

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.Mira de Béjaia  
Faculté des Sciences Exactes  
Département Recherche Opérationnelle



## *Mémoire de Master*

En Mathématiques Appliquées

Spécialité

Mathématiques Financières

Thème :

---

Etude comparative de quelques estimateurs de la Valeur à Risque

---

Pésenté par :

Mlle Yaiche Warda.

Devant le jury composé de :

Président	M <sup>r</sup> Nassim Touche	M.C.A	U.A. Mira, Bejaia
Encadreur	M <sup>me</sup> Aicha Bareche	Professeur	U.A. Mira, Bejaia
Examinatrice	M <sup>me</sup> Safia Hocine	M.A.A	U.A. Mira, Bejaia
Examinatrice	M <sup>lle</sup> Zineb Harfouche	Doctorante	U.A. Mira, Bejaia

Année universitaire : 2020/2021

---

\*\*\*\*\**Remerciements*\*\*\*\*\*

Au terme de mon modeste travail, je tiens à remercier tout d'abord Dieu, le tout puissant de m'avoir accordé la volonté, force, santé, détermination et le courage afin d'accomplir mon mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma promotrice Mme : *Aïcha Bareche* pour son encadrement. Je suis également reconnaissante pour la confiance qu'elle m'a accordée, sa disponibilité et son engagement. Ses remarques constructives m'ont beaucoup apporté tout au long de ce travail.

Je tiens vivement à remercier Mr *Nassim Touche* pour l'immense honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements chaleureux s'adressent également à Mme *Safia Hocine* et Mlle *Zineb Harfouche* d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce modeste travail.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste mémoire. Enfin, je tiens à remercier ma famille et particulièrement mes parents pour leur affection et leur soutien tout au long de mes études.

---

\*\*\*\*\**Dédicaces*\*\*\*\*\*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*\*\*Mon très cher père\*\**

*\*\*Ma très chère mère\*\**

*\*\*Toute ma famille\*\**

*\*\*Tous mes ami(e)s\*\**

# Table des matières

Table des figures . . . . .	iii
Liste des tableaux . . . . .	v
Introduction générale . . . . .	1
<b>1 Rappels et généralités sur la VaR</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction : . . . . .	2
1.2 Définitions et généralités . . . . .	2
1.2.1 Fonction de répartition . . . . .	2
1.2.2 Fonction de queue (survie) . . . . .	3
1.2.3 Inverse généralisé . . . . .	3
1.2.4 Fonction de répartition empirique . . . . .	3
1.2.5 Statistique d'ordre . . . . .	3
1.2.6 Point terminal (End point) . . . . .	4
1.3 Quantile . . . . .	4
1.4 Les mesures de risque . . . . .	5
1.4.1 Propriétés d'une mesure de risque . . . . .	5
1.4.2 Mesure de risque cohérente . . . . .	6
1.4.3 Mesure de risque monétaire . . . . .	6
1.5 Valeur à Risque (VaR) . . . . .	6
1.5.1 Définition de la VaR . . . . .	6
1.5.2 Formulation mathématique de la VaR . . . . .	7
1.5.3 Avantages et inconvénients de la VaR . . . . .	7
1.5.4 La Valeur à Risque conditionnelle . . . . .	8
1.5.5 Utilisation de la VaR . . . . .	8

---

1.6	Conclusion . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Synthèse sur les méthodes d'estimation de la VaR</b>	<b>10</b>
2.1	Introduction . . . . .	10
2.1.1	Les méthodes paramétriques . . . . .	10
2.1.2	Les méthodes non paramétriques . . . . .	12
2.1.3	Les méthodes semi-paramétriques . . . . .	17
2.2	Conclusion . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Comparaison de quelques estimateurs de la VaR : Exemple d'application et simulation</b>	<b>22</b>
3.1	Introduction . . . . .	22
3.2	Etude basée sur la simulation . . . . .	23
3.2.1	Description des estimateurs utilisés . . . . .	23
3.2.2	Description des distributions utilisées . . . . .	23
3.2.3	Algorithme 1 : Algorithme de calcul de la VaR par la méthode semi-paramétrique Champernowne-Beta . . . . .	25
3.2.4	Résultats graphiques et numériques . . . . .	26
3.3	Etude basée sur les données réelles . . . . .	33
3.3.1	Description des données utilisées . . . . .	33
3.3.2	Résultats graphiques et numériques . . . . .	37
	Conclusion générale . . . . .	43
	Bibliographie . . . . .	43
	Annexe A : Données représentant les prix de clôture en Euros . . . . .	47
	Annexe B : Les codes source . . . . .	49

