

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

## ***Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)***

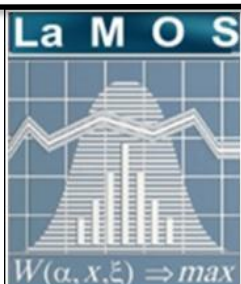
**Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications**

*Compte rendu des séances  
2004-2005*



*Les professeurs Kada Allab et Nourredine Boumahrat au Laboratoire LAMOS (2009)*

**Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir**



Publication et Edition

LaMOS Research Unit  
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 3  
Béjaïa 2005

ISSN : 1112-9433



***Séminaire Mathématique de Béjaïa  
(LaMOS)***

**Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications**

**Sous la direction de  
Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir**

Editions 2005

**Séminaire Mathématique de Béjaïa.****Responsable :** Mme Iamouchene Ouiza, née Lekadir.**Adresse :** Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes.

Université de Béjaïa, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).

Tel/Fax : (213) 34 21 51 88.

E-mail : lamos \_ Bejaia@hotmail.com

©Publications du Laboratoire LAMOS, 2004.

Tous droits de traduction, de reproduction  
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

---

# Table des matières

---

## partie I Méthodes Cybernétiques et Optimisation

---

### 1 Sur le Jeux Non-Antagonistes Multicritères

*Mohammed Said RADJEF et Arezki FERHAT* ..... 3

### 2 Inégalité de Ky Fan sous des conditions de $g$ -invexité

*Ouahmed MEZINE* ..... 7

### 3 Generalized V-type I Invexity and Duality for Multiobjective programs

*Hachem SLIMANI* ..... 13

---

## partie II Système avec Rappel et Réseaux

---

### 4 Sur la Discrétisation des Processus Décivant les Systèmes Non Fiables

*Karim ABBAS* ..... 23

### 5 Analyse du modèle M/G/1 avec rappels linéaires et vacances

*Mohamed BOUALEM* ..... 27

---

## partie III Processus Aléatoires et Applications

---

### 6 La Condition Nécessaire et Suffisante d'Ergodicité des Systèmes d'Attente

*Lynda BOUKIR* ..... 35

### 7 Estimations de la stabilité forte des chaînes de Markov.

*Boualem RABTA* ..... 45

**8 Sur les Approximation dans les Systèmes Réparables de Fiabilité avec  
Maintenance Préventive**

*Fazia RAHMOUNE* ..... 53

---

**partie IV Controle Statistique de la Qualité**

---

**9 Sur l’Efficacité Relative Asymptotique de Pitman des Tests non  
Paramétriques de Fiabilité**

*Mohand BOURAINE* ..... 59

**10 Sur le couplage mécano-fiabiliste**

*Radouane LAGGOUNE* ..... 67

**11 Estimation de la fonction régression par la méthode du noyau.  
Propriétés statistiques**

*Karima LAGHA* ..... 71

---

**partie V Index des Auteurs**

---

**Index** ..... 81

**Index** ..... 81

Première partie

---

Méthodes Cybernétiques et Optimisation





# Sur le Jeux Non-Antagonistes Multicritères

Mohammed Said RADJEF<sup>1</sup> et Arezki FERHAT<sup>2</sup>

email : [radjefms@isima.fr](mailto:radjefms@isima.fr), [ferhat\\_ar@yahoo.fr](mailto:ferhat_ar@yahoo.fr)  
Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

Depuis que Nash a introduit la notion d'équilibre pour les jeux non coopératifs sous forme stratégique, cet équilibre a été et est toujours étudié d'une manière extensive dans plusieurs directions. Quant aux jeux multicritères sous forme stratégique, ils ont été introduit pour la première fois par Blackwell (1956) et Shapley (1959), cependant, c'est grâce au développement de la théorie de l'optimisation multicritère que de nombreux chercheurs ont eu un regain d'intérêt pour les jeux multicritères [6, 7, 10, 11, 12, 13, 21].

Un autre domaine qui a un lien étroit avec la théorie de l'optimisation sont les inégalités variationnelles de laquelle sont tirés les problèmes d'équilibre. C'est Giannessi en 1980 [14] qui a par ailleurs généralisé les inégalités variationnelles au cas des fonctions vectorielles. Inspiré par l'étude des inégalités variationnelles vectorielles, d'autres contributions sont apparu, étendant les problèmes d'équilibre aux cas des systèmes de problèmes d'équilibre vectoriels [1, 2, 3, 4, 15, 22].

Au fil du temps, plusieurs techniques ont été mises au point pour étudier l'existence des équilibres dans la théorie des jeux. Parmi les plus connues, on cite les théorèmes du point fixe, l'inégalité de Ky Fan, l'élément maximal...etc. Il est connu que chaque théorème du point fixe lui correspond un théorème de l'élément maximal. Deguire et al. [8] ont donné un certain nombre de résultats concernant l'existence d'un élément maximal pour une famille de correspondances et dans [4], Ansari et al. ont étudié l'existence de solution pour un système de problèmes d'équilibre vectoriel généralisé en utilisant un résultat de Deguire [8]. Une autre application de l'élément maximal d'une famille de correspondances et des systèmes de problèmes d'équilibre vectoriels a été réalisé par Fahem [9]. L'auteur a démontré l'existence d'un équilibre de Berge dans le cas d'un jeu multicritère, et grâce à cette approche, l'auteur a pu affaiblir les conditions d'existence de l'équilibre de Berge dans le cas d'un jeu monocritère.

Dans ce papier, nous étudions les jeux coopératifs multicritères sous forme stratégiques sans transferts latéraux, nous nous intéressons principalement à un équilibre introduit

par Aumann [5] pour les jeux coopératifs monocritères sous forme stratégiques, qui est l'équilibre fort de Nash. L'équilibre fort de Nash est Pareto faible, son étude n'est pas aisé, à part quelques exceptions, Aumann [5], Kalai, Postlewaite et Roberts [18], Peleg [20], Greenberg et Weber [16], Nishihara [19] et Ichiishi [17]. Nous généraliserons l'équilibre fort de Nash aux jeux multicritères et nous étudierons les conditions de son existence par l'approche de l'élément maximal. Nous ferons aussi la généralisation du  $Z$ -équilibre introduit par Zhukovskii [23] aux jeux multicritères et nous donnons un résultats sur son existence.

## 1.1 Position du problème

Une formulation d'un jeu multicritère sous forme stratégique à  $N$ -personnes associerait à chaque joueur  $i$  une fonction de gain vectorielle  $F_i$  définie sur un espace de stratégies  $X$  dans un espace vectoriel des gains  $Y_i$  de dimension  $k(i)$ . Dans la suite de ce mémoire, on notera par  $(J_M)$  le jeu multicritère sous forme stratégique noté comme suit :

$$J_M = \langle \mathcal{N}, \{X_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{F_i(\cdot)\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle$$

où  $F_i(\cdot) : X = \prod_{i \in \mathcal{N}} X_i \longrightarrow Y_i$ ,  $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  est une fonction vectorielle telle que  $F_i(\cdot) = (F_{i1}(\cdot), \dots, F_{ik(i)}(\cdot))$ , avec  $F_{ij} : X \longrightarrow Y_i$ ,  $i \in \mathcal{N}$ ,  $j \in \{1, \dots, k(i)\}$ . Pour toute coalition non vide de joueurs  $K \subset \mathcal{N}$ , posons  $X = \prod_{i \in \mathcal{N}} X_i$  et  $X_K = \prod_{i \in K} X_i$ , avec  $X_i$  est l'ensemble des décisions du joueur  $i$ ,  $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $X = \prod_{i \in \mathcal{N}} X_i \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_N} = \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1** On dira que  $\bar{x} \in X$  est un  $Zm$ -équilibre du jeu  $(J_M)$  si :

1. pour tout  $i \in \mathcal{N}$  et  $y_i \in X_i$ , il existe  $x_{\mathcal{N} \setminus \{i\}} \in X_{\mathcal{N} \setminus \{i\}} : F_i(y_i, x_{\mathcal{N} \setminus \{i\}}) \not\geq F_i(\bar{x})$ ,
2.  $\bar{x}$  est Pareto optimale pour les joueurs, *i.e.*
  - 2a. pour tout  $i \in \mathcal{N}$  et  $x \in X$   $F_i(x) - F_i(\bar{x}) \notin \mathbb{R}_+^{k(i)} \setminus \{0_{k(i)}\}$ , ou encore
  - 2b. pour tout  $x \in X$   $F_i(x) - F_i(\bar{x}) \not\geq 0_{k(i)}$ ,  $\forall i \in \mathcal{N}$ .

On a le résultat suivant :

**Théorème 1.1** Supposons que dans le jeu  $(J_M)$  on ait :

1. pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , l'ensemble  $X_i$  est non vide et compact ;
  2. pour tout  $i \in \mathcal{N}$  et  $j = \overline{1, k(i)}$ , La fonction  $x \longrightarrow F_{ij}(x)$  est continue sur  $X$ .
- Alors, le jeu  $(J_M)$  possède au moins un  $Zm$ -équilibre.

## 1.2 $C$ -équilibre fort de Nash

Nous définissons l'équilibre Slater fort pour un jeu multicritère que nous appellerons *C-équilibre fort de Nash* car il constitue un cadre plus général qu'un jeu multicritère. Soit pour tout  $x \in X$  et  $i \in \mathcal{N}$ ,  $C_i(x)$  un cône convexe fermé de  $Y_i$  tel que  $\text{int}C_i(x) \neq \emptyset$ .

**Définition 2.1** On dira qu'une stratégie  $\bar{x} \in X$  est un *C-équilibre fort de Nash*, si pour toute coalition  $K \subset \mathcal{N}$ , il n'existe pas de  $y_K \in X_K$  tels que :

$$F_i(\bar{x}) - F_i(\bar{x}_{\mathcal{N} \setminus K}, y_K) \in -\text{int}C_i(\bar{x}), \quad \forall i \in K.$$

Si  $C_i(x) = \overset{k(i)}{+} = \{u = (u_1, \dots, u_{k(i)}) \in \overset{k(i)}{+} / u_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, k(i)\}$  et  $Y_i = \overset{k(i)}{+}$   $\forall i = \overline{1, N}, \forall x \in X$ .

Alors, on aura la définition suivante :

**Définition 2.2** Une stratégie  $\bar{x} \in X$  est un *équilibre fort de Nash* du jeu  $(J_M)$ , si pour toute coalition  $K \subset \mathcal{N}$ , il n'existe pas de  $y_K \in X_K$  tels que

$$F_i(\bar{x}) - F_i(\bar{x}_{\mathcal{N} \setminus K}, y_K) \in -\text{int}_+^{\overset{k(i)}{+}}, \quad \forall i \in K.$$

**Théorème 2.1** Pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , soit  $F_i : X = \prod_{i \in \mathcal{N}} X_i \longrightarrow \overset{k(i)}{+}$ , supposons que :

1. pour tout  $i \in \mathcal{N}$ ,  $X_i$  est un sous-ensemble non vide convexe et compact de  $n_i$ ,
2. pour tout  $i \in \mathcal{N}$ ,  $F_i$  est continue et quasi-concave.

Alors, le jeu  $(J_M)$  possède un équilibre fort de Nash.

Pour le cas, où les fonctions de gains des joueurs sont scalaires, *i.e*

$F_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{N}$ , alors du théorème 1.2, on déduit :

**Théorème 2.2** Supposons que dans le jeu  $(J)$  on ait :

1. pour tout  $i \in \mathcal{N}$ ,  $X_i$  est un sous-ensemble non vide convexe et compact d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff;
2. pour tout  $i \in \mathcal{N}$ ,  $F_i(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue et quasi-concave.

Alors le jeu  $(J)$  admet un équilibre fort de Nash.

## Références

1. Ansari Q. H. *Vector Equilibrium Problems and Vector Variational Inequalities, Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria : Mathematical Theories*. Edited by F Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.

2. Ansari Q. H., Konnov I. V. and Yao J.-C. On Generalized Vector Equilibrium Problems. *Nonlinear Analysis*, 47 :543–554, 2001.
3. Ansari Q. H., Schaible S. and Yao J. -C. The System of Vector Equilibrium Problems and Its Applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 107(3) :547–557, 2000.
4. Ansari Q.H., Schaible S. and Yao J.-C. The system of generalized vector equilibrium problems with applications. *Journal of Global Optimization*, 22 :3–16, 2002.
5. Aumann R. J. Acceptable point in general cooperative n-person game. In : A. W. Tucker and R. D. Luce (eds). *Contributions to the Theory of Games IV*, pages 287–324, 1959.
6. Bergstresser K. and Yu P. L. Domination structure and multicriteria problems in N-person games. *Theory Decision*, 8 :5–48, 1972.
7. Blackwell D. An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs. *Pacific Journal of Mathematics*, 6 :1–8, 1956.
8. Deguire P. , Tan K. K. , Yuan G. X. Z. The study of maximal elements, fixed points for  $L_S$ -majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces. *Nonlinear analysis*, 37 :933–951, 1999.
9. Fahem K. Etude de Concepts de Solutions dans un Jeu Multicritère. Master's thesis, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, novembre 2004.
10. Fernandez F. R. and Puerto J. Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89 (2) :115–127, 1996.
11. Ghose D. *Multicriteria games with applications to two-target game problem*. PhD thesis, Dept of Electrical Enging, Indian Institute of Science, Bangalore, Indian, May 1989.
12. Ghose D. and Prasad U. R. Solution concepts in two-person multicriteria games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 63 :167–189, 1989.
13. Ghose D. and Prasad U. R. Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games. *J. Optimiz. Theory Applic.*, 69 :543–553, 1991.
14. Giannessi F. Theorems of alternative, quadratic programs and complementarity problems. *R.W.Cottle, F. Giannessi, J. L. Lions (Eds), Variational Inequality and Complementarity Problems*, pages 151–186, 1980.
15. Giannessi F. *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria : Mathematical Theories*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
16. Greenberg J. and Weber S. Stable coalition structures with a unidimensional set of alternatives. *Journal of Economic Theory*, 60 :62–82., 1993.
17. Ichiishi T. *Non-Cooperation and Cooperation In Games*. M. Deistler, E. Fürst, and G. Schwödiauer, Vienna, Economic Dynamics, and Time Series Analysis, Physica-Verlag edition, 1982.
18. Kalai E., Postlewaite A. and Roberts J. A Group Incentive Compatible Mechanism Yielding. *Journal of Economic Theory*, 20 :13–22, 1979.
19. Nishihara K. Stability of the cooperative equilibrium in N-person prisoners' dilemma with sequential moves. *Economic Theory*, 13 :483–494, 1999.
20. Peleg B. *Game Theoretic Analysis of Voting in Committees*. Cambridge Univ.Press, London, 1984.
21. Shashishekhap N., Ghose D., Anand L. and Prasad U.R. A survey of solution concepts in multicriteria games. *J. Indian Inst. Sci.*, 75 :141–174, 1995.
22. Tan N. X., and Tinh P. N. On the Existence of Equilibrium Points of Vector Functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 19 :141–156, 1998.
23. Zhukovskii V. I. *Introduction aux jeux différentiels avec Indétermination*. Institut international des problèmes de gestion et de la recherche scientifique, Moscou, 1997.

## Inégalité de Ky Fan sous des conditions de $g$ -invexité

Ouahmed MEZINE<sup>1</sup>

Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, Algérie.

### 2.1 Introduction

C'est grâce à l'inégalité de Ky Fan, établi par Ky Fan [1] en 1968, que la théorie des jeux a connu un nouveau essor ; il s'est avéré que c'est à partir de l'inégalité de Ky Fan que l'on peut démontrer plusieurs résultats de la théorie des jeux, contrôle optimal, analyse non linéaire. Différentes approches ont été utilisées pour montrer cette inégalité : l'approche du théorème KKM, l'approche du théorème de sélecteur continu et de point fixe, l'approche du théorème de l'élément maximal. Et plusieurs auteurs ont proposé de généraliser ces derniers théorèmes cités ci-dessus.

Toutes ces généralisations portaient sur la généralisation de la notion de convexité. Ainsi plusieurs structures algébriques ont été définies sur l'espace topologique  $X$ , on peut citer : "G-convexité" [6], "mc-structure" [4], "Convexité au sens de Komiya" [2], "Convexité au sens de Lassonde" [3], "Convexité au sens de Michael" [5]... Et toutes ces structures ont un point commun qui à chaque ensemble fini  $A \subset X$ ,  $|A| = n + 1$ , il existe une application  $\varphi^A : \Delta_n \rightarrow X$  qui est bien définie et continue. Et de plus, toute partie convexe  $Y \subset X$  (une partie est convexe au sens de la structure qui est définie sur l'espace  $X$ ) vérifie : pour toute partie finie

$$A \subset X, |A| = n + 1, A \cap Y \neq \emptyset, \implies \varphi^A(\Delta_J) \subset Y, \quad (2.1)$$

où  $\Delta_J$  dénote la face de  $\Delta_n$  correspondant aux éléments appartenant à  $J = A \cap Y$ . Par exemple, dans le cas de la convexité, l'application  $\varphi^A$  est associée à la combinaison convexe des éléments  $a_i \in A$ ,  $i = 0 \dots n$ . Et cette application  $\varphi^A$  joue un rôle très important dans la démonstration des théorèmes "de sélecteur continu et de point fixe", "de l'élément maximal" et "de KKM".

