2}$$

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes X et X' , estimons d'abord la déviation du noyau de transition de la chaîne X par rapport à celui de la chaîne X' . On a alors

Lemme 7.1. Soit P (resp. Q) le noyau de transition de la chaîne de Markov X (resp. X'). Alors

$$\|P - Q\|_v \leq W$$

Nous estimons maintenant la norme $\|\pi\|_v$ de la distribution invariante de la chaîne X .

Lemme 7.2. Soit

$$\gamma = \frac{\sum_{i=S}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{S-1} a_i \beta^{S-i}}{(1 - \rho)(1 + H(S - s))} \tag{7.3}$$

où ρ est donné par (7.1) et $H = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\xi}^{n*}$ est la fonction de renouvellement associée à la fonction de répartition F_{ξ} de la variable aléatoire ξ_1 . Alors,

$$\|\pi\|_v \leq \gamma$$

Il est maintenant possible d'énoncer ce résultat.

Théorème 7.2 Soit π et ν les distributions stationnaires des chaînes de Markov X et X' respectivement. Alors, sous la condition $W < \frac{1-\rho}{1+\gamma}$ on a

$$\|\pi - \nu\|_v \leq \frac{W\gamma + 1 - \rho}{1 - \rho - 1 + \gamma W} \tag{7.4}$$

où ρ est donné par la relation (7.1) et γ par la relation (7.3).

Pour prouver ce résultat, il suffit de calculer les constantes et de les remplacer par leurs valeurs dans le théorème de Kalashnikov [3].

Références

1. D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSR, ser. A*, 11 :3-5, 1983.
2. K. J. Arrow, T. Harris, and J. Marschak. Optimal inventory policy. *Econometrica*, 19 :250-272, 1951.
3. N.V. Kartashov. Stabilité forte des chaînes de Markov, in "problèmes de stabilité des modèles stochastiques". *Seminaire VNISSI*, pp. 54-59, 1981.

Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/G/1//N$ à vacances multiples du serveur et service exhaustif

Fazia RAHMOUNE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : ??????

Introduction

La sûreté de fonctionnement des diverses réalisations industrielles est devenue un enjeu important à la fois sur le plan économique, écologique et humain [3].

Ceci a engendré un développement rapide de la recherche, tant sur le plan théorique que pratique. Afin d'élever la fiabilité des systèmes complexes, il existe des méthodes adéquates, telles que la redondance, et la maintenance préventive [3]. Ces périodes de maintenance préventives sont simulées par des périodes de vacances. Ceci nous a mené à la modélisation par les systèmes de files d'attente à source finie et vacances du serveur. Cependant, la complexité de ces systèmes fait qu'on ait eu recours aux méthodes d'approximation. Vu que la méthode de stabilité forte permet d'obtenir des estimations quantitatives en plus de l'analyse qualitative, on se propose d'appliquer cette méthode aux systèmes précédents [1, 4].

8.1 Systèmes de files d'attente avec vacances du serveur

La plupart des travaux sur les modèles classiques traitent des systèmes dans lesquels le serveur reste oisif quand la file d'attente est vide. Cependant, le temps d'oisiveté du serveur pourrait être utilisé pour un travail secondaire dans le but d'améliorer la performance du système. Ces situations d'attente peuvent être étudiées par les "**modèles avec vacances**". Dans un tel modèle, le serveur prend occasionnellement une vacance d'une durée aléatoire, pour accomplir une ou plusieurs tâches secondaires, comme elle peut modéliser une période d'oisiveté du serveur. Ce modèle a été largement étudié et appliqué à divers problèmes dans

l'analyse des systèmes informatiques, des systèmes de communication, systèmes industriels, de production...etc. Pendant plusieurs décennies, plusieurs chercheurs se sont penchés sur les modèles de ce type, les techniques et les résultats obtenus ont été fructueusement utilisés dans une variété d'applications. Une synthèse des systèmes d'attente avec vacances est dans H.Takagi [7, 6] et T.B. Doshi [2]

8.2 Classification des différents modèles d'attente avec vacances

Les files d'attente avec vacances peuvent être classifiées de différentes façons. Les disciplines de service les plus connues sont : la discipline de service exhaustif (complet), la discipline de service avec barrière, la discipline de service limité, système à service limité, la discipline de service non exhaustif ou "politique de décision séquentielle de Bernoulli". Une comparaison des différentes politiques de service est donnée dans T.B. Doshi. Si le serveur retourne d'une vacance et trouve la file d'attente vide, il exécute l'une des deux actions suivantes :

- Sous le schéma de "**vacances multiples**", le serveur commencera immédiatement une autre vacance et continue à prendre des vacances successives, jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client en attente dans la file. Dans ce cas, toute vacance est indépendante de la précédente, mais identiquement distribuée.
- Sous le schéma de "**vacance unique**", le serveur attendra jusqu'à la fin de la prochaine période d'activité pendant la quelle un client au moins sera servi, avant de commencer une autre vacance. Autrement dit, il y a exactement une seule vacance à la fin de chaque période d'activité.

8.3 Description et position du problème

Nous considérons deux systèmes de files d'attente $M/G/1//N$ et $M/G/1//N$ avec vacances multiples et service exhaustif, ayant la même distribution des temps de service $B(t)$.

8.3.1 Description du modèle $M/G/1//N$ avec vacances multiples et service exhaustif

Considérons un système $M/G/1//N$ de files d'attente à un petit taux de vacances multiples et service exhaustif. Le flot des arrivées est quasi aléatoire de taux total $(N-k)\lambda$, qui est décrit comme suit :

Nous supposons qu'il y ait au total N clients dans le système. Notre système consiste en

une source et un système d'attente (file + service). Chaque machine est soit en source soit dans le système d'attente à tout instant. Une machine en source arrive au système d'attente avec une probabilité $\lambda\Delta t$ durant un intervalle de temps arbitraire de longueur Δt . Le serveur commence la vacance à chaque moment où la file devient vide (*service exhaustif*). Si le serveur revient de la vacance trouvant la file non vide, alors la période de vacance se termine pour commencer une période d'activité, sinon il commence une autre vacance (*vacances multiples*). La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition $B(\cdot)$ et de moyenne b . Nous supposons aussi que les durées V des vacances du serveur sont indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de distribution générale notée $V(x)$.

8.3.2 Description du modèle $M/G/1//N$

Par ailleurs, soit le système $M/G/1//N$ sans vacances du serveur, ayant les mêmes distributions des arrivées et de la durée de réparation qui n'est autre que le système $M/G/1//N$ classique. Le système $M/G/1$ sans vacances du serveur a été déjà traité en détails dans Sasfa (1976). Le modèle de files d'attente $M/G/1/ - /N$ à source finie se réfèrent aux problèmes d'interférence des machines, dans le sens que le réparateur attend un nombre fixe de machines qui aléatoirement tombent en panne (plus précisément, avec les durées d'inter-défaillance exponentiellement distribuées de paramètre λ).

8.3.3 Chaînes de Markov induites

Les chaîne de Markov X_n, \bar{X}_n induites aux instants de fin de réparation de la $n^{\text{ième}}$ machine associées respectivement au système $M/G/1//N$ avec vacances et le système $M/G/1//N$ classique sont données par :

La chaîne de Markov induite \bar{X}_n :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + A_{n+1} - 1 + k[1 - U(X_n)] \\ &= \begin{cases} A_{n+1} + k - 1, & \text{si } X_n = 0, \\ X_n + A_{n+1} - 1, & \text{si } X_n \geq 1, \forall k = 1, \dots, N. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.1)$$

où

X_n : est le nombre de machines en pannes juste à la fin de réparation de la $n^{\text{ième}}$ machine,

A_n : est le nombre de machines en panne durant la réparation de la $n^{\text{ième}}$ machine,

k : est le nombre de machines en panne au début d'une période d'activité, $k = \overline{1, N}$.

De même, on peut définir les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} f_k &= P[k \text{ machines en panne à la fin d'une période de vacance}], \quad k = \overline{0, N}. \\ &= C_N^k \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})^k e^{-(N-k)\lambda t} dV(t), \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= P[k \text{ machines en panne au début d'une période d'activité}], \quad k = \overline{1, N}. \\ &= C_N^k \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})^k e^{-(N-k)\lambda t} dV(t), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

La chaîne de Markov induite \overline{X}_n :

$$\overline{X}_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1}, & \text{si } X_n = 0, \\ X_n - 1 + A_{n+1}, & \text{si } X_n \geq 1. \end{cases} \quad (8.2)$$

L'état du système \overline{X}_{n+1} à la fin de la réparation de la $(n+1)$ ^{ième} panne ne dépend que de

\overline{X}_n et A_{n+1} , où A_{n+1} est indépendante de l'état du système avant t_n . La chaîne \overline{X}_n est donc une chaîne de Markov homogène à espace d'état $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, N-1\}$.

