RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par

M$^{\text{lle}}$. DJAKER CHERIFA

M$^{\text{lle}}$. KELFAT SIHAM

THÈME

Méthode des Sous Et Sur Solutions et applications

Soutenu publiquement le 06/07/2019 devant le jury composé de :

M$^{\text{r}}$.	H.GHAROUT	M.C.B	Université A. Mira de Béjaia	Président
M$^{\text{r}}$.	A. MOUSSAOUI	M.C.A	Université A. Mira de Béjaia	Promoteur
M$^{\text{me}}$.	H.BECHIR	M.C.A	Université A. Mira de Béjaia	Examinatrice

Remerciment

« Le difficile c'est ce qui peut être fait tout de suite. L'impossible c'est ce qui prend un peu de temps. »

George Santayana

Nous tenons à présenter nous remerciements les plus sincères à notre promoteur Monsieur Abdelkrim Moussaoui de nous avoir proposé ce sujet, son aide très précieux sa patience et ses précieux conseils pour l'établissement de ce travail.

Nous remercions les membres de jury qui nous ont honorés de leurs présences.

Nous tenons à exprimer encore notre gratitude à tous nos enseignants du département mathématique de l'Université de Bejaia pour leurs efforts et leur entière disponibilité, dans le but de nous transmettre leur savoir et leurs connaissances.

Dédicace

Aux plus chers des chers,
Aux plus beaux de ce qu'a eu la terre,
A mon père et ma chére mère.
Aux meilleurs des soeur,
Hanane et son mari et leurs enfants,
A mon mari lakhdar et ma belle famille.
A ma chére tante fatima,
A la mémoire de mes grands-pères et mères,
A toute ma grande famille,
A mes cousins et cousines.
A tous mes amis.

Cherifa

Dédicace

Aux plus chers des chers,
Aux plus beaux de ce qu'a eu la terre,
A mon père et ma mère.
Aux meilleurs des frères,
A mes soeurs
A la mémoire de mes grands-pères et mères,
A toute ma grande famille,
A mes cousins et cousines.
A tous mes amis.

.

siham

Contents

:

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'introduire, d'une part, la méthode des sous et sur solutions et, d'autre part, d'aborder certaines de ses applications sur les systèmes d'équations elliptiques quasi-linéaires. Le cas de problèmes présentant éventuellement des singularités à l'origine est également traité. Cette méthode consiste à construire des fonctions contenant au moins une solution du problème. En plus, elle fournit une information sur leur localisation ainsi que sur leur signe. Par ailleurs, étant donné que son application n'exige aucune structure variationnelle, de nombreuses études portant sur des problèmes non-linéaires s'y sont référées. Cela s'explique aussi par la possibilité de l'associer aisément à de nombreuses méthodes et techniques, aussi bien variationnelles que non-variationnelles (méthodes topologiques).

Notre travail est structuré en trois chapitres que nous décrivons brièvement.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev. Nous présentons des propriétés sur les opérateurs, notamment l'opérateur p-Laplacien. Par ailleurs, certaines définitions et résultats utiles sont également énoncés.

Le chapitre deux est consacré à la présentation de deux théorèmes d'existence impliquant les sous et sur solutions. L'un porte sur le cas d'un système régulier, où les non-linéarités sont dans des espaces de Lebesgue. L'autre théorème se focalise sur le cas où des singularités apparaissent dans les équations.

Le chapitre trois est consacré à l'étude de l'existence et l'absence de solutions régulières pour une classe de systèmes quasi-linéaires dans un domaine borné de $\mathbb{R}^N$.

CHAPITRE 1

Notations

1.1 Notations. Espaces fonctionnels

Ici sont présentées quelques notations utilisées dans ce mémoire.

$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle d'un champ de vecteurs
$\frac{\partial}{\partial n}$	Dérivée normale exterieure d'un champ scalaire.
$\triangle$	Laplacien d'un champ de vecteurs.
∇	Gradient d'un champ de vecteurs.
$p.p.$	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$s_{\pm}$	$\max(\pm s, 0)$ de sorte que $s = s^{+} - s^{-}, s \in \mathbb{R}$.
$\overline{\Omega}$	est la fermeture du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	la frontière de Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$d(x)$	La fonction distance séparant le point $x \in \overline{\Omega}$ de la frontière $\partial\Omega$

$\mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace des fonctions m fois continument différentiables.
$\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\underset{m\in\mathbb{N}}{\cap} \mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^N\right)$.
$C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}^N$.
$L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace de Lebesgue muni de la norme $\left\|\cdot\right\|_p$.
$W^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\left\|\cdot\right\|_{m,p}$.

CHAPITRE 2

Rappels et notions de base

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur les espaces des Sobolev $W^{1,p}$ et les espaces de Lebesgue L^p et quelques définitions et résultats, qui jouent un rôle très important dans la résolutions des systèmes quasi-linéaires.

2.0.1 Les espaces $\mathbf{L}^p$

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. On définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\};$$

Et la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \exists c > 0 \ / \ |f(x)| \leq c, \quad \mu - pp \text{ sur } \Omega \}$$

$$\|f\|_\infty = \min \{ M \geq 0 : |f| \leq M \ \mu\text{-presque par tout } \}.$$

est la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.
Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \, g(x) \ dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω, i.e

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{u : u \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega\right\}$$

Remarque 2.1 *:*
(i) $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *;*
(ii) L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ *est de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$*, séparable pour* $1 \leq p < \infty$ *et réflexif pour* $1 < p < \infty$*.*

Théorème 2.2 *: [3] (convergence dominée de Lebesgue)*
Soit (f_n) *une suite de fonction de* $L^1(\Omega)$*. On suppose que:*
a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p. sur* Ω *,*
b) *Il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n*,*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad p.p \quad sur \quad \Omega$$

alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Lemme 2.3 *: Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$ *tels que*

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$

alors il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que:*
i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p sur* Ω*.*
ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ *et p.p. sur* Ω *avec* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Lemme 2.4 *: Soit* $(p, q, r) \in [1, \infty]$ *tels que* $q < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$*. Si* $g \in L^q(\Omega)$ *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite bornée de* $L^p(\Omega)$ *qui converge presque partout sur* Ω *vers* f*, alors* $f_n g \longrightarrow fg$ *dans* $L^r(\Omega)$*.*

Inégalité de Hölder *[3]* :

Soient $1 \leq p < \infty$ et q l'éxposant conjugué de p. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ sont deux fonctions mesurables sur un espace mesuré (Ω, Σ, μ), alors $fg \in L^1(\Omega)$, et

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \,.$$

Inégalité de Young *[3]* :

Pour $1 < p < \infty$ et pour tout a et b positifs, on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2.0.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit :

$$\omega^{1,p}(\Omega) = \left\{x \in L^p(\Omega)/\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N., |\alpha| \leq m\right\};$$

muni de la norme la fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit:

$$\|u\|_{m,p} = \left\{\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\right\}^{1/p},$$
$$\|u\|_\infty = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

pour toute fonction u qui donne un sens à cette écriture.

On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables $u \in L^p(\Omega)$ telles que la dérivée au sens faible $D^\alpha u$, $0 \leq |\alpha| \leq \infty$ appartient à $L^p(\Omega)$ et l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On associe à l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ et on a alors la proposition suivante:

Proposition 2.5 *:*
i) $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*
ii) Pour $p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable .*
iii) Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

Pour $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ défini comme suit:

$$H^m(\Omega) = \left\{f \in L^2(\Omega)\ /\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ D^\alpha f \in L^2(\Omega)\right\}.$$

$H^m(\Omega)$ est un Banach muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2};$$

c'est un espace de Hilbert.

Théorème 2.6 *[4] (Traces des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$)*

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de frontière Γ et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une unique application linéaire continue

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Gamma) \\ & u & \longmapsto & u_{/\Gamma} \end{array}$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. On dit alors que $\gamma_0(u)$ est la trace de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sur Γ.

Théorème 2.7 *: [4]*
Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne (où si $\Omega = \mathbb{R}^N$) on a:
i) Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.
ii) Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.
iii) pour tout $q \in \left]N, +\infty\right[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Si l'on supprime l'hypothèse "à frontière lipschitzienne", alors le dernier théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dans ce cas si $N > 1$, (iii) est même valable pour tout $q \in \left[1, +\infty\right[$.

Théorème 2.8 *[3]*
Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne:
1) Si $1 \leq p < \infty$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.
2) Si $1 < p < \infty$ alors la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ est compacte.

Remarque 2.9 *: La propriété (2) du théorème précédent est fausse si $p = 1$, puisque*

$$\gamma : W^{1,1}(\Omega) \longrightarrow L^1(\partial\Omega)$$

est surjective.

Lemme 2.10 *: [1] (Inégalité de Hardy-Sobolev)*

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $1 < p \leq N$ alors $\frac{u}{\phi_1^\delta} \in L^r(\Omega)$, pour

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\delta}{N}, \quad 0 \leq \delta \leq 1,$$

et

$$\left\| \frac{u}{\phi_1^\delta} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq C \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)},$$

où $C > 0$ est une constante et $\phi_1 > 0$ est la fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 de $\langle -\Delta, H_0^1(\Omega) \rangle$.