Ainsi dans cet exposé, nous assignons un objectif de définir sur l'espace topologique  $X$  une combinaison invexe à qui nous associons l'application  $\varphi^A$  et une structure d'invexité

que nous appelons la  $g$ -invexité sur laquelle la condition (2.1) est vérifiée. A la fin, nous généralisons les théorèmes de sélecteur et de point fixe, de l'élément maximal et du KKM sous la condition de  $g$ -invexité, et nous appliquons ces mêmes théorèmes pour montrer l'inégalités de Ky Fan sous la même condition de  $g$ -invexité.

**Définition 2.1** [T.Antczak][2001] *Un ensemble non vide  $X \subseteq \mathbb{E}$  est dit invexe par rapport à  $\eta$ , où  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{E}$  si  $\forall \lambda \in [0, 1]$  et  $\forall x', x \in X$ , on a :*

$$x' + \lambda\eta(x, x') \in X. \quad (2.2)$$

**Définition 2.2** *On appelle combinaison invexe des éléments  $x_0, \dots, x_n \in X$  la combinaison suivante :*

$$x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta(x_i, z_{i-1}), \quad (2.3)$$

où  $z_0 = x_0, z_i = z_{i-1} + \lambda_i \eta(x_i, z_{i-1}), \lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$ .

**Remarque 2.1** *Géométriquement, la combinaison invexe des éléments  $\{x_0, \dots, x_n\}$  représente un chemin qui démarre du point  $x_0$ , passant par les points :  $z_1 \in [x_0, x_0 + \eta(x_1, x_0)], z_2 \in [z_1, z_1 + \eta(x_2, z_1)], z_3 \in [z_2, z_2 + \eta(x_3, z_2)], \dots, z_n \in [z_{n-1}, z_{n-1} + \eta(x_n, z_{n-1})]$ .*

## La $g$ -invexité

Dans toute cette section,  $\mathbb{E}$  désigne un espace vectoriel topologique de Hausdorff.  $X$  un ensemble non vide de  $\mathbb{E}$  invexe par rapport à la fonction  $\eta$  qui est définie sur  $X \times X$  dans  $\mathbb{E}$ .

**Définition 2.3** *On dit que la fonction  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{E}$ , vérifie la condition de  $g$ -invexité si :*

$$\text{pour tout } (x, y) \in X \times X : \eta(y, x) = g(y) - x$$

où  $g$  est une application définie de  $X$  dans  $\mathbb{E}$ .

**Définition 2.4** *Soit  $X$  un ensemble non vide de  $\mathbb{E}$ , on dit que  $X$  est  $g$ -invexe si :*

1.  $X$  est invexe par rapport à la fonction  $\eta$  ;
2.  $\eta$  vérifie la condition de  $g$ -invexité.

## 2.2 Construction de l'application $\varphi^A$

Posons  $A = \{y_0, \dots, y_n\}$ , et considérons les deux applications suivantes :

$$\varphi : [0, 1]^n \longrightarrow Y, \quad \varphi(\lambda) = y_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta(y_i, z_{i-1}), \quad (2.4)$$

où  $z_0 = y_0$ ,  $z_i = z_{i-1} + \lambda_i \eta(y_i, z_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

$$\psi : \Delta_n \longrightarrow [0, 1]^n, \quad \psi_i(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma_i = 0 \\ \frac{\sigma_i}{\sum_{j=0}^n \sigma_j}, & \sigma_i \neq 0. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

**Théorème 2.1** *Soit  $X$  une partie  $g$ -invexe de l'espace vectoriel topologique de Hausdorff  $\mathbb{E}$ . Alors l'application définie comme suit :*

$$\varphi^A(\lambda) = \varphi \circ \psi(\lambda) = y_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i(\lambda) \eta(y_i, z_{i-1}), \quad (2.6)$$

pour tout  $\lambda \in \Delta_n$ , où  $\varphi$  et  $\psi$  sont définies par (2.4) et (2.5) respectivement, vérifie :

1. Pour toute partie  $g$ -invexe  $Z \subset X$  telle que  $A \cap Z \neq \emptyset$ ,  $\varphi^A(\Delta_J) \subset Z$ ,  
où  $J$  correspond aux indices des  $y_i \in A \cap Z$ ;
2.  $\varphi^A$  est continue sur  $\Delta_n$ .

## Théorème de sélecteur continu et de point fixe

**Définition 2.5** *Soit  $F : X \longrightarrow Y$  une correspondance à valeurs non vides. On dit que  $F$  admet un sélecteur continu, s'il existe une application continue  $f : X \longrightarrow Y$  telle que :*

$$\text{pour tout } x \in X, f(x) \in F(x).$$

**Définition 2.6** *Soit  $F : X \longrightarrow X$  une correspondance. On dit que  $F$  admet un point fixe, s'il existe un  $x^* \in X$  tel que :*

$$x^* \in F(x^*).$$

**Théorème 2.2** *Soit  $X$  une partie compact et  $g$ -invexe de l'espace vectoriel topologique de Hausdorff  $\mathbb{E}$ .*

$F : X \longrightarrow X$  une correspondance telle que :

1.  $\forall x \in X, F(x)$  est  $g$ -invexe ;
2.  $X = \bigcup \{ \text{int} F^{-1}(y), y \in X \}$ .

Alors  $F$  a un sélecteur continu et un point fixe.

## Existence de l'élément maximal

**Définition 2.7** Soit  $F : X \longrightarrow X$  une correspondance définie sur un ensemble non vide  $X$  dans lui même. Un élément  $x^*$  est dit élément maximal de la correspondance  $F$  si :

$$F(x^*) = \emptyset.$$

**Théorème 2.3** Soit  $X$  une partie compact et  $g$ -invexe de l'espace vectoriel topologique de Hausdorff  $\mathbb{E}$ .  $F : X \longrightarrow X$  une correspondance à valeurs  $g$ -invexes telle que :

1. Pour tout  $x \in X, x \in F(x)$  ;
2. Si  $y \in F^{-1}(x)$ , alors il existe un  $x' \in X$  tel que  $y \in \text{int} F^{-1}(x')$ .

Alors, l'ensemble des éléments maximaux  $\{x^*, F(x^*) = \emptyset\}$  est non vide et compact.

## Théorème de l'inégalité de Ky Fan

**Théorème 2.4** Soit  $X$  une partie compact et  $g$ -invexe d'un'espace vectoriel topologique de Hausdorff  $\mathbb{E}$ .  $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant :

1. pour tout  $y \in X, x \longmapsto f(x, y)$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) ;
2. pour tout  $x \in X, y \longmapsto f(x, y)$  est préincave par rapport à la fonction  $\eta$  ;
3. pour tout  $y \in X, f(y, y) \leq 0$ .

Alors il existe un  $\bar{x} \in X$  tel que :  $\sup_{y \in X} f(\bar{x}, y) \leq 0$ .

## Conclusion

Dans cet exposé, nous avons rappelé quelques résultats relatifs à la notion d'invexité et nous avons introduit de nouvelles notions : combinaison invexe et la  $g$ -invexité. Et à l'aide de ces deux notions, nous avons proposé des généralisations pour : le théorème de sélecteur continu et de point fixe, théorème Fan-KKM et le théorème de l'élément maximal. Par la suite, en utilisant ces théorèmes, nous avons démontré l'inégalité de Ky Fan sous la condition de  $g$ -invexité. Et grâce à cette généralisation, on peut faire l'étude d'existence des équilibres de jeux dans des ensembles  $g$ -invexe .



## Références

1. Ky Fan. Minimax Inequality and Application, in "Inequalities, III". *Academic Press, New York, o.shishia edition*, (1972).
2. H. Komiya. Convexity on a Topological Space. *Fundamental Mathematics* , **111** :107–113, (1981).
3. M. Lassonde. On the use of KKM maps in fixed point theory and relation topics. *J. Math. Anal. Appl.*, **97** :151–201, (1983).
4. J. Llinares. Unified treatment of the problem of existence of maximal elements in binary relations : a characterisation. *Journal of Mathematical Economics*, **29** :285–302, (1998).
5. E. Michael. Convex Structure and Continuous Selections. *Canadian Journal of Mathematics*, **11** :556–575, (1959).
6. S. Park and H. Kim. Admissible classes of multifunctions on generalized convex spaces. *Proc. Coll. Natur. Sci. Seoul Nat. U.*, **18** :1–21, (1993).



---

# Generalized V-type I Invexity and Duality for Multiobjective programs

Hachem SLIMANI<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : [haslimani@yahoo.fr](mailto:haslimani@yahoo.fr)

As generalization of the invexity notion originated by Hanson [2], Hanson and Mond [3] have introduced type I and type II functions for studying non linear programming problems. Later, Kaul et al. [5], Aghezzaf and Hachimi [1] have defined the notion of type I function with respect to the same function  $\eta$  for constrained multiobjective problems. Hanson et al. [4] gave another definition of multiobjective V-type I problem with respect to  $\eta$ . In this paper, following the work of Radjef and Slimani [6], where optimality conditions have been obtained for a nonlinear programming program under invexity with respect to different  $\eta_i$ , we have introduced a, more general, notion of multiobjective V-type I problem with respect to functions  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$  that are not necessarily the same. We have obtained necessary and sufficient conditions for a feasible point to be a weak efficient, efficient or properly efficient solution under various types of generalized V-type I requirements. We have defined a Mond-Weir type dual problem and we have proved weak, strong and converse duality theorems under the defined notions. Known results in the literature [4, 5] can be deduced as particular cases from our results, when the functions  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$  are equal to the same function  $\eta$  which is different to zero.

**Key Words :** Multiobjective problem, V-type I problem /  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$ ; Quasi-, pseudo-, pseudo quasi-, quasi pseudo- V-type I /  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$ ; Weak, strong and converse duality; Weak efficient, Efficient, Properly efficient solution.

## 3.1 Preliminaries and definitions

The following conventions for inequalities will be used. If  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , then  
 $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad i=1, \dots, n;$

$x \leq y \Leftrightarrow x \leq y$  and  $x \neq y$ .

We also note  $\mathbb{R}_{\geq}^q$  (resp.  $\mathbb{R}_{\leq}^q$ ) the set of vectors  $y \in \mathbb{R}^q$  with  $y \geq 0_{(q)}$  (resp.  $y \leq 0_{(q)}$ ).

We consider the following multiobjective optimization problem

$$(PV) \quad \begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)), \\ & \text{subject to } g(x) \leq 0, \end{aligned}$$

where  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  and  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  are differentiable functions and  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  is an open set.  $X = \{x \in D / g(x) \leq 0\}$ . For  $x_0 \in X$ ,  $J(x_0) = \{j \in \{1, \dots, k\} / g_j(x_0) = 0\}$ ,  $J = |J(x_0)|$ .

In Radjef and Slimani [6], it has been constructed an example that shows the difficulty to find a function  $\eta$  with respect to which several other functions are invex. Consequently, in more general manner, the invexity notion was considered with respect to functions not necessarily the same. When we focused on this idea, and while inspiring of [1, 4, 5], we define the vector type I problem with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1, k}}$ .

**Définition 3.1** *We say the problem (PV) is of V-type I at  $x_0 \in X$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1, k}}$ , if there exists  $N + k$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, N}$  and  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j = \overline{1, k}$  such that for all  $x \in X$  :*

$$f_i(x) - f_i(x_0) \geq [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(x, x_0), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

$$-g_j(x_0) \geq [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0), \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

**Définition 3.2** *We say the problem (PV) is of quasi V-type I at  $x_0 \in X$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1, k}}$ , if there exists  $N + k$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, N}$  and  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j = \overline{1, k}$  such that for some vectors  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$  and  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$  :*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \mu_i [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(x, x_0) \leq 0, \quad \forall x \in X, \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \leq 0, \quad \forall x \in X. \quad (3.4)$$

**Définition 3.3** *We say the problem (PV) is of pseudo V-type I at  $x_0 \in X$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1, k}}$ , if there exists  $N + k$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, N}$  and  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j = \overline{1, k}$  such that for some vectors  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$  and  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$  :*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(x, x_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in X. \quad (3.6)$$

**Définition 3.4** We say the problem (PV) is of quasi pseudo V-type I at  $x_0 \in X$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$ , if there exists  $N + k$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, i = \overline{1,N}$  and  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, j = \overline{1,k}$  such that for some vectors  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$  and  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$  :

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \mu_i [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(x, x_0) \leq 0, \forall x \in X, \quad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \leq 0, \forall x \in X. \quad (3.8)$$

**Définition 3.5** We say the problem (PV) is of pseudo quasi V-type I at  $x_0 \in X$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$ , if there exists  $N + k$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, i = \overline{1,N}$  and  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, j = \overline{1,k}$  such that for some vectors  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$  and  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$  :

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(x, x_0) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \geq 0, \forall x \in X, \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \leq 0, \forall x \in X. \quad (3.10)$$

### 3.2 Optimality conditions

In this section we establish some sufficient conditions for an  $x_0 \in X$  to be an efficient or properly efficient solution of problem (PV) under different conditions while involving the defined notion of problem given above.

**Théorème 3.1** (Sufficiency) Suppose that

- (i)  $x_0 \in X$  ;
- (ii) there exists  $N + J$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, i = \overline{1,N}, \theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, j \in J(x_0)$  and scalars  $\mu_i > 0, i = \overline{1,N}, \lambda_j \geq 0, j \in J(x_0)$  such that :

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [\nabla f_i(x_0)]^t \eta_i(x, x_0) + \sum_{j \in J(x_0)} \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \geq 0, \forall x \in X; \quad (3.11)$$

- (iii) the problem (PV) is V-type I at  $x_0$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x_0)}$  and for  $\mu$  and  $\lambda$ .

Then  $x_0$  is properly efficient solution for (PV).

**Théorème 3.2** (Sufficiency) Suppose that

- (i)  $x_0 \in X$  ;

- (ii) there exists  $N + J$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j \in J(x_0)$  and scalars  $\mu_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$ ,  $\lambda_j \geq 0$ ,  $\forall j \in J(x_0)$  such that the relation (3.11) of theorem 3.1 is verified;
- (iii) the problem (PV) is strictly-pseudo  $V$ -type I at  $x_0$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$ ,  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$  and for  $\mu$  and  $\lambda$ .

Then  $x_0$  is an efficient solution of (PV).

If further  $\mu_i > 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $x_0$  will be properly efficient solution for (PV).

**Théorème 3.3** (Sufficiency) Suppose that

- (i)  $x_0 \in X$ ;
- (ii) there exists  $N + J$  vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j \in J(x_0)$  and scalars  $\mu_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$ ,  $\lambda_j \geq 0$ ,  $\forall j \in J(x_0)$  such that the relation (3.11) of theorem 3.1 is verified;
- (iii) the problem (PV) is quasi strictly-pseudo  $V$ -type I (or semi strictly-quasi  $V$ -type I) at  $x_0$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$ ,  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$  and for  $\mu$  and  $\lambda$ .

Then  $x_0$  is an efficient solution for (PV).

To prove the next result we need to define the generalized assumption C at a point  $x^0 \in X$ . Condition imposed on the functions  $\eta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**Generalized Assumption C at a point  $x^0 \in X$**  : Let  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $x^0 \in X$ . We say that the functions  $\eta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  satisfy the generalized assumption C at  $x^0$  with respect to  $\eta$  if, for any  $x \in X$  and for any  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\eta_i(x^0, x^0 + \alpha\eta(x, x^0)) = -\alpha\eta(x, x^0), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.12)$$

$$\eta_i(x, x^0 + \alpha\eta(x, x^0)) = (1 - \alpha)\eta(x, x^0), \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.13)$$

**Théorème 3.4** (necessity) Suppose that

- (i)  $x^0$  is a weak efficient solution for (PV);
- (ii)  $g_j$  is continuous at  $x^0$  for  $j \in \tilde{J}(x^0)$ , there exists vector functions  $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j \in J(x^0)$  continuous in the second argument at  $x^0$  and which satisfy the inequality (3.13) of generalized assumption C at  $x^0$  with respect to  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;
- (iii) the functions  $[\nabla f_i(x^0)]^t \eta_i(x, x^0)$ ,  $i = \overline{1, N}$  and  $[\nabla g_j(x^0)]^t \theta_j(x, x^0)$ ,  $j \in J(x^0)$  are pre-invex of  $x$  on  $X$  with respect to  $\gamma : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;
- (iv) there exists  $\bar{x} \in X$  such that

$$-g_j(x^0) > [\nabla g_j(x^0)]^t \theta_j(\bar{x}, x^0), \quad \forall j \in J(x^0). \quad (3.14)$$

Then there exists  $\mu^0 \in \mathbb{R}_{\geq}^N$  and  $\lambda^0 \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(x^0)|}$  such that  $(x^0, \mu^0, \lambda^0)$  satisfies

$$\sum_{i=1}^N \mu_i^0 [\nabla f_i(x^0)]^t \eta_i(x, x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j^0 [\nabla g_j(x^0)]^t \theta_j(x, x^0) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (3.15)$$

### 3.3 Mond-Weir Duality

In relation to (PV) we consider the following multiobjective dual problem, which is in the forma of Mond-Weir.

$$(D) \quad \text{Maximize } f(y) = (f_1(y), \dots, f_N(y)),$$

subject to

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [\nabla f_i(y)]^t \eta_i(x, y) + \sum_{j \in J(y)} \lambda_j [\nabla g_j(y)]^t \theta_j(x, y) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (3.16)$$

$$\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k, \quad \eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall j \in J(y).$$

We let  $Y$  be the set of feasible solutions of problem (D).