8.3.4 Noyaux de transition

Les probabilités de transitions en une étape des chaînes de Markov induites X_n et \overline{X}_n nous permettent d'écrire l'expression générale des noyaux de transition \mathbf{P} et $\overline{\mathbf{P}}$ résumées ci-dessous respectivement :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{j+1} P_{j-k+1} \alpha_k, & \text{si } i = 0, j = \overline{0, N-1}, k = \overline{1, N}, \\ P_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \leq N-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\overline{P}_{ij} = \begin{cases} \overline{P}_j = \int_0^\infty C_{N-1}^j e^{-\lambda t(N-1-j)} (1 - e^{-\lambda t})^j dB(t), & \text{si } i = 0, j = \overline{0, N-1}, \\ \overline{P}_{j-i+1} = \int_0^\infty C_{N-i}^{j-i+1} e^{-\lambda t(N-1-j)} (1 - e^{-\lambda t})^{j-i+1} dB(t) & \text{si } 0 \leq i \leq j+1 \leq N-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.4)$$

Clairement, la chaîne de Markov $\{\overline{X}_n, n = 1, 2, \dots\}$ est irréductible, apériodique à espace d'états fini $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, N-1\}$.

8.4 Critère de stabilité et v -stabilité forte

8.4.1 Notations

Soit $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ l'espace des mesures finies sur \mathbb{E} (la σ -algèbre sur \mathbb{E} est engendrée par les singletons de \mathbb{E}) et $\eta = \{f(i)\}$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur \mathbb{E} .

L'opérateur P_{ij} donne une application linéaire :

$$\begin{aligned} P_{ij} : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \mu &\longmapsto (\mu P)_k(j) = \sum_{i \in \mathbb{E}} \mu_i P_{ik}(j) \end{aligned} \tag{8.5}$$

Le symbole Pf , pour $f \in \eta$ désignera la fonction

$$Pf(k) = \sum_{i \in \mathbb{E}} f(i) P_{ki} \tag{8.6}$$

et l'action de la mesure μ sur la fonction f sera notée par μf .

On introduit sur \mathcal{M} une classe spéciale de norme :

$$\|\mu\|_v = \sum_{j \in \mathbb{E}} v(j) |\mu_j| \tag{8.7}$$

où v est une fonction mesurable, bornée inférieurement par une constante strictement positive (pas nécessairement finie). Cette norme induit dans l'espace η la norme

$$\|f\|_v = \sup_{k \in \mathbb{E}} \frac{|f(k)|}{v(k)}. \tag{8.8}$$

Considérons enfin l'espace \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k \in \mathbb{E}} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \in \mathbb{E}} v(j) |P_{kj}|. \tag{8.9}$$

Théorème 8.1 *Pour que la chaîne de Markov récurrente au sens de Harris X soit v -fortement stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées,*

- a)- *Il existe une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$ telles que, $\pi h > 0, \alpha \mathbf{1} = 1, \alpha h > 0$.*
- b)- *Le noyau $T = \mathbf{P} - h \circ \alpha$ est non négatif.*
- c)- *$\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x), \forall x \in \mathbb{E}$.*

8.4.2 v-Stabilité forte de la chaîne de Markov \overline{X}_n

L'adaptation du théorème précédent à la chaîne \overline{X}_n associée au système $M/G/1//N$ sans vacances (classique), après perturbation du taux des vacances, nous a permis de délimiter le domaine où l'approximation des caractéristiques des deux systèmes " $M/G/1//N$ à vacances multiples et service exhaustif" et $M/G/1//N$ classique est possible. Le théorème suivant caractérise ce domaine.

Théorème 8.2 *Soit le système $M/G/1//N$ de files d'attente avec un taux nul de vacance, qui n'est autre que le système le système réparable à N machines montées en parallèle de taux de défaillance λ constant, et un taux nul de maintenance préventive. La chaîne de Markov induite représentant le nombre de machines en panne à la fin de réparation de la $n^{\text{ième}}$ machine, est fortement v-stable pour une fonction $v(k) = e^{-k(\beta-1)}\beta^k$, pour tout $\beta > 1$.*

Démonstration (Preuve). Pour prouver la v-stabilité de la chaîne de Markov incluse \overline{X}_n pour une fonction $v(k) = e^{-k(\beta-1)}\beta^k$ pour $\beta > 1$, il est suffisant de trouver une mesure α , et une fonction h mesurable sur \mathbb{N} telles qu'on ait :

$\bar{\pi}h_i > 0$, $\alpha_i \mathbf{1} = 1$, $\alpha_i h_i > 0$. En effet, prenons $v(k) = e^{-k(\beta-1)}\beta^k$ pour $\beta > 1$, $h_i = \mathbf{1}_{i=0}$, et $\alpha_j = \bar{P}_{0j} = C_{N-1}^j \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})^j e^{-(N-1-j)\lambda t} dB(t)$, tel qu'on ait :

- $\bar{\pi}h = \bar{\pi}h_i = \bar{\pi}_0 > 0$.
- $\alpha \mathbf{1} = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{P}_{0k} = 1$.
- $\alpha h = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i h_i = \alpha_0 h_0 = \bar{P}_{00} = \int_0^\infty e^{-(N-1)\lambda t} dB(t) > 0$.

Ainsi on vérifie aisément les conditions :

- a)- Le noyau $T = \bar{P} - h \circ \alpha$ est positif.
- b)- $\exists \rho = \int_0^\infty [(1 - e^{-\lambda t})e^{-(\beta-1)\beta} + e^{-\lambda t}] dB(t) < 1$, $\forall \beta > 1$, tel que $Tv(k) \leq \rho v(k)$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.
- c)- $\|\bar{P}\|_v = \sup_{k \in \{0, \dots, N-1\}} \frac{1}{v(k)} \sum_{j=0}^{N-1} |\bar{P}_{kj}| v(j) = \rho < \infty$.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons prouvé pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente avec vacances. Le système $M/G/1//N$ à vacances multiples du serveur et service exhaustif nous a servi d'illustration. Nous avons obtenu les conditions pour lesquelles la chaîne de Markov induite associée à ce modèle

est fortement v -stable. Ceci nous permet de constater la possibilité d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système $M/G/1//N$ à vacances multiples du serveur et service exhaustif par celles du système $M/G/1//N$.

Ces résultats laissent envisager des perspectives de recherche, à savoir l'obtention des inégalités de stabilité pour le système étudié et la mesure performances de la méthode dans ce cas.

Références

1. D. Aissani and N. V. Kartashov. Strong Stability of Imbedded Markov Chains in an $M/G/1$ System. *Theory of Probab. and Math. Stat, Mathematical Society*, 29 :1–5, 1984.
2. B.T. Doshi. Queueing Systems with Vacations-A Survey. *Queueing Syst, Vol. 1*, pages 129–166, 1986.
3. Ilya Gertsbakh. *Reliability Theory with Applications to Preventive Maintenance*. Springer-Verlag Edition, 2000.
4. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht ; Tbm Scientific Publishers*, 138 pages, 1996.
5. Janos Sztrik. Finite Source Queueing Systems and Their Applications. Technical report, University of Debrecen, Institute of Mathematics and Informatics, Departement of Information Technology, August 2001.
6. H. Takagi. $M/G/1/-/N$ Queues with Vacations. *Oper. Res*, 42 :926–939, 1994.
7. H. Takagi. $M/G/1//N$ Queues with Server Vacations and Exhaustive Service. *Operations Research*, Vol. 42, N°5 :926–939, Octobre 1994.

Quatrième partie

Contrôle Statistique de la Qualité

Estimation de la courbe de régression de la moyenne par la méthode non paramétrique du noyau

Smaïl ADJABI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : adjabi@hotmail.com

Résumé

Ce travail présente l'estimateur de la courbe de régression de la moyenne par la méthode du noyau de Parzen-Rosenblatt ainsi que ses propriétés. Cet estimateur noté $\mathbb{E}(X/Y)$ est utilisé pour estimer la dépendance de deux variables aléatoires X et Y quand on ne veut faire aucun à priori sur la loi de X et de Y . Deux exemples sont présentés pour illustrer cet estimateur.

Mots Clés : Estimateur, noyau, densité de probabilité, paramètre de lissage.

Introduction

On s'intéresse au problème de l'estimation de la relation éventuelle entre une variable aléatoire Y et une variable explicative X .