2.0.3 Espaces de Hölder

Soit Ω un ouvert quelconque non vide de $\mathbb{R}^N$

Définition 2.11 *:*
$*)$ *$B(\bar{\Omega}, E)$ l'espace des fonctions bornées muni de la norme*

$$||f||_{B(\bar{\Omega},E)} = \sup_{x\in\Omega} ||f||_E$$

$*)$ *$C(\bar{\Omega}, E)$ l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme*

$$||f||_{C(\bar{\Omega},E)} = ||f||_{B(\bar{\Omega},E)}$$

$*)$ *$C^k(\bar{\Omega}, E)$ avec $k \in N$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'á l'ordre k sont continues et bornées , muni de la norme*

$$||f||_{C^k(\bar{\Omega},E)} = \sum_{|\beta|\leq k} ||\partial^\beta f(x)||_{B(\bar{\Omega},E)}$$

Définition 2.12 *: Les espace $C^\alpha(\bar{\Omega}; E)$ et $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E)$, avec $k \in N$, sont définis par:*

$$C^\alpha(\bar{\Omega}; E) = \{f \in B(\bar{\Omega}, E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{||f(x) - f(y)||_E}{|x - y|^\alpha} < \infty\},$$

muni de la norme

$$||f||_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)} = ||f||_{B(\bar{\Omega};E)} + [f]_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}, E) : \partial^\beta f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega}; E)\} \ \ |\beta| = k, \qquad (2.1)$$

muni de la norme

$$||f||_{C^{k+\alpha}(\bar{\Omega};E)} = ||f||_{C^k(\bar{\Omega};E)} + [\partial^\beta f]_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)}$$

où β est multi-indice.

2.1 Notions sur les opérateurs

2.1.1 Définitions et propriétés

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace réel de Banach et soit X^* sont dual topologique.

Définition 2.13 *Un opérateur $\mathcal{A} : X \to X^*$ est dit:*

- ***borné***: *si l'image direct d'un borné de X et un borné de X^**
- ***Continu***: *si $\|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\|_{X^*} \to 0$ lorsque $\|x_n - x\|_X \to 0$.*
- ***Compact***: *si $\mathcal{A}(\overline{B}_X)$ est relativement compacte dans X^*, où B_X désigne la boule unité dans X.*
- ***Coercif***: *si*
$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle \mathcal{A}(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty.$$
- ***Monotone***:*si*
$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \geq 0 \ \ \forall u, v \in X \ \ avec \ \ u \neq v.$$
- ***Strictement monotone***:*si*
$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle > 0 \ \ \forall u, v \in X \ \ avec \ \ u \neq v.$$
- ***Pseudo-monotone***: *si*
$$x_n \rightharpoonup x \ \ dans \ X \quad et \ \limsup_{n\to+\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$$
implique
$$\liminf_{n\to+\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z\rangle \geq \langle \mathcal{A}(x), x - z\rangle, \ \ pour\ tout\ z \in X.$$
- ***de type*** $(\mathrm{S})_+$: *si*
$$x_n \rightharpoonup x \ \ dans \ X \quad et \ \ \limsup_{n\to+\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z\rangle \leq 0$$
implique
$$x_n \to x \ \ dans \ \ X.$$

Théorème 2.14 *: [3]*
Si X est réflexif et $\mathcal{A} : X \to X^*$ borné, coercif et pseudo-monotone alors $\mathcal{A}(X) = X^*$.

Théorème 2.15 *: [3] (Minty-Browder)*
Soit X un espace de Banach réflexif et soit $A : X \longrightarrow X^*$ une application (non linéaire) continue telle que

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle > 0 \ \ \forall x, y \in X \ \ x \neq y$$

et

$$\lim_{||x|| \longrightarrow \infty} \left(\frac{\langle Ax, x\rangle}{||x||}\right) = \infty.$$

Alors, pour tout $f \in X^*$, il existe un unique $u \in X$ solution de l'équation $Au = f$.

2.1.2 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien $(1 < p < \infty)$ est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \ \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour $p \neq 2$, l'opérateur Δ_p est dégénéré.
Si $p = 2$, il coïncide avec l'opérateur de Laplace usuel Δ.

Propriétés:

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné.

- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, monotone, coercif et de type $(\mathrm{S})_+$.
- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est uniformément continu sur tous ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
- $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ est continu.

- L'opérateur composé $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact si $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.
- La première valeur propre $\lambda_{1,p} > 0$ de l'opérateur Δ_p est simple et isolée. La fonction propre $\phi_{1,p}$ corespondant à $\lambda_{1,p}$ est de signe constant et vérifie
$$\phi_{1,p} \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ et } \frac{\partial \phi_{1,p}}{\partial \eta} < 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$
où η est le vecteur normal extérieure au domaine Ω.
- Toute fonction propre ϕ correspondant à une valeur propre $\lambda > \lambda_{1,p}$ de l'opérateur Δ_p est de signe changeant.

2.2 Régularité

Théorème 2.16 *: [11]*
Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $|u| \leq M_0$, M_0 étant une constante positive, une solution du problème
$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
et supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que:
$$|f(x,u)| \leq M \quad \text{pour tout } (x,u) \in \Omega \times [-M_0, M_0]. \tag{2.2}$$
Alors, il existe des constantes $R > 0$ et $\delta \in (0,1)$ telles que
$$u \in \mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega})} < R.$$

Théorème 2.17 *: [8]*
Soit $h \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ et supposons qu'il existe $\delta \in (0,1)$ et une constante $C > 0$ telles que:
$$|h(x)| \leq C d(x)^{-\delta} \text{ pour tout. } x \in \Omega. \tag{2.3}$$
Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la solution du problème
$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
alors, il existe des constantes $R > 0$ et $\delta \in (0,1)$ telles que
$$u \in \mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega})} < R.$$

2.3 Principe de comparaison [2]

Pour $f, g \in W^{-1,p'}(\Omega)$, soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ les solutions des problèmes de Dirichlet [2] suivants:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p v = g(x) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 2.18
- *On dit que $f \leq g$ dans Ω si $\langle g - f, w\rangle \geq 0$ pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $w \geq 0$.*
- *On dit que $f \prec g$ dans Ω si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*
$$f(x) + \varepsilon < g(x), \text{ pour.tout } x \in K.$$
- *On dit que $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ si $(u - v)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
- *On dit que $u \ll v$ si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ et*
$$u < v \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Théorème 2.19 (Principe de comparaison faible) *Si $f \leq g$ dans Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ dans Ω.*

Théorème 2.20 (Principe de comparaison fort) *Pour $f, g \in L^\infty(\Omega)$ et $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, si $f \prec g$ et $v \gg 0$, alors $u \ll v$ dans Ω.*

2.4 Définitions et résultats supplémentaires

Définition 2.21 *(Fonction de Carathéodory)*
On dit que $h : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si:
(i) $x \mapsto h(x, s, t)$ est mesurable pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$
(ii) $(s, t) \mapsto h(x, s, t)$ est continue pour tout $x \in \Omega$.

Définition 2.22 *;(Opérateur de Nemytskij)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. On appelle opérateur de Nemytskij associé à f l'application $\mathcal{N}_f$ définie par

$$(\mathcal{N}_f u)(x) = f(x, u(x)).$$

Définition 2.23 *:(Système variationnel)*
Le système

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f_1(x, u, v) & \textit{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = f_2(x, u, v) & \textit{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

est dit variationnel si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- *Il existe une fonction différentiable $F(x, u, v)$ pour $(x, u, v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que*

  $$\tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial u} = f_1(x, u, v) \;\; \textit{et} \;\; \tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial v} = f_2(x, u, v).$$

  Dans ce cas, (2.4) est de type Gradient.

- *Il existe une fonction différentiable $H(x, u, v)$ pour $(x, u, v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que*

  $$\tfrac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = f_2(x, u, v) \;\; \textit{et} \;\; \tfrac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = f_1(x, u, v).$$

  Dans ce cas, (2.4) est de type Hamiltonien.

Lemme 2.24 *: [7]*
Soient $y, z \in \mathbb{R}^N$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$.

- *Si $p \geq 2$ on a*

  $$(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y)_{R^2} \geq c_p|z - y|^p$$

- *Si $1 < p < 2$ alors*

  $$(|z| + |y|)^{2-p}(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y)_{R^2} \geq c'_p|z - y|^2.$$

Théorème 2.25 *: [4]* ***(point fixe de Schauder)***
Soit Ω un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compacte. Alors f admet au moins un point fixe. De plus, le résultat reste vrai si Ω est seulement homéomorphe à un convexe, fermé borné.

CHAPITRE 3

Théorèmes des sous et sur solutions

On considère le systéme d'équations elliptiques quasi-linéaires

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mathcal{F}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \mathcal{G}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory.

Le but de ce chapitre est de présenter des théorèmes d'existence impliquant des sous et sur solutions pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$. Deux situations liées à la structure du problème $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ seront abordées: le cas singulier et le cas régulier. Le premier cas corréspond à la situation où les fonctions non-linéaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ présentent des singularités à l'origine. Cela se traduit par le fait que $\mathcal{F}$ et g explosent quand u et v approchent du zéro. Dans le cas complémentaire le système $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ est dit régulier.

