

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)

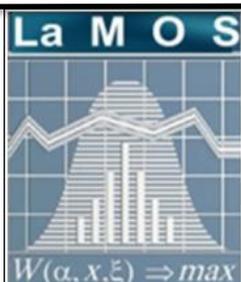
Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications

*Compte rendu des séances
2006-2007*



Dr Rabah Medjoudj (Univ. Béjaïa)

Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir



Publication et Edition

LaMOS Research Unit
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 5
Béjaïa 2007

ISSN : 1112-9433

SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE DE BÉJAÏA

Compte rendu des séances 2006-2007.

Séminaire Mathématique de Béjaïa.

Responsable : Mme Iamouchene Ouiza, née Lekadir.

Adresse : Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes.

Université de Béjaïa, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).

Tel/Fax : (213) 34 21 51 88.

E-mail : lamos _ Bejaia@hotmail.com

©Publications du Laboratoire LAMOS, 2007.

Tous droits de traduction, de reproduction
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

Table des matières

partie I Méthodes Cybernétiques et Optimisation

1 Jeux Coopératifs : Formation de Coalitions avec des Extériorités	
<i>Arezki FERHAT</i>	3
2 Sur la théorie des jeux évolutionnaires et ses applications en économie	
<i>Fatiha BARACHE</i>	5
3 Les solutions ϵ-efficaces dans un problème linéaire multicritère	
<i>Taous MERNACHE</i>	11
4 Nondifferentiable multiobjective programming under generalized d_I-invexity	
<i>Hachem SLIMANI</i>	21

partie II Processus Aléatoires et Applications

5 Etude d'une file d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes	
<i>Karim ABBAS</i>	31
6 Approximation des Caractéristiques des Systèmes d'Attente par la Méthode d'Interpolation des deux Moments	
<i>Mohamed BOUALEM</i>	37

partie III Contrôle Statistique de la Qualité

7 Le bootstrap pour le choix de la fenêtre dans la méthode du noyau	
<i>Aïcha BARECHE</i>	45

8 Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres

Kamal KABYL 51

9 Sur les modèles de maintenance : synthèse et classification

Radouane LAGGOUNE 55

partie IV Index des Auteurs

Index 63

Index 63

Première partie

Méthodes Cybernétiques et Optimisation

Jeux Coopératifs : Formation de Coalitions avec des Extériorités

Arezki FERHAT

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.
email : ferhat_ar@yahoo.fr

La montée subite récente dans la formation de coalitions économiques avec des extériorités a produit une nouvelle rive de la littérature sur la théorie coopérative ou non coopérative de formation de coalitions, dont Bloch [1, 2], Ray et Vohra [3, 4], Yi [6, 7] et Yi et Shin [5].

Ces théories reposent soit sur un approfondissement des modèles de théorie des jeux coopératifs (en tenant compte des chaînes de déviations), soit sur de nouveaux modèles non-coopératifs décrivant précisément la structure institutionnelle de formation des groupes, à travers un large éventail de disciplines économiques, de l'organisation industrielle au commerce international. Par exemple, les recherches de coalitions sont devenues une stratégie commerciale de plus en plus importante chez les sociétés oligopolistiques. Dans le commerce international, il y a eu une récente tendance vers la formation des blocs marchands régionaux tels que l'union européenne et les accords nord-américain de libre échange. Une conséquence importante de ces coalitions économiques est l'apparition des extériorités pour des éléments extérieurs à la coalition. Par exemple, une motivation importante pour les sociétés oligopolistiques pour former des alliances de recherche avec des concurrents est d'exploiter les capitaux de recherche de partenaires d'alliance. Si les membres d'une coalition de recherches réalisent des gains intéressants en mettant leurs capitaux de recherche en commun, les sociétés non membres peuvent souffrir d'une disparité de concurrence par rapport aux entreprises membres. Dans le cas des unions douanières régionales, l'abolition des tarifs sur le commerce entre les pays membres et le réajustement des tarifs externes peuvent, aux termes de l'échange, empirer les échanges entre les pays non membres et les pays membres, on est en présence d'extériorités négatives.

Dans cet exposé nous avons essayé de faire une petite synthèse sur la formation endogène de coalitions avec des extériorités positives, dans le cas où les éléments extérieurs à la

coalition formée bénéficie de cette alliance et des extériorités négatives, dans le cas où ces mêmes éléments sont désavantagés.

Références

1. Bloch F. : Sequential Formation of Coalitions in Games with Externalities and Fixed Payoff Division, *Games and Economic Behavior* **14**,(1996) 90–123.
2. Bloch, F. : Endogenous Structures of Association in Oligopolies, *Rand J. Econ.* **26**, (1995) 537-556.
3. Ray, D., and Vohra, R. : Equilibrium Binding Agreements, *unpublished manuscript*, Brown University.
4. Ray, D., and Vohra, R. : Binding Agreements and Coalitional Bargaining, *unpublished manuscript*, Brown University.
5. Yi, S.-S., and Shin, H. : Endogenous Formation of Coalitions in Oligopoly, *Dartmouth College Department of Economics WP No. 95-2*.
6. Yi, S.-S. : Endogenous Formation of Customs Unions under Imperfect Competition, Open Regionalism Is Good, *J. Internat. Econ.* **41**, 151-175 (1996).
7. Yi, S.-S. : Endogenous Formation of Research Coalitions with Complementary Assets, *Dartmouth College Department of Economics WP No. 95-11 (1996)*, revised.

Sur la théorie des jeux évolutionnaires et ses applications en économie

Fatiha BARACHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.
email : barache_fatiha@yahoo.fr

2.1 Introduction

La théorie des jeux évolutionnaires s'est développée à la suite des travaux du biologiste John Maynard Smith [5]. Cette théorie est vue comme étant une application de la théorie des jeux classique (introduite par John Nash en 1950) dans des contextes biologiques. Depuis ce temps, la théorie des jeux évolutionnaires a connu un très grand intérêt notamment dans les sciences économiques et sociales.

L'équilibre de Nash a été un concept très utilisé dans la théorie des jeux classique depuis son introduction par John Nash en 1950. Dans les années 1980, J.M. Smith et G. Price [5] ont introduit la théorie des jeux évolutionnaires en définissant le concept de stratégie évolutionnairement stable (ESS) comme un raffinement de l'équilibre de Nash. Dans ce travail, nous avons étudié les comportements des agents notamment dans des situations de conflit, où l'hypothèse de rationalité des individus est affaiblie. La relation entre le concept de ESS, celui de replication dynamique et celui d'équilibre de Nash a été établie. Une application de la théorie des jeux évolutionnaires en économie, notamment, une étude détaillée d'un problème de concurrence d'entreprises est présentée.

2.2 Stratégies évolutionnairement stables

Supposons que des individus composant une large population se rencontrent aléatoirement par paires, et ce de manière répétée, pour jouer un jeu symétrique à deux joueurs. Supposons qu'au départ tous les individus jouent une certaine stratégie, pure ou mixte, notée σ dans le jeu. Si un individu de la population joue contre un adversaire jouant la stratégie σ' avec une probabilité ε et la stratégie σ avec une probabilité $1 - \varepsilon$, il reçoit alors un gain $u(\sigma, (1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma') = \sigma A[(1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma']$.

Définition 2.1 (Taylor et Joncker 1978)[6] Une stratégie $\sigma \in \Delta$ est une ESS, si pour $\sigma' \neq \sigma$, il existe un $\bar{\varepsilon}$, tel que $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, on a :

$$\sigma^T A[(1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'] > \sigma'^T A[(1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'], \quad \forall \varepsilon \in \Delta^{n-1}.$$

Proposition 1 (Maynard Smith 1982)[4]

Une stratégie $\sigma \in \Delta$ est une ESS dans un jeu symétrique à deux joueurs, si et seulement si :

- i) Pour tout $\sigma' \in \Delta$, $\sigma^T A\sigma \geq \sigma'^T A\sigma$.
- ii) Pour tout $\sigma' \in \Delta, \sigma' \neq \sigma$, si :

$$\sigma^T A\sigma = \sigma'^T A\sigma \implies \sigma^T A\sigma' > \sigma'^T A\sigma'.$$

Corollaire 2.1. A partir de l'assertion (i) de la proposition 1, nous déduisons que, si une stratégie $\sigma \in \Delta$ est une ESS, alors elle est aussi un équilibre de Nash.

Proposition 2 Si σ est un équilibre de Nash strict, alors σ est une ESS. Donc $\Delta^{ESS} \subset \Delta^{NE}$.

Définition 2.2 Stratégie Neutralement Stable(NSS)[7]

La stratégie $\sigma \in \Delta^{n-1}$ est une NSS si et seulement si :

$$\forall \sigma' \in \Delta \quad \exists \bar{\varepsilon} > 0 \quad \forall \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}], \quad \sigma A[(1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'] \geq \sigma' A[(1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'].$$

On note par Δ^{NSS} l'ensemble des stratégies neutralement stables (NSS).

Définition 2.3 (Stratégie robuste face aux entrants en équilibre (REE))[7]

La stratégie $\sigma \in \Delta$ est une REE si et seulement s'il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, $\forall \sigma' \in \Delta \setminus \{\sigma\}$, σ' n'est pas meilleure réponse à $(1 - \varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'$.

On note par Δ^{REE} l'ensemble des stratégies robustes face aux entrants en équilibre (REE).

Proposition 3 [7] (Comparaison des ensembles d'équilibres)

$$\Delta^{ESS} \subset \Delta^{NSS} \subset \Delta^{NE}.$$

$$\Delta^{ESS} \subset \Delta^{REE} \subset \Delta^{NE}.$$

Δ^{NSS} et Δ^{REE} ne sont pas comparables en général.

Corollaire 2.2. [7] S'il existe une ESS intérieure alors cette ESS est unique.

2.3 Replication dynamique

La dynamique de replication est un modèle explicite du processus de sélection, spécifiant comment une population est associée avec différentes stratégies pures dans un jeu qui évolue dans le temps. La formulation mathématique des dynamiques de replication est due à Taylor et Jonker (1978) [6]. Considérons une large population mais finie d'individus qui sont "programmés" à jouer les stratégies pures $s_i \in X$ dans un jeu symétrique à deux joueurs avec des stratégies mixtes du simplexe Δ et une fonction de gain u . A un point quelconque t , dans le temps, soit $p_{s_i}(t)$ le nombre d'individus qui sont programmés à jouer la stratégie pures $s_i \in X$ à l'instant t , et soit $p(t) = \sum_{s_i \in X} p_{s_i}(t) > 0$ la population totale. Un état de la population est défini comme un vecteur $x(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$, où chaque composante $x_i(t)$ est la proportion des individus qui sont programmés à jouer la stratégie pure i à l'instant $t : x_i(t) = p_{s_i}(t)/p(t)$. $x(t) \in \Delta$, i.e. un état de la population est formellement identique avec une stratégie mixte. La dynamique correspondant pour une proportion x_i de la la stratégie s_i dans la population devient :

$$\dot{x}_i = x_i[U(s_i, x_{-i}) - U(x, x)]; \tag{2.1}$$

où

- ★ $U(s_i, x_{-i})$: est le gain espéré quand la stratégie pure s_i est jouée contre le profil de stratégie x .
- ★ $U(x, x)$: est le gain espéré quand le profil de stratégie x est joué dans la population (le gain moyen dans la population avec la stratégie x).
- ★ \dot{x}_i : est la proportion d'individus qui joueront la stratégie pure s_i à la prochaine génération.

L'équation (2.1) peut être écrite aussi sous la forme suivante :

$$\dot{x}_i = x_i[e^{iT}Ax - x^T Ax]. \tag{2.2}$$

Le résultat suivant est du à Taylor et Jonker [6], et il peut être vu comme le résultat de base reliant la replication dynamique et les stratégies évolutionnairement stables.

Théorème 2.1 [6]

Toute stratégie évolutionnaire stable $x \in \Delta$ est asymptotiquement stable pour la replication dynamique donnée dans l'équation (2.2).

Définition 2.4 [2] *Une stratégie (ou point) d'équilibre σ^* est dite **globalement stable**, si elle est stable et toute trajectoire dans l'intérieur de Δ^{n-1} converge vers σ^* .*

Théorème 2.2 [1] *Tout point stable de l'équation (2.2) est un point de Nash.*

Théorème 2.3 [2]

- $\sigma^* \in \Delta$ est une ESS, alors σ^* est l.a.s pour un replicateur dynamique de l'équation (2.2).
- σ^* est une ESS dans l'intérieur de Δ , alors σ^* est globalement stable.