La relation sera de la forme :

$$Y = f(x, \theta) + \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ est l'erreur.}$$

- Si on suppose que la loi du couple (X, Y) est gaussienne de \mathbb{R}^2 , la relation est linéaire et on a :

$$Y = \theta_1 + \theta_2 X + \varepsilon$$

- Lorsqu'on ne veut faire sur le couple (X, Y) aucune hypothèse permettant d'utiliser une méthode paramétrique, on approche alors Y par $\mathbb{E}(Y/X = x)$. On obtient alors le modèle

$$Y = \mathbb{E}(Y/X = x) + \varepsilon = \int y f(y/x) dy + \varepsilon = \int y \frac{f(x, y)}{f(x)} dy + \varepsilon.$$

$f(x, y)$ et $f(x)$ sont, respectivement, les lois du couple (X, Y) et X .

L'objectif étant, si $f(x, y)$ est inconnue, de l'estimer par la méthode non paramétrique du noyau.

9.1 Estimation de la loi du couple

L'estimateur $f_n(x, y)$ de la loi $f(x, y)$ du couple (X, Y) , par la méthode du noyau est donné par CACOULOS sous la forme :

$$f_n(x, y) = \frac{1}{nh^2} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) K\left(\frac{y-y_i}{h}\right).$$

K étant le noyau telle que $\int K(y)dy = 1$ et h paramètre de lissage dépend de n et vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} nh = \infty$.

Sous certaines conditions sur K et sur h , cet estimateur de CACOULOS est consistant en moyenne quadratique, consistant uniformément presque sûrement et asymptotiquement gaussien.

9.2 Estimation de la courbe de régression de la moyenne

$$Y = \mathbb{E}(Y/X = x) + \varepsilon = y(x) + \varepsilon.$$

Une première approximation de $y(x)$ est $Moy(y_i, x_i \in V(x))$ où $V(x)$ est un voisinage de x (moyenne mobile locale). Une version améliorée est la moyenne mobile locale pondérée, pour laquelle les observations dont l'abscisse est plus proche de x ont un poids plus élevé que celles qui en sont éloignées. C'est l'estimateur de Nadaraya-Watson dont la forme est

$$y_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_n(y/x) dy = \frac{\int y f_n(x, y) dy}{\int f_n(x, y) dy} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}.$$

K étant le noyau, il doit vérifier : $\int_{\mathbb{R}} K(y)dy = 1$, et $\int_{\mathbb{R}} yK(y)dy = 0$.

h est le paramètre de lissage vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} nh(n) = \infty$.

Cet estimateur est consistant ponctuellement en probabilité, asymptotiquement gaussien et consistant uniformément presque sûr.

Remarque

Cet estimateur de Nadaraya n'est pas le seul estimateur qui utilise la méthode du noyau. Priestley-Chao ont proposé des modifications qui en améliorent les qualités statistiques. Néanmoins, des études ont montré que le comportement de cet estimateur est assez similaire en pratique.

Estimateur de Nadaraya : $y_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i w_i(x)$, avec $w_i(x) = \frac{K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}$.

Estimateur de Priestley-Chao : $y_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i w_i(x)$, avec $w_i(x) = \frac{x_{i+1}-x_i}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$,

$i = 1 \dots, n, x \in [0, 1], x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} \dots < x_n < x_{n+1} = 1$

Rapport de corrélation et comparaison avec une régression linéaire

* Si le couple (X, Y) est gaussien ; $Y_L = aX + \varepsilon_L$ et on a : $\hat{b} = \frac{Cov(X, Y)}{V(X)} = \rho \sqrt{\frac{V(Y)}{V(X)}}$ et $\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}$. Le carré du coefficient de corrélation linéaire ρ vérifie : $1 - \rho^2 = \frac{V(\varepsilon_L)}{V(Y_L)}$.

Par analogie, on définit pour la courbe de régression de la moyenne $Y_C = \mathbb{E}(Y/X) + \varepsilon_C$ un rapport de corrélation définit par $1 - \eta^2 = \frac{V(\varepsilon_C)}{V(Y_C)}$.

La mesure relative entre les deux régression est : $\eta^2 - \rho^2 = \frac{\mathbb{E}(Y_L - \mathbb{E}(Y/X))^2}{V(Y)}$.

Application

Le noyau utilisé est le noyau gaussien. L'estimateur de la courbe de régression de la moyenne s'écrit alors

$$y_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2h}}}{\sum_{i=1}^n e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2h}}}.$$

Choix du paramètre de lissage

Habbema et Herman ont estimé le paramètre de lissage h par la méthode du Pseudo maximum de vraisemblance ou méthode du "Jackknif". La valeur \hat{h} choisie pour h à partir de l'échantillon est la valeur qui maximise

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; h) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n K\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right).$$

Généralement la procédure précédente d'estimation du paramètre de lissage ne différencie pas les régions de forte densité où la fonction densité risque d'être trop lissée (quand h est trop grand) et celles où les observations sont moins concentrées et où peuvent apparaître dans l'estimation si h est trop faible des ruptures ou des pics non significatifs. Pour pallier à cette difficulté, on peut pour chaque observation x_i moduler le paramètre h en fonction de la concentration des observations autour de x_i .

$$h_i = h d(i), \quad h \text{ étant l'estimateur du } PL.$$

$d(i)$ est une fonction d'autant plus faible que la densité dans le voisinage du point est élevée.

$$d(i) = \frac{dd(i)}{\bar{d}}, \quad dd(i) = \sqrt{\sigma_{i,k(n)}^2} \quad \bar{d} = \sum_{i=1}^{k(n)} dd(i);$$

$$\sigma_{i,k}^2 = \frac{1}{k(n)} \sum_{j=1}^{k(n)} (X_j - \bar{X})^2 \quad \text{et} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k(n)} X_j.$$

La valeur de $k(n)$ proche de \sqrt{n} donne d'assez bons résultats.

Deux exemples sont donnés pour illustrer l'intérêt de l'estimation de la courbe de régression de la moyenne. Sur les deux figures, les observations sont représentées par le signe +, en gras est représentée la courbe de régression de la moyenne et en tirets la droite de régression linéaire. Sur l'exemple 1, la droite de régression linéaire s'écrit $Y = -0.565X + 25.01 + \varepsilon$ avec un coefficient de corrélation de -0.3358 . Ce faible coefficient de corrélation signifie que la régression n'est pas linéaire, par conséquent la dépendance entre les deux variables est mieux représentée par la courbe de régression de la moyenne $\mathbb{E}(Y/X)$. Par contre, sur l'exemple 2, le coefficient de corrélation est égal à -0.8101 , le carré du coefficient de corrélation qui vaut 0.738 est sensiblement égal au carré du rapport de corrélation qui est égal à 0.738 . par conséquent, la dépendance entre ces deux variables est linéaire.

Références

1. S. Adjabi. Estimation non paramétrique de la fonction densité de probabilité par la méthode des noyaux. *Actes des premières journées de mathématiques appliquées, Rabat, Maroc, 15-17 juillet*, pages 626–631, 1992.
2. T. Cacoulos. Estimation of mulivariate density. *Ann. Math. Statist.*, 2 :179, 1996.
3. V.A. Epanechnikov. Non parametric estimation of a multivariate probability density. *Theory of probability and its applications*, 14 :141, 1964.
4. J.D.F. Habbema and J. Hermans. The allock package multigroup discriminant analysis programs based on direct density estimation. *Comp. Stat. Gordesch and P. naeve, physica, Verlag. - Wien.*, 1976.
5. E.A. Nadaraya. On estimating regression. *Theory of probability and its applications*, page 18, 1973.

Tests non Paramétriques de Fiabilité

Mohand BOURAINE¹

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS. Université de Béjaïa 06000, Algérie. email : m.bouraine@yahoo.fr

Introduction

Cet exposé s'intéresse aux tests basés sur les distributions non paramétriques de fiabilité. Celles-ci sont utilisées, en théorie de fiabilité et en analyse de survie, pour pallier aux problèmes liés au manque de données (échantillon de petite taille) et de données censurées ainsi qu'au choix de la loi adéquate sur la base d'un échantillon statistique. Elles donnent une caractérisation qualitative exprimant un stade de la vie d'un équipement : jeunesse, maturité ou vieillesse. Elles trouvent aussi des applications en théorie de files d'attente, gestion de stock, ordonnancement, économie, ... Le livre de Barlow et Proschan [3] et celui de J.L. Bon [4] sont des références dans le domaine. Une classification systématique et actualisée est présentée dans la thèse de Magister de G. Saïdi (1999) [11].

D'autre part, des tests non paramétriques ont été développés. Ils sont sous la forme :

H_0 : " F est exponentielle" contre l'alternative

H_1 : " $F \in C$, mais pas exponentielle".

Où C est l'une des classes de distributions non paramétriques.

Des synthèses ont été élaborées par C.D. Lai (1994) [10] et A. Aïssani (1997) [1].