Définition 3.1 *[13]*
On appelle sous-solution et sur-solution de $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ *toutes paires* $(\underline{u}, \underline{v})$ *et* $(\overline{u}, \overline{v})$ *dans* $(W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ *telles que* $(\overline{u}, \overline{v}) \geq (\underline{u}, \underline{v})$ *dans* Ω*, et qui vérifient*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x, \underline{u}, \omega_2)\varphi \, dx \leq 0 \\ \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x, \omega_1, \underline{v})\psi \, dx \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \ dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x, \overline{u}, \omega_2)\varphi \ dx \geq 0 \\ \int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \ dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x, \omega_1, \overline{v})\psi \ dx \geq 0, \end{cases}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *avec* $\varphi, \psi \geq 0$ *p.p. dans* Ω *et pour tout* $(w_1, w_2) \in W^{1,p_1}(\Omega) \times W^{1,p_2}(\Omega)$ *dans* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

3.1 Systèmes réguliers

Dans cette section, on impose aux fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ la condition de croissance suivante:

(H.1) Pour tout $\rho > 0$, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\max\{|\mathcal{F}(x, s, t)|, |\mathcal{G}(x, s, t)|\} \leq M$$

dans $\Omega \times [-\rho, \rho]^2$.

Le résultat d'existence impliquant les sous et sur solutions est formulé comme suit.

Théorème 3.2 *Sous l'hypothèse (H.1) le problème* $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ *admet une solution* $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *pour un certain* $\gamma \in]0, 1[$, *telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad et \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}. \tag{3.1}$$

Démonstration. Soit l'opérateur de troncature $T_i : W^{1,p_i}(\Omega) \to W^{1,p_i}(\Omega)$, $i = 1, 2$, défini par:

$$T_1(u)(x) := \begin{cases} \underline{u}(x) & \text{si } u(x) \leq \underline{u}(x), \\ u(x) & \text{si } \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \\ \overline{u}(x) & \text{si } \overline{u}(x) \leq u(x), \end{cases}$$

$$T_2(v)(x) := \begin{cases} \underline{v}(x) & \text{si } v(x) \leq \underline{v}(x), \\ v(x) & \text{si } \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x), \\ \overline{v}(x) & \text{si } \overline{v}(x) \leq v(x), \end{cases}$$

D'aprés [4, Lemme 2.89], les opérateurs T_1 et T_2 sont continues et bornés.

Pour toute constante $\rho > 0$ satisfaisant

$$-\rho \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \rho, \quad -\rho \leq \underline{v} \leq \overline{v} \leq \rho,$$

si $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\cdot, u(\cdot))$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\cdot, v(\cdot))$ désignent les opérateurs de Nemytskij associés respectivement à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors en utilisant la condition (H.1), les opérateurs

$$N_{\mathcal{F}} \circ T_1 : W^{1,p_1}(\Omega) \to L^{p_1'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p_1}(\Omega) \tag{3.2}$$

et

$$N_{\mathcal{G}} \circ T_2 : W^{1,p_2}(\Omega) \to L^{p_2'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p_2}(\Omega) \tag{3.3}$$

sont également continues et bornés.

Soient γ_1 et γ_2 deux fonctions définies par:

$$\gamma_1(x,s) := -(\underline{u}(x) - s)_+^{p_1-1} + (s - \overline{u}(x))_+^{p_1-1}, \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

$$\gamma_2(x,t) := -(\underline{v}(x) - t)_+^{p_2-1} + (t - \overline{v}(x))_+^{p_2-1}, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Alors, les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$\int_\Omega \gamma_1(x,u)u \; dx \geq C_1 \|u\|_{p_1}^{p_1} - C_2 \quad \forall\, u \in W^{1,p_1}(\Omega), \tag{3.4}$$

$$\int_\Omega \gamma_2(x,v)v \; dx \geq C_1' \|v\|_{p_2}^{p_2} - C_2' \quad \forall\, v \in W^{1,p_2}(\Omega), \tag{3.5}$$

où $C_i, C_i' > 0$ sont des constantes. En effet, on a

$$\begin{array}{l} \int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1-1} u\, dx \\ = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_+^{p_1} + u_-^{p_1})\; dx + \int_{\Omega(u<\overline{u}_+)} \big((u-\overline{u})_+^{p_1-1}u - \frac{1}{2}(u_+^{p_1} + u_-^{p_1})\big)\, dx \\ + \int_{\Omega(u\geq\overline{u}_+)} \big((u-\overline{u})_+^{p_1-1}u - \frac{1}{2}(u_+^{p_1} + u_-^{p_1})\big)\, dx \end{array} \tag{3.6}$$

et

$$\int_{\Omega(u<\overline{u}_+)} \left((u-\overline{u})_+^{p_1-1}u - \frac{1}{2}(u_+^{p_1} + u_-^{p_1})\right) dx \geq -\frac{1}{2}\int_{\Omega(u<\overline{u}_+)} \overline{u}_+^{p_1} \; dx. \tag{3.7}$$

Sachant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$||z_1 + z_2|^{p_1} - |z_1|^{p_1}| \leq \varepsilon |z_1|^{p_1} + c_\varepsilon |z_2|^{p_1} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(u\geq\overline{u}_+)} \left((u-\overline{u})_+^{p_1-1}u - \frac{1}{2}(u_+^{p_1} + u_-^{p_1})\right) dx \\ \geq \; & \int_{\Omega(u\geq\overline{u}_+)} ((u-\overline{u})^{p_1} - u^{p_1})\, dx \geq -\int_{\Omega(u\geq\overline{u}_+)} (\varepsilon u^{p_1} + c_\varepsilon |\overline{u}|^{p_1})\, dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En fixant $\varepsilon \in]0,1/2[$ et en combinant (3.7)–(3.8) avec (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1-1} u dx &\geq \frac{1}{2}(\|u_+\|_{p_1}^{p_1} + \|u_-\|_{p_1}^{p_1}) - \varepsilon \|u\|_{p_1}^{p_1} - \left(\frac{1}{2}+c_\varepsilon\right)\|\overline{u}\|_{p_1}^{p_1} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|u\|_{p_1}^{p_1} - \left(\frac{1}{2}+c_\varepsilon\right)\|\overline{u}\|_{p_1}^{p_1},\end{aligned}$$

ce qui montre que (3.4) est vérifiée. En procédant de la même manière on montre que l'inégalité (3.5) est vraie.

On considère le système auxiliaire suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u = \mathcal{F}_\mu(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_{p_2} v = \mathcal{G}_\mu(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.9}$$

où, pour tout $\mu > 0$ et tout $(u,v) \in W^{1,p_1}(\Omega) \times W^{1,p_2}(\Omega)$, on pose

$$\mathcal{F}_\mu(x,u,v) := \mathcal{F}(x,T_1u,T_2v) - \mu\gamma_1(x,u),$$

$$\mathcal{G}_\mu(x,u,v) := \mathcal{G}(x,T_1u,T_2v) - \mu\gamma_2(x,v).$$

Evidemment, si $(u,v) \in W^{1,p_1}(\Omega) \times W^{1,p_2}(\Omega)$ vérifie (3.1) alors, d'aprés la définition des fonctions γ_1 et γ_2, on a

$$\mathcal{F}_\mu(x,u,v) = \mathcal{F}(x,u,v) \;\text{ et }\; \mathcal{G}_\mu(x,u,v) = \mathcal{G}(x,u,v). \tag{3.10}$$

De ce fait, toute solution $(u,v) \in W^{1,p_1}(\Omega) \times W^{1,p_2}(\Omega)$ de (3.9) vérifiant (3.1) est aussi solution de $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$. En d'autres termes, le Théorème (3.2) est prouvé si on montre que (3.9) admet une solution (u,v) dans le rectangle $[\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$. A cet effet, on note par $\mathcal{E}$ l'espace $W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ équipé de la norme

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{E}} := \|u\|_{1,p_1} + \|v\|_{1,p_2}, \quad (u,v) \in \mathcal{E},$$

et, pour tout $(u,v),(\varphi,\psi) \in \mathcal{E}$, on défini $\mathcal{B}_\mu : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ par:

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{B}_\mu(u,v),(\varphi,\psi)\rangle := \textstyle\int_\Omega (|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla\varphi + |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\psi)\, dx \\ &- \textstyle\int_\Omega \mathcal{F}_\mu(x,u,v)\varphi\, dx - \int_\Omega \mathcal{G}_\mu(x,u,v)\psi\, dx.\end{aligned}$$

Notre but est de vérifier que, pour $\mu > 0$ est suffisament grand, $\mathcal{B}_\mu$ satisfait les hypothèses du Théorème (1.4) (voir [3]) .

1) B_μ est continue.

Supposons $(u_n, v_n) \to (u, v)$ dans $\mathcal{E}$ et soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}$ tel que $\|(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{E}} \leq 1$.