2.4 Problèmes de concurrence d'entreprises

Le secteur des transports routiers est composé de 38.000 entreprises en France. On suppose qu'il n'existe pas d'effet d'entreprise dominante et que le secteur est réellement concurrentiel. En faisant l'hypothèse que cette recherche d'information est onéreuse, nous pouvons supposer que les affréteurs s'adressent en moyenne à deux entreprises. Ces dernières, de ce fait sont appariées deux à deux. Considérons que chaque entreprise puisse adopter deux stratégies distinctes :

1. la stratégie S_e , dans laquelle l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération élevée, mais qui a pour conséquence que ses profits seront à un niveau bas et donc de déterminer une valeur de ses cash-flow V_e faible.
2. la stratégie S_b , dans laquelle l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération plus faible, mais qui a pour conséquence que ses profits seront à un niveau plus élevé et donc de déterminer une valeur de ses cash-flow V_b forte.

On a donc $V_e \leq V_b$. La matrice du jeu se présente sous la forme

Entreprise 1 / Entreprise 2	s_e	s_b
s_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	$(0, V_b)$
s_b	$(V_b, 0)$	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$

La stratégie S_b est une stratégie évolutionnairement stable.

L'intervention de l'état dans ce conflit consiste à modifier la matrice de jeu au travers des rémunérations des entreprises. Ceci peut-être obtenu de deux manières distinctes :

1. en pénalisant les S_b -entreprises,
2. en subventionnant les S_e -entreprises.

Notons par I la valeur présente de cette indemnité et supposons qu'il est possible de la fixer de telle sorte que $I > \frac{V_b}{2}$, parce que, pour toute autre configuration des indemnités, on retourne au cas précédent. Donc, si une S_e -entreprise se rencontre avec une S_b -entreprise, alors, le gain de la S_b -entreprise est de V_b , mais dans ce cas l'état va intervenir en indemnisant les S_e -entreprises d'une valeur de I . La matrice des rémunérations devient alors :

Entreprise 1 / Entreprise 2	S_e	S_b
S_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	(I, V_b)
S_b	(V_b, I)	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$

Dans ce cas, apparaissent deux équilibres de Nash indistincts : (S_e, S_b) et (S_b, S_e) équilibres associés aux couples de rémunération : (V_b, I) et (I, V_b) ce qui suggère que dans un jeu évolutionnaire, il existe un équilibre intérieur et que ce dernier est stable.

Références

1. Benhard, P., Shaiji, A. J. : Evolutionarily Stable Strategies and dynamics. Tutorial, Example, and open Problems, University of Nice Antipolis and CNRS, (2005).
2. R. Cressman, Evolutionary game theory with two groups of individuals, Games and Economic Behavior, **11**, (1995) 237–253.
3. Friedman, F. : On economic applications of evolutionary game theory, Journal of evolutionary economic, **8** (1998) 15–34
4. Smith, J. M. : Evolution and the theory of games, Cambridge University Press, (1982)
5. Smith, J. M., Price, G. : The logic of animal conflict, Nature, **246** (1973)15–18
6. Taylor, P. D., Jonker, L. B. : Evolutionary Stable strategies and game dynamics, Mathematical biosciences, Elsevier,**40** (1978) 145–156
7. Weibull, J. W. : Evolutionary Game Theory, Cambridge, MA : The M.I.T. Press (1995)

Les solutions ϵ –efficaces dans un problème linéaire multicritère

Taous MERNACHE

Laboratoire de Modélisation et d’Optimisation des Systèmes (LAMOS)
 Université de Béjaïa 06000, Algérie.
 email : `mernache.t@yahoo.fr`

Résumé On considère un problème de programmation linéaire multicritère sur un polyèdre, où les variables de décision sont bornées inférieurement et supérieurement. Après avoir donné certaines propriétés du cône polyédrique des poids optimaux et défini les solutions ϵ –efficaces de Pareto, où ϵ est un nombre positif ou nul donné à l’avance, on arrive à formuler un théorème de caractérisation de ces solutions ϵ –efficaces.

Mots clés : Programmation linéaire multi-objectifs, méthode adaptée de programmation linéaire, estimation de sub-efficacité.

3.1 Introduction et position du problème

A l’heure actuelle, la plupart des problèmes de recherche opérationnelle qui se posent dans la pratique, comportent plusieurs critères devant être optimisés simultanément. Alors que pour les problèmes monocritère, l’optimum recherché est clairement défini, il n’en est pas de même pour les problèmes multicritères, à cause de situations conflictuelles et contradictoires existant entre les objectifs à atteindre. Pour arriver à de meilleurs compromis, il est alors vital de définir des relations de dominance entre ces différents critères. Parmi ces dernières, on utilise dans cet article l’optimalité au sens de Pareto qui nous donne les solutions dites efficaces. Sur la base de la notion d’ ϵ –optimalité utilisée en programmation linéaire et des résultats de Dimkov obtenus pour le cas multicritère sur un ensemble réalisable dont les variables sont seulement bornées inférieurement ($x \geq 0$), on généralise ces résultats au cas de variables bornées.

Ainsi, considérons le problème, de Programmation Linéaire Multi-Objectif (P.L.M.O) à variables bornées, s’écrivant sous la forme canonique suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} Cx = Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases} \quad (3.1)$$

où A est une $(m \times n)$ -matrice, $\text{rang}A = m < n$; b est un m -vecteur; c, x, d^- et d^+ sont des n -vecteurs; C est une $(k \times n)$ -matrice dont les lignes sont des n -vecteurs $C_i, i = \overline{1, k}$.

Notons

$I = \{1, 2, \dots, m\}$: l'ensemble d'indices des lignes de A ,

$J = \{1, 2, \dots, n\}$: l'ensemble d'indices des colonnes de A ou de C ,

$K = \{1, 2, \dots, k\}$: l'ensemble d'indices des lignes de C .

Donnons les définitions suivantes :

- Un vecteur x vérifiant les contraintes $Ax = b, d^- \leq x \leq d^+$, est une *solution réalisable* (ou *plan*) du problème (3.1). L'ensemble des solutions réalisables est alors donné par :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}.$$

- Soit un sous-ensemble d'indices $J_B \subset J$ tel que $J = J_B \cup J_N, J_B \cap J_N = \emptyset, |J_B| = m$. L'ensemble J_B est alors appelé *support* si :

$$\det(A_B) = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

- Le couple $\{x, J_B\}$ formé du plan x et du support J_B est appelé *plan de support*.
- Le plan de support $\{x, J_B\}$ est *non dégénéré* si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_B.$$

- En vertu de la partition de $J = J_B \cup J_N$, on peut alors écrire et fractionner les vecteurs et les matrices de la manière suivante :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = (x_j, j \in J_B), \quad x_N = (x_j, j \in J_N);$$

$$A = A(I, J) = (A_B | A_N), \quad A_B = A(I, J_B), \quad A_N = A(I, J_N);$$

$$C = C(K, J) = (C_B | C_N), \quad C_B = C(K, J_B), \quad C_N = C(K, J_N).$$

- La matrice $E = C_B A_B^{-1} A - C$ d'ordre $(k \times n)$ est alors appelée *matrice des estimations* du plan de support $\{x, J_B\}$, où E est représentée par ses vecteurs colonnes E_j :

$$E = E(K, J) = (E_j, j \in J) = (E_B | E_N), \quad E_B = E(K, J_B), \quad E_N = E(K, J_N).$$

Dans cet article, on ne traite que les problèmes non dégénérés, c'est à dire, toutes les solutions réalisables basiques sont non dégénérées. Rappelons qu'une *solution réalisable basique* $\{x, J_B\}$ est telle que :

$$x_j = d_j^- \vee d_j^+, \quad j \in J_N.$$

3.2 Les solutions efficaces et leurs propriétés

Définition 3.1 *Un point $x^0 \in X$ est dit solution efficace du problème (3.1) s'il n'existe pas d'autre point $x \in X$, tel que $Cx \geq Cx^0$, $Cx \neq Cx^0$.*

Une solution efficace x^0 est aussi appelée solution optimale de Pareto pour le problème (3.1).

Soit X^E l'ensemble des solutions efficaces du problème (3.1) et X_B^E celui de ses solutions efficaces basiques.

On a alors le théorème classique suivant :

Théorème 3.1 [4]

Une solution réalisable x^0 est efficace si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^k, \quad \lambda > 0 \quad \text{tel que} \quad \lambda^T Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^T Cx.$$

Soit $\{x^0, J_B\}$ une solution optimale basique du problème monocritère (P_λ) suivant :

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} c_\lambda x \longrightarrow \max, \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+\}, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $c^\lambda = \lambda^T C$.

Puisque $\{x^0, J_B\}$ est supposée non dégénérée, alors les relations d'optimalité suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} E_j^\lambda = \lambda^T E_j \geq 0, & \text{pour } x_j^0 = d_j^-, \\ E_j^\lambda = \lambda^T E_j \leq 0, & \text{pour } x_j^0 = d_j^+, \end{cases} \quad j \in J_N. \quad (3.3)$$

On définit alors les ensembles :

$$J_N^+ = \{j \in J_N : \lambda^T E_j \geq 0, \quad x_j^0 = d_j^-\},$$

$$J_N^- = \{j \in J_N : \lambda^T E_j \leq 0, \quad x_j^0 = d_j^+\}.$$

On a bien

$$J_N^+ \cup J_N^- = J_N.$$

Il s'ensuit que

$$E_N = E(K, J_N) = (E_N^+, E_N^-); \quad E_N^+ = E(K, J_N^+), \quad E_N^- = E(K, J_N^-).$$

On a donc les inégalités suivantes :

$$\lambda^T E_N^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda^T E_N^- \leq 0.$$

Soit maintenant $\{x^0, J_B\}$ une solution basique efficace du problème (3.1). On définit alors l'ensemble des poids $\Lambda(x^0)$:

$$\Lambda(x^0) = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda^T (E_N^+, -E_N^-) \geq 0, \lambda > 0\}. \quad (3.4)$$

L'ensemble $\Lambda(x^0)$ représente un cône polyédrique convexe (en général non fermé). Soit $\overline{\Lambda(x^0)}$ sa fermeture.

Relevons certaines propriétés de l'ensemble $\Lambda(x^0)$, où x^0 est une solution réalisable basique efficace. Soient $\{x^0, J_B\}$ une solution réalisable basique efficace et $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda > 0$. On a alors l'équivalence suivante :

$$\lambda \in \Lambda(x^0) \iff \lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x. \quad (3.5)$$

Condition nécessaire

Soit $\lambda \in \Lambda(x^0)$ tel que

$$\begin{cases} \lambda^T E_N^+ \geq 0 & \iff & \lambda^T E_j \geq 0 & x_j^0 = d_j^-, & j \in J_N^+; \\ \lambda^T E_N^- \leq 0 & \iff & \lambda^T E_j \leq 0 & x_j^0 = d_j^+, & j \in J_N^-. \end{cases} \quad (3.6)$$

Il s'ensuit que $\{x^0, J_B\}$ est une solution basique optimale du problème (P_λ) . Donc

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x.$$

Condition Suffisante

Inversement, soit $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda > 0$ tel que :

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x.$$

Donc $\{x^0, J_B\}$ est une solution réalisable basique optimale du problème (P_λ) . Les relations d'optimalité (3.3) sont alors vérifiées :

$$\lambda^T E_N^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda^T E_N^- \leq 0.$$

D'où $\lambda \in \Lambda(x^0)$. \square En vertu de (3.5), le cône $\Lambda(x^0)$ est appelé cône des poids optimaux du plan basique efficace x^0 .

Avant d'énoncer la deuxième propriété, donnons la définition et le lemme suivants ;

Définition 3.2 On dit que X^E est extérieurement stable , si :

$$\forall x \in X, \quad \exists x^0 \in X^E / \quad C_i x \leq C_i x^0, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Lemme 3.1. [5, 6] Si $X \neq \emptyset$ est compact et la fonction objective $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ continue, alors X^E est non vide et extérieurement stable .

Pour que le plan basique x^0 soit une solution efficace unique dans X , il est nécessaire et aussi suffisant dans le cas où $\text{rang } C = n$ que l'on ait $\Lambda(x^0) = \mathbb{R}_+^k$, où \mathbb{R}_+^k est le quadrant positif de \mathbb{R}^k .

Condition nécessaire

Supposons que x^0 est une solution réalisable basique efficace unique ; il est facile de voir que les conditions du lemme (3.1) sont vérifiées pour notre problème. Donc

$$\forall x \in X, \quad C_i x \leq C_i x^0, \quad i = \overline{1, k}.$$

D'où

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^k.$$

D'après la propriété 3.2, on conclut que $\lambda \in \Lambda(x^0)$. Ainsi, on obtient $\mathbb{R}_+^k \subset \Lambda(x^0)$. L'inclusion inverse étant évidente, il s'ensuit que $\Lambda(x^0) = \mathbb{R}_+^k$.