En général, la construction de ce type de tests se fait de la manière suivante :

- Trouver une mesure appropriée de la déviation de la distribution à tester par rapport à l'exponentielle.
- Proposer une U -statistique basée sur la mesure trouvée en se basant sur un échantillon aléatoire.
- Chercher les propriétés de cette statistique pour de grands échantillons telles la normalité asymptotique et la consistance.
- Calcul de l'efficacité relative asymptotique de Pitman pour certaines familles de distributions : Weibull, Makeham, Gamma, ...

10.1 Distributions Non Paramétriques de Fiabilité

On note par

X : durée de vie d'un équipement et X_t la durée de survie d'un élément d'âge t .

f , F et \bar{F} : fonction de densité, f.r. et de fiabilité de la v.a. X .

$\lambda(t)$: Taux de défaillance donné par

$$\lambda(t) = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}. \quad (10.1)$$

La TTT-transformée , la TTT-plot et la TTT statistique

- La TTT-transformée¹ est une notion introduite par Barlow et Campo (1975) [2]. Pour une distribution F , elle est définie par

$$\varphi_F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(u) du \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1,$$

où $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$.

C'est une notion qui a beaucoup d'applications en fiabilité. Elle permet de donner une caractérisation graphique des distributions non paramétriques.

- La TTT-plot (graphe TTT) s'obtient comme suit :

Soient $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ les statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire issue de F , représentant les instants de panne de n éléments mis en fonctionnement simultanément. On note $S(t_r)$ le temps total du test jusqu'à la $r^{\text{ème}}$ panne, $S(t_r) = \sum_{i=0}^r (n - i + 1)(X_i - X_{i-1})$, où $X_0 = 0$.

On obtient la TTT-plot, en représentant les points $(\frac{i}{n}, U_i = \frac{S(t_i)}{S(t_n)})$, $i = 1, \dots, n$ et en les connectant, par des segments de droites.

- La TTT-statistique est donnée par

$$K_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} S(t_i)/S(t_n).$$

Maintenant on définira les principales lois de probabilité à savoir :

Distribution IFR (DFR) Increasing(Decreasing) Failure Rate.

Une distribution F est IFR (DFR) si

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(x)} \quad \text{est décroissant (croissant) en } t, \forall t \geq 0 \text{ et } x \geq 0. \quad (10.2)$$

1. Total Time on Test Transform

Distribution IFRA (DFRA) Increasing (Decreasing) Failure Rate in Average.

Une distribution F est IFRA(DFRA) si

$$(-1/t) \ln \bar{F}(t) \text{ est croissant (décroissant) en } t \geq 0. \quad (10.3)$$

Distribution NBU (NWU) New is Better (Worse) than Used.

Une distribution F est NBU (NWU) si

$$\bar{F}(x+y) \leq (\geq) \bar{F}(x)\bar{F}(y), \text{ pour } x \geq 0, y \geq 0. \quad (10.4)$$

Distribution NBUE (NWUE) New is Better(Worse) than Used in Expectation.

Une distribution F est NBUE (NWUE) si

$$\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leq (\geq) \mu \bar{F}(t), \text{ pour } t \geq 0. \quad (10.5)$$

Distribution IMRL (DMRL) Increasing (Decreasing) Mean Residual Life.

Une distribution F est IMRL (DMRL) si

$$\mathbb{E}(X_t) = (1/\bar{F}(x)) \int_t^\infty \bar{F}(u)du \text{ est croissante (décroissante) en } t. \quad (10.6)$$

Autres distributions On retrouve dans la littérature d'autres distributions non paramétriques telles : HNBUE (HNWUE), NBU-A (NWU-A), NBUC (NWUC), ...

10.2 Tests Statistiques Pour Distributions Non Paramétriques

Une synthèse a été donnée par C.D. Lai (1994) [10]. Puis, une autre plus récente a été présentée par A. Aïssani (1997) [1].

Pour chaque distribution plusieurs tests ont été construits. On présente, ici, quelques tests importants.

10.2.1 Tests statistiques pour la distribution IFR (DFR)

Plusieurs tests ont été construits pour cette distribution. On trouve :

La procédure TTT (Total Time on Test) :

A l'origine, ce test est un test graphique. Il est basé sur les propriétés de la TTT-transformée et le graphe-TTT. En représentant la TTT-plot sur le carré unité, alors

- Si la courbe obtenue ne s'écarte pas de la première bissectrice alors on accepte l'hypothèse de l'exponentialité (hypothèse H_0).
- Si la courbe est concave, alors on rejette H_0 en faveur de H_1 : " F est IFR".
- Si la courbe est convexe, alors on rejette H_0 en faveur de H_1 : " F est DFR".

Autres tests IFR (DFR)

Test de Fisher, le test de Proschan-Pyke, test U_n , ...

10.2.2 Tests statistiques pour la distribution IFRA (DFRA) :

Une panoplie de tests relatifs à cette distribution ont été développés. On cite :

Le test J_b :

Ce test a été développé par J.V. Deshpandé [7]. L'idée du test est de mesurer la déviation de cette classe de distribution par rapport à l'exponentielle. Ce qui nous conduit à tester :
 H_0 : " $\bar{F}(bx) = \{\bar{F}(x)\}^b, (x > 0, 0 \leq b \leq 1)$ ", contre
 H_1 : " $\bar{F}(bx) \geq \{\bar{F}(x)\}^b, (x > 0, 0 \leq b \leq 1)$ ". Avec une inégalité stricte pour certaines valeurs de x .

La statistique obtenue est alors

$$J_b = n(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(X_i > bX_j).$$

On rejette H_0 en faveur de l'alternative IFRA si $J_b \geq C_{\alpha,n}$, où $C_{\alpha,n}$: est le point critique du test de niveau α .

Ce test est consistant est sans biais.

Le Test T_n :

La statistique du test est donnée par

$$T_n = \tilde{T}_n / \bar{X} = \sum_{i=1}^n J\left(\frac{i}{n+1}\right) X_{(i)} / n\bar{X}.$$

Avec \bar{X} la moyenne empirique de X_1, X_2, \dots, X_n ; $X_{(i)}$ la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre et $J(u) = 2(1-u)[1 - \log(1-u)] - 1$.

Pour les échantillons de grandes tailles, sous H_0 la statistique $(108n/17)^{\frac{1}{2}}T_n$ suit une la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- C'est un test consistant.
- Comparé à d'autres tests (de statistiques B, J_b, K_{n-1}), ce test a une bonne efficacité relative de Pitman pour les alternatives : Weibull, LFR et Makeham.

Autres tests IFRA (DFRA)

Test basé sur la TTT-statistique, test de Link

10.2.3 Autres tests non paramétriques

Une panoplie de tests non paramétriques existe dans la littérature : tests pour NBU (NWU), NBUE (NWUE), HNBUE (HNWUE), ..., et d'autres tests ne cessent d'être développés.

10.3 Tests statistiques avec données censurées

Dans la pratique, avoir des données censurées est une situation très fréquente. Pour cela, les chercheurs ont élaboré des tests pour ce type de données. Dans ce cas, deux échantillons sont considérés : X_1, X_2, \dots issu de la distribution F et Y_1, Y_2, \dots issu de H , distribution des temps de censure. H est inconnue, Elle représente un paramètre de nuisance. Plusieurs tests pour données censurées ont été étudiés, à titre d'exemple IFRA [12], NBU [5], NBUE [9], NBU_{t_0} [8].

Le test statistique pour WNBU avec données censurées à droite est construit comme suit :

Soit $Z_i = \min(X_i, Y_i)$ et $\delta_i = I(X_i \leq Y_i), i = 1, \dots, n$, où $I(X_i \leq Y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq Y_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En utilisant $(Z_1, \delta_1), (Z_2, \delta_2), \dots$, on test l'exponentialité contre l'alternative WNBU. A cause des censures, la fonction empirique F_n de F ne peut être calculée. Donc, on propose de rejeter l'hypothèse nulle en faveur de l'hypothèse alternative pour les petites valeurs de :

$$\Delta(F_n) = J_n^c = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}_n(x+y) \cdot dF_n(x) \cdot dF_n(y), \tag{10.7}$$

où F_n est l'estimateur de F , introduit par Kaplan et Meier (1958), défini par

$$\bar{F}_n(x) = 1 - F_n(x) = \prod_{\{i:Z_i \leq x\}} \{(n-i)/(n-i+1)\}^{\delta_i},$$

où $Z_{(1)} < \dots < Z_{(n)}$ les statistiques d'ordre de Z et $\delta_{(1)}, \dots, \delta_{(n)}$ les $\delta_{(i)}$ correspondants à $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$ resp. J_n^c s'écrit aussi :

$$J_n^c = \sum_{i=1}^n \bar{F}_n(2Z_{(i)}) \cdot \{dF_n(Z_{(i)})\}^2 + 2 \sum_{i < j}^n \bar{F}_n(Z_{(i)} + Z_{(j)}) \cdot dF_n(Z_{(i)})dF_n(Z_{(j)}),$$

où $dF_n(Z_{(i)}) = \bar{F}_n(Z_{(i-1)}) - \bar{F}_n(Z_{(i)})$.