**Théorème 3.5** (*Weak duality*) *Suppose that*

- i)  $x \in X$  ;
- ii)  $(y, \mu, \lambda, (\eta_i)_{i=\overline{1, N}}, (\theta_j)_{j \in J(y)}) \in Y$  ;
- iii) the problem (PV) is pseudo-quasi V-type I at  $y$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}, (\theta_j)_{j \in J(y)}$  and for  $\mu$  and  $\lambda$ .

Then  $f(x) \not\leq f(y)$ .

**Théorème 3.6** (*Weak duality*) *Suppose that*

- i)  $x \in X$  ;
- ii)  $(y, \mu, \lambda, (\eta_i)_{i=\overline{1, N}}, (\theta_j)_{j \in J(y)}) \in Y$  ;
- iii) the problem (PV) is strictly pseudo-quasi V-type I (or quasi strictly pseudo V-type I) at  $y$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}, (\theta_j)_{j \in J(y)}$  and for  $\mu$  and  $\lambda$ .

Then  $f(x) \not\leq f(y)$ .

**Théorème 3.7** (*Strong duality*) *Suppose that*

- 1)  $x^0$  is a weak efficient solution for (PV) ;
- 2) the hypothesis (ii), (iii) and (iv) of theorem 3.4 are satisfied.

Then there exists  $\mu^0 \in \mathbb{R}_{\geq}^N$  and  $\lambda^0 \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(x^0)|}$  such that  $(x^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x^0)}) \in Y$  and the objective functions of (PV) and (D) have the same values at  $x^0$  and  $(x^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x^0)})$ , respectively. If, further, the problem (PV) is pseudo-quasi V-type I at all feasible solutions of (D), then  $(x^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x^0)}) \in Y$  is a weak efficient solution of (D).

**Théorème 3.8** (Strong duality) Suppose that

- 1)  $x^0$  is a weak efficient solution for (PV);
- 2) the hypothesis (ii), (iii) and (iv) of theorem 3.4 are satisfied.

Then there exists  $\mu^0 \in \mathbb{R}_{\geq}^N$  and  $\lambda^0 \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(x^0)|}$  such that  $(x^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x^0)}) \in Y$  and the objective functions of (PV) and (D) have the same values at  $x^0$  and  $(x^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x^0)})$ , respectively. If, further, the problem (PV) is strictly pseudo-quasi V-type I (or quasi strictly pseudo V-type I) at all feasible solutions of (D), then  $(x^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x^0)}) \in Y$  is an efficient solution of (D).

**Théorème 3.9** (Converse duality) Suppose that

- (i)  $(y^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(y^0)}) \in Y$  with  $\mu^0 > 0$ ;
- (ii)  $y^0 \in X$ ;
- (iii) the problem (PV) is V-type I (or semi strictly pseudo V-type I for  $g$  or pseudo quasi V-type I) at  $y^0$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(y^0)}$  and for  $\mu^0$  and  $\lambda^0$ .

Then  $y^0$  is properly efficient solution for (PV).

**Théorème 3.10** Suppose that

- i)  $x^0 \in X$  and  $(y^0, \mu^0, \lambda^0, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(y^0)}) \in Y$  such that

$$\sum_{i=1}^N \mu_i^0 f_i(x^0) = \sum_{i=1}^N \mu_i^0 f_i(y^0); \quad (3.17)$$

- ii) the problem (PV) is strictly pseudo quasi V-type I at  $y^0$  with respect to  $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(y^0)}$  and for  $\mu^0$  and  $\lambda^0$ .

Then  $x^0 = y^0$ .

### 3.4 Conclusion

In this paper, we have defined new classes of problem called V-type I with respect to  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$ , quasi-, pseudo-, pseudo quasi-, quasi pseudo- V-type I with respect to  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$ , as a generalization of type I functions with respect to  $\eta$  [1, 5] and the V type I problem with respect to  $\eta$  [4]. We have obtained necessary and sufficient conditions



for a feasible point to be a weak efficient, efficient or properly efficient solution, we have defined the dual problem and we have proved weak, strong and converse duality theorems, involving the above classes of problems. For establishing the necessary condition for a feasible point to be a weak efficient solution, we have defined the generalized assumption C for the functions  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$ . Known results in the literature [4, 5] can be deduced as particular cases from our results, when the functions  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$  are equal to the same function  $\eta$  which is different to zero.

## Références

1. B. Aghezzaf and M. Hachimi. Generalized Invexity and Duality in Multiobjective Programming Problems. *J. of Global Optim.* **18**, 91-101, (2000).
2. M. A. Hanson. On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions. *J. Math. Anal. and App.* **80**, pp. 445-550, (1981).
3. M. A. Hanson and B. Mond. Necessary and Sufficient Conditions in Constrained Optimisation. *Mathematical programming* **37**, 51-58, (1987).
4. M. A. Hanson, R. Pini, and C. Singh. Multiobjective Programming Under Generalized Type I Invexity. *J. Math. Anal. Appl.* **261**, 562-577, (2001).
5. R.N. Kaul, S.K. Suneja, and M.K. Srivastava. Optimality Criteria and Duality in Multiple-Objective Optimization Involving Generalized Invexity. *J. Optim. Theory Appl.* **80**, No 3, 465-482, (1994).
6. M.S. Radjef and H. Slimani. On optimality conditions in  $\eta_i$ -invex nonlinear programming problem. *Presented at the Euro/Informs Joint Intenational Meeting July 6-10, 2003 Istanbul, Turkey. Preprint submitted to Elsevier Science*, January 2004.



## Deuxième partie

---

### Systeme avec Rappel et Réseaux



# Sur la Discrétisation des Processus Décrivant les Systèmes Non Fiables

Karim ABBAS<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : karabbas2003@yahoo.fr

Dans ce travail, une analyse Markovienne d'un système de files d'attente avec pannes a été faite, et ceci dans le sens d'un algorithme décrivant une succession de périodes de pannes et de disponibilité et l'évolution résultante de la file. L'intérêt théorique principal de ce travail consiste à démontrer que la méthode des variables supplémentaires est l'approche la plus commode pour l'analyse d'un tel système, surtout quand les pannes ont une structure complexe (l'approche usuelle étant la théorie régénérative [3]).

## 4.1 Analyse de la file $M/G/1$ avec pannes

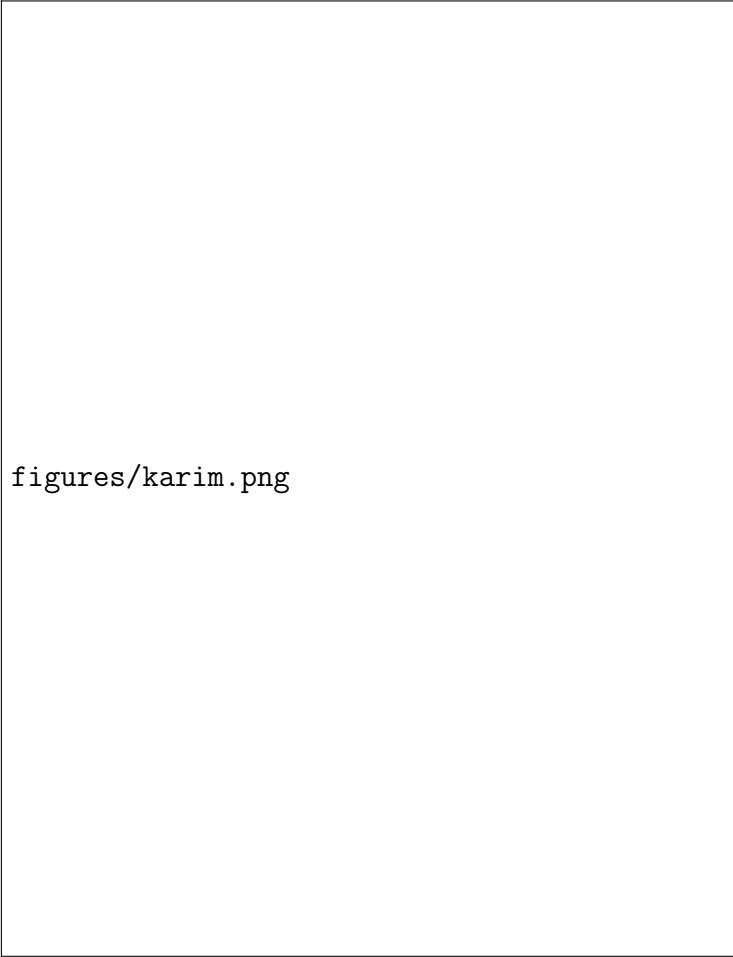
Dans cette étude, nous supposons que le processus des arrivées de clients est Poissonien et que le service dont requièrent est une variable aléatoire indépendante du fonction de distribution arbitraire possédant une densité.

L'algorithme de ce système de file d'attente décrit l'évolution de vecteur d'état  $(X, N, Y)$  où  $N \in \mathbb{N}$  est le nombre de clients dans la file et  $(X, Y)$  sont deux variables d'état supplémentaires.  $X \in \{0, 1\}$  décrit les propriétés globales (le bon ou le mauvais comportement) de la file et  $Y$  est la quantité du service déjà reçu par le client qui est entraîné d'être servi dans le système (0 si la file est vide).

Lorsque le nombre de clients est  $\geq 1$  et  $Y > 0$  la file sera dite en état  $X = 0$  [bon comportement]. Elle se comporte exactement comme la file  $M/G/1$  classique : L'occurrence des arrivées est un processus Poissonien de taux  $\lambda$ , alors que  $N$  doit être croître durant la période de service. Les départs également peuvent avoir lieu (avec un taux infinitésimal  $\sigma(Y) = s(Y)/1 - S(Y)$ ) si  $Y = y$ ,  $S$  et  $s$  étant respectivement la fonction de distribution et la densité de temps du service. A chaque instant de départ  $N$  est diminué par un et  $Y$  devient 0. Si  $N$  est différent de 0 (lorsqu'il est diminué par un), le système peut être dans l'un des deux états possibles :

- Le premier est de rester à l'état  $X = 0$ , dans lequel il commence à servir au moins un de ces clients en attente,
- ou de faire un saut à l'état  $X = 1$ , dans lequel une période de panne sera commencée durant laquelle aucun service ne peut être fourni à aucun client.

#### 4.1.1 Algorithme



figures/karim.png

## 4.2 Ergodicité du système

Nous supposons que les fonctions  $\alpha(n)$  et  $\beta(n)$  ont de limites quand  $n \rightarrow \infty$ . Notons ces limites  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  respectivement. Nous définissons aussi :

$$\tilde{\alpha} = \sup_{n \geq 1} \alpha(n) \text{ et } \tilde{\beta} = \sup_{n \geq 0} \beta(n).$$

Le processus décrivant ce système

$\{Z_t = (X_t, N_t, Y_t), t \in \mathbb{R}^+\}$  est un processus Markovien d'espace d'état  $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ .

Initialement nous montrons que la chaîne de Markov induite du processus  $Z_t$  est ergodique lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{\alpha} < 1 \\ 0 \leq \tilde{\beta} < 1 \\ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} < 1 \\ \rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu} < 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{1-\tilde{\beta}} \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit  $T_n$  le n-ième instant de saut du processus Markovien  $Z_t$  vers l'état  $(0 \times \mathbb{N} \times \{0\})$ . Soit  $N_n$  défini comme suit  $Z_{T_n} = (0, N_n, \{0\})$ . La propriété Markovienne forte implique que  $N_n$  est une chaîne de Markov.  $\{N_n, n \in \mathbb{N}\}$  a pour espace d'état  $\mathbb{N}^*$ . Cette chaîne est irréductible et apériodique.

Maintenant nous montrons que lorsque la condition (4.1) est satisfaite, la chaîne satisfait la condition suffisante d'ergodicité suivante (voir [2]) :

- (i)  $E[N_{i+1} - N_i / N_i = j] < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$
- (ii)  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup E[N_{i+1} - N_i / N_i = j] < 0$ .

Pour ceci, considérons l'expression suivante :

$$N_{i+1} - N_i = A_{]T_i, T_{i+1}] } - D_{]T_i, T_{i+1}] }$$

où  $A_{]s, t]}$  (resp.  $D_{]s, t]}$ ) est le nombre d'arrivées (resp. départs) dans l'intervalle  $]s, t]$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned} E[D_{]T_i, T_{i+1}] } &= D_{]T_i, T_{i+1}] } = 1 \\ E[A_{]T_i, T_{i+1}] } / N_i = j &= \rho + \\ \int_0^\infty ds(t) \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \alpha(n+j-1) \phi(n+j-1) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \phi(j) &= E[A_{]0, T_{i+1}] } / Z_\theta \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left( \prod_{e=0}^{n-2} \beta(j+e) \right) (1 - \beta(j+n-1)).n \end{aligned}$$

D'où

$$E[N_{i+1} - N_i / N_i = j] \leq \rho + \frac{\bar{\alpha}}{1 - \beta} + 1 < \infty$$

D'où la condition (i).

Nous avons aussi :

$$\exists \lim_{j \rightarrow \infty} E[N_{i+1} - N_i / N_i = j] = \rho + \frac{\bar{\alpha}}{1 - \beta} - 1$$

alors que (ii) est prouvée également lorsque  $\rho < 1 - \frac{\bar{\alpha}}{1 - \beta}$ .

Par suite, lorsque (4.1) est satisfaite,  $\{N_n, n \in \mathbb{N}\}$  est ergodique. Son distribution converge vers une mesure stationnaire unique sur  $\mathbb{N}^*$  qui ne dépend pas des conditions initiales. La convergence de la distribution de  $Z_t$  et l'indépendance des conditions initiales sont aussi conséquences du théorème limite sur des processus semi-régénératifs [1] ( $\{Z_t, t \in \mathbb{R}^+\}$  peut être considéré comme un processus semi-régénératif avec un processus de renouvellement Markovien induit  $\{N_n, T_n, n \in \mathbb{N}\}$ ). Il est clair que cette distribution limite sera une solution des équations de Kolmogorov.

## Références

1. CINLAR A. *Introduction to stochastic processes*. Prentice Hall, 1975.
2. PAKES A. G. Some conditions pour ergodicity and recurrence of markov chains. *Op. Research*, 17 :1058–1061, 1969.
3. GAVER D. P. A waiting line with interrupted service. *J. Roy. Stat. Soc.*, 24, 1962.



## Analyse du modèle M/G/1 avec rappels linéaires et vacances

Mohamed BOUALEM<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : robertt15dz@yahoo.fr

La plupart des travaux sur les modèles classiques traitent des systèmes dans lesquels le serveur reste oisif quand la file d'attente est vide. Cependant, le temps d'oisiveté du serveur pourrait être utilisé pour un travail secondaire dans le but d'améliorer la performance du système.

Ces situations d'attente peuvent être étudiées par des modèles d'attente avec vacances. Dans un tel modèle, le serveur prend occasionnellement une vacance d'une durée aléatoire, qui peut être utilisée pour accomplir une ou plusieurs tâches secondaires.

Par exemple, les processeurs dans les systèmes informatiques et les systèmes de communication exécutent en plus de leurs fonctions primaires des tâches de tests et de maintenance préventive qui permettent principalement de préserver le système contre les pannes et de prévoir une haute fiabilité de celui-ci. Ces périodes peuvent aussi être considérées comme des vacances Doshi [1].

Ce modèle a été largement étudié et appliqué à divers problèmes dans l'analyse des systèmes informatiques, des systèmes de communication et de production ...

On peut définir les rappels linéaires de la manière suivante : La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi exponentielle avec l'intensité linéaire  $\lambda(1 - \delta_{0j}) + j\theta$ , lorsque le nombre de clients en orbite est  $j$  de  $N$  et  $\delta_{0j}$  est la fonction de Kronecker. Le premier terme correspond aux rappels constants [traités par Artalejo [2], le second est le cas à étudier. Ici, les rappels sont linéaires dans le sens que l'intensité globale des rappels est proportionnelle au nombre de clients en orbite.

## 5.1 Description du modèle [2]

On considère un système de files d'attente à un seul serveur où les clients primaires arrivent suivant un flux poissonnien de taux  $\lambda$ . Un client qui arrive et trouve le serveur occupé, quitte l'aire du service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelés "orbite". Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois, ..., jusqu'à ce qu'il le trouve disponible. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux  $\theta$ . Comme cette politique de rappel dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappel linéaire. Les temps de service sont supposés d'une loi arbitraire, de fonction de distribution  $B(t)$  et de moyenne finie  $\frac{1}{r}$ .

Tous les clients entrant dans le système sont servis d'une manière continue et dans un ordre indépendant de leur temps de service. De plus, on suppose que le serveur prend une vacance chaque fois que le système devient vide .

L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit par le processus :

$$X(t) = (C(t), N_o(t), \xi(t))$$

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est oisif;} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé;} \\ 2, & \text{si le serveur est en vacance.} \end{cases}$$

$N_o(t)$  : le nombre de client dans l'orbite à l'instant  $t$ .

$C(t) = 1$  (alternativement  $C(t) = 2$ ), alors  $\xi(t)$  représente le temps de service écoulé du client en service (respectivement, le temps de la vacance écoulé).

$B(x)$  suit une distribution générale.

Soit  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite d'instants de la complétion d'un service ou bien de la fin d'une vacance propre.

La séquence des vecteurs aléatoires  $Y_n = \{C(\zeta_n^-), N(\zeta_n^+)\}$  forme une chaîne de Markov, qui est une chaîne de Markov incluse pour notre système de files d'attente.

Son espace d'état est  $S = \{1, 2\} * \mathbb{N}$ .

