Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Bejaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse mathématique

Par

MAZOUZI NADJETTE

Thème

Sur les problèmes aux limites associés à des E.D.O. du second ordre

Soutenu devant le jury composé de :

M^{r}	A. BERBOUCHA	professeur	Université de Bejaia	Président
M^{me}	K. KHELOUFI-MEBARKI	M.C.A	Université de Bejaia	Promotrice
M^{me}	S. ALLILI-Zahar	M.C.B	Université de Bejaia	Examinatrice

Juin 2018

Remerciements

*Je tiens à remercier **ALLAH** qui m'a donné la force et le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis sur mon chemin les bonnes personnes et m'a confiée aux bonnes mains.*

Je *tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Madame* ***K. KHELOUFI****, ma promotrice, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité. J'adresse mes profondes gratitudes et mes remerciements les plus vifs à M*$^{\text{r}}$ **A. BERBOUCHA** *pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance.*

Je *tiens à remercier également M*$^{\text{me}}$ **S. ALLILI-ZAHAR** *qui a accepté d'examiner ce travail.*

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à tous les membres de la faculté des sciences exactes en général et aux membres du département de mathématiques en particulier.

Dédicaces

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :

Mes parents, qui ne m'ont jamais laissé tomber dans toutes les circonstances.

Mes frères et mes sœurs que j'aime beaucoup.

Mes cousins.

Tous mes amis.

Madame KHELOUFI qui a dirigé ce travail.

Tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction **1**

1 Problèmes aux limites linéaires **3**

1.1 Introduction 3

1.2 Fonction de Green 7

1.2.1 Fonction de Green associée à une E.D.O. du second ordre 7

1.2.2 Fonction de Green associée à une E.D.O. d'ordre $n \geq 2$ 13

1.3 Problèmes de Sturm-Liouville linéaires 18

1.3.1 Introduction 18

1.3.2 Fonction de Green associée à un problème de Sturm-Liouville . . . 20

1.3.3 Propriétés des valeurs propres et des fonctions propres 23

2 Problèmes de Sturm-Liouville non linéaires **31**

2.1 Problèmes de Sturm-Liouville non linéaires sur les intervalles bornés 31

2.2 Problèmes de Sturm-Liouville non linéaires sur les intervalles non bornés . 42

Conclusion **50**

Annexe **51**

Bibliographie **54**

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter un ensemble de résultats concernant les problèmes aux limites associées à des équations différentielles ordinaires du second ordre. Nous nous intéressons particulièrement aux problèmes de Sturm-Liouville posés sur les intervalles bornés ou non bornés de la droite réelle. Nous rassemblons dans ce travail des résultats classiques ainsi que des résultats récents moins connus dans la littérature, sur le sujet. Des résultats permettant de bien maitriser quelques outils de base, notamment l'alternative de Fredholm, la fonction de Green et les théorèmes du point fixe, nécessaires à une étude plus approfondie des problèmes aux limites.

La théorie de Sturm-Liouville [1] linéaire s'intéresse aux équations différentielles ordinaires linéaires de la forme

$$(p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) + q(x))y(x) = f(x), \tag{0.0.1}$$

dans lesquelle le paramètre λ et la fonction y sont des inconnues. Cette équation est souvent posée sur un segment $[a, b]$ et est associés à des conditions aux bords reliant $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$ et $y'(b)$. Notons que les solutions de ce problème apparaissent comme valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur linéaire $Ly = \frac{1}{r(x)}\left[(p(x)y')' + q(x)y\right]$, où $r \neq 0$ sur $[a, b]$. Le résultat principal de cette théorie est de trouver une base orthonormée de l'espace vectoriel $L_r^2([a, b])$, des fonctions de carré sommable sur l'intervalle $[a, b]$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b r(x)f(x)g(x)dx$. Une base composée de vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes formant une suite strictement croissante. Dans le cas où le paramètre λ n'apparait pas dans l'équation, les solutions du problème s'écrivent sous la forme intégrale

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt,$$

[1] Charles Sturm (1803-1855), français Joseph Liouville (1809-1882), français.

où G est dite fonction de Green.

Ce mémoire comporte deux chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux problèmes linéaires. Nous commençons par discuter les différents types de conditions aux bords, des conditions qui ne sont pas les mêmes que celles intervenant dans le problème de Cauchy et qui ont des propriétés particulières (l'alternative de Fredholm). Ensuite, nous donnons la définition ainsi que les propriétés d'une fonction qui joue un rôle fondamental dans la représentation des solutions de tels problèmes. Cette fonction est appelée fonction de Green qui porte le nom du mathématicien anglais George Green (1793-1841). Nous présentons aussi des méthodes pratiques permettant le calcul de cette fonction. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de l'équation (0.0.1) associée à des conditions aux bords linéaires séparées.

Dans le deuxième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité de solutions de quelques problèmes de Sturm- Liouville non linéaire en utilisant la théorie du point fixe. Les résultats de ce chapitre varient selon les hypothèses portant sur le terme non linéaire ainsi que selon le bornage ou non de l'intervalle d'étude.

CHAPITRE 1

Problèmes aux limites linéaires

1.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle du second ordre linéaire

$$(E) \qquad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad x \in [a,b],$$

où p, q, r et f sont des fonctions continues sur $[a,b]$, associée à des conditions aux bords linéaires non séparées :

$$(F) \quad \begin{cases} U_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \gamma, \\ U_2(y) = \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

où les α_i, β_i, $i = 1,4$ et γ, δ sont des constantes réelles données.

Définition 1.1.1 *On appelle problème aux limites homogène associé au problème* $(E)+(F)$ *le problème* $(E_H)+(F_H)$ *tel que :*

$$(E_H) \qquad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad a < x < b$$

et

$$(F_H) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Si $(f \neq 0$ *et* $\gamma = \delta = 0)$ *ou* $(f = 0$ *et* $(\gamma \neq 0$ *ou* $\delta \neq 0))$, *on dit que le problème* $(E)+(F)$ *est semi homogène.*

Remarques 1.1.1

1. Le *problème aux limites* $(E)+(F)$ *est dit régulier si* a *et* b *sont des nombres finis et* p, q, r *sont des fonctions bornées sur* $[a,b]$ *et* $p(x)\neq 0\ \forall x\in[a,b]$, *sinon on dit qu'il est singulier.*

2. *Une solution d'un problème aux limites est une fonction qui satisfait l'équation et les conditions aux limites associées.*

3. *Les conditions aux bords linéaires* (F) *sont générales, en particulier elles comprennent :*

a) *les conditions de Dirichlet :* $y(a)=\gamma$, $y(b)=\delta$ *;*

b) *les conditions de Neuman :* $y'(a)=\gamma$, $y'(b)=\delta$ *;*

c) *les conditions mixte :* $y(a)=\gamma$, $y'(b)=\delta$ *ou* $y'(a)=\gamma$, $y(b)=\delta$ *;*

d) *les conditions aux limites linéaires séparées*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\gamma \\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=\delta, \end{cases}$$

où ${\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2\neq 0$ *et* ${\beta_1}^2+{\beta_2}^2\neq 0$;

e) *les conditions aux limites linéaires périodiques*

$$\begin{cases} y(a)=y(b) \\ y'(a)=y'(b). \end{cases}$$

Remarque 1.1.2 *L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des problèmes aux limites est plus difficile que celle des problèmes à valeurs initiales (problèmes de Cauchy). En fait, dans le cas des problèmes aux limites, une légère modification dans les conditions aux limites ou dans la longeur de l'intervalle d'étude peut conduire à des changements significatifs dans le comportement des solutions. Par exemple, le problème à valeurs initiales*

$$\begin{cases} y''(x)+y(x)=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)=\gamma,\ y'(0)=\delta, \end{cases}$$

a pour tout γ, $\delta \in \mathbb{R}$, *une unique solution définie par* $y(x) = \gamma \cos x + \delta \sin x$.
Cependant, le problème aux limites

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \ y(\pi) = \gamma \ (\gamma \neq 0), \end{cases}$$

n'admet pas de solutions et le problème

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 < x < b \ (0 < b < \pi), \\ y(0) = 0, \ y(b) = \gamma, \end{cases}$$

a pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, *une unique solution définie par* $y(x) = \gamma \frac{\sin x}{\sin b}$.
Alors que le problème

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \ y(\pi) = 0, \end{cases}$$

admet une infinité de solutions définies par $y(x) = c \sin x$, $c \in \mathbb{R}$.

Le problème homogène $(E_H) + (F_H)$ admet toujours la solution triviale $y \equiv 0$. D'après l'exemple précèdent il peut avoir une solution non triviale. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème $(E_H) + (F_H)$ n' admet pas des solutions non triviales.

Théorème 1.1.1 ([*1*], *page* 234) *Soient* φ_1 *et* φ_2 *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* (E_H). *Alors le problème homogène* $(E_H) + (F_H)$ *a uniquement la solution triviale* $y \equiv 0$ *si et seulement si*

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_1(\varphi_2) \\ U_2(\varphi_1) & U_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Démonstration. Toute solution de l'équation (E_H) peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \ c_1, \ c_2 \in \mathbb{R}.$$

y est solution du problème $(E_H) + (F_H)$ si et seulement si

$$\begin{cases} U_1(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = 0 \\ U_2(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} c_1U_1(\varphi_1) + c_2U_1(\varphi_2) = 0 \\ c_1U_2(\varphi_1) + c_2U_2(\varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Par suite, le système (S) admet uniquement la solution triviale si et seulement si son déterminant Δ est non nul. ■

Exemple 1.1.1 *Considérons le problème de Dirichlet*

$$(Q)\quad \begin{cases} xy''(x) - y'(x) - 4x^3y(x) = 0, \quad 1 < x < 2 \\ U_1(y) = y(1) = 0, \\ U_2(y) = y(2) = 0. \end{cases}$$

On a $\varphi_1(x) = \cosh(x^2-1)$ *et* $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\sinh(x^2-1)$ *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* $xy''(x) - y'(x) - 4x^3y(x) = 0$ *avec*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh 3 & \frac{1}{2}\sinh 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sinh 3 \neq 0.$$

Donc le problème (Q) *n'admet que la solution triviale* $y \equiv 0$.

Dans ce qui suit, nous présentons un résultat, appelé Alternative de Fredholm, qui assure l'existence et l'unicité des solutions du problème non homogène $(E) + (F)$ dans le cas où le problème homogène n'admet pas de solutions non triviales.

Théorème 1.1.2 ***(Alternative de Fredholm)*** ([*1*], *page* 236)
Le problème non homogène $(E) + (F)$ *admet une solution unique si et seulement si le problème homogène* $(E_H) + (F_H)$ *admet uniquement la solution triviale* $y \equiv 0$.

Démonstration. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (E_H) et ψ une solution particulière de l'équation non homogène (E). Alors la solution générale de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \psi(x),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

y est solution du problème non homogène $(E) + (F)$ si et seulement si

$$\begin{cases} U_1(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi) = \gamma \\ U_2(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi) = \delta, \end{cases}$$

ce qui donne le système linéaire

$$(S')\quad \begin{cases} c_1U_1(\varphi_1) + c_2U_1(\varphi_2) + U_1(\psi) = \gamma \\ c_1U_2(\varphi_1) + c_2U_2(\varphi_2) + U_2(\psi) = \delta. \end{cases}$$

Le système (S') admet une unique solution si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_1(\varphi_2) \\ U_2(\varphi_1) & U_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Par conséquent, le théorème 1.1.1 assure que le problème homogène admet que la solution triviale. ■

1.2 Fonction de Green

1.2.1 Fonction de Green associée à une E.D.O. du second ordre

Les fonctions de Green ont été introduites par George Green en 1828, ces fonctions interviennent dans la résolution de certaines équations linéaires ainsi que dans la transformation d'équations différentielles non linéaires en équations intégrales.

Dans ce qui suit on considère l'équation différentielle du second ordre (E) associée aux conditions aux bords linéaires non séparées (F).

Définition 1.2.1 *Soit le problème aux limites homogène*

$$\begin{cases} (E_H) & p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad a < x < b \\ (F_H) & \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

On appelle fonction de Green associée au problème (1.2.1) *toute fonction* $G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *G est continue sur $[a, b] \times [a, b]$;*

2. *$\frac{\partial G}{\partial x}$ est continue en tout point $(x, t) \in [a, b] \times [a, b]$ tel que $x \neq t$;*

3. *$\frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) = \frac{1}{p(x)}$ $\forall x \in [a, b]$ où $\frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) = \lim\limits_{t \longrightarrow x^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) = \lim\limits_{t \longrightarrow x^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$;*

4. *$\forall t \in (a, b)$ la fonction $x \mapsto G(x, t)$ vérifie l'équation homogène (E_H) sur chacun des intervalles $[a, t)$ et $(t, b]$;*

5. *$\forall t \in (a, b)$ la fonction $x \mapsto G(x, t)$ vérifie les conditions homogènes (F_H).*

Théorème 1.2.1 *([2], page 122) Supposons que le problème homogène (1.2.1) n'admet pas de solutions non triviales. Alors, il existe une unique fonction G, dite fonction de Green, telle que pour toute fonction f la solution y du problème semi homogène $(E)+(F_H)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :*

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt.$$

Démonstration. Existence, unicité et construction de la fonction G
Soient φ_1, φ_2 deux solutions indépendantes de (E_H). Par définition, la fonction partielle $x \mapsto G(x,t)$ est une solution de l'équation (E_H) dans chacun des intervalles $[a,t[$ et $]t,b]$, il existe donc quatre fonctions dépendantes de la variable t telles que :

$$G(x,t) = \begin{cases} \lambda_1(t)\varphi_1(x) + \lambda_2(t)\varphi_2(x) & si \;\; a \leq x \leq t \\ \mu_1(t)\varphi_1(x) + \mu_2(t)\varphi_2(x) & si \;\; t \leq x \leq b. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Ensuite, les propriétés 1 et 3 donnent le système :

$$\begin{cases} \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t) = \mu_1(t)\varphi_1(t) + \mu_2(t)\varphi_2(t) \\ \mu_1(t)\varphi'(t) + \mu_2(t)\varphi'(t) - \lambda_1(t)\varphi'(t) - \lambda_2(t)\varphi'(t) = \frac{1}{p(t)}. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Posant $v_1(t) = \mu_1(t) - \lambda_1(t)$ et $v_2(t) = \mu_2(t) - \lambda_2(t)$, le système (1.2.3) devient

$$\begin{cases} v_1(t)\varphi_1(t) + v_2(t)\varphi_2(t) = 0 \\ v_1(t)\varphi'(t) + v_2(t)\varphi'(t) = \frac{1}{p(t)}. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Comme $W(\varphi_1,\varphi_2)(x) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$ le système (1.2.4) admet une unique solution $(v_1(t),\ v_2(t))$. En utilisant les relations $\mu_1(t) = \lambda_1(t) + v_1(t)$ et $\mu_2(t) = \lambda_2(t) + v_2(t)$, la fonction de Green G devient *:*

$$G(x,t) = \begin{cases} \lambda_1(t)\varphi_1(x) + \lambda_2(t)\varphi_2(x), & \text{si} \;\; a \leq x \leq t \leq b \\ \lambda_1(t)\varphi_1(x) + \lambda_2(t)\varphi_2(x) + v_1(t)\varphi_1(x) + v_2(t)\varphi_2(x), & \text{si} \;\; a \leq t \leq x \leq b. \end{cases}$$