Il est intéressant, dans ce genre de test, d'évaluer la perte de l'efficacité due à la censure. Ceci est possible en comparant ce test avec un autre test du même type sans données censurées.

10.4 Application

Une expérience à l'université de Floride se proposait d'étudier l'effet d'un poison (Méthylmercure) sur la durée de vie de poissons. pour un niveau de dosage donné, les dates de décès en jours étaient : 42, 43, 51, 61, 66, 69, 71, 81, 82, 83. A. Aïssani [1] a testé, au niveau 1 % l'exponentialité contre l'alternative IFRA. Le test T_n a conduit au rejet de l'exponentielle en faveur de l'alternative IFRA.

Appliquons aux données ci-dessus le test J_b , $b = 0.5$, au niveau $\alpha = 0.05$. La valeur de $n(n - 1)J_b = 90$ (calculée) est supérieure à la valeur théorique $C_\alpha = 52$. On rejette donc l'exponentialité au profit de l'alternative IFRA au niveau 5 %.

Références

1. A. Aïssani. Tests statistiques pour distributions non paramétriques. *Deuxième Journée de Statistiques Appliquées (JSA)*, pages 10 – 19, 1997.
2. R.E. Barlow and R. Campo. Total time on test processes and application to failure data analysis. *In Reliability and Fault Tree Analysis*, ed. R.E. Barlow, J. Fussell and N.D. Singpurwalla, SIAM, Philadelphia, pages pp 451 – 481, 1975.
3. R.E. Barlow and F. Proschan. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart and Winston, NY,, 1975.
4. J.L. Bon. *Fiabilité des Systèmes, Méthode Mathématique*. Masson, paris edition, 1995.
5. Y.Y. Chen, M. Hollanders, and N.A. Langberg. Testing whether new is better than used with randomly censored data. *The Annals of Statistics*, 11(1) :267 – 274, 1983.
6. W. de Souza Borges, F. Proschan, and J. Rodrigues. A simple test for new better than used in expectation. *Communication on Statistics - Theory and Methods*, 13(25) :3217 – 3223, 1984.
7. J.V. Deshpandé. A class of tests for exponentiality against increasing failure rate average alternatives. *Biometrika*, 70(2) :514 – 516, 1983.
8. M. Hollander, D.H. Park, and F. Proschan. Testing whether new is better than used of a specified age. *The Canadian Journal of Statistics*, 13(31) :45 – 52, 1984.
9. H. L. Koul and V. Susarla. Testing for new better than used in expectation with incomplete data. *JASA*, vol. 75 :pp. 952 – 956, 1980.
10. C.D. Lai. Tests of univariate and bivariate stochastic ageing. *IEEE Transactions on reliability*, 43(2), June 1994.
11. G. Saïdi. *Lois non Paramétriques de survie : Classification et Applications*. Thèse de Magister, I.N.P.S., 1999.
12. M.T. Wells. A class of tests for increasing failure-rate-average distribution with randomly censored data. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 40 :pp. 152 – 156, 1991.

m_bouraine@yahoo.fr

Généralisation des systèmes-k-consécutifs-sur-n.

Mahmoud BOUSHABA¹

Université Mentouri de Constantine
Faculté des sciences, Département de Mathématiques

Résumé

Cet exposé est consacré à l'étude des systèmes-k-consécutifs-sur-n et leurs généralisations. On rappelle qu'un système-k-consécutif-sur-n est un système formé de n composants disposés linéairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs tombent en panne.

Pour le calcul de la loi limite du temps de panne des systèmes étudiés nous utilisons l'approximation des n variables aléatoires binaires dépendantes par une loi de Poisson établie par Stein-Chen .

Après un bref résumé sur quelques résultats connus sur la formule de fiabilité, le calcul des bornes de celle ci ainsi que les théorèmes limites, nous établissons un nouveau théorème et de nouvelles bornes de fiabilité. Par la suite nous traitons la version tridimensionnelle du système. En effet, nous donnons un encadrement de sa fiabilité, un théorème limite ainsi que quelques exemples numériques comme illustrations. Enfin, nous abordons une autre généralisation des systèmes-k-consécutifs-sur-n à savoir les systèmes m-consécutifs-k-sur-n où la panne du système est causée par la panne de m suites non chevauchées de k composants consécutifs. Pour ces systèmes, nous avons obtenu deux nouvelles formules de fiabilité, une dans le cas indépendant et l'autre dans le cas markovien , avec un encadrement de cette dernière.

Beaucoup de problèmes dans cet axe de recherche restent ouverts à savoir :

- Le cas séparable de tous les systèmes qu'on a étudiés.
- La version bidimensionnelle du système m-consécutifs-k-sur-n.
- La version tridimensionnelle du système m-consécutifs-k-sur-n.
- Le cas Markovien des versions bidimensionnelles et tridimensionnelles du système m-consécutifs-k-sur-n.

Mots clés : Systèmes m-consécutifs-k-sur-n, Fiabilité, Théorème limite, Systèmes séparables, Systèmes markoviens.

Références

1. M. Boushaba. Quelques Généralisations Sur les Systèmes-k-consécutifs-sur-n. *Thèse de doctorat, Université Mentouri de Constantine, 2003.*

Application des lois non paramétriques dans les systèmes d'attente et la théorie de renouvellement

Karima LAGHA

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
 Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
 Tél. (213) 34 21 51 88,
 email : kariam.lagha@yahoo.com

Dans ce travail nous proposons d'utiliser les bornes inférieures et supérieures des fonctions de fiabilité, présentées par Sengupta (1994) dans [1], pour l'évaluation de certaines caractéristiques.

12.1 Application au système d'attente $GI/GI/1$

Nous considérons la propriété de l'appartenance des distributions des temps des inter-arrivées, dans un système d'attente de type $GI/GI/1$, à une classe de distribution non paramétrique donnée.

La borne inférieure ou supérieure associée à la fonction fiabilité (voir le tableau TAB.12.1¹) est utilisée dans la relation (12.1). Cette relation exprime la propriété de monotonie externe [2] permettant de comparer deux systèmes d'attente, ce qui nous permet d'établir une borne inférieure ou supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file du système d'attente $GI/GI/1$. L'expression analytique exacte du temps moyen d'attente dans cette file [2] est donnée par :

$$\mathbb{E}W = \frac{(m_1 - m_B)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2(m_1 - m_B)} - \frac{m_L^2 + \sigma_L^2}{2m_L}.$$

Étant donné deux systèmes $A_1/B_1/1$ (dit original) et $A_2/B_2/1$ (dit système d'approximation), où A_i est la distribution des temps des inter-arrivées de moyenne m_i finie, de variance σ_i^2 et de coefficient de variation $C_{ai} = \sigma_i/m_i$ et B_i la distribution de service dans le système $A_i/B_i/1$ d'intensité de trafic ρ_i , $i = 1, 2$. Notons m_{Wi} , $i = 1, 2$, le temps moyen d'attente dans la file.

1. La méthode permettant d'évaluer ces bornes est présentée en détail par *Sengupta* dans [1]

Classe	Borne supérieure	Borne inférieure
<i>IFR</i>	$\bar{F}(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{si } x < m_r^{1/r} \\ \delta_x & \text{si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\int_0^1 r y^{r-1} \delta_x^y dy = \frac{m_r}{x^r}$	$\bar{F}(x) \geq \begin{cases} \inf_{0 \leq \beta \leq x} e^{-\alpha} & \text{si } x < m_r^{1/r} \\ 0 & \text{si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\int_0^\infty (\beta + \frac{x-\beta}{\alpha} z)^r e^{-\alpha} dz = m_r$.
<i>NBU</i>	$\bar{F}(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{si } x < m_r^{1/r} \\ \delta_x & \text{si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\int_0^1 r y^{r-1} \delta_x^y dy = \frac{m_r}{x^r}$	$\bar{F}(x) \geq \begin{cases} \delta_x & \text{si } x < m_r^{1/r} \\ 0 & \text{si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\sum_{j=0}^\infty \delta_x^j [(j+1)^r - j^r] = \frac{m_r}{x^r}$.
<i>DFR</i>	$\bar{F}(x) \leq \begin{cases} e^{-(rx/x_0)} & \text{si } x < x_0 \\ (x_0/x)^r e^{-r} & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$ où $x_0 = r \left[\frac{m_r}{\Gamma(r+1)} \right]^{1/r}$	$\bar{F}(x) \geq 0$
<i>NWU</i>	$\bar{F}(x) \leq \delta_x$ où $\sum_{j=1}^\infty \delta_x^j [j^r - (j-1)^r] = \frac{m_r}{x^r}$.	$\bar{F}(x) \geq 0$

Table 12.1. Bornes de $\bar{F}(x)$ (basées sur le $r^{i\grave{e}me}$ moment m_r) dans différents cas.