Les états de transitions sont donnés par :

$$(i_{n+1}, j_{n+1}) = \begin{cases} (2, X), & \text{if } j_n = 0; \\ (1, j_n - \delta_{j_n} + v_{n+1}), & \text{if } j_n > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Où

$X$  : le nombre de clients qui arrivent durant une vacance.

$v_{n+1}$  : le nombre de clients qui arrivent pendant un temps de service qui se termine à l'instant  $\zeta_{n+1}$ .

$\delta_{j_n}$  est la variable de Bernoulli

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov induite sont données par les formules suivantes :

Si  $C(\zeta_{n+1}^-) = 1$

$$\begin{aligned} r_{km} &= P(j_{n+1} = m / j_n = k) \\ &= k_{m-k} \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} [P(1, j_n = k) + P(2, j_n = k)] + k_{m-k+1} \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} [P(1, j_n = k) + P(2, j_n = k)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si  $C(\zeta_{n+1}^-) = 2$

$$r_{km} = P(X = m)P(i_n = 1, j_n = 0) + P(X = m)P(2, j_n = 0) = P(X = m)(\pi_{1,0} + \pi_{2,0}) \quad m \geq 0$$

## 5.2 Condition d'ergodicité

La chaîne de Markov incluse est ergodique si et seulement si :  $\rho = \frac{\lambda}{r} < 1$ .

## 5.3 Distributions stationnaires de la chaîne induite

$$\pi_{i,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(y_n = (i, j)) \quad (i, j) \in S$$

D'après (5.2), on a :

$$\pi_{1,m} = (1 - \delta_{m0}) \sum_{k=1}^m \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} k_{m-k} (\pi_{1,k} + \pi_{2,k}) + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} k_{m-k+1} (\pi_{1,k} + \pi_{2,k})$$

$$\pi_{2,m} = P(X = m)(\pi_{1,0} + \pi_{2,0}) \quad m \geq 0$$

Soient les fonctions génératrices

$$\pi_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_{1,m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} (\pi_{1,k} + \pi_{2,k}) K(z) z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} (\pi_{1,k} + \pi_{2,k}) K(z) z^{k-1} \quad (5.3)$$

$$\pi_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_{2,m} = \beta \chi(z) \quad (5.4)$$

où :

$\beta = \pi_{1,0} + \pi_{2,0}$  et  $\chi(z)$  est la fonction génératrice de de la variable X.

Posant :

$$L_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{\pi_{1,m}}{\lambda + m\theta} \quad L_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{\pi_{2,m}}{\lambda + m\theta}$$

D'après (5.3) :

$$\pi_1(z) = K(z) \left[ \frac{\lambda}{z} (L_1(z) + L_2(z)) + \theta (L_1'(z) + L_2'(z)) \right] \quad (5.5)$$

D'après (5.4)

$$\pi_2(z) = \beta \chi(z) \quad (5.6)$$

Définissant :

$$\begin{aligned} \pi_1(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_{1,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda + m\theta}{\lambda + m\theta} z^m \pi_{1,m} = \lambda L_1(z) + \theta z L_1'(z) \\ \pi_2(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda + m\theta}{\lambda + m\theta} \pi_{2,m} z^m = \lambda L_2(z) + \theta z L_2'(z) \end{aligned} \quad (5.7)$$

(5.5) et (5.7) donnent :

$$L_1'(z) = \frac{\lambda[z - K(z)]}{\theta z[K(z) - z]} L_1(z) - \frac{K(z)[\lambda L_2(z) + \theta z L_2'(z)]}{\theta z[K(z) - z]}$$

En utilisant (5.7) et (5.6)

$$L_1'(z) = \frac{\lambda[z - K(z)] L_1(z) - K(z) \beta \chi(z)}{\theta z[K(z) - z]}$$

D'après (5.7)

$$\pi_1(z) = \lambda L_1(z) + \theta z \frac{\lambda[z - K(z)] L_1(z) - \beta K(z) \chi(z)}{\theta z[K(z) - z]} = \frac{\beta K(z) \chi(z)}{z - K(z)} \quad (5.8)$$

## 5.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré, dans un premier temps, l'intérêt et les applications des modèles d'attente avec rappels et vacances. Dans un deuxième temps, nous avons établi les probabilités de transition, la condition d'ergodicité et les distributions stationnaires associé au modèle M/G/1 avec rappels linéaires et vacances du serveur.

Cette étude et celle effectuée par Artalejo [2] constituent une analyse complète des rappels linéaires dans le cas de ces systèmes d'attente.

## Références

1. B.T. Doshi. Single server queues with vacations. *Stochastic Analysis of Computer and Communications Systems*. Ed. H. Takagi, Elsevier Amsterdam. , 1990.
2. J.R. Artalejo. Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations . *Computers and Operations Research* , 24 :493–504, 1997.



## Troisième partie

---

### Processus Aléatoires et Applications





## La Condition Nécessaire et Suffisante d'Ergodicité des Systèmes d'Attente

Lynda BOUKIR

No Institute Given

### 6.1 Introduction

L'étude des systèmes d'attente semi-Markovien se fait en général, en utilisant la C.M.I, ie : choisir des instants particuliers de façon à obtenir une chaîne Markovienne.

Les étapes qu'il faut suivre en général pour étudier cette chaîne sont :

- Décrire le système avec les instants de discrétisation.
- Montrer que la chaîne est Markovienne.
- Donner la condition d'ergodicité de la chaîne.
- Donner la relation entre la distribution stationnaire du processus obtenue à un instant quelconque et celle de la C.M.I.

### 6.2 Condition nécessaire et suffisante d'ergodicité

**Théorème 6.1 [Foster 1953]** *Une chaîne irréductible, apériodique est ergodique s'il existe une solution non négative pour le système :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}x_j \leq x_i - 1 \quad (6.1)$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}x_j \leq \infty \quad (6.2)$$

**Théorème 6.2** *Un système apériodique irréductible est ergodique si et seulement si, il existe une solution non nulle pour le système :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j p_{ji} = x_i \quad (6.3)$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| < \infty \quad (6.4)$$

### 6.3 Application pour la file $M/G/1$

Le système  $M/G/1$  peut être décrit de la manière suivante : Le processus des arrivées est Poissonien, la loi de service est quelconque et les clients sont servis selon la discipline (FIFO).

Pour étudier cette file d'attente, le plus simple est de se ramener à une C.M.I.

Soit  $A(t)$  : le nombre d'arrivées dans la file d'attente dans l'intervalle  $[0, t]$ .

et  $Y_t$  : le nombre de clients dans le système au temps  $t$ .

Soit :  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  les temps de service des clients  $1, 2, \dots, n, \dots$

Nous supposons que le processus  $A(t), t \geq 0$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Les temps de service  $S_n$  sont indépendants les uns des autres et du processus des arrivées, ils sont équidistribués suivant la distribution de probabilité  $G(s)$  de moyenne  $\frac{1}{\mu}$ .

Nous désirons trouver la condition de stabilité de cette file ainsi que la distribution du nombre de clients qui s'y trouve à l'état d'équilibre.

Soit  $X_n$  le nombre de clients dans le système juste après le  $n$ -ième départ.

**Théorème 6.3** *Le processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une chaîne de Markov de matrice de transition*

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 1 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 2 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$p_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} dG(s), \quad k = 0, 1, \dots$$

**Théorème 6.4** *La chaîne  $X_n$  est récurrente positive si et seulement si*

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

*Démonstration.* Pour obtenir le résultat recherché, nous appliquons le théorème (6.1) de Foster : On pose comme solution recherchée :  $x_j = \frac{j}{1 - \rho}$ ,  $j \geq 0$ . De la matrice de transition  $P$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}x_j &= \sum_{j=i-1}^{\infty} p_{j-i+1} \left( \frac{j}{1-\rho} \right), \\
 &= \frac{p_0(i-1)}{1-\rho} + \frac{p_1i}{1-\rho} + \frac{p_2(i+1)}{1-\rho} + \dots \\
 &= \frac{p_0(i-1)}{1-\rho} + \frac{p_1(i-1)}{1-\rho} + \frac{p_2(i-1)}{1-\rho} + \dots \\
 &\quad + \frac{p_1}{1-\rho} + \frac{2p_2}{1-\rho} + \dots \\
 &= (i-1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jp_j}{1-\rho} \\
 &= \frac{(i-1)}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jp_j}{1-\rho}
 \end{aligned}$$

on a  $\sum_{j=1}^{\infty} jp_j = \rho$  d'où :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}x_j &= \frac{i-1+\rho}{1-\rho} \\
 &= \frac{i}{1-\rho} - \frac{1-\rho}{1-\rho} \\
 &= \frac{i}{1-\rho} - 1 = x_i - 1
 \end{aligned}$$

(puisque  $x_i \geq 0$  alors  $(1-\rho) > 0$  d'où  $\rho < 1$ )

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}x_j &= \sum_{j=0}^{\infty} p_jx_j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j \frac{j}{1-\rho} \\
 &= \frac{\rho}{1-\rho} < \infty.
 \end{aligned}$$

D'où, il s'en suit que la chaîne est ergodique si  $\rho < 1$ .

**Théorème 6.5** *Pour la chaîne irréductible et apériodique, les probabilités limites :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\} = \pi_j \quad (\forall j)$$

*existent toujours et elles sont indépendantes de la distribution à l'état initial.*

- Si les états sont tous transitoires ou récurrents nuls, alors  $\pi_j = 0$  pour tout  $j$ , et existe une distribution non stationnaire.
- Cependant, si tous les états sont récurrents positifs (ie : ergodique), alors  $\pi_j > 0$ , pour tout  $j$  et  $\{\pi_j\}$  est une distribution stationnaire unique et coincide avec la probabilité limite solution de :

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} \quad (\forall j \in E)$$

et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1.$$

Pour l'obtention de la condition Nécessaire :

puisque le régime stationnaire existe (d'après le théorème 6.5), alors on a :

$$\pi P = \pi \tag{6.5}$$

$$\pi_i = \pi_0 p_{i1} + \sum_{j=1}^{i+1} \pi_j p_{i-j+1}, (i = 0, 1, \dots) \tag{6.6}$$

si on définit :

$$U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

et

$$K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j.$$

En multipliant (6.6) par  $z^i$  et en sommant sur  $i$ , on trouve :

$$U(z) = \frac{\pi_0 (1-z) K(z)}{K(z) - z}. \tag{6.7}$$

maintenant utilisant le fait que  $U(1) = 1$  :

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{z \rightarrow 1} U(z) \\ 1 &= \pi_0 \frac{-K(1)}{K'(1) - 1} \\ 1 &= \pi_0 \frac{-1}{\rho - 1} \quad (\rho = \frac{\lambda}{\mu}). \end{aligned}$$

on a  $\pi_0 > 0$  (théorème 6.5) d'où  $\rho - 1 < 0 \Rightarrow \rho < 1$ . donc  $\rho < 1$  est une condition nécessaire pour l'ergodicité .

Finalement,  $\rho < 1$  est une condition nécessaire et suffisante pour que  $M/G/1$  soit ergodique.

### 6.4 Relation entre la distribution stationnaire du processus et celle de la C.M

**Définition 6.1** Soit  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  une suite de v.a prenant leur valeur dans un ensemble  $E$  et soit  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  une suite croissante de v.a à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ .

Le processus stochastique  $(X, T) = \{X_n, T_n, n \in \mathbb{N}\}$  est un processus de renouvellement Markovien sur l'espace  $E$  si :

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n; T_0, \dots, T_n\} \\ = P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n\} \end{aligned} \tag{6.8}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j \in E$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Le processus stochastique  $(X, T)$  est homogène dans le temps si, pour tout  $i, j \in E$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , la quantité

$$P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i\} = Q(i, j, t)$$

est indépendante de  $n$ .

Les probabilités  $Q(i, j, t)$  forment le noyau semi-Markovien associé à  $(X, T)$ .

$$P(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(i, j, t)$$

$$P_i\{A\} = P\{A \mid X_0 = i\}$$

$$E_i = \{X_0 = i\}$$

On définit :

$$Q^n(i, j, t) = P_i\{X_n = j, T_n \leq t\} \quad i, j \in E, t \in \mathbb{R}_+ \tag{6.9}$$

Pour tout  $t$  on définit la fonction les fonction :

$R(i, j, t)$  qu'on appelle les fonctions de renouvellement Markovien.

$$R(i, j, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n(i, j, t) \quad \forall i, j \in E, t < \infty \tag{6.10}$$

$R = \{R(i, j, t) : i, j \in E\}$  qu'on appelle le noyau de renouvellement Markovien associé à  $(X, T)$ .

**Théorème 6.6** *Soit  $Z$  un processus semi régénératif, avec un espace des états  $E$ , soit  $(X, T)$  un processus semi Markovien induit de  $Z$ , et  $Q$  et  $R$  sont le noyau semi Markovien et le noyau de renouvellement Markovien correspondant à  $(X, T)$ .*

Définissons pour un ensemble  $A \subset E$  :

$$K_t(i, A) = P_i\{Z_t \in A, T_1 > t\} \quad i \in E, \quad t \geq 0 \quad (6.11)$$

$$P_t(i, A) = P_i\{Z_t \in A, \} \quad i \in E, \quad t \geq 0 \quad (6.12)$$

Alors pour  $i \in E$  et  $t \geq 0$  on a :

$$P_t(i, A) = \sum_{j \in E} \int_0^t R(i, j, ds) K_{t-s}(j, A) \quad (6.13)$$

**Théorème 6.7** *Dans les mêmes hypothèses que le théorème (6.6). Supposons que  $(X, T)$  est un processus récurrent, irréductible et apériodique, soit  $v$  la mesure invariante de  $X$ , et soit*

$$m(j) = E_j[T_1] = \int_0^\infty [1 - \sum_k Q(j, k, t)] dt \quad (6.14)$$

et supposons  $vm < \infty$  alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(i, A) = \frac{1}{vm} \sum_j \int_0^\infty K_t(j, A) dt \quad (6.15)$$

Nous donnons dans ce qui suit la relation reliant la solution stationnaire obtenue à un instant quelcoque du processus d'attente  $p(k)$  et celle de la chaîne de Markov induite  $\pi_k$   $k = 0, 1, \dots$

On note  $Y_t$  : le nombre de clients présent dans le système à l'instant  $t$ .

$Y = \{Y_t; t \geq 0\}$  est un processus semi régénératif avec  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  espace des états.

**Théorème 6.8** *Le processus  $\{X_n, T_n\}$  est un processus de renouvellement Markovien de matrice de transition  $Q(t)$  (noyau semi Markovien) donnée par :*

$$Q(t) = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline 0 & q_0(t) & q_1(t) & q_2(t) & q_3(t) & \dots \\ 1 & p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & \dots \\ 2 & 0 & p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \dots \\ 3 & 0 & 0 & p_0(t) & p_1(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}$$

où  $p_n(t) = \int_0^t \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^n}{n!} dG(s), \quad n = 0, 1, \dots$

et  $q_n(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} p_n(t-s) ds, \quad n = 0, 1, \dots$

### 6.5 Preuve

Le processus  $\{X_n, T_n\}$  est un processus de renouvellement Markovien si :

$$\begin{aligned}
 P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n; T_0, \dots, T_n\} \\
 = P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n\}
 \end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}, j \in E$  et  $t \in \mathbb{R}_+$

Comme le processus des arrivées est Poissonien et que les temps de service sont indépendants les uns des autres, la relation (6.8) est vérifiée.

Les éléments de la (i+1)-ième ligne de la matrice de transition sont déterminés par :

$$\begin{aligned}
 Q(i, j, t) &= P\{X_{n+1} = j, d_{n+1} - d_n \leq t \mid X_n = i\} \\
 &= P\{A(S_{n+1}) = j - i + 1, d_{n+1} - d_n \leq t\} \\
 &= Q_{j-i+1}(t).
 \end{aligned}$$

La première ligne de la matrice de transition est déterminée par les termes :

$$\begin{aligned}
 Q(0, j, t) &= P\{X_{n+1} = j, d_{n+1} - d_n \leq t \mid X_n = 0\} \\
 &= \int_0^t P\{a_n - d_n = s\} P\{A(S_{n+1}) = j; d_{n+1} - a_n \leq t - s\} ds \\
 &= q_j(t).
 \end{aligned}$$

Nous allons utiliser le théorème fondamental des processus de renouvellement Markovien, qui permet de relier la solution stationnaire à un instant quelconque, à la solution stationnaire sur la chaîne de Markov induite.