Ensuite, la propriété 5 nous donne le système

$$\begin{cases} U_1(\varphi_1)\lambda_1(t) + U_1(\varphi_2)\lambda_2(t) = k_1(t) \\ U_2(\varphi_1)\lambda_1(t) + U_2(\varphi_2)\lambda_2(t) = k_2(t), \end{cases} \tag{1.2.5}$$

où

$$\begin{cases} k_1(t) = -v_1(t)[\alpha_3\varphi_1(b) + \alpha_4\varphi'(b)] - v_2(t)[\alpha_3\varphi_2(b) + \alpha_4\varphi'(b)], \\ k_2(t) = -v_1(t)[\beta_3\varphi_1(b) + \beta_4\varphi'(b)] - v_2(t)[\beta_3\varphi_2(b) + \beta_4\varphi'(b)]. \end{cases}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
G(a,t) &= \lambda_1(t)\varphi_1(a) + \lambda_2(t)\varphi_2(a), \quad (a \leq t)\\
\tfrac{\partial G}{\partial x}(a,t) &= \lambda_1(t)\varphi'(a) + \lambda_2(t)\varphi'(a),\\
G(b,t) &= \lambda_1(t)\varphi_1(b) + \lambda_2(t)\varphi_2(b) + v_1(t)\varphi_1(b) + v_2(t)\varphi_2(b), \ (t \leq b)\\
\tfrac{\partial G}{\partial x}(b,t) &= \lambda_1(t)\varphi'(b) + \lambda_2(t)\varphi'(b) + v_1(t)\varphi'(b) + v_2(t)\varphi'(b).
\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto G(x,t)$ vérifie les conditions aux bords (F_H) pour tout $t \in [a,b]$, alors

$$\alpha_1 G(a,t) + \alpha_2 \tfrac{\partial G}{\partial x}(a,t) + \alpha_3 G(b,t) + \alpha_4 \tfrac{\partial G}{\partial x}(b,t) = 0,$$

ce qui donne l'équation

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t)[\alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi'(a) + \alpha_3\varphi_1(b) + \alpha_4\varphi'(b)] + \lambda_2(t)[\alpha_1\varphi_2(a) + \alpha_2\varphi'(a) +\\
&\alpha_3\varphi_2(b) + \alpha_4\varphi'(b)] + \nu_1(t)[\alpha_3\varphi_1(b) + \alpha_4\varphi'(b)] + v_2(t)[\alpha_3\varphi_2(b) + \alpha_4\varphi'(b)] = 0,
\end{aligned}$$

ce qui est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t)[\alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi'(a) + \alpha_3\varphi_1(b) + \alpha_4\varphi'(b)] + \lambda_2(t)[\alpha_1\varphi_2(a) + \alpha_2\varphi'(a) +\\
&\alpha_3\varphi_2(b) + \alpha_4\varphi'(b)]\\
&= -v_1(t)[\alpha_3\varphi_1(b) + \alpha_4\varphi'(b)] - v_2(t)[\alpha_3\varphi_2(b) + \alpha_4\varphi'(b)] = k_1(t).
\end{aligned}$$

De même on aura

$$\beta_1 G(a,t) + \beta_2 \tfrac{\partial G}{\partial x}(a,t) + \beta_3 G(b,t) + \beta_4 \tfrac{\partial G}{\partial x}(b,t) = 0$$

ce qui donne la deuxième équation du système (1.2.5).

Par hypothèse, le problème homogène (1.2.1) n'admet que la solution triviale donc, d'après le théorème 1.1.1, le déterminant du système (1.2.5) est non nul. Ce qui entraîne que ce système admet une unique solution $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$.

Maintenant, pour montrer l'unicité de la fonction de Green, nous supposons que H est une autre fonction vérifiant les conditions (1)-(5), puis pour tout $t \in [a,b]$ et toute fonction continue f, on aura

$$\int_a^b G(x,t)f(t)dt = \int_a^b H(x,t)f(t)dt,$$

alors

$$\int_a^b [G(x,t) - H(x,t)]f(t)dt = \int_a^b G(x,t)f(t)dt - \int_a^b H(x,t)f(t)dt = 0$$

Pour x fixé, posons $f(t) = G(x,t) - H(x,t)$, on obtient $\int_a^b [G(x,t) - H(x,t)]^2 dt = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Ce qui entraîne que $G(x,t) = H(x,t)$ pour tout $(x,\ t) \in [a,b] \times [a,b]$.

Existence et unicité de la solution

La fonction y définie par :

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt = \int_a^x G(x,t)f(t)dt + \int_x^b G(x,t)f(t)dt$$

est solution du problème $(E) + (F_H)$. En effet, d'après la dérivabilité de G par rapport à x dans chacun des intervalles $(a,x]$, $[x,b)$ et la formule de dérivation d'une intégrale (voir l'annexe) on obtient

$$\begin{aligned} y'(x) &= G(x,x)f(x) + \int_a^x \tfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)f(t)dt - G(x,x)f(x) + \int_x^b \tfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)f(t)dt \\ &= \int_a^b \tfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Soit (z,z) un point de la diagonale du carré $[a,b] \times [a,b]$. Par hypothèse $\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue en (x,t) dans les deux triangles $a \leqslant t \leqslant x \leqslant b$ et $a \leqslant x \leqslant t \leqslant b$.

Par conséquent, les deux limites suivantes sont égales :

$$\lim_{\substack{x \to z \\ z < x}} \frac{\partial G}{\partial x}(x,z) = \frac{\partial G}{\partial x}(z^+,z) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \to z \\ y < z}} \frac{\partial G}{\partial y}(y,z) = \frac{\partial G}{\partial y}(z,z^-)$$

Calculons y''

$$\begin{aligned} y''(x) &= \int_a^x \tfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)f(t)dt + f(x)\tfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) + \int_x^b \tfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)f(t)dt - f(x)\tfrac{\partial G}{\partial\, x}(x,x^+) \\ &= \int_a^b \tfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)f(t)dt + f(x)[\tfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) - \tfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^+)]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) = \tfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^-), \\ &\tfrac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) = \tfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^+), \\ &\tfrac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) - \tfrac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) = \tfrac{1}{p(x)}, \end{aligned}$$

on en déduit l'expression

$$y''(x) = \frac{f(x)}{p(x)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)f(t)dt.$$

Par suite, la propriété 4 de G donne

$$\begin{aligned} p(x)y''+q(x)y'+r(x)y(x) &= f(x) + \left(\tfrac{1}{p(x)}\int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + q(x)\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x} + r(x)\int_a^b G(x,t)\right) f(t)dt \\ &= f(x). \end{aligned}$$

De plus, y vérifie les conditions (F_H) car on a

$$y(a) = \int_a^b G(a,t)f(t)dt \quad \text{et} \quad y(b) = \int_a^b G(b,t)f(t)dt$$
$$y'(a) = \int_a^b \frac{\partial G(a,t)}{\partial x} f(t)dt \quad \text{et} \quad y'(b) = \int_a^b \frac{\partial G(b,t)}{\partial x} f(t)dt,$$

d'où l'existence de la solution y.

L'unicité de la solution y résulte de l'hypothèse sur le problème homogène ainsi que de l'alternative de Fredholm. ■

Exemple 1.2.1 *Considérons le problème aux limites périodique :*

$$(P) \begin{cases} y''(x) + k^2 y(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad k > 0 \\ y(0) = y(a), \\ y'(0) = y'(a), \quad a > 0. \end{cases}$$

Soit $\varphi_1(x) = \cos(kx)$ et $\varphi_2(x) = \sin(kx)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + k^2 y(x) = 0$. Le problème homogène associé au problème (P) n'a que la solution triviale $(y \equiv 0)$ si et seulememt si $\Delta = 4k \sin^2 \dfrac{ka}{2} \neq 0$.

Soit $a \in]0, \frac{2\pi}{k}[$. La fonction de Green G associée au problème (P) s'écrit sous la forme

$$G(x,t) = \begin{cases} \lambda_1(t)\cos(kx) + \lambda_2(t)\sin(kx) & si \quad 0 \leqslant x < t \\ \mu_1(t)\cos(kx) + \mu_2(t)\sin(kx) & si \quad t < x \leqslant a \end{cases}$$

Posons $v_1(t) = \mu_1(t) - \lambda_1(t)$ et $v_2(t) = \mu_2(t) - \lambda_2(t)$. Alors $v_1(t)$ et $v_2(t)$ vérifient le système

$$\begin{cases} \cos(kt)v_1(t) + \sin(kt)v_2(t) = 0, \\ -k\sin(kt)v_1(t) + k\cos(kt)v_2(t) = 1, \end{cases}$$

ce qui donne

$$v_1(t) = -\frac{1}{k}\sin(kt) \quad et \quad v_2(t) = \frac{1}{k}\cos(kt).$$

Ensuite, $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ vérifient le système

$$\begin{cases} (1-\cos(ka))\lambda_1(t) - \sin(ka)\lambda_2(t) = \frac{1}{k}\sin(k(a-t)) \\ \sin(ka)\lambda_1(t) + (1-\cos(ka))\lambda_2(t) = \frac{1}{k}\cos(k(a-t)). \end{cases}$$

Le déterminant de ce système en $(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t))$ est différent de zéro, alors $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ sont bien définies et uniques telles que

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2k\sin\frac{k}{2}}\cos(k(t-\frac{a}{2})) \quad et \quad \lambda_2(t) = \frac{1}{2k\sin\frac{k}{2}}\sin(k(t-\frac{a}{2})).$$

On remplace ces fonctions dans l'expression de la fonction de Green on aura

$$G(x,t) = \frac{1}{2k\sin\frac{k}{2}} \begin{cases} \cos(k(x-t+\frac{a}{2})) & 0 \le x \le t \\ \cos(k(t-x+\frac{a}{2})) & t \le x \le a \end{cases}.$$

Exemple 1.2.2 *Construisons la fonction de Green du problème*

$$(Q) \begin{cases} y'' = 0, \quad a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

On a $y_1(x) = 1$ et $y_2(x) = x$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y'' = 0$. Le problème (Q) n'admet que la solution triviale si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 a + \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_1 b + \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_1(b-a) + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0.$$

La fonction de Green G est donc de la forme

$$G(x,t) = \begin{cases} \lambda_1(t) + \lambda_2(t)x & 0 \le x \le t \\ \mu_1(t) + \mu_2(t)x & t \le x \le a \end{cases}$$

On pose $v_1(t) = \mu_1(t) - \lambda_1(t)$ et $v_2(t) = \mu_2(t) - \lambda_2(t)$, où $v_1(t)$ et $v_2(t)$ vérifient le système

$$\begin{cases} y_1(t)v_1(t) + y_2(t)v_2(t) = 0 \\ y'(t)v_1(t) + y'(t)v_2(t) = 1, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} v_1(t) + tv_2(t) = 0 \\ v_2(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1(t) = -t \\ v_2(t) = 1. \end{cases}$$

Ensuite, $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ vérifient le système

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1(t) + (\alpha_1 a + \alpha_2)\lambda_2(t) = 0, \\ \beta_1\lambda_1(t) + (\beta_1 b + \beta_2)\lambda_2(t) = -\beta_1(b-t) - \beta_2, \end{cases}$$

en résolvant ce système on trouve

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = \frac{1}{\Delta}(\alpha_1 a + \alpha_2)(\beta_1 b - \beta_1 t + \beta_2), \\ \lambda_2(t) = \frac{1}{\Delta}\alpha_1(\beta_1 t - \beta_1 b - \beta_2). \end{cases}$$

D'où

$$G(x,t) = \begin{cases} (\beta_1 b - \beta_1 t + \beta_2)(\alpha_1 a - \alpha_1 x + \alpha_2), & a \le x \le t \le b \\ (\beta_1 b - \beta_1 x + \beta_2)(\alpha_1 a - \alpha_1 t + \alpha_2), & a \le t \le x \le b \end{cases}.$$

1.2.2 Fonction de Green associée à une E.D.O. d'ordre $n \geq 2$

Existence et unicité de la fonction de Green

Considérons le problème aux limites d'ordre n de la forme suivante

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), \quad a < x < b \\ U_i(y) = \gamma_i, \quad i = 1, ..., n, \end{cases} \tag{1.2.6}$$

où

$$L_n y(x) \equiv a_0(x) y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-1}(x) y'(x) + a_n(x) y(x), \quad x \in [a, b],$$

et

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_j^i y^{(j)}(a) + \beta_j^i y^{(j)}(b)), \quad i = 1, ..., n, \tag{1.2.7}$$

avec α_j^i, β_j^i sont des constantes réelles pour $i = 1, ..., n$, $j = 0, ..., n-1$, f et a_k sont des fonctions continues sur $[a, b]$ pour $k = 1, ..., n$, et $a_0(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$.