La nécessité est ainsi démontrée.

Condition suffisante

Soit $\mathbb{R}_+^k = \Lambda(x^0)$, et $\text{rang } C = n$. Dans $\Lambda(x^0)$, considérons la suite des vecteurs :

$$\{\lambda_j^n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 1, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \right\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

où la j^{eme} composante est égale à 1. Quand n tend vers l'infini on aura $\{\lambda_j^n\} \rightarrow \{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}$, $1 \leq j \leq k$. D'après la propriété (3.2), on a :

$$(\lambda_j^n)^T C x^0 = \max_{x \in X} (\lambda_j^n)^T C x, \quad j = \overline{1, k}.$$

Le passage à la limite dans ces égalités donne :

$$C_j x^0 = \max_{x \in X} C_j x, \quad j = \overline{1, k}. \tag{3.7}$$

Si $\bar{x} \in X$ était une autre solution efficace, elle aurait satisfait en vertu de (3.7) les relations :

$$C_j \bar{x} \leq C_j x^0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Supposons qu'il existe un indice j_1 , avec $C_{j_1} \bar{x} < C_{j_1} x^0$. Alors le point x^0 est tel que

$$Cx^0 \geq C\bar{x}, \quad Cx^0 \neq C\bar{x}.$$

Ceci contredit le fait que \bar{x} est une solution efficace. Donc

$$Cx^0 = C\bar{x} \quad \text{et} \quad C(\bar{x} - x^0) = 0.$$

Comme $\text{rang } C = n$, alors les vecteurs-colonnes de C sont linéairement indépendants et donc $\bar{x} = x^0$. D'où la suffisance est démontrée. \square Soit $X_B^E = \{x^1, x^2, \dots, x^r\}$ l'ensemble des solutions réalisables basiques efficaces du problème (3.1). Alors

$$\bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i) = \mathbb{R}_+^k,$$

où $\Lambda(x^i)$ est le cône des poids optimaux du plan basique efficace x^i .

L'inclusion $\bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i) \subset \mathbb{R}_+^k$ est évidente. Démontrons l'inclusion inverse :

Soit $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}_+^k$ et considérons le problème $(P_{\hat{\lambda}})$ suivant :

$$(\hat{\lambda})^T Cx \longrightarrow \max, \quad x \in X.$$

Comme X est un ensemble compact, alors ce problème est soluble et il possède au moins une solution réalisable basique optimale \hat{x} . Du théorème (3.1), on conclut que $\hat{x} \in X_B^E$. En vertu de la propriété (3.2) on a $\hat{\lambda} \in \Lambda(\hat{x})$ et donc :

$$\mathbb{R}_+^k \subset \bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i).$$

Par conséquent, la propriété est démontrée. \square

3.3 Les Solutions ϵ –efficaces d'un problème de P.L.M.O

Définition 3.3 *Un point x^ϵ est appelé ϵ –efficace dans le problème (3.1), s'il existe un point efficace x^0 tel que :*

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

où ϵ est un nombre réel positif ou nul arbitraire.

Dorénavant, l'ensemble des solutions ϵ –efficaces sera désigné par X_ϵ^E .

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition des solutions ϵ –efficaces :

1. $X^E \subset X_\epsilon^E, \quad \forall \epsilon > 0$ et $X^E = X_\epsilon^E$, pour $\epsilon = 0$.

2. Si $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$, alors $X_{\epsilon_2}^E \subset X_{\epsilon_1}^E$.

Lemme 3.2. Le point $x^\epsilon \in X$ est ϵ -efficace dans le problème (3.1) si et seulement s'il existe un point efficace $x^0 \in X$ tel que pour tout vecteur $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, satisfaisant la condition $\lambda^T Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^T Cx$, l'inégalité suivante a lieu :

$$\lambda^T (Cx^0 - Cx^\epsilon) \leq \epsilon. \quad (3.8)$$

Condition nécessaire

Soit x^ϵ un point ϵ -efficace dans X . Alors il existe un point efficace $x^0 \in X$ tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

En vertu du théorème (3.1), $\exists \lambda > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ tel que $\lambda^T Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^T Cx$. D'où

$$\lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \lambda_i \epsilon, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon \implies \lambda^T (Cx^0 - Cx^\epsilon) \leq \epsilon.$$

Condition suffisante

Supposons que pour une certaine solution efficace x^0 , un vecteur λ^0 tel que, $\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^k$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i^0 = 1$ et un certain point $x^\epsilon \in X$, les conditions du lemme sont remplies. Soit

$$X^0 = \{\tilde{x} \in X : (\lambda^0)^T C\tilde{x} = \max_{x \in X} (\lambda^0)^T Cx\}.$$

D'après le théorème (3.1), tout point \tilde{x} de X^0 est un point efficace. Considérons alors le problème :

$$\tilde{\epsilon} \longrightarrow \max, \quad C_i \tilde{x} = C_i x^\epsilon + \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{x} \in X^0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (3.9)$$

Soit $(\hat{x}, \hat{\epsilon})$ une solution optimale du problème (3.9). Puisque $\hat{x} \in X^0$, alors \hat{x} est une solution efficace. Montrons que $\hat{\epsilon} \leq \epsilon$. En supposant le contraire, on aura :

$$C_i \hat{x} = C_i x^\epsilon + \hat{\epsilon} > C_i x^\epsilon + \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

Donc

$$\lambda_i^0 C_i \hat{x} > \lambda_i^0 C_i x^\epsilon + \lambda_i^0 \epsilon, \quad i = \overline{1, k} \implies (\lambda^0)^T C \hat{x} > (\lambda^0)^T C x^\epsilon + \epsilon.$$

Comme x^0 et \hat{x} sont dans X^0 , alors $(\lambda^0)^T C \hat{x} = (\lambda^0)^T C x^0$; par suite on obtient :

$$(\lambda^0)^T C x^0 > (\lambda^0)^T C x^\epsilon + \epsilon .$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse du lemme , c'est-à-dire, la relation (3.8) supposée vraie. Par conséquent, il existe un point efficace $\hat{x} \in X$ tel que $C_i \hat{x} \leq C_i x^\epsilon + \epsilon$, $i = \overline{1, k}$.

Donc x^ϵ est un point ϵ -efficace. Le lemme est démontré. \square

Théorème 3.2 (Théorème de sub-efficacité)

Le point $x^\epsilon \in X$ est ϵ -efficace si et seulement si l'existe un support J_B et un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, tels que :

$$\sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon,$$

où $E^\lambda = u^T A - \lambda^T C = (E_j^\lambda, j \in J)$, le m -vecteur u vérifiant l'équation $u^T A_B - \lambda^T C_B = 0$, c'est-à-dire, $u^T = c_B^\lambda A_B^{-1}$.

Condition nécessaire :

Soit x^ϵ un point ϵ -efficace dans X , alors il existe un point efficace $x^0 \in X^E$ tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

En vertu du théorème (3.1), $\exists \lambda > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, tel que : $\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x$.

On a alors

$$\lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \lambda_i \epsilon, \quad i = \overline{1, k},$$

ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon.$$

D'où

$$\lambda^T (C x^0 - C x^\epsilon) \leq \epsilon \implies \lambda^T C x^0 - \lambda^T C x^\epsilon \leq \epsilon \implies c^\lambda (x^0 - x^\epsilon) \leq \epsilon.$$

Par conséquent, le point x^ϵ est une solution ϵ -optimale du problème monocritère (P_λ) :

$$c^\lambda x \longrightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+.$$

D'après [2], il existe un support J_B tel que l'estimation de sub-optimalité $\beta(x^\epsilon, J_B)$ du plan de support $\{x^\epsilon, J_B\}$ soit inférieure ou égale à ϵ , où

$$\beta(x^\epsilon, J_B) = \sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

La nécessité est ainsi démontrée.

Condition suffisante :

Supposons que pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^k, \lambda > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ et pour un certain plan de support $\{x^\epsilon, J_B\}$, les conditions du théorème sont remplies, c'est à dire :

$$\sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

Considérons le problème monocritère (P_λ) suivant :

$$\begin{cases} c^\lambda x = \lambda^T Cx \longrightarrow \max, \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Soit x^0 une solution optimale de ce problème. D'après le théorème 3.1, c'est une solution efficace du problème (3.1).

Développons alors l'expression :

$$c^\lambda(x^0 - x^\epsilon) = c^\lambda \Delta x = c_B^\lambda \Delta x_B + c_N^\lambda \Delta x_N.$$

Puisque x^0 et $x^\epsilon \in X$ alors on aura $A \Delta x = 0$ et $\Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N$. En remplaçant, on obtient

$$c^\lambda(x^0 - x^\epsilon) = c^\lambda \Delta x = (-c_B^\lambda A_B^{-1} A_N + c_N^\lambda) \Delta x_N = -E_N^\lambda(x_N^0 - x_N^\epsilon).$$

Donc

$$c^\lambda \Delta x = c^\lambda(x^0 - x^\epsilon) = \lambda^T(Cx^0 - Cx^\epsilon) = \sum_{j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0).$$

Comme $d^- \leq x^0 \leq d^+$, on aura :

$$\begin{cases} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0) \leq E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-), & \text{si } E_j^\lambda > 0, \\ E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0) \leq E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+), & \text{si } E_j^\lambda < 0. \end{cases}$$

De là, on tire

$$\lambda^T(Cx^0 - Cx^\epsilon) = \sum_{j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0) \leq \sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

En vertu du lemme (3.2), on déduit que x^ϵ est une solution ϵ -efficace du problème (3.1).

□

Ainsi, à partir du théorème 3.2, on peut inclure dans les méthodes de recherche des solutions efficaces, une procédure qui permet d'arrêter le processus lorsque une solution ϵ -efficace est obtenue.

Références

1. Dimkov, M. P. : Recherche sur les problèmes de programmation linéaire multicritère., In Les problèmes de commande optimale, sous la direction de R. Gabassov et F.M. Kirillova.- Edition Naouka i Technika (1981) 25-42
2. Gabassov, R., Kirillova F.M. : Méthodes de programmation linéaire, T1 et T2.- Edition de l'Université, Minsk (1977 et 1978)
3. Ehrgott, M. : Multicriteria optimization. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2005)
4. Steuer, R. E. : Multiple criteria optimization : Theory, Computation and Application., New York (1986)
5. Polinovsky, V. V, Noguine, V.D. : Solutions optimales de Pareto dans les problèmes multicritères, Naouka, Moscou, (1982)(en russe)
6. Radjef, M. S. : Décisions optimales dans les problèmes multicritères avec indétermination, Laboratoire LAMOS, Université de Béjaia, (1995)
7. Bibi, M. O. : Méthodes adaptées de programmation linéaire, Cours de post-graduation en Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia (2005)
8. Radjef, M. S. : Cours de post-graduation sur les notions d'optimalité en optimisation multicritère, Université de Béjaia, (2005)
9. Radjef, S. : Sur la programmation linéaire multiobjectifs, Mémoire de Magistère, Université de Béjaia ,(2001)

Nondifferentiable multiobjective programming under generalized d_I -invexity

Hachem SLIMANI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
 Université de Béjaïa 06000, Algérie.
 email : haslimani@yahoo.fr

We are concerned with a nondifferentiable multiobjective programming problem with inequality constraints. We define new class of nondifferentiable functions called d_I -invexity in which each component of the objective function is directionally differentiable in its own direction d_i . In the following, from Suneja and Srivastava [6], Mishra and Noor [3], Slimani and Radjef [5], we introduce new classes of problems called d_I -V-type I, quasi-, pseudo-, pseudo quasi-, quasi pseudo- d_I -V-type I with respect to $(\eta_i)_i$ and $(\theta_j)_j$. In the framework of the new concepts, we prove new Fritz-John type necessary and Karush-Kuhn-Tucker type necessary and sufficient optimality conditions for a feasible point to be weakly efficient or efficient solution. Moreover, we prove weak and strong duality results for Mond-Weir type dual under various types of generalized d_I -V-type I requirements.

Keywords : Nondifferentiable multiobjective programming ; Optimality ; Duality ; Directional derivative ; d_I -invexity ; d_I -V-type I ; Weakly efficient, Efficient and Properly efficient solution.