Nous obtenons :

$$K(t, j, k) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{si } j=k=0; \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} (1-G(s)) ds & \text{si } k > j = 0; \\ (1-G(t)) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k-j}}{(k-j)!} & \text{si } k \geq j = 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Revenons au théorème fondamental : si la chaîne de Markov induite est récurrente positive (ie : si  $\rho < 1$ ), le processus de renouvellement markovien est aussi ergodique et le temps moyen entre deux instants de la chaîne de Markov induite est simplement  $\lambda^{-1}$ . Comme nous voulons trouver la relation entre  $v_k$  et  $\pi_k$ , il suffit d'appliquer la relation (6.15), c'est à dire :

$$v(k) = \sum_j \lambda \pi_j \int_0^\infty K(t, j, k) dt \quad (6.16)$$

Vérifions l'égalité des séries  $V(z) = \sum_{k=0}^\infty v_k z^k$  et  $U(z) = \sum_{k=0}^\infty \pi_k z^k$  pour tout  $|z| < 1$ . Posons  $\alpha = \lambda(1-z)$ , nous obtenons à partir de(6.16) :

$$\begin{aligned} (1-z)V(z) &= \alpha \sum_{j=0}^\infty \pi_j \int_0^\infty dt \sum_{k=j}^\infty K(t, j, k) z^k \\ &= \pi_0 \left\{ \int_0^\infty \alpha e^{-\lambda t} dt \right. \\ &\quad \left. + z \int_0^\infty dt \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha s} [1-G(s)] \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^\infty \pi_j z^j \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} [1-G(t)] dt \\ &= \pi_0 [1-z + z(1-F(z))] + \sum_{j=1}^\infty \pi_j z^j (1-F(z)) \\ &= U(z)[1-F(z)] + \pi(0)(1-z)F(z) \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\text{où } F(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} g(t) dt.$$



$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} G(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} g(t) dt.
\end{aligned}$$

En utilisant le système  $\pi = \pi P$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
zU(z) &= \sum_i \pi_i \sum_j P(i, j) z^{j+1} \\
&= [\pi_0 z + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \dots] F(z) \\
&= U(z) F(z) - \pi_0 (1 - z) F(z)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

A partir de (6.17) et (6.18) et en éliminant  $\pi_0 (1 - z) F(z)$ , nous obtenons :

$$(1 - z)V(z) = U(z)[1 - F(z)] + G(z)F(z) - zG(z) = (1 - z)U(z).$$

Ce qui démontre l'égalité pour  $|z| < 1$ .

Nous avons montré que la solution stationnaire à un instant quelconque, est la même que celle obtenue aux instants de la chaîne incluse  $X_n$ .

## 6.6 Conclusion

Pour terminer nous donnons la propriété PASTA (Poisson Arrivals See Time Average) qui permet de donner l'égalité entre la distribution stationnaire du processus et celle de la chaîne de Markov induite, une condition nécessaire pour qu'il y ait cette égalité est que le processus des arrivées soit Poissonien, ie : si le processus des arrivées n'est pas Poissonien alors il n'y a pas égalité entre les deux distributions.

## Référence

1. Donal Gross et Carl M. Harris  
"Fundamental of queueing theory", John Wiley and Sons, New York, 1974.
2. E.Gelenbe et G.Pujolle  
"Introduction aux réseaux de files d'attente", edition Eyrolles et Cnef Enst, 1982.
3. Cinlar E.  
"Introduction to stochastic processus", Englewoods Cliff, N.J.Prentice Hall, 1975.



# Estimations de la stabilité forte des chaînes de Markov.

Boualem RABTA

LA.M.O.S., Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des systèmes,  
Université de Béjaïa, Targa Ouzemour -06000- Béjaïa (Algérie).

**Résumé** Dans ce travail, nous présentons des estimations quantitatives de l'erreur relative commise sur la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov fortement  $v$ -stable après une petite perturbation de son noyau de transition. Nous présentons, également, des estimations de l'erreur absolue commise sur les probabilités stationnaires individuelles d'une chaîne de Markov discrète irréductible fortement  $v$ -stable. Une application à un modèle de gestion des stocks de type  $(R, s, S)$  a été appliquée.

**Mots-clés** : Chaîne de Markov, Stabilité forte, Perturbation, Erreur relative, Erreur absolue, gestion des stocks.

## 7.1 Introduction

Dans la modélisation des problèmes pratiques, on est souvent amené à remplacer le système réel, généralement très compliqué, par un autre système (idéal) qui lui est proche dans un certain sens mais qui est plus simple en structure et/ou en composantes. Cela est dicté par le fait que le système réel ne peut pas être analysé ou que son analyse débouche sur des formules compliquées qui ne peuvent pas être exploitées en pratique. A cela s'ajoute le fait que les paramètres sont généralement déterminés d'une manière imprécise, car obtenus par des méthodes statistiques. De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives du système réel, i.e., la manière de laquelle ce dernier est affecté par les changements de ses paramètres. Les propriétés qualitatives importantes des modèles stochastiques sont l'invariance, la monotonie et la stabilité [7]. C'est par le biais des propriétés qualitatives que des bornes peuvent être obtenues mathématiquement et que des approximations peuvent être faites rigoureusement. Plusieurs méthodes ont été élaborées pour l'investigation de la stabilité des chaînes de Markov. Certaines permettent l'obtention d'estimations quantitatives en plus de l'affirmation qualitative de la stabilité. Pour la plupart ces méthodes, l'estimation obtenue est de la forme :

$$\|\pi - \nu\| \leq C(P)\|P - Q\|.$$

avec une définition particulière de la norme  $\|\cdot\|$ . Cette estimation ne permet pas de mesurer la qualité de l'approximation car il faudra la comparer à une valeur de référence certes.

De plus, la formule ci-dessus ne permet pas d'avoir une idée sur l'erreur commise sur les probabilités stationnaires individuelles d'une chaîne de Markov discrète. La méthode de stabilité uniforme [3] répond à ces questions mais se limite au cas d'une chaîne de Markov irréductible finie. Cette méthode présente des estimations de la forme :

$$|\pi_k - \nu_k| \leq C(P)\|P - Q\|.$$

L'article de Cho et Mayer [2] présente et compare plusieurs bornes de cette forme. Cette méthode permet également d'avoir des estimations sur l'erreur relative sous la forme (voir [3]) :

$$\frac{|\pi_k - \nu_k|}{|\pi_k|} \leq C(P)\|P - Q\|.$$

Sur la base des résultats obtenus pour la méthode de stabilité forte [1, 4], nous présentons dans ce travail des estimations quantitatives de l'erreur relative commise sur la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov fortement stable après une perturbation de son noyau de transition. Nous présentons, également, une estimation de l'erreur absolue commise sur les probabilités stationnaires individuelle d'une chaîne de Markov discrète irréductible. Nous appliquons les résultats obtenus à un modèle de gestion des stocks de type  $(R, s, S)$ .

## 7.2 Critère de stabilité forte

Soit  $X = (X_t, t \geq 0)$ , une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace mesurable  $(\mathbf{E}, \mathcal{E})$ , (où l'on suppose que la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{E}$  est dénombrablement engendrée), donnée par un noyau de transition régulier  $\mathbf{P}(x, A)$ ,  $x \in \mathbf{E}$ ,  $A \in \mathcal{E}$  et admettant une probabilité invariante unique  $\pi$ .

Notons  $m\mathcal{E}$  ( $m\mathcal{E}^+$ ) l'espace des mesures finies (non négatives) sur  $\mathcal{E}$ ,  $f\mathcal{E}$  ( $f\mathcal{E}^+$ ) l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives) sur  $\mathbf{E}$ . Soit  $v$  une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive, (pas nécessairement finie) sur  $\mathbf{E}$  et soit

$$\theta = \inf_{x \in \mathbf{E}} v(x).$$

On introduit dans  $m\mathcal{E}$ , la famille spéciale de normes de la forme

$$\|\mu\|_v = \int_{\mathbf{E}} v(x)|\mu|(dx), \forall \mu \in m\mathcal{E} \quad (7.1)$$

où  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$ .

On considère, dans l'espace  $m\mathcal{E}$ , l'espace de Banach  $\mathcal{M} = \{\mu \in (m\mathcal{E}) : \|\mu\|_v < \infty\}$  et  $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\mathcal{E}^+)$ .

Alors, Les normes induites sur les espaces  $f\mathcal{E}$  et  $\mathcal{M}$  auront les formes suivantes :

$$\|\mathbf{P}\|_v = \sup\{\|\mu\mathbf{P}\|_v, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in \mathbf{E}} (v(x))^{-1} \int_{\mathbf{E}} |\mathbf{P}(x, dy)|v(y), \quad (7.2)$$

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in \mathbf{E}} (v(x))^{-1} |f(x)|. \quad (7.3)$$

On associe à chaque noyau de transition  $\mathbf{P}(x, A)$  appartenant à l'espace des opérateurs linéaires bornés, les applications linéaires  $\mathcal{L}_{\mathbf{P}} : m\mathcal{E} \rightarrow m\mathcal{E}$  et  $\mathcal{L}_{\mathbf{P}}^* : f\mathcal{E} \rightarrow f\mathcal{E}$ , dont les valeurs pour  $\mu \in m\mathcal{E}$  et  $f \in f\mathcal{E}$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mu\mathbf{P}(A) &= \mathcal{L}_{\mathbf{P}}(\mu)(A) = \int_{\mathbf{E}} \mu(dx)\mathbf{P}(x, A), \quad \forall A \in \mathcal{E}, \\ \mathbf{P}f(x) &= \mathcal{L}_{\mathbf{P}}^*(f)(x) = \int_{\mathbf{E}} \mathbf{P}(x, dy)f(y), \quad \forall x \in \mathbf{E}. \end{aligned}$$

et à chaque fonction  $f \in f\mathcal{E}$ , on associe la fonctionnelle linéaire  $f : \mu \rightarrow \mu f$  telle que :

$$\mu f = \int_{\mathbf{E}} \mu(dx)f(x),$$

Pour  $\mu \in m\mathcal{E}$  et  $f \in f\mathcal{E}$ ,  $f \circ \mu$  désignera le noyau de transition de la forme :

$$f(x)\mu(A), \quad x \in \mathbf{E}, A \in \mathcal{E}.$$

**Définition 7.1 (cf. [1])** *On dit que la chaîne de Markov  $X$  vérifiant  $\|\mathbf{P}\|_v < \infty$  est fortement  $v$ -stable, si chaque noyau stochastique  $\mathbf{Q}$  dans un certain voisinage  $\{\mathbf{Q} : \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\|_v < \epsilon\}$  admet une probabilité stationnaire unique  $\nu$  et :*

$$\|\nu - \pi\|_v \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\|_v \longrightarrow 0.$$

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes de la  $v$ -stabilité forte d'une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris.

**Théorème 7.1 (cf. [1])** *Pour que la chaîne de Markov  $X$  récurrente au sens de Harris et vérifiant  $\|\mathbf{P}\|_v < \infty$  soit fortement  $v$ -stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1.  $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+, \exists h \in f\mathcal{E}^+$  telles que :  $\pi h > 0, \alpha \mathbb{I} = 1, \alpha h > 0,$
2. Le noyau  $T = \mathbf{P} - h \circ \alpha$  est non négatif,
3.  $\exists \rho < 1$  tel que,  $Tv(x) \leq \rho v(x), \forall x \in \mathbf{E}.$

où  $\mathbb{I}$  est la fonction identiquement égale à 1.

La possibilité d'obtenir des inégalités avec un calcul exact des constantes est la particularité de la méthode de stabilité forte.

**Théorème 7.2** (cf. [4]) *Sous les conditions du théorème 7.1 et pour  $\Delta$  vérifiant la condition  $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1 - \rho)$ , on a :*

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v C (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.4)$$

où

$$C = 1 + \|\mathcal{I}\|_v \|\pi\|_v$$

et

$$\|\pi\|_v \leq (\alpha v)(1 - \rho)^{-1}(\pi h)$$

### 7.3 Estimation de l'erreur relative

Le résultat suivant donne une estimation de l'erreur relative. Ce qui permet de mesurer la grandeur de la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne perturbée par rapport à la norme de la mesure stationnaire.

**Théorème 7.3** *Sous les conditions du théorème 7.1 et pour  $\Delta$  vérifiant la condition  $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1 - \rho)$ , on a :*

$$\frac{\|\nu - \pi\|_v}{\|\pi\|_v} \leq \|\Delta\|_v C (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.5)$$

On a :

$$\|\pi\|_v = \int_E \pi(dx)v(x) \geq \theta \int_E \pi(dx) = \theta \neq 0.$$

D'après le théorème 7.2 on a :

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v C (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}.$$

Par suite,

$$\frac{\|\nu - \pi\|_v}{\|\pi\|_v} \leq \|\Delta\|_v C (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}.$$

### 7.4 Estimation de la déviation des probabilités stationnaires individuelles

Considérons maintenant le cas d'une chaîne de Markov discrète irréductible (définie par une matrice de transition). Les estimations précédentes ne permettent pas d'avoir une idée sur l'erreur commise individuellement sur l'une des probabilités stationnaires de la chaîne de Markov perturbée. Nous proposons alors, ce résultat :

**Théorème 7.4** *Sous les conditions du théorème 7.1 et pour  $\Delta$  vérifiant la condition  $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1 - \rho)$ , on a :*

$$|\pi_k - \nu_k| \leq \frac{\|\Delta\|_v \|\pi\|_v C}{v(k) (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)}, \tag{7.6}$$

pour tout  $k \in E$ .

Soit  $k \in E$ ,

$$v(k) |\pi_k - \nu_k| \leq \sum_{i \in E} v(i) |\pi_i - \nu_i| = \|\pi - \nu\|_v \leq \frac{\|\Delta\|_v \|\pi\|_v C}{(1 - \rho - C \|\Delta\|_v)}.$$

Donc,

$$|\pi_k - \nu_k| \leq \frac{\|\Delta\|_v \|\pi\|_v C}{v(k) (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)}.$$

### 7.5 Application à un modèle de gestion des stocks

Considérons le problème de gestion des stocks mono-article mono-échelon de type  $(R, s, S)$  suivant. l'état du stock  $X_n$  est inspecté aux dates  $t_n = nR$  ( $n \geq 1$ ). Si le niveau du stock  $X_n$  est inférieur ou égal à  $s$ , on passe une commande pour ramener le stock au niveau  $S$ . On suppose que les commandes arrivent immédiatement. Les demandes successives  $\xi_n, n \geq 1$ , sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune

$$a_k = P(\xi_1 = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$a_k$  représente alors la probabilité d'avoir une demande de  $k$  articles durant la période.

Soit  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  la chaîne de Markov représentant le niveau du stock en main à la date  $t_n = nR$ .

Considérons un autre modèle identique en structure, sauf que les demandes  $\xi'_n$  sont de loi :

$$a'_k = P(\xi'_1 = k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Soit  $(X'_n)_{n \geq 0}$  la chaîne de Markov représentant le niveau du stock en main à la date  $t_n = nR$  dans  $\Sigma'$ . Soit  $P$  et  $Q$  les opérateurs de transition des chaînes de Markov  $X$  et  $X'$  respectivement.

### 7.5.1 Stabilité forte de la chaîne $X$

**Théorème 7.5** (cf. [6]) *La chaîne de Markov  $X = \{X_n, n \geq 0\}$ , est fortement  $v$ -stable pour une fonction  $v(k) = \beta^k$  pour tout  $\beta > 1$ .*

La constante  $\rho$  étant égale à :

$$\rho = \frac{\sum_{i=s+1}^{\infty} a_i}{\beta^{s+1}} + \sum_{i=0}^s a_i \beta^{-i}. \quad (7.7)$$

### 7.5.2 Déviation de l'opérateur de transition

Le système de gestion des stocks considéré est fortement  $v$ -stable. Ces caractéristiques peuvent approcher celles d'un autre modèle identique en structure sauf en distribution des demandes si les lois de demandes des deux systèmes sont proches dans un certain sens. La proximité des deux lois sera mesurée par la mesure

$$W = \sum_{i=S}^{\infty} |a_i - a'_i| + \sum_{i=0}^{S-1} |a_i - a'_i| \beta^{S-i} \quad (7.8)$$

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes  $X$  et  $X'$ , estimons d'abord la déviation du noyau de transition de la chaîne  $X$  par rapport à celui de la chaîne  $X'$ . On a alors

**Lemme 7.1.** (cf. [5]) Soit  $P$  (resp.  $Q$ ) le noyau de transition de la chaîne de Markov  $X$  (resp.  $X'$ ). Alors

$$\|P - Q\|_v \leq W$$

### 7.5.3 Inégalités de stabilité

Les inégalités de stabilité donnent une estimation de l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes de Markov  $X$  et  $X'$ . Estimons d'abord  $\|\pi\|_v$ .

**Lemme 7.2.** (cf. [5]) Soit

$$\gamma = \frac{\left( \sum_{i=S}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{S-1} a_i \beta^{S-i} \right)}{(1 - \rho)(1 + H(S - s))} \quad (7.9)$$

où  $\rho$  est donné par (7.7) et  $H = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\xi}^{n*}$  est la fonction de renouvellement associée à la fonction de répartition  $F_{\xi}$  de la variable aléatoire  $\xi_1$ . Alors

$$\|\pi\|_v \leq \gamma$$



**Théorème 7.6** (cf. [5]) Soit  $\pi$  et  $\nu$  les distributions stationnaires des chaînes de Markov  $X$  et  $X'$  respectivement. Alors, sous la condition  $W < \frac{1-\rho}{1+\gamma}$  on a

$$\|\pi - \nu\|_v \leq \frac{W\gamma(1+\gamma)}{1-\rho-(1+\gamma)W} \quad (7.10)$$

où  $\rho$  est donné par (7.7) et  $\gamma$  par (7.9).

**Théorème 7.7** Soit  $\pi$  et  $\nu$  les distributions stationnaires des chaînes de Markov  $X$  et  $X'$  respectivement. Alors, sous la condition

$$\|P - Q\|_v = W < \frac{1-\rho}{1+\gamma} \quad (7.11)$$

on a

$$\frac{\|\pi - \nu\|_v}{\|\pi\|_v} \leq \frac{W(1+\gamma)}{1-\rho-(1+\gamma)W} \quad (7.12)$$

où  $\rho$  est donné par (7.7) et  $\gamma$  par (7.9).

Appliquer le théorème 7.3 et suivre la démarche de la preuve du théorème 7.6 pour le calcul des constantes.