Corollaire 1.2.1 *Soit $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un système fondamental de solutions de l'équation $L_n y(x) = 0$ (i.e. il forme une base de l'espace vectoriel de solutions). Le problème homogène*

$$\begin{cases} L_n y(x) = 0, \quad a < x < b \\ U_i(y) = 0, \quad i = 1, ..., n. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

a seulement la solution triviale $y \equiv 0$ si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Définition 1.2.2 *Une fonction $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ est appelée fonction de Green du problème* (1.2.8) *si elle satisfait les propriétés suivantes :*

1. *G est définie et continue sur le carré $[a, b] \times [a, b]$.*
2. *$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$ et $\frac{\partial^n G}{\partial x^n}$ existent et elles sont continues sur les triangles $a \leq t < x \leq b$ et $a \leq x < t \leq b$.*
3. *$\forall \ x \in (a, b)$ les limites $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x^+, x)$ et $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x^-, x)$ existent (i.e. les limites quand $(x, t) \mapsto (x, x)$ avec $t > x$ ou $t < x$) de plus*

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^-) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^+) = \frac{1}{a_0(x)}.$$

4. $\forall\ t \in (a,b)$, *la fonction* $x \mapsto G(x,t)$ *est solution de l'équation* $L_n y = 0$, *sur chacun des intervalles* $[a,t)$ *et* $(t,b]$. *C'est à dire*

$$a_0(x)\frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,t) + a_1(x)\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x,t) + ... + a_{n-1}(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t) + a_n(x)G(x,t) = 0.$$

5. $\forall\ t \in (a,b)$, *la fonction* $x \mapsto G(x,t)$ *vérifie les conditions aux bords* $U_i(G(.,t) = 0$, $i = 1, ..., n$, *c'est à dire*

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_j^i \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(a,t) + \beta_j^i \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(b,t)\right) = 0,\ i = 1, ..., n.$$

Théorème 1.2.2 ([6], [8]) *Supposons que le problème homogène* (1.2.8) *a seulement la solution triviale. Alors il existe une unique fonction de Green* G, *associée à* (1.2.8).
De plus, pour toute fonction continue f, *l'unique solution du problème semi-homogène*

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), \quad a < x < b, \\ U_i(y) = 0, \quad i = 1, ..., n \end{cases} \tag{1.2.9}$$

est donnée par

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt.$$

Calcul de la fonction de Green associée à une E.D.O linéaire d'ordre $n \geq 2$ à coefficients constants

Nous présentons maintenant une méthode pour calculer explicitement la fonction de Green, en résolvant un système algébrique linéaire de n équations à n inconnues. Pour déterminer ce système on va utiliser le lemme suivant

Lemme 1.2.1 ([6]) *Soit* r *l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}u^{(i)}(x) = 0,\ a_0 = 1,\ x \in \mathbb{R}_+ \\ u^{(i)}(0) = 0,\ i = 0, \dots, n-2, \\ u^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Alors, l'unique solution du problème de Cauchy non homogène

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}y^{(i)}(x) = f(x), \quad a < x < b \\ y^{(i)}(a) = \lambda_i,\ i = 0, \dots, n-1, \end{cases} \tag{1.2.11}$$

avec $f \in C([a,b])$ *et* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$, *est donnée par :*

$$y(x) = \int_a^b r(x-t)f(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k y_k(x), \tag{1.2.12}$$

où

$$y_k(x) = r^{(n-1-k)}(x-a) + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{n-j} r^{(j-k-1)}(x-a), \quad x \in \mathbb{R}, \ k = 0, ..., n-1. \tag{1.2.13}$$

La fonction de Green associée au problème (1.2.8) est de la forme

$$G(x,t) = \begin{cases} r(x-t) + \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) d_k(t), & \text{si } a \leq t < x \leq b \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k(x) d_k(t), & \text{si } a \leq x < t \leq b, \end{cases} \tag{1.2.14}$$

où les fonctions r et y_k, $k = 0, ..., n-1$ sont définies dans le lemme 1.2.1 et les d_k, $k = 0, ..., n-1$ sont les fonctions continues vérifiant le système linéaire

$$\begin{pmatrix} U_1(y_0) & \cdots & U_1(y_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_0) & \cdots & U_n(y_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(t) \\ \vdots \\ d_{n-1}(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \beta_j^1 r^{(j)}(b-t) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1} \beta_j^n r^{(j)}(b-t) \end{pmatrix}. \tag{1.2.15}$$

Notons que ce système admet une seule solution car le problème homogène (1.2.8) n'admet que la solution triviale $y \equiv 0$.

Exemple 1.2.3 *On considère le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} y'' = f(x), \ \ 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Dans ce problème on a

$$\begin{aligned} & n = 2, \ \ L_2 y(t) = y''(t) \quad (a_1 = 0, \ a_2 = 0), \\ & U_1(y) = y(0) \quad (\alpha_0^1 = 1, \ \alpha_1^1 = 0, \ \beta_0^1 = 0, \ \beta_1^1 = 0), \\ & U_2(y) = y(1) \quad (\alpha_0^2 = 0, \ \alpha_1^2 = 0, \ \beta_0^2 = 1, \ \beta_1^2 = 0). \end{aligned}$$

La fonction de Green associée au problème homogène s'écrit sous la forme

$$G(x,t) = \begin{cases} r(x-t) + y_0(x)d_0(t) + y_1(x)d_1(t), & si \ \ 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ y_0(x)d_0(t) + y_1(x)d_1(t), & si \ \ 0 \leq x < t \leq 1, \end{cases}$$

où r vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} r''(x) = 0, \quad x > 0 \\ r(0) = 0, \ r'(0) = 0. \end{cases}$$

On trouve $y_0(x) = x$, $y_1(x) = 1$ et $r(x) = x$. Par suite, les fonctions continues d_0 et d_1 sont données par le système linéaire

$$\begin{pmatrix} U_1(y_0) & U_1(y_1) \\ U_2(y_0) & U_2(y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix},$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} d_0(t) = 0 \\ d_1(t) = 1 - t. \end{cases}$$

D'où

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t), & si \ \ 0 \le t \le x \le 1 \ ; \\ x(t-1), & si \ \ 0 \le x < t \le 1. \end{cases}$$

Exemple 1.2.4 *Considérons le problème d'ordre 4*

$$\begin{cases} y^{(4)} = 0, \\ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation $y^{(4)} = 0$ est de la forme $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$. Donc

$$\begin{cases} L_4 y(x) = y^{(4)}(x), \ x \in [0,1] \\ U_1(y) = y(0) \\ U_2(y) = y'(0) \\ U_3(y) = y(1) \\ U_4(y) = y'(1) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} y_0(x) = 1 \\ y_1(x) = x \\ y_2(x) = x^2 \\ y_3(x) = x^3 \end{cases}.$$

Nous cherchons la fonction de Green sous la forme

$$G(x,t) = \begin{cases} r(x-t) + \sum_{k=0}^{3} y_k(x) d_k(t), & si \ \ 0 \le t < x \le 1, \\ \sum_{k=0}^{3} y_k(x) d_k(t), & si \ \ 0 \le x \le t \le 1, \end{cases}$$

où $r(x) = \frac{1}{6}x^3$ *est l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = 0, \quad x > 0 \ ; \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0 \ ; \\ u^{(3)}(0) = 1. \end{cases}$$

Il reste à déterminer les fonctions d_k *pour* $k = 0, ..., 3$ *qui vérifient le système linéaire*

$$\begin{pmatrix} U_1(y_0) & U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) \\ U_2(y_0) & U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) \\ U_3(y_0) & U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \\ U_4(y_0) & U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{3} \beta_j^1 r^{(j)}(1-t) \\ \sum_{j=0}^{3} \beta_j^2 r^{(j)}(1-t) \\ \sum_{j=0}^{3} \beta_j^3 r^{(j)}(1-t) \\ \sum_{j=0}^{3} \beta_j^4 r^{(j)}(1-t) \end{pmatrix}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(1-t) \\ r'(1-t) \end{pmatrix}.$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} d_0(t) = 0, \\ d_1(t) = 0, \\ d_2(t) = -\frac{1}{2}(1-t)^3 + \frac{1}{2}(1-t)^2, \\ d_3(t) = \frac{1}{3}(1-t)^3 - \frac{1}{2}(1-t)^2. \end{cases}$$

D'où

$$G(x,t) = \begin{cases} (\dfrac{1}{2}x^3 - x^2 + \dfrac{1}{2}x)t^2 - (\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{6})t^3 & si \ \ 0 \le t \le x \le 1, \\ (\dfrac{1}{2}t^3 - t^2 + \dfrac{1}{2}t)x^2 - (\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{6})x^3 & si \ \ 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

1.3 Problèmes de Sturm-Liouville linéaires

1.3.1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette section à l'étude de l'équation différentielle de Sturm-Liouville

$$(p(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0, \ x \in [a, b].$$

Ici p, q et r sont des fonctions données à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$ avec $r(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$, $y = y(x)$ est une fonction à déterminer et λ est un paramètre à déterminer aussi.

Remarque 1.3.1 *Bien que l'équation de Sturm-Liouville ait une forme spéciale, toute équation différentielle linéaire du second ordre de la forme :*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + (a_2(x) + \lambda)y = 0,$$

où $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$ *et* $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$ *sont des fonctions intégrables sur* $[a, b]$, *peut se mettre sous la forme de Sturm-Liouville si nous définissons*

$$p(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right), \ q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}p(x) \ \text{et} \ r(x) = \frac{1}{a_0(x)}p(x).$$

Définition 1.3.1 *Soient* $p \in C^1([a, b])$ *et* q, $r \in C([a, b])$ *telles que* p, $r > 0$ *sur* $[a, b]$. *Soit* $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ *tels que* ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 \neq 0$ *et* ${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 \neq 0$.
On appelle problème de Sturm-Liouville régulier homogène le problème aux limites

$$(SLH) \quad \begin{cases} (p(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0, \quad a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Les solutions non nulles du problème (SLH) *(si elles existent) sont appelées fonctions propres, et dans ce cas la valeur* λ *pour laquelle de telles solutions existent est la valeur propre correspondante à ces solutions.*

Remarque 1.3.2

1. *La fonction nulle* $y \equiv 0$ *est clairement une solution de tout problème de Sturm-Liouville homogène.*

2. *Le problème* (SLH) *est dit régulier si* $[a,b]$ *est un intervalle borné sur lequel* p, q *et* r *sont bornées et* $p(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$.

3. *Dans les problèmes de Sturm-Liouville, les conditions aux bords font intervenir séparément* a *et* b.

4. *Les notions de valeurs propres et de fonctions propres sont les mêmes que celles de l'algèbre linéaire. Si* $r(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *alors nous pouvons considérer l'opérateur de dérivation linéaire*

$$y \mapsto Ly = \frac{1}{r(x)}\left[(p(x)y')' + q(x)y\right]$$

défini sur un espace vectoriel approprié de fonctions. Dans ce cadre, une fonction propre de (SLH) *et sa valeur propre sont respectivement un vecteur propre de* L *et la valeur propre associée à ce vecteur propre.*

Soit le problème de Sturm-Liouville non homogène

$$(SL)\quad \begin{cases} (p(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = f(x), \quad a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *Soit* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les valeurs propres du problème homogène* (SLH). *Alors*

a) *Si* $\lambda \neq \lambda_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *le problème* (SL) *admet, pour toute fonction continue* f, *une unique solution.*

b) *S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\lambda = \lambda_{n_0}$, *alors le problème* (SL) *admet soit 0 solution, soit une infinité de solutions.*

Démonstration. *Soit* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les valeurs propres du problème homogène* (SLH).

a) *Si* $\lambda \neq \lambda_n$ *alors le problème* (SLH) *n'admet que la solution triviale, d'où le problème de* (SL) *admet pour tout* γ, δ *et* f *une solution unique.*

b) *Si* $\lambda = \lambda_{n_0}$ *alors le problème* (SLH) *admet une solution non triviale, d'où le problème* (SL) *admet soit 0, soit une infinité de solutions.*

■

1.3.2 Fonction de Green associée à un problème de Sturm-Liouville

Soient $p \in C^1([a,b],]0,\infty[)$ et $q,\ f \in C([a,b])$ et les $(\alpha_i,\ \beta_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1,\ 2$ tels que $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ et $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

On considère le problème aux limites de type Sturm-Liouville suivant

$$(H) \quad \begin{cases} (py')' + qy = 0, \quad a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

On note par (NH) le problème non homogène associé au problème (H).

Fonction de Green : problème homogène régulier à solution unique nulle

Soient ϕ_1 et ϕ_2 les solutions respectives des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} (p\phi_1')' + q\phi_1 = 0 \\ \phi_1(a) = \alpha_2 \\ \phi_1'(a) = -\alpha_1, \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} (p\phi_2')' + q\phi_2 = 0 \\ \phi_2(b) = \beta_2 \\ \phi_2'(b) = -\beta_1. \end{cases}$$

Alors $\phi_1 \neq 0$, $\phi_2 \neq 0$ (car $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ et $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$) et $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$, sinon ϕ_1 et ϕ_2 serons deux solution non nulles du problème homogène (H).

La fonction de Green G associée au problème (H) s'écrit sous la forme :

$$G(x,t) = \frac{1}{p(x)W(x)} \begin{cases} \phi_1(x)\phi_2(t), & a \leqslant x \leqslant t \leqslant b, \\ \phi_1(t)\phi_2(x), & a \leqslant t \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Remarquons que le produit pW est constant. En effet,

$$\begin{aligned} &\phi_1 \text{ vérifie } (H) \quad \Rightarrow \quad (p\phi_1')' + q\phi_1 = 0 \qquad (1) \\ &\phi_2 \text{ vérifie } (H) \quad \Rightarrow \quad (p\phi_1')' + q\phi_2 = 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Multiplions (1) par ϕ_2 et (2) par ϕ_1 on obtient

$$\begin{cases} \phi_2(p\phi_1')' + q\phi_2\phi_1 = 0 & (3) \\ \phi_1(p\phi_2')' + q\phi_1\phi_2 = 0. & (4) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (3) - (4) \Rightarrow \phi_2(p\phi_1')' - \phi_1(p\phi_2')' = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \phi_2(p\phi_1')' + p\phi_1'\phi_2' - p\phi_1'\phi_2' - \phi_1(p\phi_2')' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (p\phi_2\phi_1')' - (p\phi_1\phi_2')' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad [p(\phi_2\phi_1' - \phi_1\phi_2')]' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (pW(\phi_1,\phi_2))'(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad pW(\phi_1,\phi_2) = c^{te} \end{aligned}$$

Enfin, on peut montrer facilement que la fonction G vérifie toutes les propriétés de la fonction de Green citées dans la définition 1.2.1.