Le théorème (5.2.1) [2] énonce la propriété de monotonie externe. Cette propriété permet sous la condition suffisante suivante :

$$A_2 \leq_{cv} A_1 \quad \text{et} \quad B_1 \leq_c B_2, \quad (12.1)$$

de conclure que $m_{W1} \leq m_{W2}$, où \leq_c (resp. \leq_{cv}) désigne l'ordre convexe (resp. concave). Si la distribution A_1 possède une propriété qualitative donnée (*IFR* ou *NBU*), alors elle est majorée ou minorée par la distribution A_2 . Cette dernière est exprimée dans le tableau TAB.12.1. En utilisant cette propriété nous proposons une borne supérieure pour le temps moyen d'attente stationnaire dans la file du système $GI/GI/1(\infty, FIFO)$.

Distribution IFR :

On suppose que la distribution A_1 appartient à la classe *IFR*. En utilisant la relation (12.1) on établit une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file, donnée par :

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2m_1(1 - \rho_1)} - 1/2m_1(\rho_1 + C_{a1}^2) \leq m_{W1} \leq \frac{\mathbb{E}\beta^2}{2m_1[1 - e^{-1} - \rho_1]}. \quad (12.2)$$

Distribution NBU :

En utilisant la borne inférieure de la fonction fiabilité correspondante à la distribution A_1 de loi *NBU* "New Better than Used" (voir le tableau TAB.12.1) et la relation (12.1), nous établissons une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file, donnée par :

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2m_1(1 - \rho_1)} - 1/2m_1(\rho_1 + 1) \leq m_{W1} \leq \frac{\mathbb{E}\beta^2}{m_1[1 - e^{-1} - 2\rho_1]}. \quad (12.3)$$

Résultats :

1. La borne supérieure dans le cas *IFR* existe sous la condition $\rho_1 < 1 - e^{-1} \simeq 0.6321$ et les valeurs de la borne de $\frac{m_1}{\mathbb{E}\beta^2} \cdot m_{W1}$ sont données dans le tableau TAB.12.2.
2. La borne supérieure proposée dans le cas *NBU* existe si $\rho_1 < (\frac{1-e^{-1}}{2}) \simeq 0.316$ et les valeurs de la borne de $\frac{m_1}{\mathbb{E}\beta^2} \cdot m_{W1}$ sont données dans le tableau TAB.12.2.
3. La borne supérieure proposée dans chacun des deux cas (*IFR* et *NBU*) est une fonc-

Classe \ ρ_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
<i>IFR</i>	0.939	1.157	1.505	2.154	3.784	15.566
<i>NBU</i>	2,3142	4,3081	31,1327	×	×	×

Table 12.2. Borne supérieure de la quantité $\frac{m_1}{\mathbb{E}\beta^2} \cdot m_{W1}$

tion croissante du taux de trafic. Ceci apparaît clairement dans les résultats du tableau TAB.12.2.

12.2 Application à la théorie de renouvellement

Considérons un système formé de deux éléments réparables ξ_1 et ξ_2 . Les temps de fonctionnement X_0, X_1, \dots sont supposés i. i. d. et indépendants des temps de réparations Y_1, Y_2, \dots , qui sont aussi iid, de moyenne d'ordre r notée m_r , $r \geq 1$, de variance σ_R^2 et de coefficient de variation $C_R = \sigma_R/m_1$. Soit $N = \inf\{n : X_n < Y_n\}$. Le temps de vie T du système est la v.a. $T = X_0 + X_1 + \dots + X_N$. On suppose que les X_i sont exponentiellement distribués, de paramètre λ et que les temps de réparation de fonction distribution R appartenant à une classe de distributions non paramétrique donnée.

Le temps moyen de vie du système est exprimé en fonction des temps de réparation par

$$\mathbb{E}T = \lambda^{-1} \left(1 + \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} dR(t) \right)^{-1} \right), \tag{12.4}$$

La proposition (7.2.1) énoncée dans [2] permet la comparaison du temps moyen de vie de deux systèmes identiques à deux éléments réparables ayant pour fonctions de distribution des temps de réparation les fonctions R_1 et R_2 et tels que λ_1 et λ_2 sont les paramètres des temps de fonctionnement. Sous la condition suivante :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \quad \text{et} \quad R_1 <_L R_2, \tag{12.5}$$

les temps moyen de vie des deux systèmes sont tels que $\mathbb{E}T_1 \geq \mathbb{E}T_2$, où $<_L$ désigne l'ordre Laplacien. *Stoyan* [2] propose les deux résultats suivants : $1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E}T \leq 1 + (1 + C_R^2)/(1 - \exp(-\lambda m_1(1 + C_R^2)))$, et si R est *NBUE*, alors

$$1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E}T \leq 1 + (1 + \lambda m_1)^{-1}. \quad (12.6)$$

Temps de réparation IFR :

On suppose que la distribution R_1 appartient à la classe *IFR*. En utilisant la relation (12.5), on établit une borne inférieure pour le temps moyen de vie du système exprimé par la relation (12.4) :

$$1 + (1 + \beta)^{-1} \geq \lambda \mathbb{E}T_1 \geq \left[1 + \frac{\beta^{-1} + 1}{1 - e^{-(1+\beta)}} \right], \quad \text{avec } \beta = \lambda m_1.$$

Temps de réparation NBU :

En utilisant la relation (12.5), on établit une borne inférieure pour le temps moyen de vie du système, donnée par :

$$1 + (1 + \beta)^{-1} \geq \lambda \mathbb{E}T_1 \geq 1 + \frac{\beta}{\beta + e^{-\beta} - 1}, \quad \beta = \lambda m_1.$$

Temps de réparation DFR :

En utilisant la relation (12.5), on établit une borne supérieure pour le temps moyen de vie du système, donnée par :

$$1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E}T_1 \leq \left[1 + \frac{r + \theta}{\theta(1 - e^{-(r+\theta)}) + (r + \theta)e^{-r\theta} \int_{\theta}^{\infty} x^{-r} e^{-x} dx} \right], \quad \theta = \lambda x_0.$$

Temps de réparation NWU

En utilisant la relation (12.5), on établit une borne supérieure, donnée par :

$$1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E}T_1 \leq \left[1 + \frac{1}{1 - \theta e^{\theta} \int_{\theta}^{\infty} e^{-x} x^{-2} dx} \right], \quad \theta = \lambda m_1.$$

Remarque 1. La borne inférieure de la relation (12.6) est une borne proposée par *Stoyan* pour n'importe quelle distribution des temps de réparation. On peut donc l'utiliser dans le cas *DFR* et *NWU*.

Remarque 2. Dans le cas des distributions *DFR* et *NWU*, les bornes supérieures sont fonction de l'intégrale : $\int_{\theta}^{\infty} e^{-y} y^{-r} dy$, avec $\theta = \lambda m_r$. Cette intégrale est convergente pour toute valeur de r positive.

Conclusion

Dans ce travail nous avons traité le problème d'évaluation de performances d'un système d'attente de type $GI/GI/1$ et d'un système formé de deux éléments réparables. Nous avons considéré la propriété qualitative de la distribution des temps des inter-arrivées pour le premier système et celle de la distribution des temps de réparation pour le deuxième système.

Les caractéristiques étudiées sont le temps moyen d'attente dans la file du premier système et le temps moyen de vie dans le deuxième système. Les bornes proposées dans cet article peuvent être utilisées pour d'autres classes de distributions : dans le premier système étudié, la borne supérieure proposée pour le temps moyen d'attente dans le cas NBU (relation 12.3) peut être utilisée pour la classe $IFRA$, car $IFRA \Rightarrow NBU$.

Dans le deuxième système considéré, on peut utiliser les bornes proposées pour d'autres classes de distributions des temps de réparation.

Références

1. D. Sengupta. Another look at the moment bounds on reliability. *J. Applied. Probability*, 31 :777-787, 1994.
2. D. Stoyan. Comparison methods for queueing models and other stochastic models. John Wiley, 1983.

Analyse du retour d'expérience pour l'optimisation de la maintenance mécanique d'une raffinerie de pétrole.