## Table des figures

1.1	Exemple de Valeur à Risque . . . . .	7
2.1	Dépassement de seuil (P.O.T) . . . . .	19
3.1	Fonction de répartition de la distribution lognormale . . . . .	24
3.2	Fonction de répartition de la distribution Weibull . . . . .	25
3.3	Boite à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution Weibull	26
3.4	Estimateur à noyau gamma de la densité Weibull . . . . .	28
3.5	Estimateur à noyau BS de la densité Weibull . . . . .	29
3.6	Boite à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution lo- gnormale . . . . .	30
3.7	Estimateur à noyau gamma de la densité lognormale . . . . .	32
3.8	Estimateur à noyau BS de la densité lognormale . . . . .	32
3.9	Le graphe des prix de clôture. . . . .	34
3.10	Histogramme des prix de clôture. . . . .	34
3.11	Le graphe des rendements journaliers. . . . .	35
3.12	Fonction de répartition des prix de clôture . . . . .	36
3.13	Fonction de répartition des prix de clôture zoomée . . . . .	36
3.14	Fonction de répartition des rendements . . . . .	37
3.15	<i>Boite à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution des prix de clôture</i> . . . . .	38
3.16	Boite à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution des rendements . . . . .	40

## Liste des tableaux

3.1	<i>Les valeurs prises par les estimateurs Champernowne-Beta de la VaR avec la distribution Weibull.</i>	26
3.2	<i>Ratio MSE pour les estimateurs Champernowne-Beta avec la distribution Weibull</i>	27
3.3	<i>Les paramètres de GLD pour la distribution Weibull</i>	27
3.4	<i>La VaR estimée par GLD pour la distribution Weibull</i>	27
3.5	<i>Les valeurs prises par les estimateurs non paramétriques de la VaR avec la distribution Weibull</i>	28
3.6	<i>La VaR estimée par les estimateurs Champernowne-Beta avec la distribution lognormale</i>	29
3.7	<i>Ratio MSE pour tous les estimateurs Champernowne-Beta avec la distribution lognormale</i>	30
3.8	<i>Les paramètres de GLD pour la distribution lognormale</i>	31
3.9	<i>La VaR estimée par GLD pour la distribution lognormale</i>	31
3.10	<i>Les valeurs prises par les estimateurs non paramétriques de la VaR avec la distribution lognormale</i>	31
3.11	<i>Description de la série des variations des prix.</i>	33
3.12	<i>Description de la série des variations des rendements.</i>	35
3.13	<i>la VaR estimée par les estimateurs Champernowne-Beta pour les prix de clôture.</i>	38
3.14	<i>Les rapports de MSE des estimateurs Champernowne-Beta utilisés pour le prix du clôture.</i>	39
3.15	<i>Les paramètres de GLD pour la distribution des prix de clôture</i>	39
3.16	<i>La VaR estimée par GLD pour la distribution des prix de clôture</i>	39
3.17	<i>La VaR pour les estimateurs non paramétriques avec la distribution des prix.</i>	39
3.18	<i>La VaR estimée par les estimateurs Champernowne-Beta pour les rendements.</i>	40

---

3.19	<i>Les rapports de MSE des estimateurs Champnowne-Beta utilisés sur les rendements.</i>	41
3.20	<i>Les paramètres de GLD pour la distribution des rendements</i>	41
3.21	<i>La VaR estimée par GLD pour la distribution des rendements</i>	41
3.22	<i>La VaR pour les estimateurs non paramétriques avec la distribution des rendements.</i>	41
3.23	<i>La VaR par différentes méthodes d'estimation pour les rendements avec seuil 0.95</i>	42



## Introduction générale

La mesure et la gestion des risques sont devenues des enjeux majeurs pour les opérations de marchés financiers, des actuaires, etc. Il est évident que la première tâche des gestionnaires est de prévoir et de se prémunir contre de tels risques.