Exemple 1.3.1 *Considérons le problème de Dirichlet posé sur l'intervalle* $[a,b]$

$$(P) \quad \begin{cases} y''= f(x), \quad a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

Construisons les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 solutions des problèmes de Cauchy :

$$\begin{cases} \phi_1''= 0 \\ \phi_1(a) = 0 \\ \phi'(a) = -1. \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \phi_2''= 0 \\ \phi_2(b) = 0 \\ \phi'(b) = -1. \end{cases}$$

On trouve $\phi_1(x) = a - x$, $\phi_2(x) = b - x$ et $W(\phi_1, \phi_2) = b - a \neq 0$, d'où la fonction de Green

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-a)(t-b)}{b-a}, \quad si \quad a \leqslant x \leqslant t \leqslant b \\ \frac{(t-a)(x-b)}{b-a}, \quad si \quad a \leqslant t \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Le théorème suivant donne la forme de la solution du problème non homogène (NH) en utilisant la fonction de Green.

Théorème 1.3.1 *Supposons que le problème homogène (H) n'admet pas de solutions non triviales et soit G la fonction de Green correspondante. On note par ψ_1 et ψ_2 les solutions uniques des problèmes aux limites (respectivement) :*

$$\begin{cases} p\psi_1' + q\psi_1 = 0 \\ \alpha_1\psi_1(a) + \alpha_2\psi_1'(a) = \gamma, \\ \beta_1\psi_1(b) + \beta_2\psi_1'(b) = 0, \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} p\psi_2' + q\psi_2 = 0 \\ \alpha_1\psi_2(a) + \alpha_2\psi_2'(a) = 0, \\ \beta_1\psi_2(b) + \beta_2\psi_2'(b) = \delta. \end{cases}$$

Alors le problème (NH) admet une unique solution définie par :

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt + \psi_1(x) + \psi_2(x).$$

Exemple 1.3.2 *Soit le problème de Dirichlet*

$$(Q) \quad \begin{cases} y''= f(x), \quad a < x < b \\ y(a) = \gamma,\ y(b) = \delta. \end{cases}$$

La solution de (Q) s'écrit sous la forme

$$y(x) = \tfrac{x-b}{b-a} \int_a^x (t-a)f(t)dt + \tfrac{x-a}{b-a} \int_x^b (t-b)f(t)dt + \gamma\tfrac{x-b}{b-a} + \delta\tfrac{x-a}{b-a},$$

où $\psi_1(x) = \gamma\frac{x-b}{b-a}$ *est la solution du problème*

$$\begin{cases} py' + qy = 0 \\ \psi_1(a) = \gamma \\ \psi_1(b) = 0 \end{cases}$$

et $\psi_2(x) = \delta\frac{x-a}{b-a}$ *est la solution du problème*

$$\begin{cases} py' + qy = 0 \\ \psi_2(a) = 0 \\ \psi_2(b) = \delta. \end{cases}$$

Fonction de Green généralisée : problème homogène régulier à solution non nulle unique

Supposons que le problème homogène (H) admet une solution non triviale φ_0, dans ce cas on parle de la fonction de Green généralisée. Pour fixer φ_0 on suppose que $\int_a^b {\varphi_0}^2(x)dx = 1$.

Définition 1.3.2 *On appelle fonction de Green généralisée associée au problème* (H) *toute fonction vérifiant en plus des propriétés (1), (2), (3) et (5) de la fonction de Green* (*citées dans la définition* 1.2.1) *les deux propriétés suivantes :*

a. $\forall t \in (a, b)$, *la fonction partielle* $x \mapsto G(x, t)$ *vérifie l'équation*
$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = -\varphi_0(x)\varphi_0(t)$ *sur chacun des intervalles* $[a, t[$ *et* $]t, b]$.

b. $\forall t \in (a, b)$, $\int_a^b G(x, t)\varphi_0(t)dt = 0$.

Théorème 1.3.2 *Supposons que le problème* (H) *admet une solution non triviale* φ_0. *Alors, le problème semi homogène*

$$\begin{cases} (py')' + qy = f(x), \quad a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

admet une solution si et seulement si $\int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx = 0$. *Dans ce cas il existe une infinité de solutions de la forme*

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt + k\varphi_0, \ \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

1.3.3 Propriétés des valeurs propres et des fonctions propres

Nous commençons par illustrer les notions de valeurs propres et de fonctions propres par deux problèmes de Sturm-Liouville.

Exemple 1.3.3 *Considérons le problème aux limites de type Dirichlet*

$$(P_1)\begin{cases} (1) \quad y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ (2) \quad y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs et les fonctions propres du problème (P_1) *on procède comme suit :*

1^{er} *cas* $\lambda = 0$ *: la solution générale de l'équation* (1) *est* $y(x) = c_1 x + c_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$. *En tenant compte des conditions aux bords on trouve* $y \equiv 0$. *Comme la seule solution du problème* (P_1) *est la solution nulle alors* $\lambda = 0$ *n'est pas valeur propre.*

$2^{ème}$ *cas* $\lambda < 0$ *: la solution générale de l'équation* (1) *est*

$$y(x) = c_1 \exp(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}x),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, les conditions aux bords (2) *donnent*

$$\begin{cases} c_1 = -c_2, \\ c_2 \left(\exp(-\sqrt{-\lambda}\pi) - \exp(\sqrt{-\lambda}\pi)\right) = 0. \end{cases}$$

Le problème (P_1) *admet donc que la solution nulle* $y \equiv 0$. *D'où* $\lambda < 0$ *n'est pas une valeur propre de ce problème.*

$3^{ème}$ *cas* $\lambda > 0$ *: la solution générale de l'équation* (1) *est*

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

D'après les conditions (2), *on aura* $c_1 = 0$ *et* $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. *Donc le problème* (P_1) *admet des solutions non nulles ssi* $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, *ce qui est vraie si* $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

D'où, les valeurs propres de (P_1) *sont* $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et les fonctions propres correspondantes sont définies par*

$$y_n(x) = k \sin(nx),\ k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.3.4 *Soit le problème de conditions mixtes suivant*

$$(P_2)\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0, \ \ 0<x<1 & (1)\\ y(0)=0, \\ y(1)+y'(1)=0. \end{cases}$$

1^{er} *cas* $\lambda=0$ *: la solution générale de l'équation* (1) *est* $y(x)=c_1x+c_2,\ c_1,\ c_2\in\mathbb{R}$, *en tenant compte des conditions aux bords on trouve* $y\equiv 0$. *Donc* $\lambda=0$ *n'est pas valeur propre du problème* (P_2).

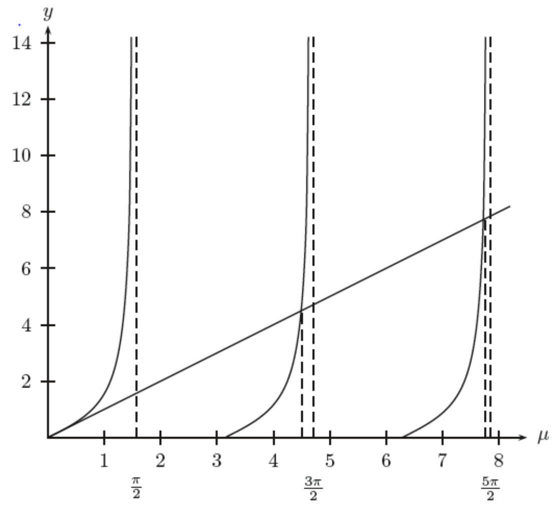
$2^{ème}$ *cas* $\lambda>0$ *: la solution générale de l'équation* (1) *est*

$$y(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}x),\ c_1,\ c_2\in\mathbb{R}.$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$\begin{cases} c_1=0\\ c_2(\sin\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda})=0, \end{cases}$$

Dans ce cas, on obtient le problème (P_2) *admet des solutions non nulles ssi* $\sin\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$. *Donc pour* $\lambda>0$ *toute solution de l'équation* $-\sqrt{\lambda}=\tan\sqrt{\lambda}$ *est une valeur propre du problème* (P_2), *les fonctions propres associées sont définies par* $y(x)=k\sin(\sqrt{\lambda}x),\ k\in\mathbb{R}$. *Les solutions de l'équation* $\mu=\tan\mu$ *sont représentés par le graphe suivant*



$3^{ème}$ *cas* $\lambda<0$ *: la solution générale de l'équation* (1) *est*

$$y(x)=c_1\exp(\sqrt{-\lambda}x)+c_2\exp(-\sqrt{-\lambda}x),\ c_1,\ c_2\in\mathbb{R}.$$

D'après les conditions aux limites on aura

$$\begin{cases} c_1=-c_2\\ c_1\left[\exp(\sqrt{-\lambda})-\exp(-\sqrt{-\lambda})+\sqrt{-\lambda}\exp(\sqrt{-\lambda})+\exp(-\sqrt{-\lambda})\right]=0 \end{cases}$$

Par suite, les valeurs propres du problème (P_2) *sont les solutions de l'équation :*

$$-\sqrt{-\lambda} = \tanh(\sqrt{-\lambda}),$$

les fonctions propres associées sont définies par $y(x) = k\sinh(\sqrt{-\lambda})$, $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.3.3 *D'après le premier exemple, il est clair que le problème* (P_1) *admet une infinité de valeurs propres réels* λ_n, $n \in \mathbb{N}$, *qui forment une suite croissante* $\lambda_1 < \lambda_2 < ...\lambda_n$ *telle que* $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$. *De plus, chaque valeur propre* λ_n *a une famille de fonctions propres correspondantes qui ont exactement* $n-1$ *racines dans l'intervalle ouvert* $]0,\pi[$ *et ces fonctions sont orthogonales.*

Théorème 1.3.3 ([*1*], *page* 271)

i) *Le problème* (SLH) *admet une infinité de valeurs propres qui forment une suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et tendant vers* $(+\infty)$.

ii) *Une fonction propre* y_n *associée à une valeur propre* λ_n *admet exactement* $(n-1)$ *racines dans l'intervalle* $]a,b[$; *de plus les racines de* y_n *séparent celles de* y_{n+1}.

Théorème 1.3.4 ([*1*], *page* 270) *Les valeurs propres d'un problème de Sturm-Liouville sont réelles.*

Démonstration. Soit $Ly = (py')' + qy$ l'opérateur de dérivation de Sturm-Liouville. On pose $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, une valeur propre complexe et $y = \mu(x) + i\nu(x)$ la fonction propre correspondante au problème (SLH). On a

$$\begin{aligned}
(p(x)y')' + q(x)y' + \lambda r(x)y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (p(x)(\mu+i\nu)')' + q(x)(\mu+i\nu) + \lambda r(x)(\mu+i\nu) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (p(x)\mu')' + q(x)\mu + i[(p(x)\nu')' + q(x)\nu] + r(x)(\alpha\mu - \beta\nu) \\
&\qquad +i[r(x)(\alpha\nu + \beta\mu)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad L\mu + r(x)(\alpha\mu - \beta\nu) + i[L\nu + r(x)(\alpha\nu + \beta\mu)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} L\mu + r(x)(\alpha\mu - \beta\nu) = 0 \\ L\nu + r(x)(\alpha\nu + \beta\mu) = 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Les conditions aux bords donnent

$$\begin{aligned}
\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_1(\mu+i\nu)(a) + \alpha_2(\mu+i\nu)'(a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha_1\mu(a) + \alpha_2\mu'(a) + i[\alpha_1\nu(a) + \alpha_2\nu'(a)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1\mu(a) + \alpha_2\mu'(a) = 0 \\ \alpha_1\nu(a) + \alpha_2\nu'(a) = 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

De même on trouve

$$\begin{cases} \beta_1\mu(a) + \beta_2\mu'(a) = 0 \\ \beta_1\nu(a) + \beta_2\nu'(a) = 0 \end{cases}.$$

Donc d'une part, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b (\nu(x)L\mu - \mu(x)L\nu)dx &= \int_a^b [-\nu(x)r(x)(\alpha\mu(x) - \beta\nu(x)) + \mu(x)r(x)(\alpha\nu(x) + \beta\mu(x))]dx \\ &= \beta \int_a^b (\mu^2(x) + \nu^2(x))r(x)dx \end{aligned}$$

et d'autre part, en intégrant par partie, on aura

$$\begin{aligned} \int_a^b (\nu(x)L\mu - \mu(x)L\nu)dx &= p(x)(\nu\mu' - \mu\nu')\big|_a^b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite, comme l'intégrale $\int_a^b (\mu^2(x) + \nu^2(x))r(x)dx$ ne peut pas s'annuler alors $\beta = 0$. On conclut donc que λ est réelle. ■

Théorème 1.3.5 **i)** *Toute valeur propre du problème (SLH) est simple (simple signifie que si λ est une valeur propre, alors l'espace vectoriel des fonctions propres associées à λ est de dimension 1).*

ii) *Deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distinctes sont orthogonales dans $L_r^2(]a,b[)$ où $L_r^2(]a,b[) = \left\{ f \text{ mesurable sur }]a,b[\ : \int_a^b r(x)f^2(x)dx < \infty \right\}$.*

Démonstration.

i) Soit λ une valeur propre du problème (SLH). Montrons que λ est simple, pour cela soient φ_1 et φ_2 deux fonctions propres associées à la même valeur propre λ. Montrons que le Wronskien des fonctions φ_1 et φ_2 est nul. Le Wronskien de φ_1 et φ_2 en a et b, respectivement, est

$$\begin{aligned} W(\varphi_1, \varphi_2)(a) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) \\ \varphi_1'(a) & \varphi_2'(a) \end{vmatrix} = \varphi_1(a)\varphi_2'(a) - \varphi_2(a)\varphi_1'(a) = 0, \\ W(\varphi_1, \varphi_2)(b) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(b) & \varphi_2(b) \\ \varphi_1'(b) & \varphi_2'(b) \end{vmatrix} = \varphi_1(b)\varphi_2'(b) - \varphi_2(b)\varphi_1'(b) = 0. \end{aligned}$$

D'après les théorèmes 2.2.5, 2.2.4 (voir l'annexe) les fonctions φ_1 et φ_2 sont linéairement dépendantes.

ii) Soit $Ly = (py')' + qy$ l'opérateur de dérivation.