Si $p_1, p_2 \geq 2$ alors, du Lemme (2.24) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|\left\langle |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u, \nabla\varphi\right\rangle\right| dx \\
&+ \int_\Omega \left|\left\langle |\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v, \nabla\psi\right\rangle\right| dx \\
&\leq c_{p_1} \||\nabla u_n| + |\nabla u|\|_{p_1}^{p_1'(p_1-2)} \|u_n - u\|_{1,p_1}^{p_1'} \\
&+ c_{p_2} \||\nabla v_n| + |\nabla v|\|_{p_2}^{p_2'(p_2-2)} \|v_n - v\|_{1,p_2}^{p_2'} .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si $1 < p_1, p_2 \leq 2$, le Lemme (2.24) donne

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\Omega |\langle |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u, \nabla\varphi\rangle|\, dx + \int_\Omega |\langle |\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v, \nabla\psi\rangle|\, dx \\
&\leq c'_{p_1} \|u_n - u\|_{1,p_1}^{p_1-1} + c'_{p_2} \|v_n - v\|_{1,p_2}^{p_2-1} .
\end{aligned}$$

Les situations restantes sont une combinaison des cas précédent. Observons ensuite que, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |(\gamma_1(x, u) - \gamma_1(x, u_n))\varphi|\, dx \leq C\|\gamma_1(\cdot, u) - \gamma_1(\cdot, u_n)\|_{p_1'} , \\
&\int_\Omega |(\gamma_2(x, v) - \gamma_2(x, v_n))\psi|\, dx \leq C'\|\gamma_2(\cdot, v) - \gamma_2(\cdot, v_n)\|_{p_2'} .
\end{aligned}$$

Alors, le Théorème de Convergence Dominée (théorème 1.2), la continuité des applications (3.2), (3.3) et

$$w \in W_0^{1,p_i}(\Omega) \mapsto \gamma_i(\cdot, w) \in L^{p_i'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p_i'}(\Omega),$$

montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |(\mathcal{F}_\mu(x, u_n, v_n) - \mathcal{F}_\mu(x, u, v))\varphi| dx = 0 \tag{3.12}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |(\mathcal{G}_\mu(x, u_n, v_n) - \mathcal{G}_\mu(x, u, v))\psi| dx = 0, \tag{3.13}$$

uniformément dans (φ, ψ).

Finalement, du fait que

$$\begin{array}{l}|\langle \mathcal{B}_\mu(u_n,v_n)-\mathcal{B}_\mu(u,v),(\varphi,\psi)\rangle| \leq \int_\Omega |\langle |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u, \nabla\varphi\rangle|\, dx \\ +\int_\Omega |\langle |\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v, \nabla\psi\rangle|\, dx \\ +\int_\Omega |(\mathcal{F}_\mu(x,u_n,v_n)-\mathcal{F}_\mu(x,u,v))\varphi| dx \\ +\int_\Omega |(\mathcal{G}_\mu(x,u_n,v_n)-\mathcal{G}_\mu(x,u,v))\psi| dx, \quad \forall n\in\mathbb{N},\end{array}$$

alors (3.11)–(3.13) impliquent que $\|\mathcal{B}_\mu(u_n,v_n)-\mathcal{B}_\mu(u,v)\|_{\mathcal{E}'}\to 0$.

2) B_μ **est borné:** cela s'obtient immédiatement du fait que les applications dans (3.2) - (3.3),

3) B_μ **est coercif :** en appliquant (H.1), on a

$$\int_\Omega |\mathcal{F}_\mu(x,u,v)u| dx \leq MC_3\|u\|_{p_1} \tag{3.14}$$

et

$$\int_\Omega |\mathcal{G}_\mu(x,u,v)v| dx \leq MC_3'\|v\|_{p_2}. \tag{3.15}$$

A travers (3.14) – (3.15) et (3.4) – (3.5), on obtient

$$\begin{array}{l}\langle \mathcal{B}_\mu(u,v),(u,v)\rangle \geq \|\nabla u\|_{p_1}^{p_1}+\|\nabla v\|_{p_2}^{p_2} \\ +\mu\bar{C}_1(\|u\|_{p_1}^{p_1}+\|v\|_{p_2}^{p_2}) - M\bar{C}_3(\|u\|_{p_1}+\|v\|_{p_2}) \\ -\mu(C_2+C_2'),\end{array}$$

avec $\bar{C}_1 := \min\{C_1, C_1'\}$, $\bar{C}_3 := \max\{C_3, C_3'\}$. Donc, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\langle \mathcal{B}_\mu(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle}{\|(u_n,v_n)\|_{\mathcal{E}}} = +\infty,$$

ce qui montre que $\mathcal{B}_\mu$ est coercif.

4) B_μ **est pseudo-monotone:** Supposons $(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)$ dans $\mathcal{E}$ et que

$$\limsup_{n\to+\infty}\langle \mathcal{B}_\mu(u_n,v_n),(u_n,v_n)-(u,v)\rangle \leq 0. \tag{3.16}$$

Puisque l'application $w\in W^{1,p_i}(\Omega)\mapsto \gamma_i(\cdot,w)\in L^{p_i'}(\Omega)$ est continue, l'hypothèse (H.1) permet d'appliquer le Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue (théorème 1.2) et de déduire que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \mathcal{F}_\mu(x,u_n,v_n)(u_n-u)dx &= 0,\\ \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \mathcal{G}_\mu(x,u_n,v_n)(v_n-v)dx &= 0,\end{aligned}$$

En combinant avec (3.16) on a

$$\limsup_{n\to+\infty}[\langle -\Delta_{p_1}u_n, u_n-u\rangle + \langle -\Delta_{p_1}v_n, v_n-v\rangle] \leq 0. \tag{3.17}$$

D'autre part, puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\langle -\Delta_{p_1}u, u_n-u\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle -\Delta_{p_2}v, v_n-v\rangle = 0, \tag{3.18}$$

alors en utilisant (3.17), on a

$$\limsup_{n\to+\infty}[\langle -\Delta_{p_1}u_n-(-\Delta_{p_1}u), u_n-u\rangle + \langle -\Delta_{p_2}v_n-(-\Delta_{p_2}v), v_n-v\rangle] \leq 0.$$

Par monotonie, c'est équivalent à

$$\lim_{n\to+\infty}\langle -\Delta_{p_1}u_n-(-\Delta_{p_1}u), u_n-u\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle -\Delta_{p_2}v_n-(-\Delta_{p_2}v), v_n-v\rangle = 0.$$

De (3.18) et en rappelant que l'opérateur $-\Delta_{p_i}$ est de type $(\mathrm{S})_+$ on obtient

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \text{ dans } \mathcal{E},$$

Par conséquent, comme $\mathcal{B}_\mu$ est continue, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \mathcal{B}_\mu(u_n,v_n),(u_n,v_n)-(\varphi,\psi)\rangle = \langle \mathcal{B}_\mu(u,v),(u,v)-(\varphi,\psi)\rangle,\ \forall\,(\varphi,\psi)\in\mathcal{E}.$$

Finalement, grâce au Théorème (1.14) , il existe $(u,v)\in\mathcal{E}$ tel que

$$\langle \mathcal{B}_\mu(u,v),(\varphi,\psi)\rangle = 0, \quad (\varphi,\psi)\in\mathcal{E}. \tag{3.19}$$

Ainsi, (u,v) une solution faible du problème (3.9).

Maintenant, on montre que les inégalités (3.1) sont vraies.
On pose $(\varphi,\psi) := ((u-\overline{u})_+, 0)$ dans (3.19) et en tenant compte de la définition de la sur solution, on a

$$\begin{array}{l}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\,\nabla(u-\overline{u})_+dx = \int_\Omega \mathcal{F}_\mu(x,u,v)(u-\overline{u})_+\,dx\\ = \int_\Omega \mathcal{F}(x,T_1u,T_2v)(u-\overline{u})_+\ dx - \mu\int_\Omega \gamma_1(x,u)(u-\overline{u})_+\ dx\\ = \int_\Omega \mathcal{F}(x,\overline{u},T_2v)(u-\overline{u})_+\ dx - \mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1}\,dx\\ \leq \int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p_1-2}\nabla\overline{u}\ \ \nabla(u-\overline{u})_+\,dx - \mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1}dx.\end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{l}\int_\Omega (|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u - |\nabla\overline{u}|^{p_1-2}\nabla\overline{u})\,\nabla(u-\overline{u})_+\,dx\\ \leq -\mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1}\ dx \leq 0.\end{array} \tag{3.20}$$

De la monotonie de l'opérateur $-\Delta_{p_1}$ on déduit que

$$u \leq \overline{u} \text{ dans } \Omega.$$

De la même manière, en choisissant $(\varphi, \psi) := ((\underline{u} - u)_+, 0)$ et en utilisant la definition de la sous solution, le même raisonnement donne

$$u \geq \underline{u} \text{ dans } \Omega.$$

En procédant de la même manière on obtient

$$\underline{v} \leq v \leq \overline{v} \quad \text{dans } \Omega.$$

Donc, en conclusion la solution (u, v) de (3.9) est localisée dans le rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Par conséquent, par (3.10), on déduit que (u, v) est une solution de $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$.

Finalement, du fait que les sur-solutions

$$\overline{u}, \overline{v} \in L^{\infty}(\Omega),$$

le Théorème de Lieberman (2.16), assure que $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\gamma \in]0, 1[$. Ceci complète la démonstration. ■

3.2 Systèmes singuliers

Dans cette section, les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ dans $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ sont de Carathéodory et présentent des singularités lorsque les variables u et v approchent zéro. Cela rend le Théorème (3.2) inapplicable, du fait que l'hypothèse de croissance (H.1) n'est pas satisfaite.