4.1 Preliminaries and definitions

The following conventions for equalities and inequalities will be used. If $x, y \in \mathbb{R}^n$, then

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \quad i=1, \dots, n;$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad i=1, \dots, n;$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leq y \text{ and } x \neq y.$$

We also note \mathbb{R}_{\geq}^q (resp. \mathbb{R}_{\geq}^q or $\mathbb{R}_{>}^q$) the set of vectors $y \in \mathbb{R}^q$ with $y \geq 0$ (resp. $y \geq 0$ or $y > 0$).

Definition 1. [2] If $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is locally Lipschitz at $x_0 \in D$, the directional derivative (in the sense of Clarke) of f at x_0 in the direction $d \in \mathbb{R}^n$, denoted by $f'(x_0; d)$, is given by

$$f'(x_0; d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda},$$

whenever this limit exists.

f is directionally differentiable at x_0 if its directional derivative exists finite in all directions.

Ye [7] has defined the invexity in the nondifferentiable case for the function f by taking all its components directionally differentiable in the same direction d . In the following definition, we define the d_I -invexity at a point x_0 for f , where each component f_i , $i = 1, \dots, N$ is directionally differentiable in its own direction d_i .

Definition 2. Let $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ be defined on a non-empty open set $D \subset \mathbb{R}^n$ and for all $i = 1, \dots, N$, f_i is directionally differentiable at $x_0 \in D$ (not necessary in all directions). f is called d_I -invex at x_0 on D with respect to $(\eta_i)_{i=1, \dots, N}$, if there exists N vector functions $\eta_i : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$, such that for any $x \in D$

$$f_i(x) - f_i(x_0) \geq f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)), \text{ for all } i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

where $f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0))$ denotes the directional derivative of f_i in the direction $\eta_i(x, x_0)$.

If inequalities (7.2) are satisfied at any point $x_0 \in D$, then f is said to be d_I -invex on D with respect to $(\eta_i)_{i=1, \dots, N}$.

Remark 1. In the above definition, it doesn't require that the directional derivative exists finite in all directions for each component f_i , $i = 1, \dots, N$. Further, it is not necessary that all the components to be directionally differentiable in the same direction, which may widen the area of application.

In order to illustrate the definition 2, we give the following example.

Example 1. Consider the function $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_1 = 0 \text{ or } x_2 = 0; \\ 1 + x_1^4, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 + x_1^2, & \text{if } x_1 \neq 0 \text{ and } x_2 = 0; \\ 1 + x_2^2, & \text{if } x_1 = 0 \text{ and } x_2 \neq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly, f_1 and f_2 are not differentiable functions at $x_0 = (0, 0)$, but only directionally differentiable functions at this point. Further there exists no function $\eta(x, x_0) \neq (0, 0)$ such that for any $x \in \mathbb{R}^2$, $f'_1(x_0; \eta(x, x_0))$ and $f'_2(x_0; \eta(x, x_0))$ exist and finite, it follows that there exists no function $\eta(x, x_0) \neq (0, 0)$ for which f is d -invex at x_0 on \mathbb{R}^n . But f_1 is directionally differentiable at x_0 in the direction $\eta_1(x, x_0) = (0, \gamma(x, x_0))$ (or $\eta_1(x, x_0) = (\gamma(x, x_0), 0)$) with $\gamma(x, x_0) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, f_2 is directionally differentiable at x_0 in the direction $\eta_2(x, x_0) = (\alpha(x, x_0), \beta(x, x_0))$ with $\alpha(x, x_0) \neq 0$, $\beta(x, x_0) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ and f is d_I -invex at x_0 on \mathbb{R}^n with respect to $(\eta_i)_{i=1,2}$.

Consider the following multiobjective programming problem

$$(VP) \quad \begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)), \\ & \text{subject to } g(x) \leq 0, \end{aligned}$$

where $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^k$, D is a nonempty open subset of \mathbb{R}^n .

Let $X = \{x \in D/g(x) \leq 0\}$, the set of feasible solutions of (VP) and for $x_0 \in X$, we denote $J(x_0) = \{j \in \{1, \dots, k\}/g_j(x_0) = 0\}$, $\tilde{J}(x_0) = \{j \in \{1, \dots, k\}/g_j(x_0) < 0\}$;

Now following Suneja and Srivastava [6], Mishra and Noor [3], Slimani and Radjef [5] and the definition 2, we define the generalized d -V-type I problems.

Definition 3. We say that the problem (VP) is of d_I -V-type I at $x_0 \in X$ with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ and $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$, if there exists $(N+k)$ vector functions $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,N}$ and $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,k}$ such that for all $x \in X$:

$$f_i(x) - f_i(x_0) \geq f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

$$-g_j(x_0) \geq g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)), \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (4.3)$$

Definition 4. We say that the problem (VP) is of quasi d_I -V-type I at $x_0 \in X$ with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ and $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$, if there exists $(N+k)$ vector functions $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,N}$ and $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,k}$ such that for some vectors $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$ and $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \mu_i f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)) \leq 0, \quad \forall x \in X, \quad (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)) \leq 0, \quad \forall x \in X. \quad (4.5)$$

Definition 5. We say that the problem (VP) is of pseudo d_I -V-type I at $x_0 \in X$ with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ and $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$, if there exists $(N+k)$ vector functions $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,N}$ and $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,k}$ such that for some vectors $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$ and $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in X. \quad (4.7)$$

Definition 6. We say that the problem (VP) is of quasi pseudo d_I -V-type I at $x_0 \in X$ with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ and $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$, if there exists $(N+k)$ vector functions $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, i = \overline{1,N}$ and $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, j = \overline{1,k}$ such that for some vectors $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$ and $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \mu_i f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)) \leq 0, \forall x \in X, \quad (4.8)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \leq 0, \forall x \in X. \quad (4.9)$$

Definition 7. We say that the problem (VP) is of pseudo quasi d_I -V-type I at $x_0 \in X$ with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ and $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$, if there exists $(N+k)$ vector functions $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, i = \overline{1,N}$ and $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, j = \overline{1,k}$ such that for some vectors $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$ and $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \mu_i [f_i(x) - f_i(x_0)] \geq 0, \forall x \in X, \quad (4.10)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_0) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)) \leq 0, \forall x \in X. \quad (4.11)$$

4.2 Optimality conditions

In recent paper, Slimani and Radjef [5] considered a number of necessary and sufficient optimality conditions which depend on generalized V-type I problems with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1,N}}$ and $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$. In this section, we adapt their results to the classes of nondifferentiable problems.

Theorem 1. (Sufficiency) Let x_0 be a feasible solution for (VP) and suppose that there exists $(N+J)$ vector functions $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, i = \overline{1,N}, \theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, j \in J(x_0)$ and scalars $\mu_i \geq 0, i = \overline{1,N}, \sum_{i=1}^N \mu_i = 1, \lambda_j \geq 0, j \in J(x_0)$ such that the following relation is satisfied :

$$\sum_{i=1}^N \mu_i f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)) + \sum_{j \in J(x_0)} \lambda_j g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)) \geq 0, \forall x \in X. \quad (4.12)$$

Moreover, assume that one of the following conditions is satisfied :

- (a) the problem (VP) is quasi strictly-pseudo d_I -V-type I at x_0 with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$ and $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$;
- (b) the problem (VP) is semi strictly-quasi d_I -V-type I at x_0 with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$, $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ and for μ and λ ;
- (c) the problem (VP) is strictly-pseudo d_I -V-type I at x_0 with respect to $(\eta_i)_{i=\overline{1, N}}$, $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ and for μ and λ .

Then x_0 is an efficient solution for (VP).

Antczak [1] has given necessary conditions for $x_0 \in X$ to be weakly efficient solution for (VP) by taking the functions f_i , $i = \overline{1, N}$ and g_j , $j \in J(x_0)$ directionally differentiable in the same direction $\eta(x, x_0)$. Now we give necessary optimality criteria by considering each function f_i , $i = \overline{1, N}$ (resp. g_j , $j \in J(x_0)$) directionally differentiable in its own direction $\eta_i(x, x_0)$, $i = \overline{1, N}$ (resp. $\theta_j(x, x_0)$, $j \in J(x_0)$).

Theorem 2. (Fritz John type necessary optimality conditions) Suppose that

- (i) x_0 is a weakly efficient solution for (VP);
- (ii) g_j is continuous at x_0 for $j \in \tilde{J}(x_0)$ and there exists vector functions $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, N}$, $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j \in J(x_0)$ which satisfy at x_0 with respect to $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ the following inequalities for all $x \in X$,

$$f'_i(x_0; \eta(x, x_0)) \leq f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.13)$$

$$g'_j(x_0; \eta(x, x_0)) \leq g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)), \quad j \in J(x_0); \quad (4.14)$$

- (iii) the functions $f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0))$, $i = \overline{1, N}$ and $g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0))$, $j \in J(x_0)$ are pre-invex of x on X with respect to $\gamma : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$;

Then there exists $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_{\geq}^{N+|J(x_0)|}$ such that (x_0, μ, λ) satisfies

$$\sum_{i=1}^N \mu_i f'_i(x_0; \eta_i(x, x_0)) + \sum_{j \in J(x_0)} \lambda_j g'_j(x_0; \theta_j(x, x_0)) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (4.15)$$

Now, we need a constraint qualification to prove the next result.

Definition 8. The nondifferentiable function g is said to satisfy the d_I -constraint qualification at $x_0 \in X$ with respect to $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ if there exists $\bar{x} \in X$ and $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j \in J(x_0)$ such that

$$g'_j(x_0; \theta_j(\bar{x}, x_0)) < 0, \quad \forall j \in J(x_0). \quad (4.16)$$

Thus, the following KKT type necessary optimality conditions for (VP) are satisfied.

Theorem 3. (*Karush-Kuhn-Tucker type necessary optimality conditions*) Suppose that the conditions (i), (ii) and (iii) of Theorem 6.1 are satisfied and the function g satisfies the d_I -constraint qualification at $x_0 \in X$ with respect to $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$. Then there exists $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$ and $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(x_0)|}$ such that (x_0, μ, λ) satisfies the relation (4.15).

4.3 Mond-Weir duality

In relation to (VP) and using the relation (4.15), we consider the following multiobjective dual problem, which is in the format of Mond-Weir [4].

$$(MWD) \quad \text{Maximize } f(y) = (f_1(y), \dots, f_N(y)),$$

subject to

$$\sum_{i=1}^N \mu_i f'_i(y; \eta_i(x, y)) + \sum_{j \in J(y)} \lambda_j g'_j(y; \theta_j(x, y)) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (4.17)$$

$y \in X$, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(y)|}$, $\eta_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\forall i = 1, \dots, N$, $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\forall j \in J(y)$.

We let Y be the set of feasible solutions of problem (MWD);

We denote by $Pr_X Y$ the projection of set Y on X .

Theorem 4. (*Weak duality*) Let x_0 and $(y, \mu, \lambda, (\eta_i)_{i=1, \dots, N}, (\theta_j)_{j \in J(y)})$ be feasible solutions for (VP) and (MWD) respectively. Moreover, assume that one of the following conditions is satisfied :

- (a) the problem (VP) is pseudo quasi d_I -V-type I at y with respect to $(\eta_i)_{i=1, \dots, N}$, $(\theta_j)_{j \in J(y)}$ and for μ and λ (with $\mu > 0$);
- (b) the problem (VP) is strictly-pseudo quasi d_I -V-type I at y with respect to $(\eta_i)_{i=1, \dots, N}$, $(\theta_j)_{j \in J(y)}$ and for μ and λ .
- (c) the problem (VP) is quasi strictly-pseudo d_I -V-type I at y with respect to $(\eta_i)_{i=1, \dots, N}$, $(\theta_j)_{j \in J(y)}$ and for μ and λ .

Then $f(x) \not\leq f(y)$.

Remark 2. If we omit the assumption $\mu > 0$ in the condition (a) or the word strictly in the condition (b), we obtain, for this part of theorem, $f(x) \not\leq f(y)$.

Theorem 5. (*Strong duality*) Let x_0 be weakly efficient solution for (VP) and suppose that the conditions (ii) and (iii) of Theorem 6.1 are satisfied. Assume also that the function g satisfies the d_I -constraint qualification at x_0 with respect to $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$. Then there exists

$\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^N$ and $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(x_0)|}$ such that $(x_0, \mu, \lambda, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x_0)}) \in Y$ and the objective functions of (VP) and (MWD) have the same values at x_0 and $(x_0, \mu, \lambda, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x_0)})$, respectively. If, further, the weak duality with the condition (a) without $(\mu > 0)$ (resp. with the condition (b) or (c)) between (VP) and (MWD) in theorem 4 holds, then $(x_0, \mu, \lambda, (\eta_i)_{i=\overline{1,N}}, (\theta_j)_{j \in J(x_0)}) \in Y$ is a weakly efficient (resp. an efficient) solution of (MWD).