**Théorème 7.8** Soit  $\pi$  et  $\nu$  les distributions stationnaires des chaînes de Markov  $X$  et  $X'$  respectivement. Alors, sous la condition

$$\|P - Q\|_v = W < \frac{1-\rho}{1+\gamma} \quad (7.13)$$

on a

$$|\pi_k - \nu_k| \leq \frac{W\gamma(1+\gamma)}{\beta^k(1-\rho-(1+\gamma)W)} \quad (7.14)$$

pour tout  $k \in E$ . Avec  $\rho$  donné par (7.7) et  $\gamma$  par (7.9).

Appliquer le théorème 7.4.

## Références

1. D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSR, ser. A*, 11 :3–5, 1983.
2. G. Cho and C.D. Meyer. Comparaison of perturbation bounds for the stationary probabilities of a finite markov chain. *Linear Algebra and its Applications*, 335 :137–150, 2001.
3. I. Ipsen and C.D. Meyer. Uniform stability of markov chains. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 15(4) :1061–1074, 1994.
4. N.V. Kartashov. Strong stability of Markov chains. *VNISSI, Vsesayouzni Seminar on Stability Problems for stochastic Models, Moscow*, pages 54–59, 1981.
5. B. Rabta and D. Aïssani. Estimate of the strong stability in an  $(R, s, S)$  inventory model. *Proceedings of the XXIII Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Pamplona (Spain)*, page 94, 2003.
6. B. Rabta and D. Aïssani. Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes*, 10(26) :129–136, 2004.
7. D. Stoyan. *Comparaison Methods for Queues and Other Stochastic Models*. English translation, D.J. Daley, Editor ( J. Wiley and Sons, New York, 1983.



## Sur les Approximation dans les Systèmes Réparables de Fiabilité avec Maintenance Préventive

Fazia RAHMOUNE<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : foughyah@yahoo.fr

Comme pour toute théorie, en théorie de fiabilité on opère selon des modèles [2]. Les méthodes probabilistes élémentaires utilisées pour les systèmes non réparables s'avèrent insuffisantes pour étudier des systèmes réparables. Pour l'analyse de ces derniers, on fait appel à ces méthodes de modélisation les plus répondues [3, 9]. L'un des objectifs de ce travail est de montrer que le calcul de la fiabilité de certains systèmes complexes se ramène à des problèmes de phénomènes d'attente. Supposons par exemple que la capacité d'un atelier de réparation est  $N \geq 1$ , ce qui signifie que  $N$  éléments défailants au maximum peuvent être remis en service à la fois. Si  $N$  est inférieur au nombre d'éléments du système (ce qui est souvent le cas), une file d'attente de composants tombés en panne peut se former, on est alors en présence d'un "*phénomène d'attente*" [7]. Il existe cependant une différence importante entre les phénomènes d'attente habituels et ceux qui interviennent dans l'étude des systèmes réparables de fiabilité. Pour les premiers, on admet implicitement qu'il existe un nombre infini de clients potentiels, ce qui implique que le taux d'arrivée de ces clients est indépendant de l'état dans lequel le système se trouve. On parle alors de système de file d'attente ouvert. Les seconds, que l'on appelle systèmes fermés, sont destinés à servir un nombre fini de clients potentiels, dont chacun peut solliciter le service de réparation offert plus d'une fois. L'intensité du flux d'arrivée peut alors varier en fonction de l'état dans lequel se trouve le système.

Afin d'élever la fiabilité des systèmes complexes, il existe des méthodes adéquates, telles que la "*redondance*", et aussi ce qu'on appelle "*maintenance préventive*" [8, 4, 5]. La redondance est l'une des méthodes qui permet d'augmenter la fiabilité du système sujet à des pannes. Elle consiste à faire fonctionner en parallèle plusieurs éléments remplissant la même fonction. Le problème de redondance a été pris en considération par Aïssani lors de l'étude du système  $M/G/1$  avec rappels et serveur non fiable [1]. Une autre technique

est celle des maintenances préventives qui consiste en l'inspection du système en question pour des éventuelles réparations préventives ou remplacement afin d'élever la fiabilité du système et de pallier aux pannes, à des instants aléatoires.

Ceci nous permettra en premier lieu d'introduire la modélisation des systèmes de fiabilité avec maintenance préventive par les systèmes de files d'attente avec vacances, où les périodes de maintenance sont simulées par celles des vacances du serveur. Nous nous intéressons plus exactement, aux systèmes de files d'attente à source finie et vacances du serveur. Dans de tels modèles, le serveur prend occasionnellement une vacance d'une durée aléatoire, qui peut être utilisée pour accomplir une ou plusieurs tâches secondaires, comme elle peut modéliser une période d'oisiveté du serveur [11, 10, 6]. L'étude de tels systèmes est sans aucun doute très importante pour les applications pratiques, car les vacances du serveur influent beaucoup sur les caractéristiques du système considéré. En particulier, plus les durées de vacances du serveur sont longues, plus le nombre d'utilisateurs dans la file est élevé et plus la durée d'attente de chaque usager dans la file est longue.

En second lieu, dans ce travail, nous avons prouvé pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes réparables de fiabilité avec maintenance préventive qui peuvent être vus comme des systèmes de files d'attente avec vacances et source finie, où la perturbation a concerné la structure du service. Le système  $M/G/1//N$  à vacances multiples du serveur et service exhaustif nous a servi d'illustration. Nous avons prouvé le fait de la stabilité. Ceci nous permet de constater la possibilité d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système  $M/G/1//N$  avec maintenances préventives par celles du système  $M/G/1//N$  classique. Nous avons obtenu également les estimations quantitatives de stabilité avec un calcul exact des constantes.

## Références

1. A . Aïssani. An  $M^X/G/1$  Retrial Queue with Unreliable Server and Vacations. *Proceedings 17th European Simulation Multiconference*, 175-180, 2003.
2. A . Aïssani. *Modèles Stochastiques de la Théorie de Fiabilité*. Office des Publications Universitaires, Alger, 1992.
3. J. L. Bon. *Fiabilité des Systèmes (Méthodes Mathématiques)*. Edition Masson, 1995.
4. T. K. Das. *Analysis of Patrolling Repairman Systems*. PhD thesis, Texas and M. University, College Station, Texas, 1989.
5. T. K. Das and M. A. Woltman. Analysis of Asymmetric Patrolling Repairman Systems. *Eur. Jour. Oper. Res.*, 64, 45-60.
6. B. T. Doshi. *Single Server Queues With Vacations*. In *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems*, Amsterdam, Elsevier Science Edition, 217-265, 1990.

7. M. Roussignol and D. Flipo. Files d'Attente et Fiabilité. Technical report, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002-2003.
8. A. L. Scherr. An Analysis of Time-Shared Computer Systems. In *Research Monograph 36*. The MIT Press, Cambridge, Mass, 1967.
9. D. Stoyan. *Comparison Methods For Queueing Models and Others Stochastic Models*. Wiley edition, 1983.
10. H. Takagi.  $M/G/1//N$  Queues with Server Vacations and Exhaustive Service. *Operations Research*, Vol. 42, N°5, 926-939, Octobre 1994.
11. T. H. Takine, H. Takagi, Y. Takahashi, and T. Hasewaga. Analysis of Asymmetric Single-Buffer Polling and Priority Systems. *Performance Evaluation*, 11 :253-264, 1990.



## Quatrième partie

---

### Contrôle Statistique de la Qualité





# Sur l'Efficacité Relative Asymptotique de Pitman des Tests non Paramétriques de Fiabilité

Mohand BOURAINE<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : m.bouraineyahoo.fr

## 9.1 Introduction

Si on a à comparer deux tests (test I et test II ) de même niveau de signification. Si le test II a une courbe de la fonction puissance supérieure à celle du test I pour les paramètres de l'alternative alors on préfère le test II.

Cependant, en statistique non paramétrique nous n'avons pas la possibilité de générer des fonctions puissance de façon à avoir des tests uniformément plus puissants.

Pour cela on utilise les fonctions puissance de deux tests pour décrire les propriétés relatives de ces tests, ce qui n'est pas toujours possible pour la plupart des tests non paramétriques de distribution libre. On a aussi recours à la méthode de Monte Carlo.

Une autre méthode consiste à comparer deux tests sur la base des propriétés de leurs distributions asymptotiques. Donc la dépendance de la taille des échantillons n'est pas un problème et les distributions limites sont souvent continues rendant la comparaison plus facile. Si les tests sont consistants, leurs fonctions puissance asymptotiques convergent vers 1 quelque soit l'alternative, ce qui rend la comparaison plus difficile.

Pitman(1948) a contourné ce problème en considérant les propriétés asymptotiques des suites d'alternatives (suites dans  $H_1$  ) d'un test qui converge vers l'hypothèse nulle.

Cette méthode de comparaison ne dépend pas du niveau  $\alpha$  du test. Elle dépend de la distribution considérée (alternative). Cette comparaison est locale car les suites sont choisies près de l'hypothèse nulle.

## 9.2 Efficacité relative asymptotique de Pitman(ERAP)

On considère le test de la forme  $H_0 : \theta \in \omega$  contre  $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$  où  $\theta$  (inconnu)  $\in \Omega$ .

Soient  $\{S_n\}$  et  $\{T_{n'}\}$  deux suites de statistiques pour tester  $H_0$  contre  $H_1$  où  $n$  et  $n'$  sont les tailles des échantillons utilisés pour le test. Soit  $\theta^*$  un élément de  $\Omega - \omega$  et on pose  $C_n$  et  $D_{n'}$  les régions critiques au niveau  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , pour  $S_n$  et  $T_{n'}$  resp. on a

$$\mathbf{P}_\theta(S_n \in C_n) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \omega \text{ et } \forall n \quad (9.1)$$

et

$$\mathbf{P}_\theta(T_{n'} \in D_{n'}) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \omega \text{ et } \forall n'. \quad (9.2)$$

Soit  $\beta$ ,  $\alpha < \beta < 1$ , arbitraire mais fixé, soient  $N$  et  $N'$  les plus petites valeurs de  $n$  et  $n'$  resp., pour lesquelles

$$\mathbf{P}_{\theta^*}(S_N \in C_N) \geq \beta \text{ et } \mathbf{P}_{\theta^*}(T'_N \in D'_N) \geq \beta. \quad (9.3)$$

Donc  $N$  et  $N'$  sont resp. les tailles minimales des observations pour lesquelles le test au niveau  $\alpha$ , basé sur  $S_n$  et  $T'_n$  atteint au moins la puissance  $\beta$ , contre l'alternative  $\theta^*$ . Donc on a

$N = N(\alpha, \beta, \theta^*, \text{distributions})$  et  $N' = N'(\alpha, \beta, \theta^*, \text{distributions})$ .

**Définition 9.1** Soient  $\{S_n\}, \{T_{n'}\}, \alpha, \beta$  et  $\theta^*$  comme déjà définis. Alors l'efficacité relative d'un échantillon de taille finie de  $\{S_n\}$  par rapport à  $\{T_{n'}\}$  pour l'alternative  $\theta^*$  est donnée par

$$e(S, T | \alpha, \beta, \theta^*, \text{distributions}) = \frac{N'(\alpha, \beta, \theta^*, \text{distributions})}{N(\alpha, \beta, \theta^*, \text{distributions})} \quad (9.4)$$

**Remarque 9.1** .

Si  $e(S, T | \alpha, \beta, \theta^*, \text{distributions}) > 1$ , on dit que le test basé sur  $S_n$  est plus efficace que celui basé sur  $T_{n'}$ .

Cette efficacité dépend de  $\alpha, \beta, \theta^*$  et des distributions, ce qui rend la comparaison difficile. Pour cela on procède à la comparaison asymptotique des deux tests. Alors, les alternatives pour lesquelles on compare les deux tests convergent vers le paramètre de l'hypothèse nulle, lorsque la taille de l'échantillon augmente.

**Définition 9.2** Soient  $\{S_{n_i}\}$  et  $\{T_{n'_i}\}$  deux suites de statistiques pour  $H_0 : \theta = \theta_0$ ,  $\theta_0$  fixé, contre l'alternative  $H_1$ , au niveau  $\alpha$  et soit  $\{\theta_i\}$  une suite d'alternatives telles que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \theta_0$ .

De plus, soient  $\beta_{S_{n_i}}(\theta_i)$  et  $\beta_{T_{n'_i}}(\theta_i)$  les puissances des tests basés sur  $S_{n_i}$  et  $T_{n'_i}$  resp. . pour l'alternative  $\theta_i$ . Soient  $\{n_i\}$  et  $\{n'_i\}$  deux suites croissantes d'entiers positifs telle que les deux suites de tests ont le même niveau de signification limite  $\alpha$  et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_{S_{n_i}}(\theta_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_{T_{n'_i}}(\theta_i) < 1 \tag{9.5}$$

alors l'efficacité relative asymptotique de Pitman(ERAP) de  $\{S_{n_i}\}$  relativement à  $\{T_{n'_i}\}$  (ou  $S$  relativement à  $T$ ) est

$$ERAP(S, T) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n'_i}{n_i}, \tag{9.6}$$

cette limite est la même quelque soit  $\{n_i\}$  et  $\{n'_i\}$  et indépendamment de  $\theta_i$ .

$n_i$  et  $n'_i$  sont les nombres d'observations utilisés par les tests  $S$  et  $T$ . L'ERAP( $S, T$ ) est le rapport limite pour atteindre la même puissance lorsque les alternatives convergent vers  $H_0$ , quand les niveaux de signification limites des deux tests sont égaux.

Notons que si  $ERAP(S, T) = 1.2$  par exemple, et si  $n$  est le nombre d'observations nécessaires au test  $S$  pour atteindre une certaine puissance, alors il faut approximativement  $n' = 1.2n$  observations au test  $T$  pour atteindre la même puissance.

### 9.3 Méthode d'évaluation de l'ERAP - Théorème de Noether

Soient  $\{S_{n_i}\}$  et  $\{T_{n'_i}\}$  deux suites pour tester  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre une classe d'alternatives  $H_1$ . On suppose que le test rejette  $H_0$  pour les grandes valeurs de la statistique. Pour un  $\theta$  quelconque, on considère  $\{\mu_{S_{n_i}}(\theta)\}$ ,  $\{\mu_{T_{n'_i}}(\theta)\}$ ,  $\{\sigma_{S_{n_i}}^2(\theta)\}$  et  $\{\sigma_{T_{n'_i}}^2(\theta)\}$ <sup>1</sup> des suites de nombres associé à  $\{S_{n_i}\}$  et  $\{T_{n'_i}\}$ .

Soient  $\theta_i$ ,  $\{n_i\}$  et  $\{n'_i\}$  déjà définis. On suppose que les quatre quantités suivantes ont la même distribution limite  $H(w)$ . En général  $H(w)$  est la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\phi(w)$ , continue, quand le paramètre est  $\theta_i$ ,

$$\frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)} \quad \text{et} \quad \frac{T_{n'_i} - \mu_{T_{n'_i}}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n'_i}}(\theta_i)}$$

et quand le paramètre est  $\theta_0$ ,

$$\frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_0)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)} \quad \text{et} \quad \frac{T_{n'_i} - \mu_{T_{n'_i}}(\theta_0)}{\sigma_{T_{n'_i}}(\theta_0)} \tag{9.7}$$

Soit  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , fixé et soient  $\{c_{n_i}\}$  et  $\{d_{n'_i}\}$  deux suites de valeurs critiques telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta_0}(S_{n_i} \geq c_{n_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta_0}(T_{n'_i} \geq d_{n'_i}) = \alpha. \tag{9.8}$$

---

1. En général elles représentent les moyennes et les variances de  $\{S_{n_i}\}$  et  $\{T_{n'_i}\}$

Donc les deux test ont le même niveau limite  $\alpha$ .

Si  $\beta_{S_{n_i}}(\theta_i)$  et  $\beta_{T_{n_i'}}(\theta_i)$  sont les fonctions puissances de  $S_{n_i}$  et  $T_{n_i}'$ , on aura

$$\beta_{S_{n_i}} = \mathbf{P}_{\theta_i} \left( \frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)} \geq \frac{c_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)} \right) \quad (9.9)$$

et

$$\beta_{T_{n_i}'} = \mathbf{P}_{\theta_i} \left( \frac{T_{n_i}' - \mu_{T_{n_i}'}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_i)} \geq \frac{d_{n_i}' - \mu_{T_{n_i}'}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_i)} \right) \quad (9.10)$$

Pour que les deux tests aient la même puissance limite sous  $\{\theta_i\}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_{S_{n_i}}(\theta_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta_{T_{n_i}'}(\theta_i) \quad (9.11)$$

On doit avoir

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{c_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{d_{n_i}' - \mu_{T_{n_i}'}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_i)} \right) \quad (9.12)$$

Pour que les tests aient le même niveau limite, on doit avoir

$$\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta_0} \left( \frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_0)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)} \geq \frac{c_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_0)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta_0} \left( \frac{T_{n_i}' - \mu_{T_{n_i}'}(\theta_0)}{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_0)} \geq \frac{d_{n_i}' - \mu_{T_{n_i}'}(\theta_0)}{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_0)} \right). \quad (9.13)$$

où  $H(h_\alpha) = 1 - \alpha$ .

Le théorème suivant est dû à Noether(1955) qui donne la méthode de calcul de l'ERAP(sous certaines conditions).