(**H.2**) Il existe des constantes $k_1, k_2 > 0$ et $-1 < \alpha, \beta < 0$ telles que:

$$|\mathcal{F}(x, u, v)| \leq k_1 d(x)^{\alpha} \text{ et } |\mathcal{G}(x, u, v)| \leq k_2 d(x)^{\beta} \text{ dans } \Omega \times [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]. \tag{3.21}$$

Théorème 3.3 *Soient* $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\overline{u}, \overline{v}) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ *des sous et sur solutions du problème* $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ *avec*

$$\underline{u}(x), \underline{v}(x) \geq c_0 d(x) \quad \textit{dans } \Omega,$$

pour toute constante $c_0 > 0$, et supposons que (H.2) est vérifiée. Alors le système $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ admet une solution positive (u, v) dans $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\gamma \in (0, 1)$, telle que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \textit{et} \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}. \tag{3.22}$$

Démonstration. :
Pour tout $(z_1, z_2) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$, soit $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \widetilde{\mathcal{F}}(x, z_1, z_2) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \widetilde{\mathcal{G}}(x, z_1, z_2) & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

où

$$\widetilde{\mathcal{F}}(x, z_1, z_2) = \mathcal{F}(x, \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2) \ \text{ et } \widetilde{\mathcal{G}}(x, z_1, z_2) = \mathcal{G}(x, \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2) \tag{3.24}$$

avec

$$\widetilde{z}_1 = \min(\max(z_1, \underline{u}), \overline{u}) \text{ et } \widetilde{z}_2 = \min(\max(z_2, \underline{v}), \overline{v}). \tag{3.25}$$

sur le compte de (3.25) il s'ensuit que

$$\underline{u} \leq \widetilde{z}_1 \leq \overline{u} \ \text{ et } \ \underline{v} \leq \widetilde{z}_2 \leq \overline{v}.$$

Alors, de (3.21), nous avons

$$|\widetilde{\mathcal{F}}(x, z_1, z_2)| \leq k_1 d(x)^{\alpha} \ \text{ et } \left|\widetilde{\mathcal{G}}(x, z_1, z_2)\right| \leq k_2 d(x)^{\beta} \text{ pour tout. } x \in \Omega. \tag{3.26}$$

Noter que les estimations (3.26) permettent de déduire que

$$\widetilde{\mathcal{F}}(x, z_1, z_2) \in W^{-1,p'}(\Omega) \text{ et } \widetilde{\mathcal{G}}(x, z_1, z_2) \in W^{-1,q'}(\Omega).$$

C'est une conséquence de l'inégalité Hardy-Sobolev (Lemme 1.10), qui est applicable car les exposants $\alpha, \beta \in (-1, 0)$. Alors, le Théorème de Minty-Browder (2.15) assure que la solution (u, v) de (3.23) est unique. De ce fait, l'opérateur $\mathcal{T}$, donné par:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{T}: & C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) & \rightarrow & C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \\ & (z_1, z_2) & \mapsto & (u, v), \end{array}$$

est bien défini. En plus, tout point fixe de $\mathcal{T}$ coïncide avec la solution faible de $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$. Par conséquent, pour parvenir à la conclusion souhaitée, il suffit de prouver que $\mathcal{T}$ admet un point fixe. Pour ce faire, nous appliquons le théorème de point fixe de Schauder.

De (3.26) et du Théorème (2.17), il existe $\gamma \in (0,1)$ tel que

$$(u,v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \text{ et } \|u\|_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|u\|_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C,$$

où $C > 0$ est indépendant de u et v. Alors la compacité de l'injection $C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ implique que $\mathcal{T}(C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}))$ est un sous-ensemble relativement compact de $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$. Cela prouve que l'opérateur $\mathcal{T}$ est compact.

Montrons que $\mathcal{T}$ est continu par rapport à la topologie de $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$. Soit $(z_{1,n}, z_{2,n}) \to (z_1, z_2)$ dans $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ pour tous $n \in \mathbb{N}$. On note par $(u_n, v_n) = \mathcal{T}(z_{1,n}, z_{2,n})$ et on a

$$\textstyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega \widetilde{\mathcal{F}}(x, z_{1,n}, z_{2,n})\varphi \; dx \tag{3.27}$$

et

$$\textstyle\int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2} \nabla v_n \nabla \psi = \int_\Omega \widetilde{\mathcal{G}}(x, z_{1,n}, z_{2,n})\psi \; dx \tag{3.28}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$. En insérant $(\varphi, \psi) = (u_n, v_n)$ dans (3.27) et (3.28) et en utilisant (3.21), on obtient

$$\|u_n\|_{1,p} = \int_\Omega \widetilde{\mathcal{F}}(x, z_{1,n}, z_{2,n})u_n \; dx \leq \int_\Omega d(x)^\alpha u_n dx \tag{3.29}$$

et

$$\|v_n\|_{1,q} = \int_\Omega \widetilde{\mathcal{G}}(x, z_{1,n}, z_{2,n})v_n \; dx \leq \int_\Omega d(x)^\beta v_n dx. \tag{3.30}$$

Comme $-1 < \alpha, \beta < 0$, en vertu de l'inégalité de Hardy-Sobolev (lemme 1.10) , les dernières intégrales de (3.29) et (3.30) sont finies, ce qui implique que $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont bornés dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W_0^{1,q}(\Omega)$. En passant aux sous-suites, on a

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega). \tag{3.31}$$

En posant $\varphi = u_n - u$ dans (3.27) et $\psi = v_n - v$ dans (3.28), il s'ensuit que

$$\textstyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) = \int_\Omega \widetilde{\mathcal{F}}(x, z_{1,n}, z_{2,n})(u_n - u) \; dx$$

et

$$\textstyle\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla (v_n - v) = \int_\Omega \widetilde{\mathcal{G}}(x, z_{1,n}, z_{2,n})(v_n - v) \; dx.$$

Donc, le Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue assure que

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle -\Delta_q v_n, v_n - v\rangle = 0.$$

La propriété (S_+) des opérateurs $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et de $-\Delta_q$ sur $W_0^{1,q}(\Omega)$ et la convergence dans (3.31), impliquent

$$u_n \to u \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } v_n \to v \text{ dans } W_0^{1,q}(\Omega).$$

De (3.27), (3.28) et de l'invariance de $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ par $\mathcal{T}$, on déduit que $(u, v) = \mathcal{T}(z_1, z_2)$.

D'autre part, étant donné que la suite $\{(u_n, v_n)\}$ est bornée dans $C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour certain $\gamma \in (0, 1$ alors, comme $C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, on peut extraire une sous-suite telle que

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \;\text{ dans } C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}).$$

Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu.

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le Théorème du point fixe de Schauder *[4]* à l'opérateur $\mathcal{T}$, qui établit l'existence de solutions $(u, v) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$(u, v) = \mathcal{T}(u, v).$$

Maintenant, montrons que

$$\underline{u} \le u \le \overline{u} \text{ et } \underline{v} \le v \le \overline{v} \text{ dans } \Omega.$$

Soit $\zeta = (\underline{u} - u)^+$ et supposons que $\zeta \neq 0$. De (3.25), (3.23) et (3.24), nous en déduisons

$$\int_{\{u<\underline{u}\}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\zeta \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\zeta \, dx = \int_{\{u<\underline{u}\}} \widetilde{\mathcal{F}}(x, u, v)\zeta \, dx$$

$$= \int_{\{u<\underline{u}\}} \mathcal{F}(x, \widetilde{u}, \widetilde{v})\zeta \, dx = \int_{\{u<\underline{u}\}} \mathcal{F}(x, \underline{u}, \widetilde{v})\zeta \, dx \ge \int_{\{u<\underline{u}\}} |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \nabla\zeta \, dx.$$

Cela implique que

$$\int_{\{u<\underline{u}\}} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u})\nabla(\underline{u} - u) \, dx \le 0,$$

une contradiction. Par conséquent $u \ge \underline{u}$ dans Ω. Un raisonnement similaire montre que

$$v \ge \underline{v} \;\text{ dans } \Omega.$$

Procédons de la même manière, nous obtenons que

$$u \leq \overline{u} \text{ et } v \leq \overline{v} \text{ dans } \Omega.$$

Finalement, en appliquant le Théorème (2.17), on conclu que $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\gamma \in (0, 1)$. ■

CHAPITRE 4

Applications aux systèmes quasi-linéaires

On considère le système d'équations elliptiques quasi-linéaires

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{\alpha_1} v^{\beta_1} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda u^{\alpha_2} v^{\beta_2} & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$, $\lambda > 0$ est un paramètre et les exposants α_i et β_i $(i = 1, 2)$ sont des constantes réelles non-nulles telles que:

$$\begin{cases} -1 + \frac{1}{p} < \alpha_1 < p - 1 - \beta_1, \\ -1 + \frac{1}{q} < \beta_2 < q - 1 - \alpha_2, \\ \text{et } \; 0 < \alpha_2 < p - 1, \; 0 < \beta_1 < q - 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Notre objectif est de montrer l'existence et l'absence de solutions positives pour le système (P) en distinguant deux situations relatives aux signe des exposants:

$$\alpha_1, \beta_2 > 0 \; \text{(cas régulier)}, \tag{4.2}$$

$$\alpha_1, \beta_2 < 0 \; \text{(cas singulier)}, \tag{4.3}$$

Il est important de noter que sous l'hypothèse (4.1), le problème (P) est sous-homogène. Cela se traduit par le fait que $\Theta > 0$, où Θ est une constante définie par

$$\Theta = (p - 1 - \alpha_1)\,(q - 1 - \beta_2) - \beta_1 \alpha_2. \tag{4.4}$$

La constante Θ est liée à la stabilité du système (P), qui se comporte de manière radicalement différente, en fonction du signe de Θ. Par exemple, pour $\Theta < 0$, le système (P) est instable dans le ce sens que des solutions ne peuvent être obtenues par des méthodes itératives.