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions propres associées à λ_1 et λ_2 respectivement ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

On a

$$\begin{cases} L\phi_1 = -\lambda_1 r\phi_1 \\ L\phi_2 = -\lambda_2 r\phi_2 \end{cases} \Longrightarrow \phi_2 L\phi_1 - \phi_1 L\phi_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) r\phi_1\phi_2.$$

En intégrant par parties, le premier membre de la dernière égalité, de a à b on obtient

$$\int_a^b (\phi_2 L\phi_1 - \phi_1 L\phi_2)(x)dx = p[\phi_2\phi_1' - \phi_1\phi_2']_a^b = 0.$$

D'où $\int_a^b r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0$, c'est à dire ϕ_1 et ϕ_2 sont orthogonales dans $L_r^2(]a, b[)$.

■

Le théorème suivant donne une borne inférieure de la première valeur propre d'un problème de Sturm-Liouville.

Maintenant nous donnons quelques exemples de problèmes de Sturm-Liouville singuliers qui montrent que les propriétés de valeurs propres et de fonctions propres, pour les problèmes réguliers, ne tiennent pas toujours.

Exemple 1.3.5 *Soit le problème singulier suivant*

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ 0 < x < \infty, \\ y(0) = 0,\ |y(x)| \leq M < \infty. \end{cases}$$

Tout $\lambda \in]0, +\infty[$ *est une valeur propre et les fonctions propres associées sont définies par* $y(x) = k\sin(\sqrt{\lambda}x),\ k \in \mathbb{R}$.

En comparant avec le problème régulier les valeurs propres sont toujoursdiscrétes par contre le problème singulier peut avoir un spectre continue.

Exemple 1.3.6 *Soit le problème à conditions aux bords périodiques*

$$(P_3)\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ 0 < x < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

Les valeurs propres de ce problème sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{n+1} = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. *La valeur propre* $\lambda_1 = 0$ *est simple (ses fonctions propres associées sont* $y \equiv k$, $k \in \mathbb{R}$*). Toute valeur propre* $\lambda_{n+1} = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ *n'est pas simple car les deux fonctions linéairement indépendantes*

$\sin(\sqrt{\lambda}x)$ *et* $\cos(\sqrt{\lambda}x)$ *sont des fonctions propres associées à cette valeur propre.*
On conclut qu'un problème de Sturm-Liouville singulier peut avoir des valeurs propres non simples, ce qui n'est pas le cas pour les problèmes de Sturm-Liouville réguliers.

Nous présentons dans ce qui suit un résultat de comparaison des valeurs propres de deux problèmes de Sturm-Liouville. La démonstration de ce résultat repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1.3.1 ***(Théorème de comparaison pour les E.D.O du premier ordre)***
Soit J *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, lipschitzienne par rapport à la seconde variable ou vérifiant seulement une condition de Lipschitz unilatérale suivante*

$$\exists\ k > 0 \text{ tel que } f(x,y) - f(x,z) \leq k\,|y-z|\,, \quad \forall (y,z) \in J^2. \tag{1.3.2}$$

Soient y *et* z *deux fonctions de classe* $C^1[a,b]$ *vérifiant respectivement*

$$\begin{cases} y' \leq f(x,y), & x_0 < x < b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z' = f(x,z), & x_0 < x < b \\ z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

si $y_0 < z_0$ *alors* $y(x) < z(x)$, $\forall x \in [x_0, b]$.
De plus on a l'implication

$$y_0 \leq z_0 \;\Rightarrow (y(x) < z(x) \text{ ou } y \equiv z,\ \forall x \in [x_0, b]).$$

Lemme 1.3.2 ***(Théorème de changement d'inconnus de Prüfer)***
Considérons le problème de Sturm-Liouville homogène suivant

$$(SLH) \begin{cases} (p(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0, & a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Soit le changement d'inconnues,

$$\begin{cases} y &= \rho \sin\theta \\ z &= py' = \rho\cos\theta. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Alors le problème (SLH) *équivaut au système du premier ordre :*

$$(S) \begin{cases} \theta' &= \frac{1}{p}\cos^2(\theta) + (q + \lambda r)\sin^2(\theta) \\ \rho' &= \frac{\rho}{2}\sin(2\theta)(\frac{1}{p} - q - \lambda r), \end{cases} \tag{1.3.4}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \alpha_1 \sin(\theta(a)) + \frac{\alpha_2}{p(a)} \cos(\theta(a)) = 0, \\ \beta_1 + \sin(\theta(b)) + \frac{\beta_2}{p(b)} \cos(\theta(b)) = 0. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Démonstration. Du changement d'inconnues (1.3.3), on a $\theta = \arctan(\frac{y}{py'})$, en dérivant cette dernière égalité on trouve

$$\begin{array}{rcl} \theta' & = & \frac{(py')}{(py')^2+y^2} y' - \frac{y(py')'}{(py')^2+y^2} \\ & = & \frac{\rho \cos\theta}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta} y' - \frac{\rho \sin\theta(-(q+\lambda r)\rho \sin\theta)}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta} \\ & = & \frac{\cos\theta}{\rho}(\rho \frac{\cos\theta}{p}) + \frac{\rho^2 \sin^2\theta(q+\lambda r)}{\rho^2} \\ & = & \frac{1}{p} \cos^2(\theta) + (q+\lambda r) \sin^2(\theta). \end{array}$$

On a $\rho^2 = y^2 + z^2$, ce qui donne après dérivation $\rho\rho' = yy' + zz'$. D'où

$$\begin{array}{rcl} \rho' & = & \frac{1}{\rho} yy' + \frac{1}{\rho} zz' \\ & = & \frac{1}{\rho}\rho \sin\theta \frac{\rho\cos\theta}{p} + \frac{1}{\rho}\rho\cos\theta(-q-\lambda r)\rho \sin\theta \\ & = & \frac{\rho}{2} 2\cos(\theta)\sin(\theta)(\frac{1}{p} - q - \lambda r) \\ & = & \frac{\rho}{2} \sin(2\theta)(\frac{1}{p} - q - \lambda r). \end{array}$$

Les conditions aux bords se vérifient facilement. ■

Théorème 1.3.6 ***(Théorème de comparaison des valeurs propres)***
Considérons les deux problèmes de Sturm Liouville homogènes

$$(SL)_1 \begin{cases} (p_1 y')' + (q_1 + \lambda) y_1 = 0, \ a < x < b \\ \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1(b) = 0. \end{cases} \quad et \ (SL)_2 \begin{cases} (p_2 y')' + (q_2 + \mu) y_2 = 0, \ a < x < b \\ \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2(b) = 0. \end{cases}$$

On note par $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des valeurs propres des deux problèmes $(SL)_1$ et $(SL)_2$, respectivement. Supposons que les fonctions p_i et q_i sont continues, $p_i > 0$ pour $i = 1, 2$ et que $p_1 > p_2$ et $q_1 < q_2$ sur (a, b). Alors $\lambda_n > \mu_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. En utilisant le changement de Pruffer, d'après le lemme 1.3.2, on aura

$$\begin{cases} \theta_1' = \frac{1}{p_1} \cos^2(\theta_1) + (q_1 + \lambda) \sin^2(\theta_1) \\ \theta_2' = \frac{1}{p_2} \cos^2(\theta_2) + (q_2 + \mu) \sin^2(\theta_2) \end{cases}$$

ainsi que les conditions initiales

$$\begin{cases} \theta_1(a) = \theta_2(a) = \theta_a = \arctan(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1 p(a)}), \ 0 \le \theta_a < \frac{\pi}{2} \\ \theta_1(b, \lambda) = \theta_2(b, \mu) = \theta_b + (n-1)\pi \text{ où } \theta_b = \arctan(-\frac{\beta_2}{\beta_1 p(b)}), \ 0 \le \theta_b < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que $\mu \geq \lambda$, alors

$$\theta_2' = \frac{1}{p_2}\cos^2\theta_2 + (q_2 + \mu)\sin^2\theta_2 \geq \frac{1}{p_1}\cos^2\theta_2 + (q_2 + \lambda)\sin^2\theta_2.$$

Comme la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{p(x)}\cos^2 y + (q(x) + \lambda)\sin^2 y$ est lipschitzienne par rapport à y, le théorème de comparaison sur les E.D.O.du premier ordre (lemme 1.3.1) fournit l'estimation $\theta_1(x, \lambda) < \theta_2(x, \lambda) \quad \forall x \in]a, b]$ donc $\theta_1(b, \lambda) < \theta_2(b, \lambda)$ et par suite $\theta_1(b, \mu) < \theta_2(b, \lambda)$. Comme l'application $\lambda \mapsto \theta_2(b, \lambda)$ est strictement croissante, en on déduit que $\mu < \lambda$. Ce qui contredit l'hypothèse. ■

CHAPITRE 2

Problèmes de Sturm-Liouville non linéaires

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques résultats de l'existence et de l'unicité de solutions de certain problèmes aux limites non linéaires de type Sturm-Liouville. La théorie du point fixe est utilisée pour établir ces résultats.

2.1 Problèmes de Sturm-Liouville non linéaires sur les intervalles bornés

Soit l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|$.

Nous nous interéssons dans cette section à l'étude d'existence et d'unicité de solutions du problème aux limites de type Dirichlet posé sur un intervalle borné suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad a < x < b \\ y(a) = \gamma \\ y(b) = \delta, \end{cases}$$

où f est de classe $C([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

D'après le chapitre précédent, on sait que y est une solution du problème linéaire $y'' = f(x)$, $y(a) = y(b) = 0$ si et seulement si $y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt$. Cette représentation nous servira aussi à écrire les solutions du problème non linéaire (P) sous la forme :

$$y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t, y(t), y'(t))dt + \psi(x), \tag{2.1.1}$$

où $G(x,t)$ est la fonction de Green, associée à l'opérateur $Ly = y''$ avec les conditions aux bords $y(a) = y(b) = 0$, définie par

$$\begin{array}{rrcl} G: & [a,b]\times[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & G(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-a)(t-b)}{b-a}, & a \le x \le t \le b \\ \frac{(t-a)(x-b)}{b-a}, & a \le t \le x \le b \end{cases} \end{array}$$

et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est la solution du problème semi homogène

$$\begin{cases} y''(x) = 0, \quad a < x < b \\ y(a) = \gamma, \\ y(b) = \delta. \end{cases}$$

Le lemme suivant nous donne quelques proppriétés de la fonction de Green G.

Lemme 2.1.1 *La fonction G vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(x,t) \le 0$, $\forall x \in [a,b]$.

2. $\int_a^b |G(x,t)|dt \le \frac{(b-a)^2}{8}$, $\forall x \in [a,b]$.

3. $\int_a^b |\frac{\partial}{\partial x} G(x,t)|dt \le \frac{(b-a)}{2}$, $\forall x \in [a,b]$.

Démonstration

1. Il est facile de remarquer que la fonction de Green associée à (P) est négative sur l'intervalle $[a,b]$.

2.

$$\begin{aligned} \int_a^b |G(x,t)|\,dt &= -\int_a^b G(x,t)dt \\ &= -\tfrac{1}{b-a}(\int_a^x (t-a)(x-b)dt + \int_x^b (x-a)(t-b)dt) \\ &= -\tfrac{1}{b-a}\left((x-b)\int_a^x (t-a)dt + (x-a)\int_x^b (t-b)dt\right) \\ &= -\tfrac{(x-b)(x-a)^2}{2(b-a)} + \tfrac{(x-a)(x-b)^2}{2(b-a)} \\ &= -\tfrac{1}{2(b-a)}(x-b)(x-a)(b-a) \\ &= -\tfrac{1}{2}(x-b)(x-a). \end{aligned}$$

Posons $g(x) = -\frac{1}{2}(x-b)(x-a)$. Cette fonction atteint son maximum au point $\frac{a+b}{2}$.

Donc

$$\max_{x\in[a,b]} g(x) = g(\frac{a+b}{2}) = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

D'où $\int_a^b |G(x,t)|\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{8}$, $\forall x \in [a,b]$.

3. Pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{(t-b)}{b-a}, & a \leq x \leq t \leq b \\ \frac{(t-a)}{b-a}, & a \leq t \leq x \leq b. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \left|\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right| dt &= t\int_a^x \frac{(t-a)}{b-a}dt + \int_x^b \frac{(t-b)}{b-a}dt \\ &= \frac{1}{2(b-a)}((x-a)^2 - (x-b)^2). \end{aligned}$$

Posons $h(x) = \frac{1}{2(b-a)}((x-a)^2 - (x-b)^2)$. La fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$, donc elle atteint son maximum au point b.

Par suite, $\int_a^b \left|\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right| dt \leq h(b) = \frac{(b-a)}{2}$.

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité des solutions du problème (P).

Théorème 2.1.1 ([5], page 5) *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et lipshitzienne par rapport aux deux dernières variables, i.e. $\exists\ K,\ L > 0$, $\forall (x,y_1,z_1)$, $(x,y_2,z_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \|f(x,y_1,z_1) - f(x,y_2,z_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\| + L\|z_1 - z_2\|$. Alors si $K\frac{(b-a)^2}{8} + L\frac{(b-a)}{2} < 1$, le problème (P) admet une unique solution.*

Démonstration. Par le théorème de contraction de Banach (voir l'annexe**).**
Soit l'espace $X = C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ muni de la norme :

$$\|y\|_X = \max_{x\in[a,b]} (K\|y(x)\| + L\|y'(x)\|),\ \forall y \in X.$$

Cette norme est équivalente à la norme : $\|y\|_1 = \max_{x\in[a,b]}(\|y(x)\| + \|y'(x)\|)$. En effet,

$$\min_{x\in[a,b]}(K,L)\|y\|_1 \leq \|y\|_X \leq \max_{x\in[a,b]}(K,L)\|y\|_1.$$

Considérons maintenant l'opérateur :

$$\begin{aligned} T:\ & X \to X \\ & y \mapsto Ty(x) = \int_a^b G(x,t)f(t,y(t),y'(t))dt + \psi(x). \end{aligned}$$

T est bien défini car la fonction G est unique et f est continue bornée.