**Théorème 9.1** Soient  $\{S_{n_i}\}$  et  $\{T_{n_i}'\}$  deux suites de tests auxquelles on associe  $\{\mu_{S_{n_i}}(\theta)\}$ ,  $\{\mu_{T_{n_i}'}(\theta)\}$ ,  $\{\sigma_{S_{n_i}}^2(\theta)\}$ ,  $\{\sigma_{T_{n_i}'}^2(\theta)\}$ , et vérifiant les hypothèses suivantes

A1.  $\frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)}$  et  $\frac{T_{n_i}' - \mu_{T_{n_i}'}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_i)}$  ont la même distribution limite  $H(w)$ , continue avec  $\theta_i$  valeur de  $\theta$ .

A2. Même hypothèse que A1. avec  $\theta_i = \theta_0$ .

A3.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i}'}(\theta_0)} = 1$ .

A4.  $\frac{d}{d\theta}[\mu_{S_{n_i}}(\theta)] = \mu'_{S_{n_i}}(\theta)$  et  $\frac{d}{d\theta}[\mu_{T_{n_i}'}(\theta)] = \mu'_{T_{n_i}'}(\theta)$ , sont supposées existantes et continues sur un intervalle fermé autour de  $\theta = \theta_0$  avec  $\mu'_{S_{n_i}}(\theta_0)$  et  $\mu'_{T_{n_i}'}(\theta_0) \neq 0$ .

A5.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu'_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\mu'_{S_{n_i}}(\theta_0)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu'_{T_{n_i}'}(\theta_i)}{\mu'_{T_{n_i}'}(\theta_0)} = 1$ .

A6.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu' S_n(\theta_0)}{\sqrt{n\sigma_{S_n}^2(\theta_0)}} = K_S$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu' T_n(\theta_0)}{\sqrt{n\sigma_{T_n}^2(\theta_0)}} = K_T$ , où  $K_S$  et  $K_T$  sont des constantes positives.

Alors,

$$ERAP(S, T) = \frac{K_S^2}{K_T^2}. \tag{9.14}$$

**Définition 9.3** La quantité

$$K_S = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu' S_n(\theta_0)}{\sqrt{n\sigma_{S_n}^2(\theta_0)}}$$

est appelée efficacité du test basé sur  $S_n$  et notée  $eff(S)$ .

**Remarque 9.2** Donc

$$ERAP(S, T) = \left[ \frac{eff(S)}{eff(T)} \right]^2 \tag{9.15}$$

**Remarque 9.3** .

1. Dans l'expression de  $eff(S)$ , la quantité  $\mu'_{S_n}(\theta_0)$  mesure le taux de changement dans  $\mu_{S_n}(\theta)$  pour les valeurs de  $\theta$  proches de  $\theta_0$ .
2. On a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta_i = \theta_0$ . Le taux de convergence de  $\theta_i$  vers  $\theta_0$  est donné implicitement dans A1.-A6. . De la preuve du théorème 9.1 (de Noether) (cf. Randles et Wolfe (1979)) on déduit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [n_i^{\frac{1}{2}}(\theta_i - \theta_0)] = \frac{h_\alpha - h_\beta}{K_S}, \tag{9.16}$$

où  $h_\alpha$  est le  $100\alpha$  quantile de la distribution limite  $H(w)$ .

Enfin, on obtient

$$\theta_i = \theta_0 + \frac{C_S}{\sqrt{n_i}} + g_S(n_i), \tag{9.17}$$

avec  $C_s$  une constante et  $g_S(n_i)$  une fonction de  $n_i$  vérifiant  $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i^{\frac{1}{2}} g_S(n_i) = 0$ . Ces alternatives sont appelées les alternatives de translation de Pitman.

## 9.4 Application

Considérons le test (développé par Bengt Klefsjö (1983)) :

$H_0$  "  $F$  est exponentiel "

contre

$H_1$  "  $F$  est HNBUE (HNWUE) mais pas exponentiel"

**Ce test est basé sur la statistique**

$$\mathbf{Q}_1 = \sum_{j=1}^n \mathbf{J}_1(\mathbf{j}/\mathbf{n})\mathbf{t}(\mathbf{j})/\mathbf{S}_n \quad (9.18)$$

où

$0 = t(0) \leq t(1) \leq t(2) \leq \dots t(n)$  sont les statistiques d'ordre de l'échantillon  $t_1, t_2, \dots, t_n$   
 $n$  est la taille de l'échantillon  $J_1(u) = -1/\nu + \nu(1-u)^{\nu-1}$  pour  $\nu = 2, 3, \dots$

$$S_n = \sum_{j=1}^n (n-j+1)(t(j) - t(j-1))$$

On essaye de choisir  $\nu$  de façon à avoir une efficacité relative aussi meilleure que possible.

Dans notre cas

$$E_F(Q_1) = \{\mu'(j_1, F)_{\theta=\theta_0}\}^2 / \sigma^2(j_1, F)_{\theta=\theta_0} \quad (9.19)$$

où  $\theta_0$  correspond à la distribution exponentielle. On calcule  $E_F(Q_1)$  pour les distributions :

- Linear failure rate :  $F_1(x) = 1 - \exp(-(x + \frac{1}{2}\theta x^2))$ , pour  $\theta \geq 0, x \geq 0$ ,
- Makeham :  $F_2(x) = 1 - \exp(-(x + \theta(x + e^{-x} - 1)))$ , pour  $\theta \geq 0, x \geq 0$ ,
- Pareto :  $F_3(x) = 1 - (1 + \theta x)^{-1/\theta}$ , pour  $\theta \geq 0, x \geq 0$ ,
- Weibull :  $F_4(x) = 1 - \exp(-x^\theta)$ , pour  $\theta > 0, x \geq 0$ ,
- Gamma  $F_5(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^x t^{\theta-1} e^{-t} dt$ , pour  $\theta > 0, x \geq 0$ ,

Pour  $F_1, F_2$  et  $F_3$  on a  $H_0$  si  $\theta = \theta_0 = 0$  et pour  $F_4$  et  $F_5$  si  $\theta = \theta_0 = 1$ . Les calculs donnent :

$$E_{F_1}(Q_1) = (2\nu - 1)/\nu^2, E_{F_2}(Q_1) = (2\nu - 1)/(4(\nu + 1)^2), E_{F_3}(Q_1) = (2\nu - 1)/\nu^2,$$

$$E_{F_4}(Q_1) = (\ln \nu)^2(2\nu - 1)/(\nu - 1)^2, E_{F_5}(Q_1) = (\nu \ln \nu - \nu + 1)^2(2\nu - 1)/(\nu - 1)^4$$

On remarque que :  $E_{F_1}(= E_{F_3})$  et  $E_{F_2}$  sont décroissantes,  $E_{F_4}$  a un maximum entre  $\nu = 3$  et  $\nu = 4$  et  $E_{F_5}$  a un maximum entre  $\nu = 6$  et  $\nu = 7$ .

Le tableau suivant donne l'efficacité relative asymptotique pour quelques valeurs de  $\nu$ .

$\nu$	$E_{F_1} = E_{F_3}$	$E_{F_2}$	$E_{F_4}$	$E_{F_5}$
2	0.750	0.083	1.441	0.448
3	0.556	0.078	1.509	0.524
4	0.438	0.070	1.495	0.556
5	0.360	0.063	1.457	0.576
6	0.306	0.056	1.413	0.582
7	0.266	0.051	1.367	0.583
8	0.234	0.046	1.324	0.580

Du tableau on constate que la valeur optimale de  $\nu$  dépend de la distribution  $F$  de  $H_1$ .  
 $\nu = 3$  paraît un bon compromis.

### La statistique

$$\mathbf{Q}_2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{J}_2(\mathbf{j}/\mathbf{n})\mathbf{t}(\mathbf{j})/\mathbf{S}_n \quad (9.20)$$

permet aussi de tester  $H_0$  contre  $H_1$  où  $J_2(u) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{j} - \nu u^{\nu-1}$  Le tableau ci-dessous donne l'efficacité asymptotique de  $Q_2$  pour les mêmes distributions  $F_1, \dots, F_5$ .

$\nu$	$E_{F_1} = E_{F_3}$	$E_{F_2}$	$E_{F_4}$	$E_{F_5}$
2	0.750	0.083	1.441	0.448
3	0.822	0.082	1.339	0.390
4	0.867	0.079	1.256	0.349
5	0.896	0.077	1.187	0.319
6	0.916	0.074	1.130	0.296
7	0.930	0.071	1.081	0.277
8	0.940	0.069	1.039	0.261

Des tables 1 et 2, on remarque que le test basé sur  $Q_2$  a une meilleure efficacité asymptotique que le test basé sur  $Q_1$  dans le cas des alternatives Linear failure rate et Pareto. On remarque le contraire dans le cas des alternatives Weibull ou Gamma. Donc un test  $Q_3$  basé sur  $J_3(u) = J_1(u) + aJ_2(u)$ ,  $a > 0$  (combinaison linéaire de  $J_1$  et  $J_2$  est recommandé).





## Sur le couplage mécano-fiabiliste

Radouane LAGGOUNE<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

### 10.1 Problématique

La conception des systèmes mécaniques consiste à assurer les ressources nécessaires pour satisfaire aux besoins tout au long de la durée de vie espérée. Dans un monde où règnent d'irréductibles incertitudes, le processus de conception doit prendre des mesures contre les aléas afin d'augmenter les chances de réussite, c'est ce qu'on appelle la marge de sûreté.

Dans l'approche classique, on procède à un léger surdimensionnement par l'introduction d'un facteur de majoration appelé "coefficient de sécurité" dans les modèles de comportement (EF), tout en supposant que les variables de conception sont déterministes.

L'augmentation des performances des machines de calcul de nos jours, ont fait qu'on recourt de plus en plus à l'analyse fiabiliste pour l'intégration du caractère incertain des variables de conception. Ce qui permet une meilleure connaissance des aléas et par conséquent la définition de la meilleure performance, permettant d'établir un compromis raisonnable entre des besoins contradictoires, tels que la fiabilité et le coût.

### 10.2 Introduction

Dans le cadre de l'étude de systèmes mécaniques par la méthode des éléments finis, une des principales hypothèses faites est que le modèle est déterministe. Même si on arrive aujourd'hui à traiter des modèles éléments finis de grande taille, il est très difficile de prendre en compte le caractère incertain des informations données par les mesures. Les incertitudes peuvent être classées en quatre grandes catégories :

- Les paramètres aléatoires : Ce sont par exemple les cotes d'une pièce dont on connaît la tolérance, ou bien le module d'Young ou la masse volumique d'un matériau.
- Les paramètres mal connus : Le cas des conditions aux limites est un problème typique (un encastrement correspond a une raideur de très grande valeur, mais dont on

ne connaît au mieux qu'un ordre de grandeur). De même, les différents types d'assemblage, tels que soudage, collage, boulonnage, etc... sont difficiles à modéliser, et il apparaît que les valeurs déterministes utilisées pour représenter ces phénomènes sont largement insuffisantes.

- Les paramètres variables : On peut distinguer ici les paramètres qui peuvent être variables dans le temps, et qu'on ne maîtrise pas ou mal (typiquement la dégradation ou le vieillissement d'un matériau), et les paramètres dont on peut connaître la valeur à un moment donné ( force d'excitation : passage d'un train sur un pont, une quantité de carburant dans un réservoir).
- Les incertitudes de modèle : Ce sont par exemple les lois de comportement choisies qui représentent mal ou de façon incomplète les phénomènes physiques, les erreurs dues au choix du maillage éléments finis, de sa finesse, des éléments choisis.

### 10.3 Couplage mécano-fiabiliste

Un système est en état de bon fonctionnement tant qu'il respecte des conditions spécifiques appelées : "états limites" ou "fonctions de performance" ; dans le cas contraire, on dit qu'il y a "défaillance". L'objectif de la fiabilité est de garantir un certain niveau de performance et de permettre d'optimiser l'équilibre entre les ressources et les besoins, en donnant des indications sur l'importance des variables. Quand le fonctionnement du système dépend de son état mécanique, il existe une interdépendance entre les rôles mécanique et fiabiliste des variables de conception, c'est le couplage mécano-fiabiliste.

#### 10.3.1 Fondements des méthodes de fiabilité en mécanique

L'objectif de l'analyse fiabiliste est de déterminer la probabilité de succès (ou de gagner contre les effets de l'environnement), ou la probabilité de défaillance (probabilité d'échec). Or, pour calculer cette dernière, nous devons, tout d'abord, répondre à ces trois questions :

1. Qu'est ce que c'est que la défaillance ?
2. Comment le système évolue-t-il jusqu'à la défaillance ?
3. Pourquoi arrive-t-on à la défaillance ?

La réponse à la première question consiste à définir l'état de sûreté et l'état de défaillance. La frontière entre ces deux états est la surface d'état limite. Nous définissons la fonction d'état limite ou fonction de performance  $G(\cdot)$ , telle que  $G(\cdot) \geq 0$  indique l'état de sûreté et  $G(\cdot) < 0$  indique la défaillance ; la frontière  $G(\cdot) = 0$  correspond à l'état limite lui-même. Notons que la fonction  $G(\cdot)$  est également vue comme une marge de sûreté.

La réponse à la deuxième question réside dans la nature du comportement mécanique (physique) du système. Sous l'effet des actions extérieures, la structure va parcourir une certaine trajectoire pour arriver à la défaillance. Notre capacité à prévoir le comportement structural est un élément crucial pour dire comment la défaillance est atteinte et surtout le degré de sensibilité de cette défaillance par rapport aux variables de base.

La réponse à la troisième question est l'essence même des méthodes fiabilistes. Ce sont les aléas et les incertitudes qui font qu'un système bien conçu dévie de sa trajectoire déterministe prévisionnelle. Pour répondre à la question posée, il faut identifier les variables de conception  $X_i$  traduisant un niveau significatif de fluctuation ou d'incertitude. Ces variables, dites de base, peuvent être les actions extérieures (charges, vent, séisme), les caractéristiques géométriques (dimensions, moment d'inertie, élancement) ou les propriétés des matériaux (limite élastique, module de Young, coefficient de Poisson). Pour chacune de ces variables  $X_i$ , nous affectons une loi de probabilité représentant l'aléa associé. Bibliographie

L'objectif du couplage mécano-fiabiliste consiste à définir la meilleure stratégie pour l'analyse des systèmes industriels, sur la base des critères d'efficacité, de précision et de robustesse. Cette stratégie est d'autant plus importante que le modèle éléments finis devient complexe, surtout lorsque le modèle probabiliste présente un grand nombre de variables aléatoires.

Le couplage mécano-fiabiliste est une tâche délicate qui mobilise des ressources numériques considérables. La capacité à traiter des modèles industriels de taille importante reste une des difficultés majeures ; elle doit être résolue sur les deux plans : algorithmique et informatique.

## Références

1. Ditlevsen O. and Madsen H.O. Structural Reliability Methods. John Wiley and Sons, 1996.
2. Hasofer A.M. and Lind N.C. An exact and invariant first order reliability format. J. Eng. Mech., ASCE, 100, EM1, pp. 111-121, 1974.
3. Muzeau J.P., Lemaire M. and El-Tawil K. Méthode de Surface de Réponse Quadratique (SRQ) et Evaluation des Règlements. Construction Métallique, CTICM, No 3, Paris, September, 1992.
4. Scheffer Franck - "Approche par éléments finis stochastiques de la fiabilité des composants mécaniques" - Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée, IFMA-UBP, Clermont-Ferrand, 20 juin 1997.
5. Kharmanda Mohamed-Ghias - "Optimisation et CAO des structures fiables", Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée, Clermont-Ferrand, 23 juin 2003.
6. Mohamed Alaa - "Fiabilité des structures pour la conception et l'optimisation robuste". Rapport d'activité scientifique (HDR). Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée, Clermont-Ferrand,



## Estimation de la fonction régression par la méthode du noyau. Propriétés statistiques

Karima LAGHA

Laboratory of Modelisation and Optimisation of Systems email : [karima\\_lagha@yahoo.com](mailto:karima_lagha@yahoo.com)

### 11.1 Introduction

On considère le modèle de régression suivant :

Soit un  $n$ -échantillon

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$$

On suppose qu'il existe une fonction  $m(\cdot)$  telle que pour  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$

$$Y_i = m(X_i) + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

et les  $\epsilon_i$  sont II des  $X_i$

Si  $(X, Y)$  a une fonction densité conjointe  $f_{X,Y}$  et  $E|Y| < \infty$  alors  $m(\cdot)$  est définie par :

$$m(x) = E(Y \mid X = x) = \frac{\int y f(x, y) dy}{\int f(x, y) dy} = \frac{r(x)}{f(x)}$$

#### Estimation non paramétrique de $m(\cdot)$

Soit  $m(\cdot)$  une fonction dans une classe de fonction  $\mathcal{F}$  (exp : classe de fonctions continues sur  $[0, 1]$ ). On considère l'estimateur ayant la forme suivante (estimateur linéaire par rapport à  $Y_i$ ) :

$$\hat{m}_n(x) = \sum_{i=1}^n Y_i W_{ni}(x)$$

Où  $W_{ni}(\cdot)$  est II des obs  $Y_i$ .

##### 11.1.1 Estimateur de Nadaraya-Watson NW

En utilisant l'estimateur à noyau de la fonction densité (proposé par Parzen-Rozenblatt), défini par :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), x \in R$$

tel que :

1.  $h = h_n \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow \infty$
2.  $K : R \rightarrow R$  fct mesurable vérifiant :
  - (K.1)  $K$  est bornée :  $\sup_{u \in R} |K(u)| < \infty$
  - (K.2)  $\lim_{|u| \rightarrow \infty} |u|K(u) = 0$
  - (K.3)  $K(\cdot) \in L_1(R) : \int_R |K(u)| < \infty$
  - (K.4)  $\int_R K(u) = 1$

L'estimateur de NW est se présente alors :

$$\hat{m}_n(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)} & \text{si } \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \neq 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Le noyau  $K$  détermine la forme du voisinage autour de  $x$  et la fenêtre  $h$  contrôle la taille de ce voisinage.