Le problème (P) intervient dans plusieurs domaines d'application. Par exemple, il apparaît dans l'étude de mécanique des fluides non newtonienne à la fois pour $p, q > 2$ (fluides de dilatations) et pour $1 < p, q < 2$ (fluides pseudoplastiques). Si $p, q = 2$, il s'agit de fluides newtoniens. Le problème (P) s'applique également dans l'étude de la dynamique des populations [12] et dans d'autres domaines tels qu'en biologie [9] et en astro-physique.

4.1 Existence de solutions positives

Le théorème d'existence de solutions est formulé comme suit:

Théorème 4.1 *Sous l'hypothèse (4.1), le systéme (P) admet une solution positive* $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$*. pour tout* $\lambda > 0$*. De plus, il existe une sous et sur solution* $(\underline{u}, \underline{v})$*,* $(\overline{u}, \overline{v}) \in (W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ *pour le problème (P), indépendant de* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *et satisfaisant*

$$0 < \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \quad \textit{et} \quad 0 < \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in \Omega.$$

Notre approche est basée sur la méthode des sous et sur solutions. Ces dernières sont construites en choisissant des fonctions appropriés avec un ajustement adéquat de constantes. Alors, les théorèmes (3.2) et (2.14), garantissent l'existence d'au moins une solution (u, v) dans $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\gamma \in (0, 1)$, localisée entre la sous et la sur solution, pour le système (P) présentant eventuellement des singularités. La solution obtenue est positive du fait que la sous-solution l'est.

4.1.1 Sous-solution

Soient $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ les fonctions propres associées, respectivement, aux premières valeurs propres $\lambda_{1,p}$ et $\lambda_{1,q}$ des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W_0^{1,q}(\Omega)$. C'est-à-dire

$$-\Delta_p \phi_{1,p} = \lambda_{1,p} \phi_{1,p}^{p-1} \text{ dans } \Omega, \ \phi_{1,p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$-\Delta_q \phi_{1,q} = \lambda_{1,q}\phi_{1,q}^{q-1} \text{ dans } \Omega,\ \phi_{1,q} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Du chapitre 1 , nous savons que les fonctions $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ sont bornées dans $C^1(\overline{\Omega})$ et possèdent les propriétés suivantes:

$$\phi_{1,p}, \phi_{1,q} > 0 \text{ dans } \Omega \ \text{ et } \ |\nabla\phi_{1,p}|, |\nabla\phi_{1,q}| > 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En plus, il existe des constantes positives l_1, l_2, $\hat{l}$ et l telles que (voir [6])

$$l_1\phi_{1,p}(x) \leq \phi_{1,q}(x) \leq l_2\phi_{1,p}(x),\ \forall x \in \Omega \tag{4.5}$$

et

$$\hat{l}d(x) \geq \phi_{1,p}(x), \phi_{1,q}(x) \geq ld(x),\ \forall x \in \Omega. \tag{4.6}$$

Dans tout ce qui suit, on note par

$$M = \max\left\{\max_{x\in\overline{\Omega}}\phi_{1,p}(x), \max_{x\in\overline{\Omega}}\phi_{1,q}(x)\right\}. \tag{4.7}$$

L'existence de sous-solution pour le problème (P) est donnée par le résultat suivant:

Proposition 4.2 *Sous l'hypothèse (4.1), il existe des constantes $C, k_1, k_2 > 0$ telles que, pour $C > 0$ suffisamment petit, le problème (P) admet une sous-solution donnée par:*

$$(\underline{u}, \underline{v}) = (C^{k_1}\tfrac{p-1}{p}\phi_{1,p}^{\frac{p}{p-1}}, C^{k_2}\tfrac{q-1}{q}\phi_{1,q}^{\frac{q}{q-1}}). \tag{4.8}$$

Démonstration. De la condition (4.1), il en résulte que $\Theta > 0$. Donc, il existe des constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que:

$$\frac{\alpha_2}{q-1-\beta_2} < \frac{k_2}{k_1} < \frac{p-1-\alpha_1}{\beta_1}. \tag{4.9}$$

Comme

$$\phi_{1,p}, \phi_{1,q} = 0 \ \text{ et } \ |\nabla\phi_{1,p}|, |\nabla\phi_{1,q}| > 0 \ \text{ sur } \partial\Omega,$$

Du chapitre 1, il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\lambda_{1,p}\phi_{1,p}(x)^p - |\nabla\phi_{1,p}(x)|^p \leq 0 \ \text{ pour tout } \ x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \tag{4.10}$$

et

$$\lambda_{1,q}\phi_{1,q}(x)^q - |\nabla\phi_{1,q}(x)|^q \leq 0 \ \text{ pour tout } \ x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \tag{4.11}$$

avec

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Etant donné que les fonctions $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ sont continues et que Ω est un domaine borné, on peut trouver une constante $\mu = \mu(\delta) > 0$ pour laquelle on a:

$$\phi_1(x),\ \phi_2(x) \geq \mu \ \text{ pour tout } x \in \Omega_\delta.$$

Se basant sur (4.9), on peut choisir une constante suffisamment petite $C = C(\delta) > 0$ telle que, si $\alpha_1, \beta_2 > 0$, on a

$$C^{k_1(p-1-\alpha_1)-k_2\beta_1}\lambda_1\phi_1^p(x) \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\beta_1}\mu^{\frac{p\alpha_1}{p-1}+\frac{q\beta_1}{q-1}} \ \text{ pour tout } x \in \Omega_\delta \tag{4.12}$$

et

$$C^{k_2(q-1-\beta_2)-k_1\alpha_2}\lambda_2\phi_2^q(x) \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\beta_2}\mu^{\frac{p\alpha_2}{p-1}+\frac{q\beta_2}{q-1}} \ \text{ pour tout } x \in \Omega_\delta, \tag{4.13}$$

et si $\alpha_1, \beta_2 < 0$, on a

$$C^{k_1(p-1-\alpha_1)-k_2\beta_1}\lambda_1\phi_1^p(x)\left(\frac{p-1}{p}M^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\alpha_1} \leq \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\beta_1}\mu^{\frac{q\beta_1}{q-1}} \ \text{ pour tout } x \in \Omega_\delta \tag{4.14}$$

et

$$C^{k_2(q-1-\beta_2)-k_1\alpha_2}\lambda_2\phi_2^q(x)\left(\frac{q-1}{q}M^{\frac{q}{q-1}}\right)^{-\beta_2} \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\alpha_2}\mu^{\frac{p\alpha_2}{p-1}} \ \text{ pour tout } x \in \Omega_\delta. \tag{4.15}$$

Notre objectif est de montrer que $(\underline{u}, \underline{v})$ définie dans (4.8) vérifie les estimations dans la définition (3.1). En utilisant (4.12) - (4.15) on obtient

$$\begin{aligned}
&C^{k_1(p-1-\alpha_1)-k_2\beta_1}\lambda_1\phi_1^p(x)(\tfrac{p-1}{p}\phi_1(x)^{\frac{p}{p-1}})^{-\alpha_1}\\
&\leq C^{k_1(p-1-\alpha_1)-k_2\beta_1}\lambda_1\phi_1^p(x)(\tfrac{p-1}{p})^{-\alpha_1}\max\{M^{\frac{-\alpha_1 p}{p-1}}, \mu^{\frac{-\alpha_1 p}{p-1}}\}\\
&\leq (\tfrac{q-1}{q})^{\beta_1}\mu^{\frac{q\beta_1}{q-1}} \leq \left(\tfrac{q-1}{q}\right)^{\beta_1}\phi_2^{\frac{q\beta_1}{q-1}}(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\delta.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&C^{k_2(q-1-\beta_2)-k_1\alpha_2}\lambda_{1,q}\phi_2^q(x)(\tfrac{q-1}{q}\phi_{1,q}(x)^{\frac{q}{q-1}})^{-\beta_2}\\
&\leq C^{k_2(q-1-\beta_2)-k_1\alpha_2}\lambda_1\phi_2^q(x)(\tfrac{q-1}{q})^{-\beta_2}\max\{M^{\frac{-\beta_2 q}{q-1}}, \mu^{\frac{-\beta_2 q}{q-1}}\}\\
&\leq (\tfrac{p-1}{p})^{\alpha_2}\mu^{\frac{p\alpha_2}{p-1}} \leq \left(\tfrac{p-1}{p}\right)^{\alpha_2}\phi_1^{\frac{p\alpha_2}{p-1}}(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\delta.
\end{aligned}$$

Donc, de (4.8) et pour $C > 0$ suffisamment petit, on a

$$C^{k_1(p-1)}\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p(x) \leq \underline{u}(x)^{\alpha_1}\underline{v}(x)^{\beta_1} \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\delta \tag{4.16}$$

et

$$C^{k_2(q-1)}\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q(x) \leq \underline{u}(x)^{\alpha_2}\underline{v}(x)^{\beta_2} \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\delta. \tag{4.17}$$