En 1993, le Groupe des Trente, composé de banquiers, d'autorités de contrôle et d'académiciens, a publié un document qui recommandait notamment l'usage d'une nouvelle mesure de risque nommée Valeur à Risque (Value at Risk en anglais) comme critère de mesure pour le risque de marché. Cet événement a concouru à l'adoption de cette nouvelle mesure sur le secteur financier et a favorisé son développement parmi les entreprises américaines (pour un historique complet de la notion de Valeur à Risque et sa diffusion, se rapporter au livre de Downd (2005) [14]). La Valeur à Risque est intéressante (comparée par exemple à la variance, qui était la mesure de risque standard de Markowitz (1952) [27], ou au cadre moyenne-variance) puisqu'il s'agit d'une mesure du risque à la baisse, c'est-à-dire qu'elle se concentre uniquement sur les pertes potentielles importantes. Un de ses intérêts est qu'elle donne une idée sur la queue de la distribution, qui ne peut pas être négligeable lorsqu'on s'extrait du cadre Gaussien.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons à l'étude et l'estimation de la Valeur à Risque, qui n'est rien d'autre qu'un quantile. L'estimation du quantile a été intensivement étudiée dans la littérature (voir Chen et Tang (2005) [11], Gouriéroux et al. (2000) [18], Harrell et Darvis (1982) [20], Nadaraya (1964) [29], Parzen (1979) [32], Padgett(1986) [31]). Mais la plupart de ces estimateurs souffrent soit d'un biais ou d'inefficacité pour les niveaux de probabilité élevés. Les trois techniques statistiques d'estimation du quantile, particulièrement de la VaR, utilisées dans la littérature sont : méthodes paramétriques développées par la banque JP Morgan (méthode univariée, méthode variance covariance, Méthode RiskMetrics), méthodes semi paramétriques (Champernwone généralisée-Beta [5], lambda généralisée [45], théorie des valeur extrême et POT [34]) , et méthodes non paramétriques (méthode du noyau [33,39,43]).

L'objectif de ce travail est d'effectuer une synthèse sur les méthodes d'estimation de la VaR existant dans la littérature. Une étude comparative de quelques estimateurs, basée sur un exemple d'application et les résultats de simulation, sera réalisée. Ce mémoire comporte une introduction, trois chapitres et une conclusion.

Dans le premier chapitre, nous présentons les divers outils mathématiques que nous serons amenés à utiliser dans les chapitres suivants. En particulier, nous rappelons quelques définitions relativement à la statistique d'ordre, le point terminal, les quantiles, les mesures des risques.

Dans le second chapitre, nous abordons les méthodes d'estimation de la Valeur à Risque, à savoir les méthodes paramétriques, les méthodes semi-paramétriques et les méthodes non-paramétriques.

Le dernier chapitre est consacré à effectuer une étude numérique basée sur la simulation et des données réelles, afin de comparer quelques estimateurs de la VaR.

# 1

## Rappels et généralités sur la VaR

### 1.1 Introduction :

Apparue pour la première fois à la fin des années 80 dans le domaine de l'assurance, la Value-at-Risk (VaR) est devenue en moins d'une dizaine d'années, une mesure de référence du risque sur les marchés financiers. C'est la banque JP Morgan, qui a popularisé ce concept avec son système RiskMetrics implémenté en 1994. La Value-at-Risk est notamment utilisée dans la réglementation prudentielle définie dans le cadre des accords de Bâle II (le comité d'autorités supervisorales bancaires du groupe des dix principaux pays) [6].