Radouane LAGGOUNE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : adjabi@hotmail.com

Résumé

Après le succès qu'ont connu les techniques de fiabilité et de maintenance, notamment dans l'armement et l'aérospatiale, au niveau mondial, l'industrie de pétrole n'a pas tardé à s'y intéresser. Actuellement, les compagnies pétrolières ont réalisé que la compétitivité et la rentabilité économique ne peuvent être obtenues que par l'intégration de ces nouvelles techniques[1, 2, 3].

En Algérie, le retour d'expérience relatif à l'exploitation des matériels dans les raffineries de pétrole est riche mais ambigu et partiel, son exploitation étant rarement réalisée. Ceci favorise la persistance de certaines situations indésirables (coûts de maintenance élevés, arrêts d'installations fréquents et lents, mauvaise gestion de la pièce de rechange, ...). Quant à la fiabilité, elle n'en est qu'à son stade embryonnaire [4].

L'objet de ce travail est précisément de présenter une méthodologie d'analyse et de traitement du retour d'expérience relatif aux défaillances (données brutes collectées sur site industriel) pour une aide à l'amélioration de l'exploitation des installations pétrolières. Lors de la collecte de données, effectuée sur site industriel (raffinerie de Skikda), nous avons été confrontés à diverses difficultés. Notons la diversité des constructeurs, l'absence de banques de données de défaillances et la partialité des fichiers historiques, voir même leur ambiguïté. Dans certains cas, nous avons été dans l'obligation de confronter plusieurs sources (ordre de travail, fiche historique, bilan de marche de l'unité, bon de sortie magasin, rapport d'intervention, ...). Parfois, le recours à l'expérience des agents de maintenance était indispensable pour valider ou rejeter certaines données.

Les données de base, utilisées dans la présente étude, se trouvent consignées à l'état brut dans les fichiers historiques, elles représentent les dates de défaillance ou de remplacement préventif des différents composants. L'écart de temps, entre deux défaillances consécutives

constitue le TBF (Time Between Failure), il représente la variable aléatoire qui constituera nos échantillons. Par analogie aux plans d'essais, les données de survie forment des échantillons censurés pour les raisons suivantes :

- **les temps de défaillance** : la date t référencée par rapport à une origine est considérée comme une donnée de défaillance.
- **les temps de censure (ou de troncature)** : il existe trois types de données de censure : les données censurées à droite, les données censurées à gauche et les données censurées par intervalle.

Devant la diversité et la multiplicité des équipements se trouvant dans un complexe de raffinage du pétrole, une analyse légère (analyse de Pareto) permet de dégager les équipements vitaux, puis de déterminer les composants qui contribuent significativement à la diminution de la disponibilité des équipements. Suivie d'une analyse plus fine matérialisée par une analyse classique de la fiabilité. Elle consiste en l'ajustement de lois de fiabilité par le modèle de Weibull à deux paramètres, les censures engendrées par des actions de maintenance sont prises en considération lors du calcul des fonctions de survie empiriques par la méthode de "Kaplan-Meier". La validation des modèles est réalisée par le test de Kolmogourov-Smirnov [5].

L'application des tests pour les lois non paramétriques de fiabilité (test de Proshan-Pyke et le test graphique basé sur la TTT-statistique) [6, 7] permet de confirmer la tendance d'évolution du taux de défaillance. Cette connaissance a pour but de déterminer l'évolution de la fiabilité des composants et de détecter ceux qui sont sensibles ou critiques au sens de la sûreté de fonctionnement, et dont l'état peut éventuellement dégrader la fiabilité des équipements. Elle permet d'autre part, de choisir la politique de maintenance appropriée.

Dans l'esprit d'une démarche RCM (en anglais "Reliability Centred Maintenance"), les résultats de l'analyse sont exploités pour optimiser la maintenance préventive, par la détermination des temps optimums de remplacement des composants, en introduisant le critère économique (coûts) par la théorie de renouvellement suivant le modèle ci-dessous [8] :

Soient : C_p : le coût du renouvellement préventif de la pièce,
 C_d : le coût entraîné par une journée d'arrêt (coût de la pièce non compris).

Le coût moyen par unité de temps $G(T)$, sera :
$$G(T) = \frac{C_p + [1 - R(T)]C_d}{\int_0^T R(t)dt}$$

Dans le cas où T tend vers l'infini, on aura :

$$G(\infty) = \frac{C_p + C_d}{\int_0^T R(t)dt} = \frac{C_p + C_d}{MUT(T)} = G_c.$$

D'où, l'une des conditions pour pratiquer du préventif à "T" est d'avoir : $G(T) < G(\infty)$. Si le taux de défaillance est croissant, la fonction $G(t)$ admet un et un seul minimum (fig. ci-dessous), il est la solution de l'expression : $\frac{dG(t)}{dt} = 0$. L'originalité de ce travail réside dans l'application de lois non paramétriques de fiabilité, ne nécessitant aucune hypothèse préalable et qui offrent des alternatives, en cas de rejet de la loi testée.

L'illustration de cette méthodologie a été réalisée sur le complexe de raffinage de pétrole de SKIKDA.

Références

1. A. BILLON, G. HEINRICH et A. HENNICO. Carburants : les nouvelles approches, point de vue et solutions proposées par l'Institut Français du Pétrole. *Pétrole et Techniques* (388), pp. 23-45, Mai - Juin 1994.
2. H. P. BLOCH. What is the HPI's reliability state? *Hydrocarbon Processing*; vol. 75, (11); pp. 19- 20; November 1996.
3. H. P. BLOCH. How the best petrochemical companies will achieve reliability. *Hydrocarbon Processing*; vol. 75, (7); pp. 83- 86; July 1996.
4. D. AISSANI. Douze ans de fiabilité en Algérie. *Actes de la Journée d'étude MFSI'2 (Modèles de Fiabilité et Sciences de l'Ingénieur), EMP (Bordj-el-Bahri)*, Juin 1997.
5. R. LAGGOUNE and D. AISSANI. Repeat Failure Analysis for Oil refinery Maintenance Optimization, Case Study of Skikda Refinery Compressing Magnaforming. *Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR'2000), Bordeaux, France*, July 4-7, 2000, vol. 2, pp. 671-674.
6. A. AISSANI. Tests statistiques pour distributions non paramétriques. *Journées de statistiques appliquées, Alger*, 30 Nov, 1 et 2 Dec. 1997.
7. C. D. LAI. Tests of univariate and bivariate stochastic ageing. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 43, pp. 231-241, 1994.
8. R. FAURE et J. L. LAURIERE. Fiabilité et renouvellement des équipements. *Gauthier-Villars*, 1974.

Quelques théorèmes de grandes déviations en estimation fonctionnelle

Djamal LOUANI

Université de Reims & Université de Paris VI,
email : louani@ccr.jussieu.fr

Résumé

Nous établissons des résultats de grandes déviations de type Chernoff en estimation fonctionnelle non paramétrique et nous déduisons quelques applications de ceux-ci. Dans le cadre de suites de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, nous étudions les déviations ponctuelle, uniforme et en norme L_1 par rapport à la densité sous-jacente de l'estimateur à noyau de la densité de probabilité. Les fonctions de taux sont complètement identifiées. Dans le cas uniforme, à quelques conditions de régularité complémentaires près portant sur la fenêtre de lissage et les queues de la distribution en question, le résultat obtenu est identique à celui établi dans le cas ponctuel pris au point mode de la densité considérée. Dans le cas de la norme L_1 , nos résultats sont universels dans le sens où les fonctions de taux sont indépendantes de la densité sous-jacente et du noyau utilisé. Nous obtenons des résultats similaires pour les déviations ponctuelle et uniforme de l'estimateur de la densité par la méthode des séries orthogonales. Nous proposons des applications de nos résultats à l'étude de l'efficacité, au sens de Bahadur, des tests d'hypothèses où diverses comparaisons sont faites et à la sélection de modèles illustrée ici par la comparaison des performances de la méthode du noyau et de la méthode des séries orthogonales en estimation de la densité.

Références

1. R. R. Bahadur. Some Limit Theorems in Statistics. *SIAM, Philadelphia, Pennsylvania*, 1994.
2. A. Dembo & O. Zeitouni. Large deviations techniques and applications. Second edition, Springer-Verlag, New York, 1998.
3. D. Louani. Large deviations limit theorems for the kernel density estimator. *Scand. J. Statist.* 25, 243-253, 1998.
4. D. Louani. Large deviations for the L_1 -distance in kernel density estimation. *J. Statist. Plan. Inf.* 90, 177-182, 2000.
5. D. Louani. Large deviations theorems for orthogonal series density estimators and some applications. *Mathematical Methods of Statistics*, À paraître, 2003.