Soient $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\varphi, \psi \geq 0$. De la définition de $\underline{u}$ et $\underline{v}$ dans (4.8), un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx &= C^{k_1(p-1)} \int_\Omega \phi_1 |\nabla \phi_1|^{p-2} \nabla \phi_1 \nabla \varphi \, dx \\ &= C^{k_1(p-1)} \int_\Omega \left(|\nabla \phi_{1,p}|^{p-2} \nabla \phi_{1,p} \nabla (\varphi \phi_{1,p}) - |\nabla \phi_{1,p}|^p \varphi \right) dx \\ &= C^{k_1(p-1)} \int_\Omega \left(\lambda_1 \phi_{1,p}^p - |\nabla \phi_{1,p}|^p \right) \varphi \, dx\end{aligned} \tag{4.18}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx &= C^{k_2(q-1)} \int_\Omega \phi_{1,q} |\nabla \phi_{1,q}|^{q-2} \nabla \phi_{1,q} \nabla \psi \, dx \\ &= C^{k_2(q-1)} \int_\Omega \left(|\nabla \phi_{1,q}|^{q-2} \nabla \phi_{1,q} \nabla (\psi \phi_{1,q}) - |\nabla \phi_{1,q}|^q \psi \right) dx \\ &= C^{k_2(q-1)} \int_\Omega \left(\lambda_{1,q} \phi_{1,q}^q - |\nabla \phi_{1,q}|^q \right) \psi \, dx\end{aligned} \tag{4.19}$$

Alors, en combinant (4.10), (4.11) avec (4.16)-(4.19), on déduit que

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx \leq C^{k_1(p-1)} \lambda_{1,p} \int_\Omega \phi_{1,p}^p \varphi \, dx \leq \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} \varphi \, dx$$

et

$$\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx \leq C^{k_2(q-1)} \lambda_{1,q} \int_\Omega \phi_{1,q}^q \psi \, dx \leq \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi \, dx$$

Comme $\alpha_2, \beta_1 > 0$ donc

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1} w_2^{\beta_1} \varphi \, dx$$

et

$$\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx \leq \int_\Omega w_1^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_1} \psi \, dx,$$

pour tout $w_1 \geq \underline{u}$ et $w_2 \geq \underline{v}$ dans Ω. ∎

4.1.2 Sur solution

Ici, nous dintinguerons les cas régulier du cas singulier dont le traitement est différent du fait de la présence de singularité dans le problème (P) sous l'hypothèse (3.1).

Le cas régulier

Soient e_1 et e_2 l'unique solutions des problèmes de Dirichlet homogènes suivants:

$$\begin{cases} -\Delta_p e_1 = 1 \text{ dans } \Omega, \\ e_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q e_2 = 1 \text{ dans } \Omega, \\ e_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.20}$$

et $L > 0$ une constante vérifiant

$$L > \max_{i=1,2} \|e_i\|_\infty . \tag{4.21}$$

Lemme 4.3 *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que*

$$e_1(x) \geq c_1\phi_{1,p}(x) \quad et \quad e_2(x) \geq c_2\phi_{1,q}(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.22}$$

Proposition 4.4 *Sous les hypothèses (4.1) et (4.2), le problème (P) admet une sur-solution donnée par:*

$$(\overline{u}, \overline{v}) = (Ae_1, Be_2), \tag{4.23}$$

où $A, B > 0$ sont des constantes suffisamment grandes. En plus, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\overline{u}(x) \geq \underline{u}(x) \quad et \quad \overline{v}(x) \geq \underline{v}(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Démonstration. Soient A et B deux constantes positives qui vérifient le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} A^{p-1-\alpha_1} = B^{\beta_1} L^{\alpha_1+\beta_1} \\ B^{q-1-\beta_2} = A^{\alpha_2} L^{\alpha_2+\beta_2}. \end{cases} \tag{4.24}$$

Les constantes A et B existent du fait $\Theta > 0$ et on a:

$$\begin{cases} A^{(p-1-\alpha_1)(q-1-\beta_2)-\alpha_2\beta_1} = L^{(\alpha_1+\beta_1)(q-1-\beta_2)+(\alpha_2+\beta_2)\beta_1} \\ B = \left(A^{\alpha_2} L^{\alpha_2+\beta_2}\right)^{\frac{1}{q-1-\beta_2}} . \end{cases} \tag{4.25}$$

En plus, grâce (4.21) et puisque $\Theta > 0$, il est tout à fait possible de les choisir assez grandes.

En tenant compte de (4.24), (4.21), (4.23) et (4.1) avec $\alpha_1, \beta_1 > 0$, on obtient les estimations

$$\begin{aligned} &A^{p-1} = (AL)^{\alpha_1} (BL)^{\beta_1} \geq (Ae_1)^{\alpha_1} (Be_2)^{\beta_1} \\ &\geq \overline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} \geq \overline{u}^{\alpha_1} w_2^{\beta_1} \quad \text{dans } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

et

$$B^{q-1} = (AL)^{\alpha_2} (BL)^{\beta_2} \geq (Ae_1)^{\alpha_2} (Be_2)^{\beta_2}$$
$$\geq \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \geq w_1^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \ \text{ dans } \overline{\Omega},$$

pour tout $w_1 \leq \overline{u}$ et $w_2 \leq \overline{v}$ dans $\overline{\Omega}$. Par conséquent, en combinant avec (4.5), on conclu que

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \ dx = A^{p-1} \int_\Omega \varphi \ dx \geq \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} w_2^{\beta_1} \ \varphi \ dx \tag{4.26}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \ dx = B^{q-1} \int_\Omega \psi \ dx \geq \int_\Omega w_1^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \ dx, \tag{4.27}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\varphi, \psi \geq 0$, et pour tout $w_1 \leq \overline{u}$ et $w_2 \leq \overline{v}$ dans $\overline{\Omega}$. ■

Le cas singulier

Soit $\widetilde{\Omega}$ un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière régulière $\partial\widetilde{\Omega}$ tel que $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$. On définit $\widetilde{\phi}_{1,p}$ et $\widetilde{\phi}_{1,q}$ comme étant les fonctions propres associées, respectivement, aux premières valeurs propres $\widetilde{\lambda}_{1,p}$ et $\widetilde{\lambda}_{1,q}$ des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W_0^{1,q}(\Omega)$. C'est-à-dire

$$-\Delta_p \widetilde{\phi}_{1,p} = \lambda_{1,p} \phi_{1,p}^{p-1} \text{ dans } \Omega, \ \phi_{1,p} = 0 \text{ sur } \partial\widetilde{\Omega},$$
$$-\Delta_q \widetilde{\phi}_{1,q} = \lambda_{1,q} \phi_{1,q}^{q-1} \text{ dans } \Omega, \ \widetilde{\phi}_{1,q} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Etant donné que $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$ et que $\widetilde{\phi}_{1,p}, \widetilde{\phi}_{1,q}$ sont positive alors il existe une constante $\sigma > 0$ suffisamment petite telle que

$$\widetilde{\phi}_{1,p}(x), \widetilde{\phi}_{1,q}(x) \geq \sigma \ \text{ pour tout } \ x \in \overline{\Omega}. \tag{4.28}$$

Sur le domaine $\widetilde{\Omega}$, on définit les fonctions de torsion $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2 \in C^1(\widetilde{\Omega})$, qui sont des solutions des problèmes:

$$\begin{cases} -\Delta_p \widetilde{e}_1 = 1 \text{ dans } \widetilde{\Omega}, \\ \widetilde{e}_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\widetilde{\Omega} \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta_q \widetilde{e}_2 = 1 \text{ dans } \widetilde{\Omega}, \\ \widetilde{e}_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\widetilde{\Omega}, \end{cases} \tag{4.29}$$

et on note

$$\widetilde{L} := \max_{i=1,2} \|\widetilde{e}_i\|_\infty . \tag{4.30}$$

Un raisonnement similaire à la preuve du (Lemme 3.3) montre qu'il existe des constantes $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2 > 0$ telles que

$$\widetilde{e}_1 \geq \widetilde{c}_1 \widetilde{\phi}_{1,p} \ \text{ et } \ \widetilde{e}_2 \geq \widetilde{c}_2 \widetilde{\phi}_{1,q} \ \text{ dans } \widetilde{\Omega}. \tag{4.31}$$

Proposition 4.5 *Sous les hypothèses (4.1) et (4.3), le problème (P) admet une sur-solution donnée par:*

$$(\overline{u}, \overline{v}) = (A\widetilde{e}_1, B\widetilde{e}_2), \tag{4.32}$$

où $A, B > 0$ sont des constantes suffisamment grandes. En plus, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\overline{u}(x) \geq \underline{u}(x) \quad et \quad \overline{v}(x) \geq \underline{v}(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Démonstration. De la même manière que dans la preuve de la Proposition (3.4), les constantes A et B existent et vérifient le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} A^{p-1-\alpha_1} = \lambda(c_1\rho)^{\alpha_1}(BL_2)^{\beta_1} \\ B^{q-1-\beta_2} = \lambda(AL_1)^{\alpha_2}(c_2\rho)^{\beta_2}. \end{cases} \tag{4.33}$$

avec

$$\begin{cases} A^{(p-1-\alpha_1)(q-1-\beta_2)-\alpha_2\beta_1} = ((c_1\rho)^{\alpha_1}L^{\beta_1})^{q-1-\beta_2}((c_2\rho)^{\beta_2}L_1^{\alpha_2})^{\beta_1} \\ B = ((AL_1)^{\alpha_2}(c_2\rho)^{\beta_2})^{\frac{1}{q-1-\beta_2}}. \end{cases} \tag{4.34}$$

En plus, le fait que $\Theta > 0$ implique que les constantes A et B peuvent être choisi assez grandes, en fixant $\sigma > 0$ dans (4.28) suffisamment petit.