### 1.2 Définitions et généralités

Le lecteur peut se référer à [17, 34].

#### 1.2.1 Fonction de répartition

La fonction de répartition, ou fonction de distribution cumulative, d'une variable aléatoire réelle  $X$  est la fonction  $F_X$  qui, à tout réel  $x$ , associe la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale. Elle est définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

### 1.2.2 Fonction de queue (survie)

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f_X$  et de fonction de répartition  $F_X$ . On appelle la fonction de queue la fonction définie comme suit :

$$\bar{F}_X = 1 - F(x).$$

### 1.2.3 Inverse généralisé

L'application :

$$\vec{F}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}, \quad p \in [0, 1]$$

est appelée inverse généralisé de  $F$ .

L'inverse généralisé  $\vec{F}$  coïncide avec l'inverse  $F^{-1}$  lorsque la fonction  $F$  est continue et strictement croissante.

### 1.2.4 Fonction de répartition empirique

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de taille  $n$ , issu d'une variable aléatoire  $X$ , de fonction de répartition  $F$ .

Notons  $F_n$  la fonction de répartition de l'échantillon :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ \frac{i-1}{n} & \text{si } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \geq x_n. \end{cases}$$

### 1.2.5 Statistique d'ordre

On considère un échantillon de taille  $n$ , issu d'une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F$ . Il est parfois nécessaire d'étudier le  $n$ -uplet ordonné des observations classées par ordre croissant où décroissant dans le but de :

- Recherche des valeurs trop grandes ou trop petites.
- Etudier la loi de la plus grande valeur d'une série d'observations.

On appelle statistique d'ordre notée  $X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)}$ , les variables aléatoires ordonnées :

$$\min(X_1, \dots, X_n) = X_{(1,n)} \leq \dots \leq X_{(n,n)} = \max(X_1, \dots, X_n).$$

On note  $M_n = X_{(n,n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

### Densité conjointe de n statistique d'ordre

**Lemme 1.1** : Soit  $X_1, \dots, X_n$  n variables aléatoires i.i.d (Indépendantes Identiquement Distribuées) issues d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F_X$  et de densité  $f_X$  continue, alors la densité de probabilité de  $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})$  est donnée par :

$$f_{(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})}(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f_X(x_i), \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

### 1.2.6 Point terminal (End point)

On définit le point terminal (End point) d'une fonction de répartition  $F$  comme le max du support de la distribution (ou la borne supérieure) :

$$x_F = \sup\{x \in \mathfrak{R} : F_X(x) < 1\}.$$

## 1.3 Quantile

En statistiques mathématiques, on parle de quantiles alors que dans le monde de la gestion du risque (finance ou actuariat par exemple) on parle plutôt de Valeur à Risque. Ces deux termes représentent un seul et même concept [6].

### Définition 1.1. Quantile d'ordre $\alpha$

Soit  $\alpha \in [0, 1]$ , on appelle quantile d'ordre  $\alpha$  de la fonction de répartition  $F$ , la quantité

$$Q_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{t \in \mathfrak{R} : F(t) \geq \alpha\}.$$

En particulier :

- Si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $Q_\alpha$  représente la médiane.
- Si  $\alpha \in \{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\}$ ,  $Q_\alpha$  représente le quartile.

### Définition 1.2. Quantile empirique d'ordre $\alpha$

Soit  $\alpha \in [0, 1]$ , on appelle quantile empirique d'ordre  $\alpha$  de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ , la quantité :

$$Q_n(\alpha) = F_n^{-1}(\alpha) = \inf\{t \in \mathfrak{R} : F_n(t) \geq \alpha\}.$$

**Définition 1.3. Quantile extrême**

Le quantile extrême est un quantile d'ordre  $(1 - p)$ , défini par :

$$x_{1-p} = \inf\{x \in \mathfrak{R} : F(x) \geq 1 - p\} = F^{-1}(1 - p),$$

où  $p$  est proche de zéro.