6. Ya. Nikitin. Asymptotic efficiency of nonparametric tests. Cambridge University Press, 1995.

Optimisation de la maintenance par la fiabilité des postes

Rabah MEDJOUJ

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : medjoudj@yahoo.fr

Résumé Pour répondre aux préoccupations d'évaluation et d'optimisation des actions de maintenance du réseau de transport de l'entreprise nationale de distribution d'électricité et de gaz (**SONELGAZ**), une étude et une application de la démarche de la **RCM** (Reliability Centered Maintenance) connue sous le nom **OMF** (Optimisation de la Maintenance par la Fiabilité) sont à développer et à réaliser. Il s'agit d'organiser la maintenance des équipements autour d'objectifs de cette méthode est basé sur l'avancée considérable et les acquis antérieurs dans le domaine de fiabilité des systèmes électriques et la disponibilité des centres de recherche et de décision à la création d'une équipe pluridisciplinaire pour la prise en charge du projet.

Mots clés : Fiabilité, Evaluation, Optimisation, Energie, Transport.

L'OMF en Algérie et dans le monde

La politique actuelle de maintenance E3P (**Entretien Périodique Préventif Programmé**) soutenue par SONALGAZ, vu l'étendue du réseau, s'avère onéreuse et ne répond plus aux exigences croissantes des consommateurs en terme de qualité de service (fréquences et durées de coupures) et n'offre pas une souplesse et une optimisation satisfaisantes. Cette dernière est déclinée par la méthode **OMF** (**Optimisation de Maintenance par la Fiabilité**) et connue sous son nom originel **RCM** (**Reliability Centered-Maintenance**), devenue aujourd'hui un standard qui a fait ses preuves dans plusieurs domaines tels que : l'aéronautique, le nucléaire etc . . .

Depuis plusieurs années, L'EPRI (**Electric Power Research Institute**) a lancé un programme de recherche pour transposer la méthode RCM à la maintenance des centrales nucléaires et des postes et réseaux électriques

Dès le début de 1999, la méthode RCM a acquis ses lettres de noblesses en devenant une base de norme internationale CEI (**Commission Electrotechnique Internationale**). Cette méthode vise à organiser la maintenance des équipements autour d'objectifs de fiabilité sous contrainte de coût. Son application aux réseaux SONELGAZ doit être encouragée

par les résultats prometteurs obtenus par les entreprises et compagnies étrangères, nous citons EDF, qui depuis 1994 l'a appliqué à un sous ensemble de poste 400 KV. En marge de cette méthode, un intérêt particulier peut être accordé pour le cas des transformateurs, en réfléchissant à la maintenance conditionnelle. Elle aura pour objectif de déclencher une maintenance sur constat d'un défaut ou la planifier à l'aide d'indicateurs.

Ce type de maintenance est aujourd'hui préféré à la maintenance préventive systématique. Elle contribue à l'optimisation de la maintenance et améliore la disponibilité des équipements. Une surveillance aura pour mission d'apporter une aide à cette dernière. Les données de surveillance doivent être interprétées en exploitant des connaissances de l'équipement, ses défauts potentiels et leurs symptômes. C'est à dire qu'elle permet l'insertion des acquis antérieurs dans le domaine de la fiabilité et de la maintenance appuyé par une organisation du retour d'expérience.

Cette démarche incite à réfléchir à la création d'une structure de projet interdisciplinaire spécifique au niveau de la compagnie d'électricité. Un projet dit pilot peut être initié sur les bases de cette démarche, qui suivant la satisfaction de son application et des résultats obtenus, donnera lieu à une généralisation à l'ensemble du réseau SONELGAZ.

Références

1. D. Aissani, R. Medjoudj, Contribution of experience feed-back and its processing to reliability analysis of an electrical distribution system, *Soumis et accepté à la première conférence internationale ICEE'2003, Algérie.*

Inégalités stochastiques pour des systèmes avec rappels et pannes

Nadia OUKID

Département de Mathématiques, Université de Blida, B.P. 270, Blida ; Algérie,
email : oukidnad@yahoo.fr

Résumé Nous obtenons des conditions de comparabilité de modèles $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable et nous étudions la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse. Ces conditions sont des extensions de celles de Khalil & Falin [3], obtenues pour une série de systèmes $M/G/1$ avec rappels et serveur fiable.

Mots clés : Fiabilité, Chaîne de Markov incluse, Comparaisons stochastiques, Ordres partiels, Systèmes avec rappels.

Les modèles de Files d'Attente constituent un outil théorique ou appliqué pour la modélisation, l'évaluation de performance et le contrôle des systèmes de production. Les modèles d'Attente développés ces dernières années tentent de tenir compte de l'influence des phénomènes de répétitions d'appels qui exercent une influence non négligeable sur les indices de performance de certains systèmes réels, tels que les systèmes de télécommunications. Ces modèles sont utilisés également pour décrire des protocoles de communication spécifiques aux réseaux locaux tels que CSMA / CD (Choi 1992) ou encore les disciplines Ring - back - when - free , Repeat - last - number, Auto - repeat (Kelly 1985) .

La théorie analytique actuelle de ces systèmes a une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus (voir par exemple les synthèses de Falin [2] ou Aissani [1]).

Dans cet exposé, on s'intéresse à l'étude de modèles d'attente avec rappels lorsque le serveur est sujet à des pannes aléatoires. En considérant la chaîne de Markov incluse de Kulkarni & Choi [4], on obtient des conditions de comparabilité et des conditions de monotonie de la chaîne de Markov incluse des systèmes $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable, au sens des ordres stochastique, convexe et laplace.

Cet exposé est structuré comme suit :

Dans la section 1, on présente l'intérêt des méthodes de comparaisons stochastiques. La section 2 comporte la description du modèle et la construction de la chaîne de Markov

incluse. Dans la section 3, nous introduisons des outils préliminaires utiles pour ce travail. Cette section concerne l'obtention des conditions de comparabilité de modèles avec rappels et serveur non fiable. La section 4 est consacrée à l'étude de la monotonie de la chaîne de Markov incluse d'un tel système.

Références

1. A. Aissani, *A survey on retrial queueing models*, Journées de Statistiques Appliquées (1994), 1 – 11.
2. G.I. Falin, *A survey of retrial queue*, Queueing Systems **7** (1990), 127– 168.
3. Z. Khalil and G. Falin., *Stochastic inequalities for M/G/1 retrial queues.*, Operations Research Letters **16** (1994), 285 – 290.
4. V. G. Kulkarni and B. D. Choi., *Retrial queue with server subject to breakdowns and repairs.*, Queueing systems **7** (1990), 91 – 208.

Cinquième partie

Index des Auteurs

Index

ADJABi Smail, 39
AOUDIA Zohra, 3

BERDJOU DJ Louisa, 9
BOURAINÉ Mohand, 43
BOUSHABA Mahmoud, 49

DJELLAB Natalia, 13

GUETTAF R., 5

LAGGOUNE Radouane, 58

LAGHA Karima, 53
LEKADIR Ouiza, 16
LOUANI Djamel, 62

MEDJOU DJ Rabah, 65
MOUHOUBI Zahir, 21

OUKID Nadia, 67

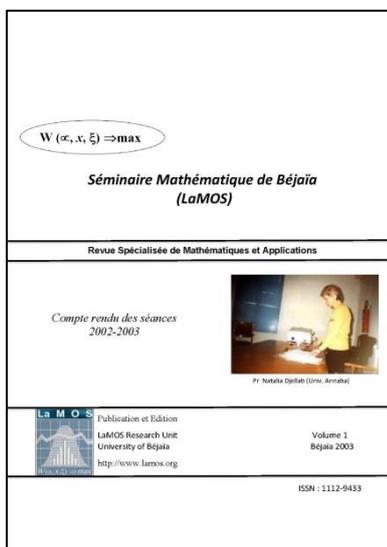
RABTA Boualem, 25
RAHMOUNE Fazia, 29

Lamos Edition, 2003.

L'ouvrage :

Ce volume contient la plupart des exposés faits en 2002/2003 au *Séminaire Mathématique de Béjaïa*. Ils sont centrés autour des domaines d'intérêt des chercheurs du laboratoire de Recherche **LAMOS** (Modèles déterministes et stochastiques de la Recherche Opérationnelle, Probabilités et statistiques, Optimisation, ...) avec une attrayante dispersion vers des domaines lointains.

Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation "Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp. 50).

Parmi les conférenciers de l'année 2002 – 2003 : R. GUETTAF (Tizi Ouzou), Djamel LOUANI (Paris 6), Mahmoud BOUSHABA (Constantine), Nadia OUKID (Blida),

Pour citer ce volume : Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 1, 2003, 78 pages. ISSN : 1112 – 9433.

ISSN : 1112 – 9433