Ou encore,  $\hat{m}_n(x) = \frac{\hat{r}_n(x)}{\hat{f}_n(x)}$  avec

$$\hat{r}_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \int y \hat{f}(x, y) dy$$

- Phénomène de sous lissage : Variance est trop grande
- Phénomène de sur lissage : Biais (erreur déterministe) est trop grande

Les propriétés statistiques de NW dépendent de  $h$  (à choisir de sorte à équilibrer le biais et la variance).

### 11.1.2 Consistance de l'estimateur

La décomposition biais-variance donne :

$$E \left[ \{\hat{m}_n(x) - m(x)\}^2 \right] = Var [\hat{m}_n(x)] + \{E[\hat{m}_n(x)] - m(x)\}^2$$

Lorsque cette espérance tend vers 0, on a

$$\hat{m}_n(x) \xrightarrow{L^2} m(x), \quad \text{d'où, } \hat{m}_n(x) \xrightarrow{P} m(x)$$

### Calcul de la variance

On a

$$\text{Var}(\hat{f}_n(x)) = \frac{1}{nh} f(x) \int K^2(z) dz (1 + o(h)), \quad h \rightarrow 0.$$

$$\text{Var}(\hat{r}_n(x)) = \frac{1}{nh} s(x) \int K^2(z) dz (1 + o(h)), \quad h \rightarrow 0$$

où  $s(x) = \int y^2 f(x, y) dy$  et

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{f}_n(x), \hat{r}_n(x)) &= E[\hat{f}_n(x)\hat{r}_n(x)] - E\hat{f}_n(x)E\hat{r}_n(x) = E\left[\{\hat{f}_n(x) - E\hat{f}_n(x)\}\{\hat{r}_n(x) - E\hat{r}_n(x)\}\right] \\ &= \frac{1}{nh} r(x) \int K^2(z) dz (1 + o(h)), \quad r(x) = \int y f(x, y) dy. \end{aligned}$$

En utilisant la matrice variance-covariance on obtient

$$\text{Var}(\hat{m}_n(x)) = \frac{\sigma^2(x)}{nhf(x)} \int K^2(u) du (1 + o(h))$$

### Calcul du biais

On définit  $\tilde{E}(\hat{m}_n(x)) = \frac{E(\hat{r}_n(x))}{E(\hat{f}_n(x))}$ . D'où,

$$E(\hat{m}_n(x)) = \tilde{E}(\hat{m}_n(x)) + \frac{a_n(x) + b_n(x)}{\left(E\hat{f}_n(x)\right)^2}$$

avec,

$$\begin{cases} a_n(x) = -\text{Cov}(\hat{f}_n(x), \hat{r}_n(x)) = o\left(\frac{1}{nh}\right), \\ b_n(x) = E\left[\hat{m}_n(x) \left(\hat{f}_n(x) - E\hat{f}_n(x)\right)^2\right], \end{cases}$$

On a deux cas :

**1 cas**  $Y$  est bornée :  $\exists M$  tel que  $|Y| \leq M$  alors  $|\hat{m}_n(x)| \leq M$  d'où,  $b_n(x) \leq o\left(\frac{1}{nh}\right)$ .

$$E(\hat{m}_n(x)) = \tilde{E}(\hat{m}_n(x)) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

**2 cas**  $EY^2 < \infty$  et  $nh^2 \rightarrow \infty$  alors  $|\hat{m}_n(x)| \leq \sum_j |Y_j|$ , d'où  $b_n(x) \leq o\left(\frac{1}{n^{1/2}h}\right)$ .

$$E(\hat{m}_n(x)) = \tilde{E}(\hat{m}_n(x)) + o\left(\frac{1}{n^{1/2}h}\right)$$

De plus,

$$\tilde{E}(\hat{m}_n(x)) - m(x) = \frac{h}{2} \left\{ m''(x) + 2m'(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \int u^2 K(u) du$$

### 11.1.3 Optimalité et Normalité asymptotique

Les C.N.S. sur  $h_n$  pour obtenir la consistance de  $\hat{m}_n(x)$  sont  $h_n \rightarrow 0$  et  $nh_n \rightarrow \infty$  qd  $n \rightarrow \infty$ .

- L'erreur quadratique moyenne (MSE)

$$MSE(\hat{m}_n(x)) = E [\{\hat{m}_n(x) - m(x)\}^2] = \frac{h^{2q}}{(q!)^2} \left\{ m^{(q)}(x) + qm^{(q-1)}(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}^2 \times \\ \left( \int u^q K(u) du \right)^2 (1 + o(h)) + \frac{1}{nh} \left\{ \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \right\} \int k^2(u) du (1 + o(h))$$

- L'erreur quadratique moyenne Asymptotique (AMSE)

$$AMSE(\hat{m}_n(x)) = \frac{h^{2q}}{(q!)^2} \left\{ m^{(q)}(x) + qm^{(q-1)}(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}^2 \times \left( \int u^q K(u) du \right)^2 + \frac{1}{nh} \left\{ \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \right\} \int k^2(u) du$$

(Minimiser suivant  $h$  la qtte ci-dessus).

- L'erreur quadratique intégrée moyenne (MISE)

$$MISE(\hat{m}_n(x)) = E \left[ \int \{\hat{m}_n(x) - m(x)\}^2 dx \right] = \int MSE(\hat{m}_n(x)) dx \\ = \frac{h^{2q}}{(q!)^2} \left\{ \int m^{(q)}(x) dx + q \int m^{(q-1)}(x) \frac{f'(x)}{f(x)} dx \right\}^2 \times \\ \left( \int u^q K(u) du \right)^2 + \frac{1}{nh} \int \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} dx \int k^2(u) du (1 + o(h)).$$

### Normalité asymptotique (Schuster 1972)

Sous les conditions :  $K$  noyau borné, à support compact et d'ordre 2 et  $h_n$  égale à  $cn^{-1/5}$ , on a le théorème suivant :

#### Théorème Hardle 1990

$Y$  bornée (ou de moment d'ordre  $> 2$ ),  $f(\cdot)$  et  $m(\cdot)$  sont de classe  $C^2(R)$ ,  $\forall x$  tel que  $\sigma^2(x)$  est continue,  $f(x) > 0$ ,

$$(nh)^{1/2} \{\hat{m}_n(x) - m(x)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(B(x), v^2(x)) \\ \left\{ \begin{array}{l} B(x) = \left\{ m''(x) + 2m'(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \int u^2 K(u) du \right\}, \\ v^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \int K^2(u) du. \end{array} \right.$$



## 11.2 Lois Uniformes du logarithme pour la fonction régression

On utilise le principe d'invariance : approximation du processus empirique uniforme par une suite de ponts Browniens et obtention de lois uniforme du logarithme. Soit :

$$m_\psi(x) = E(\psi(Y) \mid X = x) = \frac{\int \psi(y)f(x,y)dy}{\int f(x,y)dy} = \frac{r_\psi(x)}{f(x)}$$

$\psi(\cdot)$  est une fct réelle mesurable et bornée sur des compacts.

• Hypothèses sur  $f$  :

(F.1)  $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $I \times R$ ,  $I = [a, b]$

(F.2)  $f_X(\cdot)$  est continue  $> 0$  sur  $I$

(F.3)  $Y \mathbb{1}_{\{X \in I\}}$  est bornée

• Hypothèses sur  $K$  :

(K.1)  $K(\cdot)$  est à variation bornée et continue sur  $R$  :

$$\int |dK(u)| = |K|_v < \infty$$

(K.2)  $K(u) = 0$  si  $u \notin [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ ,  $0 < \epsilon < \infty$ .

(K.3)  $\int K(u)du = 1$ .

• Hypothèses sur  $h$  :

(H.1)  $h_n \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow \infty$

(H.2)  $nh_n / \log n \rightarrow \infty$  qd  $n \rightarrow \infty$

(C.N.S pour la cvgence uniforme en proba de la déviation associée aux estimateurs).

(H.3)  $h_n \searrow 0$  et  $nh_n \nearrow \infty$  qd  $n \rightarrow \infty$ .

(H.4)  $|\log h_n| / \log \log n \rightarrow \infty$  qd  $n \rightarrow \infty$ .

(C. reliées à la cvgence p.s.)

On considère le processus :

$$W_n(x, \psi) = \sum_{i=1}^n \psi(Y_i)K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) - nE\left\{\psi(Y)K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right\}$$

Sous les conditions :

(F.1-3), (H.1-2) et (K.1-4) qd  $n \rightarrow \infty$  on a :

$$\left| \sup_{x \in I} \frac{\{\pm W_n(x, \psi)\}}{\{2nh \log 1/h\}^{1/2}} - \sigma_W(I) \right| \xrightarrow{p} 0$$

Sous les conditions :

(F.1-3), (H.2-4) et (K.1-4) qd  $n \rightarrow \infty$  on a :

$$\left| \sup_{x \in I} \frac{\{\pm W_n(x, \psi)\}}{\{2nh \log 1/h\}^{1/2}} - \sigma_W(I) \right| \xrightarrow{p.s.} 0$$

où

$$\sigma_W^2(I) = \sup_{x \in I} E [\psi^2(Y) \mid X = x] f(x) \left( \int K(t) dt \right)^2$$

Il s'agit de montrer que  $\forall \epsilon > 0$ ,

$$P \left\{ \sup_{x \in I} \frac{|W_n(x, \psi)|}{\{2nh \log 1/h\}^{1/2}} > (1 + \epsilon) \sigma_W(I) \right\} \xrightarrow{p(oup.s.)} 0$$

et

$$P \left\{ \sup_{x \in I} \frac{|W_n(x, \psi)|}{\{2nh \log 1/h\}^{1/2}} < (1 - \epsilon) \sigma_W(I) \right\} \xrightarrow{p(oup.s.)} 0$$

### Discrétisation

Examiner le processus empirique fonctionnel  $W_n(\cdot, \psi)$  pour un nombre fini de points de  $I$ .

$$\begin{aligned} W_n(x, \psi) &= \sum_{i=1}^n \left[ \psi(Y_i) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) - E \left( \psi(Y_i) K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right) \right] \\ &= n^{1/2} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (g(X_i, Y_i) - E g(X_i, Y_i)) \right] = n^{1/2} \alpha_n(g_{n,x}) \end{aligned}$$

où  $g_{n,x}(u, v) = \psi(v) K \left( \frac{x-u}{h} \right)$ . On considère pour  $0 < \delta < 1$ ,  $I = [a, b]$

$$z_{n,i} = a + i\delta h_n, \quad 0 \leq i \leq l_n = \lceil (b-a)/\delta h_n \rceil.$$

D'où l'étude du processus empirique indéré par la classe  $G_n \{g_{n,i}, 0 \leq i \leq l_n\}$  et

$$P \left\{ \max_{0 \leq i \leq l_n} \frac{|\alpha_n(g_{n,i})|}{\{2nh \log 1/h\}^{1/2}} > (1 + \epsilon) \sigma_W(I) \right\} \xrightarrow{p(oup.s.)} 0$$

### Proposition

$Z_j$  sont des v.a. centrées de variance  $\sigma^2 < \infty$ ,  $\forall j$  et  $\exists M > 0$ ,  $|Z_j| < M \forall j$  alors  $\forall t > 0$ ,

$$P \left\{ \sum_{j=1}^n Z_j > t\sqrt{n} \right\} \leq \exp \left( \frac{-t^2}{2\sigma^2 + \frac{2}{3} M n^{-1/2} t} \right)$$

Dans notre cas, on pose :  $Z_j = g_{n,i}(X_j, Y_j) - E g_{n,i}(X_j, Y_j)$ .

$Z_j$  sont centrées et bornées par  $2\|\psi\| \cdot \|K\| = M$  ( $K$  étant à variation bornée donc  $\|K\| < \infty$ ).

D'après la proposition

$$P \left( \sum_j Z_j > t\sqrt{n} \right) = P(\alpha_n(g_{n,i}) > t)$$

On prend  $t = \sigma_W(I)(1 + \epsilon)\sqrt{2h_n \log 1/h_n}$ , d'où

$$P\left(\frac{|\alpha_n(g_{n,i})|}{\sqrt{2h_n \log 1/h_n}} > \sigma_W(I)(1 + \epsilon)\right) \leq 2(l_n + 1)\exp(-(1 + \epsilon)^2 \log 1/h_n) = o(h_n^{(1+\epsilon)^2-1}).$$

Le résultat s'ensuit en utilisant le lemme suivant :

**Lemme de Cantelli**

Soit  $(\sum, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité quelconque,  $\forall\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$  (evts mesurables)

$$\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty \implies P(\limsup_n A_n) = 0$$

(quand  $\sum A_n$  est Convergente  $A_n^C$  est vrai p.s).

### 11.3 Application Statistique

**Fenêtre adaptive et Intervalle de confiance**

- Pour construire un intervalle de confiance on utilise souvent la normalité asymptotique et les lois qui en découlent.
- Du point de vue statistique, la convergence en probabilité est une notion suffisante. La convergence p.s. nous oblige souvent à supposer des conditions plus fortes sur le paramètre de lissage.
- On considère les lois limites uniformes du logarithme pour le mode de convergence en proba afin de déterminer l'intervalle de confiance (car ça necessite des hypothèses moins restrictives sur la fenêtre).

**Corollaire**

Sous les hyp (F.1-3), (H.1-3) et (K.1-3), qd  $n \rightarrow \infty$  (Déviation maximale par rapport à l'espérance)

$$\left\{ \frac{nh_n}{2 \log 1/h_n} \right\}^{1/2} \sup_{x \in I} \pm \left\{ \frac{\hat{f}_n(x)}{\hat{\sigma}_n^2(x)} \right\}^{1/2} \{\hat{m}_n(x) - \tilde{E}[\hat{m}_n(x)]\} \xrightarrow{P} \int K^2(u)du$$

(le biais est négligeable qd  $h_n$  est d'ordre  $n^{-\delta}$ ,  $(2l + 1)^{-1} \leq \delta \leq 1$ .)

$$\sup_{x \in I} \left\{ \tilde{E}[\hat{m}_n(x)] - m(x) \right\} = O(h_n^l), l > 1$$

Si  $h_n = n^{-1/(2l+1)}$ ,  $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{nh_n}{2 \log 1/h_n} \right\}^{1/2} \sup_{x \in I} \pm \left\{ \frac{\hat{f}_n(x)}{\hat{\sigma}_n^2(x)} \right\}^{1/2} \{\hat{m}_n(x) - m_n(x)\} \xrightarrow{P} \int K^2(u)du$$

Où,

$$\hat{\sigma}_n^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \{\psi(Y_i) - \hat{m}_n(x)\}^2 K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}$$

Si  $\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \neq 0$ . D'où, Pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$  qd  $n \rightarrow \infty$

$$P\{m(x) \in [\hat{m}_n(x) - (1 + \epsilon)L_n(x), \hat{m}_n(x) + (1 + \epsilon)L_n(x)], \forall x \in I\} \longrightarrow 1 \text{ et}$$

$$P\{m(x) \in [\hat{m}_n(x) - (1 - \epsilon)L_n(x), \hat{m}_n(x) + (1 - \epsilon)L_n(x)], \forall x \in I\} \longrightarrow 0$$

avec

$$L_n(x) = \left\{ \frac{2 \log 1/h_n}{nh_n} \times \frac{\hat{\sigma}_n^2(x)}{\hat{f}_n(x)} \right\}^{1/2} \left[ \int K^2(u) du \right]^{1/2}$$

D'où, L'intervalle de confiance asymptotiquement optimale pour  $\hat{m}_n(x)$ ,  $x \in I$  est

$$[\hat{m}_n(x) - L_n(x), \hat{m}_n(x) + L_n(x)]$$

## Cinquième partie

---

### Index des Auteurs



---

# Index

ABBAS Karim, 23

BOUALEM Mohamed, 27

BOUKIR Lynda, 35

BOURAINÉ Mohand, 59

FERHAT Arezki, 3

LAGGOUNE Radouane, 66

LAGHA Karima, 70

MEZINE Ouahmed, 7

RABTA Boualem, 44

RADJAF Mohammed Said, 3

RAHMOUNE Fazia, 52

SLIMANI Hachem, 12

Lamos Editions, 2004.





## L'ouvrage :

Ce volume contient la plupart des exposés faits en 2004/2005 au Séminaire Mathématique de Béjaïa. Ils sont centrés autour des domaines d'intérêt des chercheurs du laboratoire de Recherche LAMOS (Modèles déterministes et stochastiques de la Recherche Opérationnelle, Probabilités et statistiques, Optimisation, ...) avec une attrayante dispersion vers des domaines lointains.

## Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp. 50).

Parmi les conférenciers de l'année 2004 – 2005 : Ouahmed Mezine, Karima Lagha, Arezki Ferhat, Boualem Rabta, Mohand Bouraine, ... Parmi les conférenciers de l'année 1996/1997 : Mohand Ouamar Bibi (Tizi Ouzou), Amar Aïssani (Blida), Abdelkader Khelladi (U.S.T.H.B. Alger).

**Pour citer ce volume :** Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 3, 2005, 88 pages. ISSN : 1112 – 9433.

ISSN : 1112 – 9433