Montrons que T est contractant. Pour cela montrons que :

$$\exists\ \alpha \in [0,1[,\ \forall\ y_1,\ y_2 \in X : \|Ty_1 - Ty_2\|_X \leq \alpha \|y_1 - y_2\|_X .$$

Pour tout $x \in [a,b]$ et y_1, $y_2 \in X$, on a

$$\begin{aligned}
\|Ty_1(x) - Ty_2(x)\| &= \left\| \int_a^b G(x,t)(f(t,y_1(t),y_1'(t)) - f(t,y_2(t),y_2'(t)))dt \right\| \\
&\leq \int_a^b |G(x,t)| \left\| f(t,y_1(t),y_1'(t)) - f(t,y_2(t),y_2'(t) \right\| dt \\
&\leq \int_a^b |G(x,t)| \left(K \|y_1(t) - y_2(t)\| + L \|y_1'(t) - y_2'(t)\|\right)dt \\
&\leq \max_{t\in[a,b]}(K \|y_1(t) - y_2(t)\| + L \|y_1'(t) - y_2'(t)\|) \int_a^b |G(x,t)|\, dt \\
&\leq \|y_1 - y_2\|_X \int_a^b |G(x,t)|\, dt \\
&\leq \tfrac{(b-a)^2}{8} \|y_1 - y_2\|_X .
\end{aligned}$$

De même, on montre

$$\begin{aligned}
\|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\| &\leq \int_a^b \left|\tfrac{\partial}{\partial x} G(x,t)\right| \left\| f(t,y_1(t),y_1'(t)) - f(t,y_2(t),y_2'(t) \right\| dt \\
&\leq \tfrac{(b-a)}{2} \|y_1 - y_2\|_X .
\end{aligned}$$

Par suite, on trouve

$$K \|Ty_1(x) - Ty_2(x)\| + L \|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\| \leq (K\frac{(b-a)^2}{8} + L\frac{(b-a)}{2}) \|y_1 - y_2\|_X .$$

Par conséquent,

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_X \leq \alpha \|y_1 - y_2\|_X \text{ où } \alpha = K\frac{(b-a)^2}{8} + L\frac{(b-a)}{2}.$$

D'où T est contractant, donc il admet un unique point fixe $y \in C^1([a,b])$ qui est solution du problème (P). Comme f est continue alors $y \in C^2([a,b])$. ■

Remarque 2.1.1 *Il suffit d'étudier le problème (P) pour des conditions aux bords homogène $\gamma = \delta = 0$. En effet, la fonction $\psi(x) = \frac{b\gamma - a\delta + (\delta-\gamma)x}{b-a}$ est solution du problème $h''(x) = 0$; $h(a) = \gamma$, $h(b) = \delta$.*

De plus, si y est solution du problème

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y,y'), \quad a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

alors la fonction $z = y + h$ est solution du problème

$$\begin{cases} z''(x) = f(x,z,z'), \quad a < x < b \\ z(a) = z(b) = 0, \end{cases}$$

où $f(x,z,z') = f(x,z-h,z'-h')$ est une fonction possèdant les mêmes constantes de Lipschitz que la fonction f elle-même.

Le résultat du théorème 2.1.2. n'est pas optimal. En fait, le théorème qui suit montre qu'il est possible de l'améliorer. Ce théorème discute l'existence et l'unicité des solutions du problème (P) pour $\gamma = \delta = 0$.

Théorème 2.1.2 *([5], page 7) Soit $f : [a,b] \times B_{\mathbb{R}^n}(0,N) \times B_{\mathbb{R}^n}(0, \frac{4N}{b-a}) \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et lipshitzienne par rapport aux deux dernières variables, i.e.*
$\exists\ K,\ L > 0,\ \forall (x, y_1, z_1),\ (x, y_2, z_2) \in [a,b] \times B_{\mathbb{R}^n}(0,N) \times B_{\mathbb{R}^n}(0, \frac{4N}{b-a})$:

$$\|f(x,y_1,z_1) - f(x,y_2,z_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\| + L\|z_1 - z_2\|,$$

où la constante N vérifie la condition

$$M\frac{(b-a)^2}{8} \leq N,\ \textit{avec}\ M = \max\|f(x,y,z)\|\ \textit{pour}\ x \in [a,b],\ \ \|y\| \leq N,\ \ \|z\| \leq \frac{4N}{b-a}.$$

Alors si $K\frac{(b-a)^2}{8} + L\frac{(b-a)}{2} < 1$, pour $\gamma = \delta = 0$ le problème (P) admet une unique solution.

Démonstration. (Par le théorème de contraction de Banach).
Soit $X = C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ un espace de Banach muni de la norme :

$$\|y\|_X = \max\left(\max_{a\leq x\leq b}\|y(x)\|,\ \frac{(b-a)}{4}\max_{a\leq x\leq b}\|y'(x)\|\right).$$

On considère, dans X, la boule fermée de rayon N

$$B = \{y \in X \text{ tel que } \|y\|_X \leq N\}.$$

On définit l'opérateur T comme suit

$$\begin{array}{rcl} T\ :\ X & \to & X \\ y & \mapsto & Ty(x) = \int_a^b G(x,t) f(t, y(t), y'(t))dt. \end{array}$$

Montrons que T envoi B dans lui-même.
Soit $y \in B$ i.e. $\|y\|_X \leq N$ ($\|y(x)\| \leq N$ et $\|y'(x)\| \leq \frac{4N}{b-a}\ \forall x \in [a,b]$), montrons que $\|Ty\|_X \leq N$. Comme f est bornée par M, alors pour tout $x \in [a,b]$, on a les estimations suivantes

$$\begin{array}{rcl} \|Ty(x)\| & \leq & \int_a^b |G(x,t)|\,\|f(t,y(t),y'(t))\|\,dt \\ & \leq & M\frac{(b-a)^2}{8} \\ & \leq & N, \end{array}$$

et

$$\begin{aligned}
\|(Ty)'(x)\| &\leq \textstyle\int_a^b |G(x,t)| \, \|f(t,y(t),y'(t))\| \, dt \\
&\leq M\tfrac{(b-a)}{2} \\
&\leq \tfrac{4N}{b-a}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|Ty\|_X = \max\left(\max_{a\leq x\leq b} \|Ty(x)\| \, , \; \frac{(b-a)}{4} \max_{a\leq x\leq b} \|(Ty)'(x)\| \right) \leq N.$$

Donc $Ty \in B$, d'où T envoi B dans B.

Maintenant, montrons que T est contractant. Soit y_1, $y_2 \in B$. Comme f est lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
\|Ty_1(x) - Ty_2(x)\| &\leq \textstyle\int_a^b |G(x,t)| \, \|f(t,y_1(t),y_1'(t)) - f(t,y_2(t),y_2'(t)\| \, dt \\
&\leq \textstyle\int_a^b |G(x,t)| \, (K \|y_1(t) - y_2(t)\| + L \|y_1(t) - y_2'(t)\|)dt \\
&\leq \textstyle\int_a^b |G(x,t)| \, (K \max\limits_{t\in[a,b]} \|y_1(t) - y_2(t)\| + L \max\limits_{t\in[a,b]} \|y_1'(t) - y_2'(t)\|)dt \\
&\leq \textstyle\int_a^b |G(x,t)| \, (K \|y_1 - y_2\|_X \, , \tfrac{4}{b-a} L \|y_1 - y_2\|_X)dt \\
&\leq (K + \tfrac{4}{b-a}L) \|y_1 - y_2\|_X \textstyle\int_a^b |G(x,t)| \, dt \\
&\leq \left(\tfrac{(b-a)^2}{8} K + \tfrac{b-a}{2} L \right) \|y_1 - y_2\|_X
\end{aligned}$$

De même on montre que

$$\|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\| \leq \frac{(b-a)}{2}(K + L\frac{4}{b-a}) \|y_1 - y_2\|_X \, , \; \forall x \in [a,b].$$

Par conséquent,

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_X \leq \left(\frac{(b-a)^2}{8} K + L\frac{b-a}{2} \right) \|y_1 - y_2\|_X \, .$$

Puisque $\frac{(b-a)^2}{8}K + L\frac{b-a}{2} < 1$ on conclut que T est contractant.

Par suite, le théorème du point fixe de Banach entraîne que T admet un point fixe $y \in B$, solution du problème (P) pour $\gamma = \delta = 0$. ∎

Les deux résultats qui suivent montrent que dans les théorèmes précèdents, l'hypothèse, f lipschitzienne, est redondante tel qu'ils nous permettent de récupérer l'existence de solutions du problème (P) sous des hypothèses plus faibles.

Théorème 2.1.3 *([5], page 9) Soit $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une fonction bornée i.e. $\exists M > 0$ tel que*

$\|f(x,y,z)\| \leq M \; \forall \; (x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Alors le problème (P) admet au moins

une solution $y \in C^2([a,b])$. *De plus on a les estimations suivantes sur la solution* y *et sa dérivée :*

$$\|y(x)\| \leq M\frac{(b-a)^2}{8} + N,\ \forall x \in [a,b]$$

$$\|y'(x)\| \leq M\frac{(b-a)}{2} + N',\ \forall x \in [a,b]\,.$$

où $N = \max_{x\in[a,b]} \|\psi(x)\|$, $N' = \max_{x\in[a,b]} \|\psi'(x)\|$, *la fonction* ψ *est définie dans la formule (2.1.1).*

Démonstration. Par le théorème du point fixe de Schauder (voire l'annexe) Soit $X = C^1([a,b]\,, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|y\|_X = \max(\max_{x\in[a,b]} \|y(x)\|\,, \frac{b-a}{4} \max_{x\in[a,b]} \|y'(x)\|).$$

C'est une norme équivalente à la norme $\|y\|_\infty$; X est donc un espace de Banach pour cette norme aussi. On définit maintenant, l'opérateur T par :

$$\begin{array}{rccl} T: & X & \rightarrow & X \\ & y & \longmapsto & Ty(x) = \int_a^b G(x,t)f(t,y(t),y'(t))dt + \psi(x). \end{array}$$

T est bien défini car la fonction G est définie de manière unique et f est continue et bornée. On considère, dans X, la boule fermée

$$B = \left\{ y \in X,\ \|y\|_X \leq M\frac{(b-a)^2}{8} + \max(N, \frac{b-a}{4}N') \right\}.$$

Montrons que T envoi B dans B. Soit $y \in B$, Comme f est bornée par M, pour tout $x \in [a,b]$ on a les estimations suivantes

$$\|Ty(x)\| \leq M\frac{(b-a)^2}{8} + N \text{ et } \|Ty'(x)\| \leq M\frac{(b-a)}{2} + N',$$

ce qui donne

$$\|Ty\|_X = \max(\max_{x\in[a,b]} \|Ty(x)\|\,,\ \frac{b-a}{4} \max_{x\in[a,b]} \|Ty'(x)\|) \leq M\frac{(b-a)^2}{8} + \max(N, \frac{b-a}{4}N').$$

Donc $Ty \in B$, d'où T envoi B dans B (en fait T envoi tout l'espace X dans B).
T est continu sur X. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergente vers une limite $y \in X$ et montrons que $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ty qaund $n \to +\infty$ dans X. On a

$$Ty_n(x) = \int_a^b G(x,t)f(t,y_n(t),y_n'(t))dt + \psi(x),\ \forall x \in [a,b]\,.$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(t, y_n(t), y_n'(t)) \to f(t, y(t), y'(t)), \ \forall t \in [a,b] \quad quand\ n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}\|Ty_n(x)\| &\leq \int_a^b |G(x,t)| \, \|f(t, y_n(t), y_n'(t))\| \, dt + \|\psi(x)\| \\ &\leq M\frac{(b-a)^2}{8} + N < \infty.\end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir Annexe),

$$\|Ty_n - Ty\|_X \to 0 \ quand\ n \to +\infty.$$

Alors $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ty, ceci montre la continuité de T dans X.

T est borné sur X. En effet, soit $y \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, alors

$$\|Ty_n(x)\| \leq M\frac{(b-a)^2}{8} + N < \infty, \ \forall x \in [a,b].$$

et

$$\|(Ty_n)'(x)\| \leq M\frac{(b-a)}{2} + N' < \infty, \ \forall x \in [a,b].$$

T est compact. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de X. T étant borné, donc $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi dans X. Alors la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a,b])$ et même dans $C^2([a,b])$, car $(Ty_n)''(x) = f(x, y_n, y_n')$ et f est continue.

D'après le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla (voir l'annexe), la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans $C^1([a,b])$, d'où la compacité de l'application T.

Par conséquent, le théorème du point fixe de Schauder entraîne que T admet au moins un point fixe $y \in B$. Donc le problème (P) admet au moins une solution $y \in C^2[a,b]$ vérifiant

$$\|y(x)\| \leq M\frac{(b-a)^2}{8} + N, \ \forall x \in [a,b]$$

$$\|y'(x)\| \leq M\frac{(b-a)}{2} + N', \forall x \in [a,b].$$

■

Le théorème qui suit montre qu'on peut afaiblir la condition de bornitude sur f, dans le théorème précédent, en considérant f bornée uniquement sur les bornés.

Théorème 2.1.4 ([5], *page* 8) *Soient M et N deux nombres réels strictement positifs tels que $\forall x \in [a,b]$,*

$$\min_{a\leq x\leq b}\left(\left(\frac{8M}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{2N}{q}\right) \geq b-a, \quad \max_{x\in[a,b]} \|\psi\| \leq M \ \ et \ \ \max_{x\in[a,b]} \|\psi'\| \leq N.$$

Supposons que $f \in C([a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ et vérifie

$$\|f(x,y,z)\| \leq q \text{ pour tout } x\in[a,b], \|y\| \leq 2M \text{ et } \|z\| \leq 2N.$$

Alors le problème (P) admet au moins une solution $y \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$.
De plus, pour tout $x \in [a,b]$ cette solution vérifie les estimations suivantes :

a) $\|y(x)-\psi(x)\| \leq \frac{(b-a)^2}{8}q, \ \forall x\in[a,b].$

b) $\|y'(x)-\psi'(x)\| \leq \frac{(b-a)}{2}q, \ \forall x\in[a,b].$

Pour montrer ce théorème on va appliquer le théorème du point fixe de Schauder.