Références

1. Antczak, T. : Multiobjective Programming under d-invexity, European Journal of Operational Research **137** (2002), 28-36.
2. Clarke, F.H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, New York, 1983.
3. Mishra, S.K., M.A. Noor : Some nondifferentiable multiobjective programming problems, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006), 472-482.
4. Mond, B., Weir, T. : Generalized Concavity and Duality, in Generalized Concavity in Optimization and Economics, edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, (1981), 263-276.
5. Slimani, H., Radjef, M.S. : Generalized V-type I Invexity and Duality for Multiobjective programs, Presented at the 8th International Symposium on Generalized Convexity and Monotonicity, July 4-8, 2005 Varese, Italy. Submitted for publication in J. Global Optim. March 2007.
6. Suneja, S.K., Srivastava, M.K. : Optimality and Duality in Nondifferentiable Multiobjective Optimization Involving d -Type I and Related Functions, J. Math. Anal. Appl. **206** (1997), 465-479.
7. Ye, Y.L. : d-invexity and optimality conditions, J. Math. Anal. Appl. **162** (1991), 242-249.

Deuxième partie

Processus Aléatoires et Applications

Etude d'une file d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes

Karim ABBAS

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.
email : karabbas2003@yahoo.fr

Dans ce travail, une étude a été faite sur le système de files d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes. En effet, nous avons obtenu l'opérateur de transition de ce système. Ainsi, nous avons dérivé un autre système à partir de celui-ci pour lequel nous avons aussi obtenu les probabilités de transition. Notre but est d'exploiter par la suite ces résultats afin d'estimer l'erreur due à l'approximation des mesures de performance d'un système d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes par celles du système d'attente $M/G/1$ classique lorsque le taux de pannes est suffisamment petit, et ceci en utilisant la méthode de stabilité forte.

5.1 Description des modèles

Considérons un système de files d'attente $M/G/1$ ($FIFO, \infty$) où le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Le flot des arrivées est poissonnien de paramètre λ . La distribution de la durée de service est générale, de taux infinitésimal $\sigma(y) = s(y)/1 - S(y)$ avec $y \in \mathbb{R}^+$, S et s étant respectivement la fonction de répartition et la densité de la durée de temps du service. Dans ce système, nous considérons les pannes passives, c'est-à-dire, les pannes du serveur peuvent avoir lieu juste après les instants de départ d'un client. Pour l'instant, ceci peut être le cas où la stratégie du service est "scheduling strategy" et supposons que la réparation du serveur doit se terminer seulement aux instants d'arrivée d'un client. L'état du système de files d'attente $M/G/1$ avec pannes et réparation en un instant t , peut être décrit par le processus stochastique suivant :

$$S(t) = \{X(t), N(t), Y(t); t \geq 0\}, \quad (5.1)$$

où,

- $N(t) \in \mathbb{N}$: est le nombre de clients dans la file à l'instant t ,

- $X(t) \in \{0, 1\}$: décrit les propriétés globales de la file (le bon ou le mauvais état),
- $Y(t) \in \mathbb{R}^+$: est la quantité du service déjà reçue par le client qui est entrain d'être servi dans le système (0 si la file est vide).

La description du système se fait à l'aide de l'évolution du vecteur d'état $S(t)$. En effet, lorsque le système n'est pas vide (c'est-à-dire, $N(t) \geq 1$) et $Y(t) > 0$, alors la file sera dite en état $X(t) = 0$ (c'est-à-dire, le serveur est en bon état). Dans ce cas, elle se comporte exactement comme la file $M/G/1$ classique. À chaque instant de départ, $N(t)$ est diminué par un et $Y(t)$ devient 0. Si $N(t) \neq 0$, lorsqu'il est diminué par un, le système peut être dans l'un des deux états possibles :

- l'un reste à l'état $X(t) = 0$, dans lequel il commence à servir au moins un des clients en attente ;
- ou de faire un saut à l'état $X(t) = 1$, dans lequel il commence une période de panne durant laquelle aucun service ne peut être fourni à aucun client.

Ce choix a été effectué par le système juste après l'instant de départ pour lequel $N(t) > 0$, et il est supposé être une fonction de l'état du vecteur $S(t)$: Supposons qu'il est en $\{X(t) = 0, N(t) = n, Y(t) = 0\}$, puis, avec une probabilité $\alpha(n)$ ($0 \leq \alpha(n) < 1$), la transition à $X(t) = 1$ aura lieu, et avec une probabilité $1 - \alpha(n)$ le système devient en état $X(t) = 0$. Lorsqu'il est en état $\{X(t) = 1, N(t) = n, Y(t) = 0\}$, c'est-à-dire, autant que la panne est longue et n'est pas terminée, les transitions en dehors de cet état auront lieu uniquement aux instants d'arrivée d'un client. En plus, avec une probabilité $\beta(n)$ ($0 \leq \beta(n) < 1$), qui est une fonction de l'état juste avant cette arrivée, cette transition mène à l'état $\{X(t) = 1, N(t) = n + 1, Y(t) = 0\}$ et avec une probabilité $1 - \beta(n)$ à l'état $\{X(t) = 0, N(t) = n + 1, Y(t) = 0^+\}$ (0^+ car un nouveau service sera commencé tout de suite). Lorsque $N(t) = 0$, juste après le départ d'un client, nous choisissons arbitrairement de dire que $X(t) = 1$. Un séjour dans l'état $\{X(t) = 1, N(t) = 0, Y(t) = 0\}$ se termine à l'instant de la prochaine arrivée d'un client. De la même façon que pour le cas précédent, avec une probabilité $\beta(0)$, cette arrivée produit une transition à l'état $\{X(t) = 1, N(t) = 1, Y(t) = 0\}$ et avec une probabilité $1 - \beta(0)$ à l'état $\{X(t) = 0, N(t) = 1, Y(t) = 0^+\}$. Supposons que les fonctions $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ont des limites quand $n \rightarrow \infty$. Notons ces limites respectivement par $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$. Définissons ainsi :

$$\tilde{\alpha} = \sup_{n \geq 1} \alpha(n) \text{ et } \tilde{\beta} = \sup_{n \geq 0} \beta(n). \quad (5.2)$$

Lorsque les conditions (5.3) ci-après sont vérifiées

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{\alpha} < 1 \\ 0 \leq \tilde{\beta} < 1 \\ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} < 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

alors, la condition d'ergodicité d'un tel système est de la forme [1] :

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \tilde{\beta}} \quad (5.4)$$

Le processus stochastique $S(t)$ d'espace d'état $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ possède la propriété de Markov. Le calcul de son régime transitoire fera intervenir des équations intégrodifférentielles. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de la chaîne de Markov induite, qui nous ramène à l'étude de ce processus au cas discret. À cet effet, soit T_n le n -ième instant de saut du processus Markovien $S(t)$ vers l'état $(0 \times \mathbb{N} \times \{0\})$. Soit S_n défini comme suit $S(T_n) = S_n = (0, N_n, \{0\})$. La propriété forte de Markov implique que S_n est une chaîne de Markov [1]. $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ a pour espace d'état \mathbb{N}^* . Elle est irréductible et apériodique.

Lemme 5.1. Soient $0 \leq \alpha(n) < 1$ et $0 \leq \beta(n) < 1$ et supposons que les conditions (5.3) soient vérifiées et que $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \tilde{\beta}}$. L'opérateur de transition $P = (P_{ij})_{i,j \geq 0}$ de cette chaîne est défini par,

- Si $i = 0$
 - Si $j = 0$

$$P_{00} = [1 - \beta(0)] \int e^{-\lambda x} dS(x). \quad (5.5)$$

- Si $j \geq 1$

$$\begin{aligned} P_{0j} &= [1 - \beta(0)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dS(x) \\ &+ \sum_{k=2}^{j+1} \prod_{l=0}^{k-2} \beta(l) [1 - \beta(k-1)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k+1}}{(j-k+1)!} dS(x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

- Si $i = j + 1, i \geq 1$

$$P_{ij} = [1 - \alpha(i)] \int e^{-\lambda x} dS(x). \quad (5.7)$$

- Si $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= [1 - \alpha(i)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dS(x) \\
&+ \alpha(i)[1 - \beta(i)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dS(x) \\
&+ \alpha(i) \sum_{k=2}^{j-i+1} \prod_{l=0}^{k-2} \beta(l+i)[1 - \beta(k+i-1)] \\
&\times \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k-i+1}}{(j-k-i+1)!} dS(x). \tag{5.8}
\end{aligned}$$

- Si $i = j \geq 1$

$$P_{ii} = [1 - \alpha(i)] \int e^{-\lambda x} (\lambda x) dS(x) + \alpha(i)[1 - \beta(i)] \int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.9}$$

- Sinon

$$P_{ij} = 0. \tag{5.10}$$

Démonstration. Pour calculer les probabilités $(P_{ij})_{i,j \geq 0}$, il suffit de considérer l'expression suivante :

$$S_{i+1} - S_i = A_{]T_i, T_{i+1}] } - D_{]T_i, T_{i+1}] }, \tag{5.11}$$

où $A_{]s,t]}$ (respectivement, $D_{]s,t]}$) est le nombre des arrivées (respectivement, le nombre de départs) dans l'intervalle de temps $]s, t]$. ■

Par la suite, considérons que les fonctions $0 \leq \alpha(n) < 1$ et $0 \leq \beta(n) < 1$ sont des constantes. Ainsi, nous dérivons un système particulier du système précédent, pour lequel les probabilités de transition sont données en lemme suivant.

Lemme 5.2. Soient $0 \leq \alpha < 1$ et $0 \leq \beta < 1$ telles que $\alpha + \beta < 1$ et supposons que $\{\alpha(n) = \alpha, n \geq 1\}$ et $\{\beta(n) = \beta, n \geq 0\}$. $S(t)$ est ergodique si et seulement si $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ satisfait :

$$0 \leq \varrho < 1 - \frac{\alpha}{1 - \beta}. \tag{5.12}$$

Dans ce cas, l'opérateur de transition $P = (P_{ij})_{i,j \geq 0}$ de cette chaîne est défini par,

- Si $i = 0$
 - Si $j = 0$

$$P_{00} = (1 - \beta) \int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.13}$$

◦ Si $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
 P_{0j} &= (1 - \beta) \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dS(x) \\
 &+ (1 - \beta) j \sum_{k=2}^{j+1} \beta^{k-1} \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k+1}}{(j-k+1)!} dS(x).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

• Si $i = j + 1, i \geq 1$

$$P_{ij} = (1 - \alpha) \int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.15}$$

• Si $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= (1 - \alpha) \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dS(x) \\
 &+ \alpha(1 - \beta) \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dS(x) \\
 &+ \alpha(1 - \beta)(j-i) \sum_{k=2}^{j-i+1} \beta^{k-1} \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k-i+1}}{(j-k-i+1)!} dS(x).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

• Si $i = j \geq 1$

$$\begin{aligned}
 P_{ii} &= (1 - \alpha) \int e^{-\lambda x} (\lambda x) dS(x) \\
 &+ \alpha(1 - \beta) \int e^{-\lambda x} dS(x).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

• Sinon

$$P_{ij} = 0. \tag{5.18}$$

Démonstration. Dans ce cas, pour calculer les probabilités $(P_{ij})_{i,j \geq 0}$, il suffit de considérer dans le lemme (5.1) que $\{\alpha(n) = \alpha, n \geq 1\}$ et $\{\beta(n) = \beta, n \geq 0\}$. ■

5.2 Conclusion

Dans ce travail, nous avons obtenu les opérateurs de transition de deux systèmes d'attente de type $M/G/1$ avec pannes dépendantes. Notre but est d'exploiter ces résultats pour l'obtention des estimations quantitatives de stabilité lors de la perturbation de taux de pannes dans ces deux modèles considérés.

Références

1. F. Baccelli and T. Znati. Queueing systems with breakdowns in data base modeling. *Proceedings of Performance 81 (8 th IFIP International Symposium on Comp. Perf. Model.)*, North Holland, Amsterdam, pages 213–232, 1981.

Approximation des Caractéristiques des Systèmes d'Attente par la Méthode d'Interpolation des deux Moments

Mohamed BOUALEM

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.
email : robertt15dz@yahoo.fr

6.1 Introduction

Pour pallier aux difficultés rencontrées dans l'obtention de solutions exactes et interprétables (analytiques) pour de nombreux systèmes d'attente, les analystes ont recouru à des méthodes d'approximation. Parmi les mieux adaptées, on trouve les techniques d'approximation des deux moments qui se satisfont de la seule information concernant les deux premiers moments. Celles-ci se basent sur l'interpolation linéaire ou harmonique d'un paramètre de performance à partir de paramètres de performance calculés pour des systèmes connus.