Donc, (4.33), (4.28), (4.31) et pour tout $\alpha_1, \beta_2 < 0$, on a

$$\begin{aligned} A^{p-1} &= \lambda(Ac_1\rho)^{\alpha_1}(BL_2)_1^{\beta} \geq \lambda(Ac_1\widetilde{\phi}_1)^{\alpha_1}(Be_2)^{\beta_1} \\ &\geq \lambda(Ae_1)^{\alpha_1}(Be_2)^{\beta_1} \geq \lambda\overline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} \geq \lambda\overline{u}^{\alpha_1}w^{\beta_1} \text{ dans } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^{q-1} &= \lambda(AL_1)^{\alpha_2}(Bc_2\rho)_2^{\beta} \geq \lambda(Ae_1)^{\alpha_2}(Bc_2\widetilde{\phi}_2)^{\beta_2} \geq \\ &\lambda(Ae_1)^{\alpha_2}(Be_2)^{\beta_2} \geq \lambda\overline{u}^{\alpha_2}\overline{v}^{\beta_2} \geq \lambda w^{\alpha_2}\overline{v}^{\beta_2} \text{ dans } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

pour tout $w_1 \leq \overline{u}$ et $w_2 \leq \overline{v}$ dans $\overline{\Omega}$. Par conséquent, en combinant avec (4.29), on conclu que

$$\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p-2}\,\nabla\overline{u}\nabla\varphi\, dx = A^{p-1}\int_\Omega \varphi\, dx \geq \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1}w_2^{\beta_1}\,\varphi\, dx \tag{4.35}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla\overline{v}|^{q-2}\,\nabla\overline{v}\nabla\psi\, dx = B^{q-1}\int_\Omega \psi\, dx \geq \int_\Omega w_1^{\alpha_2}\overline{v}^{\beta_2}\psi\, dx, \tag{4.36}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\varphi, \psi \geq 0$, et pour tout $w_1 \leq \overline{u}$ et $w_2 \leq \overline{v}$ dans $\overline{\Omega}$. ■

4.1.3 Démonstration du Théorème

(3.1)

Cas régulier $(\alpha_1, \beta_2 > 0)$

Soit $\rho > 0$ une constante telle que

$$\|\overline{u}\|_\infty, \|\overline{v}\|_\infty < \rho.$$

Alors, de (4.1)-(4.2), il existe une constante $M > 0$ telle que

$$u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq \overline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \leq \|\overline{u}\|_\infty^{\alpha_1} \|\overline{v}\|_\infty^{\beta_1} < M$$

et

$$u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \leq \|\overline{u}\|_\infty^{\alpha_2} \|\overline{v}\|_\infty^{\beta_2} < M,$$

pour tout $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Ceci assure que l'hypothèse (H.1) est vérifiée. Par conséquent, d'aprés le Théorème (2.2) , le problème (P) admet une solution $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour tout $\gamma \in (0, 1)$. De plus, cette solution est positive du fait que la sous-solution l'est également (voir 3.8).

Cas singulier $(\alpha_1, \beta_2 < 0)$

De (4.1), (4.3), et pour tout $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, on a

$$u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \leq C_1 d(x)^{\frac{p}{p-1}\alpha_1} \text{ pour tout } x \in \Omega$$

et

$$u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \leq C_2 d(x)^{\frac{q}{q-1}\beta_2} \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Alors, la condition (H.2) est satisfaite et par conséquent, le Théorème (2.3) garantie l'existence d'une solution positive $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour une certain $\gamma \in (0, 1)$, pour le problème (P). En plus, la solution obtenue (u, v) est positive vue la positivité de la sous-solution.

4.2 Absence de solutions

Théorème 4.6 *Supposons que (4.1) est vérifiée tel que*

$$\beta_1 = \tfrac{q}{p}(p - 1 - \alpha_1) \quad ou \quad \alpha_2 = \tfrac{p}{q}(q - 1 - \beta_2). \tag{4.37}$$

Alors, il existe une constante $\lambda_* > 0$ telle que le problème (P) n'a pas de solutions pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

Démonstration. Par contradiction, soit (u, v) une solution positive de (P). En multipliant, respectivement, la première et la deuxième équation dans (P) par u et v et en utilisant l'ingalité de Young, on obtient:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \lambda \int_\Omega u^{\alpha_1+1} v^{\beta_1} dx \leq \lambda \int_\Omega (\tfrac{\alpha_1+1}{p} u^p + \tfrac{p-1-\alpha_1}{p} v^{\frac{\beta_1 p}{p-1-\alpha_1}}) \, dx \tag{4.38}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla v|^q \, dx = \lambda \int_\Omega u^{\alpha_2} v^{\beta_2+1} dx \leq \lambda \int_\Omega (\tfrac{q-1-\beta_2}{q} u^{\frac{\alpha_2 q}{q-1-\beta_2}} + \tfrac{\beta_2+1}{q} v^q) \, dx. \tag{4.39}$$

En additionant (4.38) avec (4.39), d'apres (4.37), il s'ensuit que

$$\|\nabla u\|_p^p + \|\nabla v\|_q^q \leq \lambda \left((\tfrac{\alpha_1+1}{p} + \tfrac{q-1-\beta_2}{q}) \|u\|_p^p + (\tfrac{\beta_2+1}{q} + \tfrac{p-1-\alpha_1}{p}) \|v\|_q^q \right). \tag{4.40}$$

De (4.37) on déduit

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1+1}{p} + \frac{q-1-\beta_2}{q} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{p} \\ \frac{\beta_2+1}{q} + \frac{p-1-\alpha_1}{p} = \frac{\beta_1+\beta_2+1}{q}. \end{cases} \tag{4.41}$$

On note par $\lambda_{1,p}$ et $\lambda_{1,q}$ les premières valeures propores introduites dans (4.14) et (4.15). Elles sont caractérisées par

$$\lambda_{1,p} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} \quad \text{et} \quad \lambda_{1,q} = \inf_{v \in W_0^{1,q}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v\|_q^q}{\|v\|_q^q}. \tag{4.42}$$

Alors, en rassemblant (4.40), (4.41) et (4.42) on obtient

$$(\lambda_{1,p} - \tfrac{\alpha_1+\alpha_2+1}{p} \lambda) \|u\|_p^p + (\lambda_{1,q} - \tfrac{\beta_1+\beta_2+1}{q} \lambda) \|v\|_q^q \leq 0,$$

qui est une contradiction pour

$$0 < \lambda < \lambda_* = \min \left\{ \tfrac{p}{\alpha_1+\alpha_2+1} \lambda_{1,p}, \tfrac{q}{\beta_1+\beta_2+1} \lambda_{1,q} \right\}.$$

Donc, le problème (P) n'admet pas de solutions pour $\lambda < \lambda_*$. ∎

CHAPITRE 5

Conclusion

Nous avons présenté les théorèmes de sous et sur solutions, ainsi que leurs applications sur les systmes elliptiques quasi-linéaires dans le cas d'un système singulier et dans le cas d'un système régulier.

Bibliographie

[1] C. O. Alves & F. J. S. A. Corrêa, *On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators*, Appl. Math. Comput. 185 (2007), 727-736.

[2] D. Arcoya & D. Ruiz, The Ambrosetti-Prodi Problem for the p-Laplace Operator, *Comm. Partial Diff. Eqts.* 31 (2006), 849–865.

[3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, theorie et applications*, Masson, Paris, 1983

[4] S. Carl, V. K. Le & D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities. Comparaison principles and applications*, *Springer, New York,* 2007.

[5] J. Giacomoni, J. Hernandez & A. Moussaoui, *Quasilinear and singular systems: the cooperative case*, Contemporary Math. 540 (2011), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 79-94.

[6] J. Giacomoni, I. Schindler & P. Takac, *Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 6 (2007), 117-158.

[7] R. Glowinski & A. Marroco, *Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pé nalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non lin éaires*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. **9.R2** (1975), 41–76.

[8] D. Hai, *On a class of singular p-Laplacian boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 383 (2011), 619-626.

[9] D.Hana, Kh.Brahim & M.Abdelkrim , *Singular Quasilinear Elliptic Systems With(Sub-,Super-)Homogeneous Condition*

[10] D. Motreanu & A. Moussaoui, *Existence and boundedness of solutions for a singular cooperative quasilinear elliptic system*, Complex Var. Elliptic Equ. 59 (2014), 285-296.

[11] G.M. Lieberman, *Boundary Regularity For Solutions Of Degenerate Elliptic Equations,* Nonl. Anal. 12 (11) (1998), 1203-1219.

[12] I. Peral, *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian,* ICTP Lecture Notes of the Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Trieste, 1997.

[13] J. Giacomoni, J. Hernandez & P. Sauvy, *Quasilinear and singular elliptic systems*, 2012.