Démonstration. Soint $X = C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ un espace de Banach, muni de la norme

$$\|y\|_X = \max_{a\leq x\leq b}\|y\| + \max_{a\leq x\leq b}\|y'\|.$$

On considère, dans X, l'ensemble $\mathcal{A}$ qui est fermé, borné et convexe

$$\mathcal{A} = \{y\in X \text{ tel que } \|y(x)\| \leq 2M, \ \ \|y'(x)\| \leq 2N \ \ \forall x\in[a,b]\}.$$

Soit maintenant l'opérateur T défini par

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ X & \to & X \\ y & \mapsto & Ty(x) = \int_a^b G(x,t)f(t,y(t),y'(t))dt + \psi(x). \end{array}$$

Montrons que T envoi $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$. Soit $y\in\mathcal{A}$, en tenant compte de la bornitude de f on aura, pour tout $x\in[a,b]$, les estimations

$$\begin{array}{rcl} \|Ty(x)\| & \leq & \int_a^b |G(x,t)| \, \|f(x,y(t),y'(t))\| \, dt + \|\psi(x)\| \\ & \leq & q\frac{(b-a)^2}{8} + M \\ & \leq & q\frac{\left(\frac{8M}{q}\right)}{8} + M \\ & \leq & 2M, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \|(Ty)'(x)\| & \leq & \|f(t,y(t),y'(t))\| \, \frac{(b-a)}{2} + \|\psi'(x)\| \\ & \leq & q\frac{(b-a)}{2} + N \\ & \leq & q\frac{\left(\frac{2N}{q}\right)}{2} + N \\ & \leq & 2N. \end{array}$$

D'où $Ty \in \mathcal{A}$, ce qui entraîne que T envoi l'ensemble $\mathcal{A}$ dans lui-même.

Montrons maintenant que l'opérateur T est continu sur X.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$ convergente vers une limite $y \in X$ et montrons que $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ty lorsque $n \to +\infty$ dans X. On a

$$Ty_n(x) = \int_a^b G(x,t)f(t, y_n(t), y_n'(t))dt + \psi(x),\ \forall x \in [a,b]\,.$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(t, y_n(t), y_n'(t)) \to f(t, y(t), y'(t)),\ \forall t \in [a,b]\ \ quand\ n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} \|Ty_n(x)\| &\leq \int_a^b |G(x,t)|\, \|f(t, y_n(t), y_n'(t))\|\, dt + \|\psi(x)\| \\ &\leq q\tfrac{(b-a)^2}{8} + M < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir l'annexe), alors

$$\|Ty_n - Ty\| \to 0\ quand\ n \to +\infty.$$

L'opérateur T est borné sur $\mathcal{A}$. En effet, soit $y \in \mathcal{A}$, alors

$$\|Ty_n(x)\| \leq q\frac{(b-a)^2}{8} + M < \infty,\ \forall x \in [a,b]\,,$$

et

$$\|(Ty_n)'(x)\| \leq q\frac{(b-a)}{2} + N < \infty,\ \forall x \in [a,b]\,.$$

T est compact. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de X. T étant borné, donc $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi dans X. Alors la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a,b])$ et même dans $C^2([a,b])$, car $(Ty_n)''(x) = f(x, y_n(x), y_n'(x))$ et f est continue. Ensuite, le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla entraîne que la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans $C^1([a,b])$, d'où la compacité de l'application T.

Par conséquent, le théorème du point fixe de Schauder assure que T admet un point fixe $y \in \mathcal{A}$. Donc le problème (P) admet au moins une solution $y \in C^2[a,b]$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \|y(x) - \psi(x)\| &\leq \frac{(b-a)^2}{8}q,\ \forall x \in [a,b], \\ \|y'(x) - \psi'(x)\| &\leq \frac{(b-a)}{2}q,\ \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

■

Nous terminons cette section par présenter un théorème d'existence de solutions bornées d'un problème aux limites associé à des conditions, plus générales, de type linéaire séparés.

Théorème 2.1.5 ([5], *page* 11) *Soit* $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *une fonction bornée telle que* $\exists M > 0,\ |f(x,y,z)| \leq M \quad \forall (x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$. *Alors le problème*

$$(Q) \quad \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad a < x < b \\ \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

où $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \neq 0$ *et* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \beta_1 \geq 0,\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 0$ *admet au moins une solution* $y \in C^2([a,b])$.

La démonstration de ce théorème se base sur le théorème du point fixe de Schauder.

Démonstration. Soit $X = C^1([a,b], \mathbb{R})$ un espace de Banach, muni de la norme

$$\|y\|_X = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)| .$$

Considérons l'ensemble fermé borné, convexe

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in X \text{ tel que } |y(x)|_X \leq NM + L,\ |y'(x)|_X \leq N_1 M + L_1,\ \forall x \in [a,b] \right\},$$

où $N = (b-a) \max\limits_{x,t \in [a,b]} |G(x,t)|$, $N_1 = (b-a) \max\limits_{x,t \in [a,b]} \left|\frac{\partial}{\partial x} G(x,t)\right|$, $L = \max\limits_{x \in [a,b]} |\psi(x)|$ et $L_1 = \max\limits_{x \in [a,b]} |\psi'(x)|$ et l'opérateur

$$\begin{array}{rccl} T : & X & \to & X \\ & y & \mapsto & Ty(x) = \int_a^b G(x,t) f(t, y(t), y'(t)) dt + \psi(x), \end{array}$$

où G est la fonction de Green associée au problème (Q), définie par

$$\begin{array}{rccl} G: & [a,b] \times [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & G(x,t) = \frac{1}{W(\varphi_1, \varphi_2)(x)} \begin{cases} \varphi_1(t)\varphi_2(x), & a \leq x \leq t \leq b \\ \varphi_1(x)\varphi_2(t), & a \leq t \leq x \leq b \end{cases} \end{array}$$

où φ_1 et φ_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y'' = 0$ vérifiant les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} \phi_1'' = 0 \\ \phi_1(a) = -\alpha_2 \\ \phi_1'(a) = -\alpha_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_2'' = 0 \\ \phi_2(b) = \beta_2 \\ \phi_2'(b) = -\beta_1. \end{cases}$$

En utilisant les hypothèses, $\forall x \in [a,b]$ on aura

$$|Ty(x)| \leq MN + L,$$
$$|(Ty)'(x)| \leq MN_1 + L_1.$$

Par suite, on en déduit que T envoi $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$.
Comme dans la démonstration du théorème précédent, on montre que T est continu et envoi les bornés de X dans des relativement bornés.
Par conséquent, le théorème de Schauder assure l'existence d'une solution $y \in C^1([a,b])$ du problème (Q) ensuite la continuité de f donne $y \in C^2[a,b]$. ■

2.2 Problèmes de Sturm-Liouville non linéaires sur les intervalles non bornés

Dans ce qui suit, on considère le problème de Sturm-Liouville posé sur la demie droite positive suivant

$$(P) \quad \begin{cases} (p(x)y'(x))' + \lambda r(x) f(x, y(x)) = 0, \quad 0 < x < +\infty \\ \alpha_1 y(0) - \beta_1 \lim\limits_{x \to 0^+} p(x)y'(x) = 0, \\ \alpha_2 \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) + \beta_2 \lim\limits_{x \to +\infty} p(x)y'(x) = 0, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre, $f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ et $r : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ sont des fonctions continues, $p \in C([0,+\infty[) \cap C^1(]0,+\infty[)$, $p > 0$ sur $[0,+\infty[$ et $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{p(s)} ds < +\infty$,

$\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$, $i = 1, 2$ avec $\rho = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{p(s)} ds > 0$.

Pour $x \in [0,+\infty[$, posons

$$\phi_1(x) = \beta_1 + \alpha_1 \int\limits_0^x \frac{1}{p(s)} ds,$$
$$\phi_2(x) = \beta_2 + \alpha_2 \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{p(s)} ds.$$

Remarquons que $\alpha_2\phi_1(x) + \alpha_1\phi_2(x) = \rho$.

Afin de montrer l'existence de solutions positives du problème (P), on va utiliser un théorème du point fixe sur les cônes positifs. Pour celà on a besoin du lemme suivant, qui permet de transformer le problème (P) en une équation intégrale équivalente.

Lemme 2.2.1 *Supposons* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{p(s)} ds < +\infty$ *et* $\rho > 0$*. Alors pour tout* $v \in L^1(0,+\infty)$*, le problème linèaire*

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' = v(x), \quad 0 < x < +\infty \\ \alpha_1 y(0) - \beta_1 \lim\limits_{x\to 0^+} p(x)y'(x) = 0, \\ \alpha_2 \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) + \beta_2 \lim\limits_{x\to+\infty} p(x)y'(x) = 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

admet une unique solution qui s'écrit sous la forme

$$y(x) = \int_0^{+\infty} G(x,s)v(s)ds.$$

où la fonction G *est définie par*

$$G(x,s) = \frac{1}{\rho}\begin{cases} \phi_1(x)\phi_2(s) & si\ 0 \le x \le s < +\infty, \\ \phi_1(s)\phi_2(x) & si\ 0 \le s \le x < +\infty. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Démonstration. En intégrant deux fois l'équation du problème (2.2.1) sur l'intervalle $[0,t]$ $(t > 0)$, nous obtenons

$$y(t) = y(0) + p(0)y'0) \int_0^t \frac{1}{p(s)} ds - \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left(\int_0^s v(\tau)d\tau \right) ds.$$

En suite, en intégrant par parties, nous aurons

$$y(t) = A + B\int_0^t \frac{1}{p(s)} ds + \int_0^t \left(\int_0^s \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right) v(s)ds - \int_0^t \frac{1}{p(\tau)} d\tau \int_0^t v(\tau)d\tau, \tag{2.2.3}$$

où A et B sont deux constantes à déterminer. Dérivons (2.2.3), on obtient

$$y'(t) = \frac{1}{p(t)} \left(B - \int_0^t v(s)ds \right). \tag{2.2.4}$$

De (2.2.3), (2.2.4) et les conditions aux bords on trouve les valeurs

$$\begin{cases} A &= \frac{\beta\gamma}{\rho} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{p(\tau)} d\tau - \int_0^s \frac{1}{p(\tau)} d\tau + \frac{\delta}{\gamma} \right) v(s)ds, \\ \\ B &= \frac{\alpha\gamma}{\rho} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{p(\tau)} d\tau - \int_0^s \frac{1}{p(\tau)} d\tau + \frac{\delta}{\gamma} \right) v(s)ds. \end{cases}$$

Par substitution dans (2.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} y(t) \ = \ & \left(\frac{\beta\gamma}{\rho} + \frac{\alpha\gamma}{\rho} \int_0^t \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{p(\tau)} d\tau - \int_0^s \frac{1}{p(\tau)} d\tau + \frac{\delta}{\gamma} \right) v(s)ds \\ & - \int_0^t \left(\int_0^t \frac{1}{p(\tau)} d\tau - \int_0^s \frac{1}{p(\tau)} d\tau \right) v(s)ds, \end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{\gamma}{\rho}\phi_1(t)\int_t^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty}\tfrac{1}{p(\tau)}d\tau+\tfrac{\delta}{\gamma}\right)v(s)ds \\ &\quad+\int_0^t\left[\left(\tfrac{\beta\gamma}{\rho}+\tfrac{\alpha\gamma}{\rho}\int_0^t\tfrac{1}{p(\tau)}d\tau-1\right)\left(\int_0^t\tfrac{1}{p(\tau)}d\tau-\int_0^s\tfrac{1}{p(\tau)}d\tau\right)\right. \\ &\quad\left.\times\left(\tfrac{\beta\gamma}{\rho}+\tfrac{\alpha\gamma}{\rho}\int_0^t\tfrac{1}{p(\tau)}d\tau\right)\left(\int_t^{+\infty}\tfrac{1}{p(\tau)}d\tau+\tfrac{\delta}{\gamma}\right)\right]v(s)ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{1}{\rho}\int_0^t\phi_1(s)\phi_2(t)\,v(s)ds+\tfrac{1}{\rho}\int_t^{+\infty}\phi_1(t)\phi_2(s)v(s)ds \\ &= \int_0^{+\infty}G(t,s)\,v(s)ds. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.1 *D'après (2.2.2) nous pouvons montrer que la fonction G vérifie les propriétés suivantes :*

1. *G est continue sur* $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$;
2. $\frac{\partial G}{\partial x}$ *est continue en tout point* $(x,s)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ *tel que* $x\neq s$ *;*
3. $\frac{\partial G}{\partial x}(s^+,s)-\frac{\partial G}{\partial x}(s^-,s)=-\frac{1}{p(s)}$ *pour tout* $s\in[0,+\infty[$ *;*
4. *Pour tout $s\in[0,+\infty[$ la fonction $x\mapsto G(x,s)$ vérifie le problème homogène correspondant au problème (2.2.1) ($v(t)\equiv 0$) sauf en $x=s$.*

Dans la proposition suivante nous donnons quelques propriétés de la fonction de Green qui vont nous servir par la suite.

Proposition 2.2.1 *De la définition de G, on aura les propriétés suivantes :*

1. *La fonction de Green G est positive sur* $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
2. $G(x,s)\leq G(s,s)$, $\forall x\in[0,+\infty[$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x,s)=\overline{G}(s)=\frac{1}{\rho}\beta_2\phi_1(s)<+\infty$.
4. *Soit $r\in L^1([0,+\infty[)$.* Posons $\omega(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}G(x,s)r(s)ds$, alors ω est l'unique solution du problème (2.2.1) pour $v\equiv r$.

Définition 2.2.1 *Soit X un espace de Banach. Un operateur $T : X \to X$ est dit complétement continu s'il est continu et envoi les ensembles bornés de X dans des ensembles relativement compacts.*

Définition 2.2.2 *Soient X un espace de Banach réel et K un sous ensemble non vide fermé convexe de X. K est dit cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

(i) $x \in K,\ \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$ *;*

(ii) $x \in K,\ -x \in K \Rightarrow x = \theta$, *avec θ est le zéro de X.*

Soit maintenant, le théorème du point fixe sur les cônes suivant

Théorème 2.2.1 *([7], page 22) Soit K un cone d'un espace de Banach X, $\Omega \subset K$ un ensemble ouvert, borné. $\theta \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to K$ un opérateur complétement continu. Supposons*

$$Ty \neq \lambda y,\ \forall y \in \partial\Omega,\ \lambda \geq 1.$$

Alors T admet au moins un point fixe positif dans Ω.

Considérons l'espace de Banach

$$X = \left\{ y \in C([0, +\infty[) : \lim_{x \to +\infty} y(x) \text{ existe} \right\},$$

muni de la norme sup définie par $\|y\| = \sup_{x \in [0,+\infty[} |y(x)|$.

Dans ce qui suit on va utiliser le théorème du point fixe précédent pour montrer l'existence d'une solution positive du problème (P). Comme le critère de compacité d'Ascoli Arzéla ne suffit pas pour caractériser les ensembles relativement compacts de l'espace X, on va employer le critère de Corduneanu. Un critère de compacité qui exige en plus de la bornitude unifome et l'équicontinuité de l'ensemble, l'équiconvergence de cet ensemble.