6.2 Approximation par interpolation des systèmes GI/GI/s

L'approche des deux moments par interpolation des systèmes développée dans cette partie appartient au type heuristique. Cette méthode a été largement utilisée pour les systèmes classiques de files d'attente.

La formulation par interpolation des systèmes présente un grand intérêt pratique dans les problèmes de conception et de décision, d'abord en raison de sa simplicité, mais surtout parce que dans les situations réelles, la seule information disponible est celle concernant les deux premiers moments.

L'interpolation peut-être linéaire ou harmonique, mais peut également mettre en oeuvre une base d'approximation pouvant contenir plusieurs systèmes connus. Cette approche

permet d'une part, de retrouver la méthode des deux moments en tant que cas particulier et, d'autre part, de justifier plus rigoureusement les arguments heuristiques à l'origine de leur usage.

6.2.1 Méthodologie de l'interpolation

Soit à considérer ξ et τ les variables aléatoires des temps d'inter-arrivées et de service respectivement, et F et B les lois de distribution correspondantes.

Kimura propose une approche unifiée en considérant le quotient :

$$Q(GI/GI/s) = \frac{\overline{W}(GI/GI/s)}{\overline{W}(GI/GI/1)} \quad (6.1)$$

La quantité $Q(GI/GI/s)$ est approximée par une fonction des quantités correspondantes pour des systèmes analysables connus tels M/M/s, GI/M/s, ... :

$$Q(GI/GI/s) \approx f(Q(\beta_1), \dots, Q(\beta_n)) \quad (6.2)$$

où l'ensemble des systèmes simples $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ constitue la base de l'approximation. Il y a différentes façons de définir la fonction f mais deux d'entre elles seront utilisées dans le cadre de cette approche :

$$Q(GI/GI/s) \approx \sum_{i=1}^n l_i Q(\beta_i) \quad (6.3)$$

$$Q(GI/GI/s) \approx \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{Q(\beta_i)} \right\}^{-1} \quad (6.4)$$

Où $l_i \equiv l_i(GI/GI/s)$ et $h_i \equiv h_i(GI/GI/s)$ sont les coefficients de poids du $i^{\text{ème}}$ système ($i = 1, \dots, n$).

Les approximations (6.3) et (6.4) sont les combinaisons linéaires (de type L) et harmonique (de type H) de la quantité $Q(GI/GI/s)$.

Théorème 6.1 [Kimura 1994]

Les approximations (6.3) et (6.4) sont asymptotiquement correctes lorsque $\rho \rightarrow 1$ si :

$$\sum_{i=1}^n l_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n h_i = 1 \quad (6.5)$$

Les approximations (6.3) et (6.4) s'écrivent :

$$\bar{W}(GI/GI/s) = \bar{W}(GI/GI/1) \sum_{i=1}^n l_i Q(\beta_i) \quad (6.6)$$

et

$$\bar{W}(GI/GI/s) = \bar{W}(GI/GI/1) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{Q(\beta_i)} \right\}^{-1} \quad (6.7)$$

6.3 Approximations heuristiques du modèle GI/GI/1 avec rappels

Les méthodes heuristiques ont été utilisées pour ce type de modèles (où des approches analytiques, algorithmique et autres sont absentes), notamment pour les systèmes de type GI/G/m/m [Pourbabai 1987, 1988] ainsi que pour les réseaux en tandem dans le cas avec rappel [Pourbabai 1989, 1990].

6.3.1 Approximations heuristiques du système GI/GI/1

Soit le rapport :

$$Qr(GI/GI/s) = \frac{\bar{W}_r(GI/GI/s)}{\bar{W}_r(GI/GI/1)} \quad (6.8)$$

Où $\bar{W}_r(GI/GI/s)$ et $\bar{W}_r(GI/GI/1)$ sont les temps moyens d'attente dans la file pour les systèmes GI/GI/s et GI/GI/1 avec rappel respectivement.

Cette quantité est ensuite écrite comme une combinaison d'interpolation (linéaire et harmonique) dans la base $B \equiv \{M/M/s, M/D/s, D/M/s\}$ de systèmes simples avec rappels :

$$Qr(GI/GI/s) \approx \sum_{i=1}^n l_i Qr(\beta_i) \quad (6.9)$$

$$Qr(GI/GI/s) \approx \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{Qr(\beta_i)} \right\}^{-1} \quad (6.10)$$

où l_i et h_i sont les coefficients de poids du $i^{\text{ème}}$ système ($i = 1, \dots, n$) de la base B et vérifient le théorème 0.1 appliqué au cas avec rappel :

6.3.2 Approximations de type linéaire

Dans la base B, l'approximation (6.9) s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{W}_r(GI/GI/s) &\approx \overline{W}_r(GI/GI/1) \sum_{i=1}^n l_i Q_r(\beta_i) \\ &\approx \overline{W}_r(GI/GI/1) \{l_1 Q_r(M/M/s) + l_2 Q_r(M/D/s) + l_3 Q_r(D/M/s)\}\end{aligned}\quad (6.11)$$

Cette approximation est équivalente à :

$$\begin{aligned}\overline{W}_r(GI/GI/s) &\approx \frac{\overline{W}_r(GI/GI/1)}{\overline{W}_r(M/M/1)} \{l_1 \overline{W}_r(M/M/s) + l_2 \frac{\overline{W}_r(M/M/1)}{\overline{W}_r(M/D/1)} \overline{W}_r(M/D/s) \\ &\quad + l_3 \frac{\overline{W}_r(M/M/1)}{\overline{W}_r(D/M/1)} \overline{W}_r(D/M/s)\}\end{aligned}\quad (6.12)$$

Où,

$$\begin{aligned}\overline{W}_r(M/M/1) &= \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)} \\ \overline{W}_r(M/D/1) &= \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)}\end{aligned}\quad (6.13)$$

Pour $\overline{W}_r(GI/GI/1)$, par extension heuristique du résultat exact de la file M/G/1 avec rappel, on a :

$$\overline{W}_r(GI/GI/1) = \frac{\theta\rho(Ca^2 + Cs^2) + 2\lambda}{2(\theta\rho + \lambda)} \overline{W}_r(M/M/1) \quad (6.14)$$

$$\overline{W}_r(GI/GI/1) = \frac{\theta\rho(Ca^2 + Cs^2) + 2\lambda}{2(\theta\rho + \lambda)} g(Ca^2, Cs^2, \rho) \overline{W}_r(M/M/1) \quad (6.15)$$

$$\overline{W}_r(D/M/1) = \frac{\theta\rho + 2\lambda}{2(\theta\rho + \lambda)} \overline{W}_r(M/M/1) \quad (6.16)$$

et

$$\overline{W}_r(D/M/1) = \frac{\theta\rho + 2\lambda}{2(\theta\rho + \lambda)} g_{01} \overline{W}_r(M/M/1) \quad (6.17)$$

A partir de (6.13), (6.14) et (6.16), l'approximation (6.12) s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{W}_r(GI/GI/s) &\approx \frac{\theta\rho(Ca^2 + Cs^2) + 2\lambda}{2(\theta\rho + \lambda)} \{l_1 \overline{W}_r(M/M/s) \\ &\quad + l_2 \frac{2(\theta\rho + 2\lambda)}{\theta\rho + 2\lambda} \overline{W}_r(M/D/s) + l_3 \frac{2(\theta\rho + \lambda)}{\theta\rho + 2\lambda} \overline{W}_r(D/M/s)\}\end{aligned}\quad (6.18)$$

A partir de (6.13), (6.14) et (6.17), l'approximation (6.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{W}_r(GI/GI/s) \approx & \frac{\theta\rho(Ca^2 + Cs^2) + 2\lambda}{2(\theta\rho + \lambda)} \{l_1 \overline{W}_r(M/M/s) \\ & + l_2 \frac{2(\theta\rho + 2\lambda)}{\theta\rho + 2\lambda} \overline{W}_r(M/D/s) + l_3 \frac{2(\theta\rho + \lambda)}{(\theta\rho + 2\lambda)g_{01}} \overline{W}_r(D/M/s)\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

En Appliquant au système M/G/1 avec rappel, les approximations (6.18) et (6.19) s'écrivent :

$$R_G \approx \frac{\theta\rho(1 + Cs^2) + 2\lambda}{2(\theta\rho + \lambda)} \{l + 2(1 - l) \frac{\theta\rho + \lambda}{\theta\rho + 2\lambda} R_D\} \quad (6.20)$$

tel que :

$$R_G \equiv \frac{\overline{W}_r(M/G/s)}{\overline{W}_r(M/M/s)}, \quad R_D \equiv \frac{\overline{W}_r(M/D/s)}{\overline{W}_r(M/M/s)} \quad \text{et} \quad l = l_1 = 1 - l_2 \quad (6.21)$$

Dans la limite asymptotique $s \rightarrow \infty$, on a $R_G (R_D) \rightarrow 1$ et à partir de (6.20), on obtient :

$$l = \frac{2(\theta\rho + \lambda)}{\theta\rho(1 + Cs^2) + 2\lambda} Cs^2 \quad (6.22)$$

Pour le cas simple $s = 1$:

$$\begin{aligned} \overline{W}_r(GI/GI/1) \approx & (Ca^2 + Cs^2 - 1) \overline{W}_r(M/M/1) \\ & + (1 - Cs^2) \overline{W}_r(M/D/1) + (1 - Ca^2) \overline{W}_r(D/M/1) \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \overline{W}_r(GI/GI/1) \approx & Ca^2 Cs^2 \overline{W}_r(M/M/1) + (1 - Cs^2) Ca^2 \overline{W}_r(M/D/1) \\ & + \frac{(\theta\rho Cs^2 + 2\lambda)(1 - Ca^2)}{\theta\rho + 2\lambda} \overline{W}_r(D/M/1) \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \overline{W}_r(GI/GI/1) \approx & (Ca^2 + Cs^2 - 1) \overline{W}_r(M/M/1) \\ & + (1 - Cs^2) \overline{W}_r(M/D/1) + \frac{(1 - Ca^2)}{g_{01}} \overline{W}_r(D/M/1) \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'approximation pour l'estimation des principaux paramètres de performance dans les systèmes GI/GI/1 et GI/GI/s.

La méthode d'approximation des deux moments est établie selon le principe d'interpolation en combinant (de manière linéaire et harmonique) des solutions analytiques de

systèmes simples que sont les files M/M/1, M/D/1 et D/M/1. Plusieurs approximations du temps moyen d'attente des systèmes GI/GI/1, GI/GI/s sont présentées.

-Des investigations plus détaillées sont souhaitables dans le but d'élargir le domaine de validité de l'approximation des deux moments. Enfin, cette même approche est à encourager afin de connaître le degré de validité de la méthode en considérant un coefficient de variation relatif à la distribution des inter-rappels (système $GI/GI/1$ avec rappel général).

Il serait aussi intéressant d'engager des réflexions sur la possibilité d'appliquer ces résultats pour les systèmes d'attente avec rappels et vacances.

Troisième partie

Contrôle Statistique de la Qualité

Le bootstrap pour le choix de la fenêtre dans la méthode du noyau

Aïcha BARECHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.
email : aïcha_barecheyahoo.fr

7.1 Introduction

Le bootstrap est aujourd'hui une technique fréquemment utilisée en inférence statistique. Très souple à mettre en oeuvre, elle constitue une alternative intéressante aux méthodes d'estimation classiques surtout lorsque ces dernières ne peuvent être appliquées.

Les premiers éléments de la technique du bootstrap sont assez récents car cette dernière repose sur l'usage de calculateurs puissants. Ces éléments sont apparus dans la littérature statistique en 1979. Toutefois, il a fallu attendre 1993 pour voir paraître le livre d'Efron et Tibshirani [3] qui fait encore aujourd'hui référence sur le sujet.

7.2 Le bootstrap

Le bootstrap est, tout simplement, une méthode de ré-échantillonnage destinée à faciliter l'inférence dans les situations complexes où les méthodes analytiques ne suffisent pas. Son idée est d'utiliser l'échantillon des observations pour permettre une inférence statistique plus fine. Si l'échantillon initial observé est : $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, on réalise un certain nombre d'échantillons -qualifiés d'échantillons bootstrap- obtenus par tirage aléatoire de n observations parmi l'échantillon initial [2, 3] :

$$\begin{aligned} X^{*1} &= (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) \\ X^{*2} &= (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) \\ &\vdots \\ X^{*B} &= (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) \end{aligned}$$

7.3 La méthode du noyau

L'estimation non-paramétrique par la méthode du noyau est une méthode attractive de lissage pour l'estimation des fonctions densité de probabilité. Etant donné un échantillon X_1, \dots, X_n de taille n d'une distribution de fonction densité f , l'estimateur à noyau de Rosenblatt [7] est donné par :

$$f_n(x; h) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right). \quad (7.1)$$

Où K est une fonction densité symétrique appelée noyau avec $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$ et h est appelé paramètre de lissage (fenêtre).