Lemme 2.2.2 ***(Critère de compacité de Corduneanu)*** *[3] .*
Soit $M \subset X$, alors M est relativement compact sur X si les conditions suivantes sont vérifiées

a) *M est uniformément borné dans X,*

b) *Les fonctions de M sont équicontinues sur tout compact de $[0, +\infty[$,*

c) *Les fonctions de M sont équiconvergentes, i.e. pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, T = T(\epsilon) > 0$ tel que $|f(x) - f(+\infty)| < \epsilon$ pour tout $x > T$, et $f \in M$.*

Dans ce qui suit, nous présentons un résultat d'existence d'une solution positive du problème (P)

Théorème 2.2.2 *[9] Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

(H_1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} r(s)ds < +\infty$ *et* $\displaystyle\|\omega\| = \sup_{0 \le x < +\infty} \int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)ds < +\infty.$

(H_2) *Pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x, y)$ est bornée si y est borné.*

Alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \le \lambda_0$, le problème (P) admet au moins une solution positive y.

Démonstration. On considère dans l'espace de Banach X le cône

$$K = \{y \in X : y(x) \ge 0,\ x \in [0, +\infty[\}.$$

Soit R un réel positif tel que $\lambda_0 = \frac{R}{\|\omega\| S_R}$, où

$$S_R := \sup\{\ f(x, y) : 0 \le x \le +\infty,\ 0 \le y \le R\ \}.$$

Considérons l'ensemble ouvert

$$\Omega = \{y \in K : \|y\| < R\}.$$

On définit l'opérateur T comme suit

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ \overline{\Omega} & \to & X \\ y & \mapsto & Ty(x) = \lambda \int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)f(s, y(s))ds. \end{array}$$

Du lemme 2.2.1 il est clair que tout point fixe de l'opérateur T est une solution du problème (P). De la condition (H_2) du théorème 2.2.2, on aura

$$S_R := \sup\{\ f(x,y) : 0 \leq x \leq +\infty,\ 0 \leq y \leq R\ \} < +\infty.$$

Montrons tout d'abord que l'opérateur T est bien défini.

Soit $y \in \overline{\Omega}$, alors $\|y\| \leq R$ (i.e $0 \leq y(x) \leq R\ \forall x \in [0, +\infty[$). D'après la condition (H_1) du théorème 2.2.2, pour tout x_1, $x_2 \in [0, +\infty[$ on a

$$\int_0^{+\infty} |G(x_1,s) - G(x_2,s)|\, r(s)ds \leq 2 \sup_{0\leq x<+\infty} \int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)ds < +\infty.$$

Par suite, la continuité de G et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue entraînent

$$\begin{aligned} |Ty(x_1) - Ty(x_2)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} |G(x_1,s) - G(x_2,s)|\, r(s)f(s,y(s))ds \\ &\leq \lambda S_R \int_0^{+\infty} |G(x_1,s) - G(x_2,s)|\, r(s)ds \\ &\longrightarrow 0, \text{ quand } x_1 \longrightarrow x_2. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

D'où $Ty \in C([0, +\infty[)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} Ty(x) &= \lim_{x\to+\infty} \lambda \int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)f(s,y(s))ds \\ &\leq \lambda S_R \int_0^{+\infty} \overline{G}(s)r(s)ds < +\infty. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que T est continu. Pour celà, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K qui converge vers y quand $n \longrightarrow +\infty$ et montrons que $Ty_n \to Ty$ quand $n \longrightarrow +\infty$. On a

$$\int_0^{+\infty} \overline{G}(s)r(s)\, |f(s,y_n(s) - f(s,y(s))|\, ds \leq 2S_\rho \int_0^{+\infty} \overline{G}(s)r(s) < +\infty,$$

où $\rho > 0$ est un nombre réel tel que $\rho \geq \max\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \{\|y\|, \|y_n\|\}$. Alors

$$\begin{aligned} |Ty_n(+\infty) - Ty(+\infty)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} \overline{G}(s)r(s)\, |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\, ds \\ &\leq \lambda \int_0^{+\infty} \overline{G}(s)r(s)\, |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|\, ds \\ &\longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Pour tout $x \in [0, T_0]$ où T_0 est un nombre positive $< +\infty$, on aura

$$\begin{aligned} |Ty_n(x) - Ty(x)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)\,|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|\,ds \\ &\longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

De (2.2.6) et (2.2.7) on obtient que T est continu.

Finalement, montrons que T envoi les ensembles bornés de X dans des ensembles relativement compacts. Soit B un borné de X, il existe donc $\rho_1 > 0$ tel que pour tout $y \in B$ on a $\|y\| \leq \rho_1$ et

$$\begin{aligned} |Ty(x)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)\,|f(s, y(s))|\,ds \\ &\leq S_{\rho_1} \int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)ds < +\infty. \end{aligned}$$

D'où $T(B)$ est uniformement borné. D'une manière analogue que (2.2.5), on peut montrer que $T(B)$ est équicontinu sur chaque sous intervalle compact de $[0, +\infty[$.

Il reste à montrer que $T(B)$ est equiconvergent. En fait, pour tout $y \in B$ et $x \in [0, +\infty[$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne

$$\begin{aligned} |Ty(x) - Ty(+\infty)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} \left|G(x,s) - \overline{G}(s)\right| r(s)\,|f(s, y_n(s)|\,ds \\ &\leq \lambda S_\rho \int_0^{+\infty} \left|G(x,s) - \overline{G}(s)\right| r(s)ds \\ &\longrightarrow 0, \text{ quand } x \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Par suite, le lemme 2.2.2 affirme que T est complétement continu.

Maintenant, montrons que $Ty \neq \lambda y$, $\forall y \in \partial\Omega$, $\lambda \geq 1$.

On raisonne par l'absurde, Supposons qu'il existe $y_0 \in \partial\Omega$ et $\lambda_0 \geq 1$ tel que $Ty_0 = \lambda_0 y_0$.

On a $y_0 \in \partial\Omega$ i.e. $\|y_0\| = R$, ce qui implique $0 \leq y_0(s) \leq R$ $\forall s \in [0, +\infty[$.

Par suite, de la condition (H_2) pour tout $x \in [0, +\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned} |Ty_0(x)| &= \lambda \textstyle\int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)f(s, y(s))ds \\ &\leq \lambda S_R \textstyle\int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)ds \\ &\leq \lambda S_R \sup_{x \in [0,+\infty[} \textstyle\int_0^{+\infty} G(x,s)r(s)ds \\ &= \lambda \|\omega\| S_R \\ &< R. \end{aligned}$$

Par conséquent, le passage au supremum, donne $\|Ty_0\| < \|y_0\|$. Ce qui contredit l'hypothèse $Ty_0 = \lambda_0 y_0$. En fait, $Ty_0 = \lambda_0 y_0$ et $\lambda_0 \geq 1$ entraînent $\|Ty_0\| \geq \|y_0\|$. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux équations différentielles ordinaires du second ordre associées à des conditions aux limites. Nous avons exposés plusieurs méthodes du calcul de la fonction de Green. Une fonction qui sert à résoudre certains problèmes mathématiques, elle intervient par exemple dans la formulation intégrale des problèmes aux limites ; ce qui permet d'utiliser la théorie du point fixe pour étudier de tels problèmes.

Annexe

Quelques résultats sur les E.D.O. linéaires du second ordre

Soit l'équation différentielle du second ordre à coefficient variable suivante :

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \; x \in [a,b], \tag{2.2.9}$$

où $p(x) > 0$, $q(x)$ et $r(x)$ sont continues sur $[a,b]$.

Théorème 2.2.3 ([*1*], *page* 35) *Il existent exactement deux solutions y_1 et y_2 de l'équation* (2.2.9) *qui sont linéairement indépendantes sur $[a,b]$, i.e. il n'existe pas une constante c tel que $y_1(x) = cy_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$.*

Théorème 2.2.4 ([*1*], *page* 35) *Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation (2.2.9). Alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $[a,b]$ si et seulement si leurs Wronskien défini par*

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro pour tout $x \in [a,b]$.

Théorème 2.2.5 ([*1*], *page* 35) ***(l'identité d'Abel ou formule d'ostrogradsky-Liouville)*** *Pour tout $x \in [a,b]$, on a*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{p(t)} dt \right), \; x_0 \in [a,b].$$

Par conséquent, si le Wronskien s'annule en un point x_0 de $[a,b]$ alors il s'annule sur tout l'intervalle $[a,b]$.

Théorème 2.2.6 ([*1*], *page* 35) *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation* (2.2.9), *c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires alors $c_1y_1+c_2y_2$ est aussi solution de l'équation* (2.2.9). *De plus si y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes alors toute solution y de* (2.2.9) *peut s'écrire sous la forme*

$$y(x)=k_1y_1(x)+k_2y_2(x),\ x\in[a,b]\ \textit{et } k_1,\ k_2\ \textit{sont des constantes.}$$

Remarque 2.2.2 *Si on connait une solution y_1 de l'équation* (2.2.9) *alors on peut déterminer une solution y_2 telles que, y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, en utilisant la méthode de la variation de la constante. On obtient une solution de la forme*

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x\frac{1}{{y_1}^2(x)}\exp\left(-\int^t\frac{q(s)}{p(s)}ds)\right)dt. \tag{2.2.10}$$

Exemple 2.2.1 *Soit l'équation*

$$x^2y''-2xy'+2y=0,\ x\in\mathbb{R}^*.$$

Il est facile de vérifier que $y_1(x)=x^2$ est une solution de l'équation donnée et d'après la formule (2.2.10) *sa deuxième solution est*

$$y_2(x)=x^2\int_a^x\frac{1}{t^4}\exp\left(-\int_a^t\frac{(-2s)}{s^2}ds)\right)dt=\frac{x^2}{a^2}\int_a^x\frac{1}{t^4}t^2dt=-\frac{1}{a^2}x+\frac{x^2}{a^3},\ a>0.$$

Remarque 2.2.3 *Considérons l'équation*

$$p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=f(x),\ x\in[a,b]. \tag{2.2.11}$$

Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.2.9). *En utilisant de variation des constantes on trouve que la fonction y_p définie par*

$$y_p(x)=\int^x H(x,t)\frac{f(t)}{p(t)}dt$$

où

$$H(x,t)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}$$

est une solution particulière de l'équation (2.2.11), *donc la solution de cette dernière est*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_g(x)+y_p(x)\\ &= c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\textstyle\int^x H(x,t)\frac{f(t)}{p(t)}dt. \end{aligned}$$

Formule de dérivation d'une intégrale

Si u, v et f des fonctions dérivables, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = v'(x)f(x,x) - u'(x)f(x,x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt.$$

Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Théorème 2.2.7 *Soit X un espace métrique compact, Y un espace de Banach et $H \subset C(X,Y)$ un sous-espace muni de la norme sup. Alors H est relativement compact si et seulement si :*

1. *H est uniformément borné, i.e.*
   $\forall x \in X$*, l'ensemble* $\{f(x) : f \in H\}$ *est borné dans* Y.

2. *H est équicontinu, i.e.*
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ V \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in X\ ;\ y \in V \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y \leq \varepsilon,\ \forall f \in H.$

Dans le cas où $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, on a le théorème suivant.

Théorème 2.2.8 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ une suite vérifiant :*

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément borné, i.e.* $\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\ : \|f_n\| \leq c.$

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équicontinue, i.e.* $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \delta(\varepsilon), \forall x,y \in [a,b]$:
   $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. (i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est relativement compacte).

Corollaire 2.2.1 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $C^{k+1}([a,b],\mathbb{R}^n)$, i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f')_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $C([a,b],\mathbb{R}^n)$, indépendamment de n, alors elle admet une sous-suite convergente dans $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$.*

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 2.2.9 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions appartenant à* $L^1(\Omega)$ *avec* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *On suppose que :*

1. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p sur* Ω *;*

2. *Il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p sur* Ω.

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 2.2.10 *[10] Soit* C *un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach* E. *Supposons que* $f : C \to C$ *une application continue et compacte. Alors* f *admet un point fixe dans* C.

Théorème de contraction de Banach

Théorème 2.2.11 *[4] (**Principe de contraction de Banach, 1992**) Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une application contractante. Alors* f *admet un unique point fixe* $y \in X$.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal et D. O'Regan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations, Springer, 2000.*

[2] R. P. Agarwal et D. O'Regan, *Ordinary and Partiel Differential Equations*. Universitext, Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[3] R. P. Agarwal et D. O'Regan*, Infinite Interval Problems For Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001.

[4] R. P. Agarwal et M. Meehan et D. O'Regan*, Fixed Point Theory and applications,* Combring Tracts in Mathematics, *Vol.* 141, Cambridge University Press 2001.

[5] S. R. Bernfeld et V. Lakshmikanthan, *An introduction to Nonlinear Boundary Value Problems,* Mathemathics in science and engineering, Volume 109, 1974.

[6] A. Cabada, J.A. Cid et B.M. Villamarin, *Compulation of Green's functions for boundary value problems with Mathematica*, Applied Mathematics and Computation 219 (2012), 1919-1936.

[7] D.Guo, Y.J. Cho et J. Zhu, *Partial ordering methods in nonlinear problems*, Tatiana Shohov, Susan Boriotti and Donna Dennis, 2004.

[8] F. Hidousse et S. Amar, *Calcul de la fonction de Green de certains problèmes aux limites associés aux E.D.O. avec Mathematica,* mémoire de Master,U.Bejaia, juin 2014.

[9] H. Lian et W. Ge, *Existence of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems on the half-line,* Mathematical Analysis and Application, J. Maths. Anal. Appl.321 (2006) 781-792.

[10] E. Zeidler, *Nonlineair Functional Analysis and its Applications*, vol. I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.

Résumé

L'objectif de ce travail est de présenter un ensemble de résultats concernant les problèmes aux limites associés aux E.D.O. du second ordre. Plus précisément, on s'intéresse aux problèmes de Sturm-Liouville posés sur des intervalles bornés ou non bornés de $\mathbb{R}$.
Il présente de manière progressive des résultats permettant de bien maitriser quelques outils de base notamment la théorie fondamentale de la fonction de Green, la théorie spectrale du problème de Sturm-Liouville linéaire, nécessaires à une étude plus approfondie des problèmes aux limites. Il présente aussi quelques résultats d'existence classiques datant, pour certains, des années 70. Pour montrer ces resultats, ce travail fait appel à la théorie du point fixe.