En pratique, lorsqu'on utilise la méthode du noyau pour estimer la densité de probabilité des observations indépendantes et identiquement distribuées, il est nécessaire de choisir la fonction noyau K et la largeur de la fenêtre h (ou h_n). Le choix optimal de (K, h_n) se fait généralement suivant le critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MSE) donnée par :

$$MSE(f_n(x; h)) = \mathbb{E}(f_n(x; h) - f(x))^2, \quad (7.2)$$

ou de l'erreur quadratique moyenne intégrée (MISE) donnée par :

$$MISE(f_n(x; h)) = \mathbb{E} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x; h) - f(x))^2 dx. \quad (7.3)$$

Beaucoup d'études ont été faites pour discuter du bon choix des deux paramètres de cette méthode (K, h_n) . Plusieurs parmi elles, par exemple Epanechnikov [4], montre que le choix du noyau K n'est pas aussi important et qu'il est complètement satisfaisant de choisir la fonction noyau pour la convenance du calcul informatique comme par exemple le noyau gaussien.

Dans la pratique, l'étape critique dans l'estimation densité est le choix de la fenêtre h , qui contrôle le lissage de l'estimateur densité. Ce dernier problème a été largement étudié et plusieurs méthodes ont été proposées.

► Le choix asymptotique de h minimise l'erreur quadratique moyenne dans (7.2) et il est donné par :

$$h = \left[\frac{f(x) \int K^2(x) dx}{n \{f''(x) \int K(x) x^2 dx\}^2} \right]^{1/5} \quad (7.4)$$

Une ancienne idée est de remplacer f'' par son estimée f_n''

► Bowman et Rudemo [1, 8] choisissent la fenêtre h pour minimiser le critère "least squares cross-validation" donné par :

$$LSCV(h) = \int f_n(x; h)^2 dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f_{h,-i}(X_i), \quad (7.5)$$

où $f_{h,-i}(x_i)$ est donné comme suit :

$$f_{h,-i}(x_i) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K\left(\frac{x_i - X_j}{h}\right). \quad (7.6)$$

7.4 Le bootstrap pour le choix de la fenêtre dans la méthode du noyau

L'idée de base est de ré-échantillonner à partir de la distribution empirique F_n de l'échantillon initial X_1, \dots, X_n obtenu d'une distribution F par remplacement pour avoir un nouvel échantillon X_1^*, \dots, X_n^* et par la suite construire les estimées bootstrap comme suit :

$$f_{nj}^*(x; h) = (nh)^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i^*}{h}\right), \quad (7.7)$$

pour $j = 1, \dots, B$, où B est le nombre d'échantillons bootstrap pris.

Hall [6] a exploité cette idée pour estimer l'erreur quadratique moyenne (7.2) et la fenêtre h_1 en choisissant pour les échantillons bootstrap une taille n_1 plus petite que la taille n de l'échantillon initial comme suit :

$$\begin{aligned} MSE^*(x, n_1, h_1) &= E[\{f_{n_1}^*(x; h_1) - f_n(x, h)\}^2] \\ &= (nn_1)^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_1}^2(x - X_i^*) - n_1^{-1} \{f_n(x; h_1)\}^2 \\ &\quad + \{f_n(x; h_1) - f_n(x; h)\}^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Taylor [10] a utilisé lui aussi le même principe pour estimer l'erreur quadratique moyenne intégrée (7.3) et la fenêtre h en prenant la même taille n pour les échantillons bootstrap et en choisissant le noyau gaussien. Le résultat est comparé à celui obtenu par la méthode "least squares cross-validation" toujours dans le cas du noyau gaussien.

Faraway et Jhun [5] utilisent eux aussi le bootstrap classique pour estimer l'erreur quadratique moyenne intégrée (7.3) qu'ils minimisent par la suite pour estimer la fenêtre h . Les auteurs montrent que l'utilisation du bootstrap classique échoue. Le MISE doit être décomposé en deux termes : variance et biais. Le bootstrap estime adéquatement la variance par :

$$B^{-1} \sum_{j=1}^B \int (f_{n_j}^*(x; h) - \bar{f}_{n_j}^*(x; h))^2 dx \quad (7.9)$$

où

$$\bar{f}_{n_j}^*(x; h) = B^{-1} \sum_{j=1}^B f_{n_j}^*(x; h) \quad (7.10)$$

Cependant, l'estimée bootstrap du biais donnée par :

$$f_n(x; h) - \bar{f}_{n_j}^*(x; h) \quad (7.11)$$

disparaît, car la composante du biais croît avec h et peut être considérable. D'où l'échec de la méthode.

Les auteurs proposent une autre méthode "le bootsrap lissé". Ils obtiennent d'abord une estimation initiale de la densité f par une fenêtre choisie par une autre procédure ensuite ils ré-échantillonnent à partir de cela. Cette méthode peut construire une estimée du MISE qui capte bien le terme biais, et tend à améliorer l'estimée initial de la densité.

Ils construisent une estimée initiale de la densité f notée $\hat{f}_n(x; h_o)$, ensuite ils ré-échantillonnent à partir de celle-ci en utilisant l'algorithme donné par Silverman et Young [9] qui consiste à rajouter une quantité aléatoire $h_o \varepsilon$ pour chaque valeur ré-échantillonnée X_j^* , où ε est distribuée avec densité $K(\cdot)$. Alors $X_j^* \rightarrow X_j^* + h_o \varepsilon$.

On doit alors construire $f_{n_j}^*(x; h)$ comme précédemment, estimer le biais par :

$$\hat{f}_n(x; h_o) - \bar{f}_{n_j}^*(x; h), \quad (7.12)$$

et estimer le MISE comme : variance + (biais)² par :

$$\text{MISE}^*(h, h_o) = B^{-1} \sum_{j=1}^B \int (f_{n_j}^*(x; h) - \hat{f}_n(x; h_o))^2 dx \quad (7.13)$$

Ils obtiennent le choix bootstrap de la fenêtre \hat{h}_b en minimisant $\text{MISE}^*(h, h_o)$ à travers h .

7.5 conclusion

Aujourd'hui, le bootstrap s'est imposé dans le domaine statistique comme une technique très pratique d'inférence statistique. Elle nécessite peu d'hypothèses et est relativement

facile à programmer -ce ne sont, en effet, que des tirages aléatoires.

Le bootstrap permet d'associer une erreur standard et un biais à n'importe quelle statistique, malgré le fait qu'il n'existe pas de formule théorique connue pour estimer cette statistique.

La norme L_2 a été le critère le plus populaire pour le choix de la fenêtre, mais la norme L_1 a ses avantages. L'un des avantages du bootstrap est qu'il peut être facilement adapté au critère : erreur absolue moyenne intégrée par :

$$\text{MISE}^*(h, h_o) = B^{-1} \sum_{j=1}^B \int |f_{nj}^*(x; h) - \hat{f}_n(x; h_o)| dx \quad (7.14)$$

Lors de l'application de la stabilité forte, le bootstrap peut être appliqué pour déterminer la distance de variation w qui caractérise l'erreur de proximité entre deux systèmes :

$$w = w(G, E_\lambda) = \int |G - E_\lambda|(dt) = \int |g_n - e_\lambda|(t) dt \quad (7.15)$$

Références

1. A.W. Bowman. An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates. *Biometrika.*, 71 :353–360, 1984.
2. I. Buvat. Introduction à l'approche bootstrap. At : (guillemet.org/irene/equipe4/coursem/bootstrap), 2000.
3. B. Efron, and R.J. Tibshirani. An Introduction to the Bootstrap. London : Champan & Hall. 1993.
4. V.A. Epanechnikov. Nonparametric estimation of a multidimensional probability density. *theory Probab. Appl.*, 14 : 153–158, 1969.
5. J.J. Faraway, and M. Jhun. Bootstrap Choice of Bandwidth for Density Estimation. *Journal of the American Statistical Association.*, 85 : 1119–1122, 1990.
6. P. Hall. Using the Bootstrap to Estimate Mean Squared Error and Select Smoothing Parameter in Nonparametric Problems. *J. Multivariate Anal.*, 32 : 177–203, 1990.
7. M. Rosenblatt. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.*, 27 : 832–837, 1956.
8. M. Rudemo. Empirical choice of histograms and kernel density estimators. *Scand. J. Statist.*, 9 : 65–78, 1982.
9. B.W. Silverman, and G. Young. The Bootstrap : To smooth or not to smooth?. *Biometrika.*, 74 : 469–479, 1987.
10. C.C. Taylor. Bootstrap choice of the smoothing parameter in kernel density estimation. *Biometrika.*, 76 : 705–712, 1989.

Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres

Kamal KABYL

¹Département des Sciences Commerciales, Université A.MIRA de bejaia.

² Faculté de Mathématiques, université Houari BOUMEDIENE(USTHB)
Bab ezzouar, Algerie.

¹k.kaby1e2000@yahoo.fr, ²abdelhafid.berrachedi@yahoo.fr

8.1 Introduction

Un plongement de $G(V, E)$ dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n , et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des arêtes de Q_n , qui associe à chaque arête uv de G une arête $\varphi(u) \varphi(v)$ dans Q_n . Ce problème est très étudié en théorie des graphes. En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) selon lesquelles un graphe G est un sous graphe d'un sous-graphe de l'hypercube Q_n .

Une classe importante à étudier est celles des arbres dans l'hypercube. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines, à savoir : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, théorie des réseaux électriques. . . . Le problème consiste à donner la plus petite dimension d'un hypercube dans lequel un arbre donné G est plongeable. On parle alors d'hypercube optimal et de dimension cubique de l'arbre, notée $dimG$. Dans le même contexte, on définit dans ce papier deux nouvelles classes pour lesquelles la dimension cubique est déterminée. La Cn -valuation aux cas des arbres est donnée comme suit : Un arbre T est Cn -valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne P de T , il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K .

8.2 Quelques types d'arbres plongeables dans l'hypercube

On présente certains résultats connus sur les plongements d'arbres dans l'hypercube.

8.2.1 Arbres Binaires

Un arbre est dit binaire si son degré maximum est au plus égal à trois. Un résultat concernant les arbres binaires a été donné par I. Havel

Proposition 4 (Havel [1]) Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n avec $n \geq 3$; si T est équilibré et possède deux sommets de degré maximum alors T est plongeable dans Q_n

8.2.2 Arbres Binaires Complètes :

Un arbre Binaire complet D_n peut être défini de la façon suivante :
Pour $n = 1$, $D_1 = K_{1,2}$. Pour $n \geq 2$ D_n est obtenu à partir de deux copies disjointes T et T' de D_{n-1} et d'un nouveau sommet v relié aux deux racines de T et T' . D_n possède un seul sommet de degré 2 (la racine), 2^n sommets pendants et 2^{n-2} sommets de degré 3.

Proposition 5 (Havel [1]) pour $n \geq 2$, $\dim D_1 = 2$ et $\dim D_n = n + 2$

8.2.3 Autres classes d'arbres binaires :

- 1) Pour $n \geq 1$, H_n est un arbre binaire défini inductivement comme suit : H_1 est le graphe de la figure suivante :

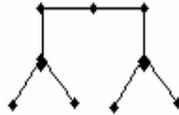


Figure 8.1. H_1

Pour $n \geq 2$, H_n est obtenu en reliant dans H_{n-1} chaque sommet pendent à deux

nouveaux sommets ; les nouveaux sommets seront les sommets pendants de l'arbre H_n . H_n possède 2^{n+1} sommets pendants , $2^{n+1} - 2$ sommets de degré 3 et 3 sommets de degré 2 , donc H_n a $2^{n+2} + 1$ sommets.

Proposition 6 (Berrachedi [3]) Pour tout $n \geq 1$; $\dim H_n = n + 3$.

8.3 Deux nouvelles classes d'arbres binaires

8.3.1 La classe H_n^k

On définit un arbre binaire de la façon suivante : Pour $n \geq 1$, H_n^1 est l'arbre H_n .
 Pour $n \geq 1, k \geq 1$ H_n^k est obtenu en insérant $(k - 1)$ nouveaux sommets de degré 2 au niveau de l'arête ub de H_n
 H_2^2 est montré dans la figure suivante :

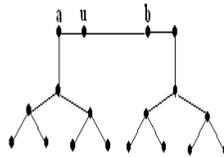


Figure 8.2. R_1

Théorème 8.1 Pour $n \geq 1, 2 \leq k \leq 1$ $dim(H_n^k) = n + 3$.

8.3.2 La classe S_n

Pour $n \geq 1$, S_n est un arbre binaire défini inductivement comme suit : S_1 est le graphe de la figure suivante :

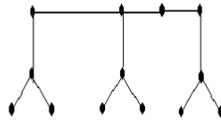


Figure 8.3. S_1

Pour $n \geq 2$, S_n est obtenu à partir de S_{n-1} tel que chaque sommet pendent est relié à deux nouveaux sommets ; les nouveaux sommets seront appelés sommets pendants dans l'arbre S_n . S_n possède 2^n sommets pendants ,3 sommets de degré 2 et 3.2^{n-1} sommets de degré 3, donc S_n a $9.2^{n-1} + 7$ sommets. Le théorème suivant donne la dimension cubique de H_n .

Théorème 8.2 Pour tout $n \geq 1$; $dim(S_n) = n + 3$.

Références

1. I. Havel "On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes" Cas prest. Mat 109(1984) 135-152
2. A. Berrachedi et M. Nekri " Trees embedable in hypercubes " à paraître dans la revue RAIRO.
3. A. Berrachedi " sur la dimension cubique de quelques classes d'arbres", Acte de colloque sur l'optimisation et les systèmes d'information (7-9 juin 2004) Tizi ousou (Cosi'04).
4. I. Havel and P. Liebel "One legged caterpillars spans hypercubes" Journal of graph theory vol 10 (1986) 69-77.
5. I. Havel and J .Moravek "B-valuation of graphs " Czech- Math .jour ., 22(1972),338-351.

Sur les modèles de maintenance : synthèse et classification

Radouane LAGGOUNE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

9.1 Introduction

Les équipements de production et de services constituent une part importante du capital de la majorité des industries. Ces équipements sont généralement sujets à des dégradations avec l'utilisation et le temps. Pour certains de ces systèmes, tels que les avions, les systèmes nucléaires, les installations pétrolières et chimiques, il est extrêmement important de tout mettre en œuvre pour éviter la défaillance en fonctionnement car elle peut être dangereuse. Par ailleurs, pour les unités à fonctionnement continu tel que les raffineries de pétrole, le manque à gagner est élevé en cas d'arrêt. Par conséquent, la maintenance devient une nécessité pour améliorer la fiabilité. L'importance croissante de la maintenance a généré un intérêt sans cesse croissant dans le développement et la mise en œuvre de stratégies de maintenance pour l'amélioration de la fiabilité des systèmes, la prévention de défaillances et la réduction des coûts de maintenance. Nous rappelons que la maintenance est toute action permettant de maintenir ou de rétablir un bien dans un état spécifié. La maintenance corrective est la maintenance effectuée après défaillance. La maintenance préventive est toute maintenance effectuée en service dans le but de réduire la probabilité d'occurrence de panne.

9.2 Politiques de maintenance pour systèmes mono-composant

Les hypothèses de base sont :

- La durée de vie du composant a un taux de défaillance croissant (IFR).
- - Il existe un nombre infini de composants identiques avec des durées de vie iid.

Politique de MP dépendant de l'âge

Dans cette politique, un composant est remplacé préventivement à l'âge T ou à la défaillance si celle-ci a lieu avant T [Barlow and Hunter 1960]. Le coût moyen par unité de temps est donné par :

$$C(T) = \frac{C_p R(T) + [1 - R(T)] C_d}{\int_0^T R(t) dt} \quad (9.1)$$

Où : Le numérateur représente le coût total du cycle et le dénominateur la longueur du cycle. T est l'âge du remplacement préventif; C_p le coût du remplacement préventif; C_d le coût de défaillance; $R(t) = 1 - F(t)$ est la fonction de fiabilité (de survie).

Depuis, plusieurs extensions ou variantes de ce modèle ont vu le jour : Tahara et Nishida (1975), Nakagawa (1984), Sheu et al (1993), Sheu et al (1995), Block et al (1993), Wang and Pham (1999).

Politique de maintenance préventive périodique

Dans cette politique un élément est préventivement maintenu à des intervalles de temps fixes kT ($k = 1, 2, 3, \dots$) indépendants de l'historique des pannes, et réparé à la défaillance. Une autre politique de MP périodique de base est "le remplacement périodique avec réparation minimale à la défaillance" où un élément est remplacé à des temps prédéterminés kT ($k = 1, 2, \dots$) et les défaillances sont éliminées par des réparations minimales (Barlow and Hunter 1960).

$$C(T) = \frac{(C_d + C_p)E(N(t)) + C_p}{T} \quad (9.2)$$

Où le nombre moyen de remplacements de 0 à T est donné par $E(N(t))$ au coût $(C_p + C_d)$, où : C_p est le coût de la pièce, C_d le coût entraîné par la défaillance.

Avec les concepts de réparation minimale et surtout de maintenance imparfaite (Pham and Wang 1996), différentes extensions et variantes de ces deux politiques ont été proposées : Liu et al (1995), Berg et Epstein (1976), Tango (1978), Nakagawa (1981a,b), Wang and Pham (1999).

9.3 Politique de la limite de défaillance

Sous cette politique, la maintenance préventive a lieu seulement lorsque le taux de défaillance ou autres indices de fiabilité atteignent un niveau prédéterminé et les défaillances sont corrigées par des réparations.

Politique de maintenance préventive séquentielle

Sous cette politique, un élément est préventivement maintenu à des intervalles de temps inégaux. Souvent les intervalles deviennent de plus en plus courts avec le temps, sachant que la majorité des éléments nécessitent des maintenances plus fréquentes avec l'âge.

Politique de la limite de réparation

Lorsque un élément tombe en panne, le coût de réparation est estimé et la réparation est entreprise si le coût estimé est inférieur à une limite prédéterminée ; sinon l'élément est remplacé, cette politique est connue sous le nom de "la limite du coût de réparation".

9.4 Politiques de maintenance pour systèmes multi-composants

Dans le cas où il n'y a aucune dépendance économique ou structurelle et les défaillances sont indépendantes, les politiques précédentes restent valables pour un système multi-composant, en considérant chaque sous-système séparément. Cependant, dans la pratique il existe souvent des dépendances entre les sous systèmes, par conséquent une politique optimale pour chaque sous-système pris à part n'est pas forcément optimale pour le système. La dépendance économique, Les défaillances dépendantes, La dépendance structurelle.

9.4.1 Politique de maintenance en groupe (Group maintenance policy)

Les politiques de maintenance en groupe peuvent être divisées en trois classes. La première classe concerne la détermination des éléments pouvant être remplacés quand une défaillance a lieu. Ceci est particulièrement intéressant lorsque les coûts d'accessibilité associés au montage et démontage sont variables, et des maintenances préventives simultanées sur certaines catégories de composants sont appropriées. La seconde classe concerne la réduction des coûts en prévoyant des éléments redondants dans la conception des systèmes. La troisième classe concerne les systèmes constitués de machines fonctionnant indépendamment, sujettes à des défaillances aléatoires et ayant les mêmes distributions.

- Gertsbakh (1984), Vergin and Scriabin (1977), Love et al (1982), Sheu et Jhang (1997), Assaf et Shanthikumar (1987), Wildeman et al (1997). Nous donnerons comme exemple les modèles proposés par D. Assaf et G. Shanthikumar (1987)

Considérons un système composé de N machines identiques sujettes à des défaillances aléatoires et les temps à la défaillance sont indépendants ayant la même distribution exponentielle de paramètre λ connu ($\lambda > 0$). Soient :

C_0 : coût initial de réparation (ex. le coût de mise à disposition de la logistique nécessaire) ;

C_1 : coût de réparation par machine ;

C_2 : coût engendré par l'arrêt d'une machine (en terme de perte de production). Ainsi :

- Le coût de réparation de $n \geq 1$ machines est : $C_0 + nC_1$;

- Le coût engendré par l'arrêt de n machines durant un intervalle de temps h est : nhC_2 .

Modèle 1 : Cas d'une inspection continue

Le nombre de machines défailtantes est connu à chaque instant.

$$C_1(n, m) = \frac{\lambda C_0 + m\lambda C_1 + \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{n-m+k}{N-n+m-k}\right) C_2}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{N-n+m-k}} \quad (9.3)$$

Modèle 2 : Cas d'une inspection périodique

Le nombre de machines défailtantes n'est pas connu. L'information peut être obtenue en payant un coût d'inspection noté (exemple : le coût d'arrêt de production durant l'inspection).

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \frac{C_0^I + C_0(1 - e^{-N\lambda t}) + N(C_1 - \frac{C_2}{\lambda})(1 - e^{-\lambda t})}{t} + NC_2. \\ C_2(0) &= NC_2 \end{aligned} \quad (9.4)$$

9.4.2 Politiques de maintenance opportuniste (Opportunistic maintenance policies)

Comme il a été mentionné précédemment, les dépendances dans les systèmes multi-composants, notamment la dépendance économique, font qu'il est profitable d'effectuer de la maintenance préventive sur un élément non défailtant au moment où la réparation de l'élément défailtant a commencé. Berg (1976), Berg (1978), Zheng et Fard (1991), Murthy et al. (1993), Dagpunar (1996), Pham et Wang (2000), Wang et al (2001). Nous allons présenter comme exemple le modèle de Murthy et al. (1993) :

Modèle 1 : Défaillance induite

Le modèle de coût est donné par :

$$C_1(N) = \frac{C_{d_1} \sum_{j=1}^{N-1} A_j + C_{p_3} - (C_{p_3} - C_{p_2})A_{N-1}}{\sum_{j=0}^{N-1} A_j \int_0^\infty P_j(t) dt}, \quad (9.5)$$

$$A_j = (1 - \alpha_1) \dots (1 - \alpha_j); (j = 1, 2, \dots); A_0 = 0,$$

$$P_j(t) = \frac{\left[\int_0^t \lambda(u) du\right]^j}{j!} e^{-\int_0^t \lambda(u) du}; j = 0, 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

C_{d_1} : le coût d'une défaillance de l'unité 1 ;

C_{p_2} : le coût de remplacement à la $N^{\text{ème}}$ défaillance de l'unité 1 ;

C_{p_3} : le coût de remplacement à la défaillance de l'unité 2 ($C_{p_3} \geq C_{p_2}$).

Modèle 2 : Dommages de choc

A chaque fois que l'unité 1 tombe en panne, elle provoque un choc à l'unité 2 et cause un dommage avec une distribution $G(z)$ à l'unité 2. Le dommage est cumulatif et l'unité 2 tombe en panne à chaque fois que le dommage total excède un niveau de défaillance z . Le modèle de coût est donné par :

Quatrième partie

Index des Auteurs

Index

ABBAS Karim, 31

BARACHE Fatiha, 5

BARECHE Aïcha, 45

BOUALEM Mohamed, 37

FERHAT Arezki, 3

KABYL Kamal, 50

LAGGOUNE Radouane, 55

MERNACHE Taous, 10

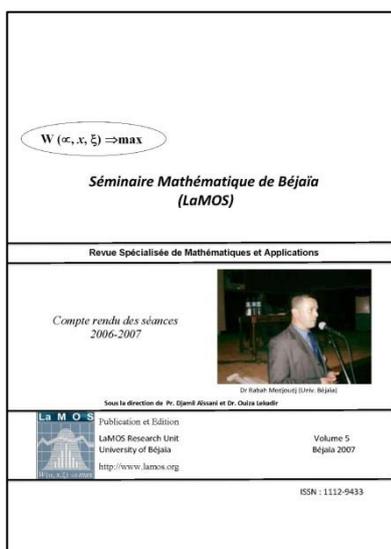
SLIMANI Hachem, 21

Lamos Editions, 2007.

L'ouvrage :

Ce volume contient la plupart des exposés faits en 2006/2007 au Séminaire Mathématique de Béjaïa. Ils sont centrés autour des domaines d'intérêt des chercheurs du laboratoire de Recherche LAMOS (Modèles déterministes et stochastiques de la Recherche Opérationnelle, Probabilités et statistiques, Optimisation, ...) avec une attrayante dispersion vers des domaines lointains.

Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp. 50).

Parmi les conférenciers de l'année 2006 - 2007 : Fatiha Barache, Taous Mernache, Redouane Laggoune, Hachem Slimani, ...

Pour citer ce volume : Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 5, 2007, 73 pages. ISSN : 1112 – 9433.

ISSN : 1112 – 9433