**1.4 Les mesures de risque**

Le lecteur peut se référer à [6, 8, 14].

**Définition 1.4. Le risque**

Dans la littérature et au sein de l'industrie, le risque est la valeur potentielle d'une conséquence négative non désirée d'un événement ou d'une activité.

**Définition 1.5. La mesure de risque**

La mesure de risque est un objectif central de la gestion des risques. Mathématiquement, une mesure de risque est une fonction qui assigne à une variable aléatoire un nombre réel. Idéalement, cette mesure doit bien quantifier le risque en plus d'être facile à comprendre et à interpréter. Les deux mesures de risque les plus populaires actuellement sont la Valeur à Risque (VaR) et la Valeur à Risque Conditionnelle (CVaR), communément appelée Expected Shortfall.

Soit  $(\Omega, A)$  un espace mesurable et  $X$  un ensemble de variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ .

On appelle mesure de risque, une application :

$$\rho : X \rightarrow \mathfrak{R}.$$

**1.4.1 Propriétés d'une mesure de risque**

Une mesure de risque  $\rho : X \rightarrow \mathfrak{R}$  a les propriétés suivantes :

**1. Monotonie :**

Soient  $a, b \in X$ , si  $a \leq b$  alors  $\rho(a) \leq \rho(b)$ .

**2. Invariance par translation :**

$\rho(a + r_0) = \rho(a) + r_0$  pour tout  $a \in X$  et  $r_0 \in \mathfrak{R}$ .

**3. Homogénéité positive :**

Soient  $a \in X$  et  $k \geq 0$ , on a  $\rho(ka) \leq k\rho(a)$ .

**4. Sous-additivité :**

soient  $a, b \in X$ , on a  $\rho(a + b) \leq \rho(a) + \rho(b)$ .

### 1.4.2 Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque est cohérente si elle satisfait des propriétés telles que la monotonie, l'invariance par translation, l'homogénéité positive et la sous-additivité.

### 1.4.3 Mesure de risque monétaire

Une mesure de risque est monétaire si elle est invariante par translation et monotone.

## 1.5 Valeur à Risque (VaR)

### 1.5.1 Définition de la VaR

La Valeur à Risque, plus connue sous le nom anglais Value-at-Risk ou VaR, est une mesure de la perte potentielle que peut subir un portefeuille d'instruments financiers suite aux fluctuations des facteurs de marché. Statistiquement, la VaR peut être définie comme étant un quantile de la distribution des pertes et profits (*P&L*) [6]. Les distributions P&L sont généralement exprimées sous forme de rendements géométriques,  $R_t$ , définis par :

$$R_t = \ln \left( \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \right).$$

Où

- $P_t$  est la valeur d'un actif ou d'un portefeuille à la date  $t$ .
- $D_t$  est l'ensemble des paiements intermédiaires obtenus entre les dates  $t - 1$  et  $t$ .

La VaR permet de répondre à la question suivante : Combien l'établissement financier peut-il perdre avec une probabilité  $(1 - \alpha)$  pour un horizon de temps  $h$  fixe ?

Donc la VaR dépend de deux données essentielles :

- **Seuil de confiance :**

Le seuil de confiance  $(1 - \alpha)$  associé à la VaR qui correspond à la probabilité de ne pas dépasser cette mesure de risque.

En pratique, le choix du seuil de confiance dépend de plusieurs facteurs. Nous pouvons citer parmi d'autres, le niveau d'aversion au risque des gestionnaires, la réserve en capital de la banque et la stratégie d'investissement.

- **Horizon de temps :**

Aussi appelé période de détention  $h$  ou "holding period", qui correspond à la période sur laquelle la variation de la valeur du portefeuille est mesurée.

Le choix de l'horizon de temps correspond en principe aux intervalles d'évaluation de la performance de l'entreprise, ou aux périodes de décisions relatives à la gestion des risques.

La Valeur à Risque peut être calculée pour différents horizons de risque (une journée, une semaine, un mois, un trimestre, etc).

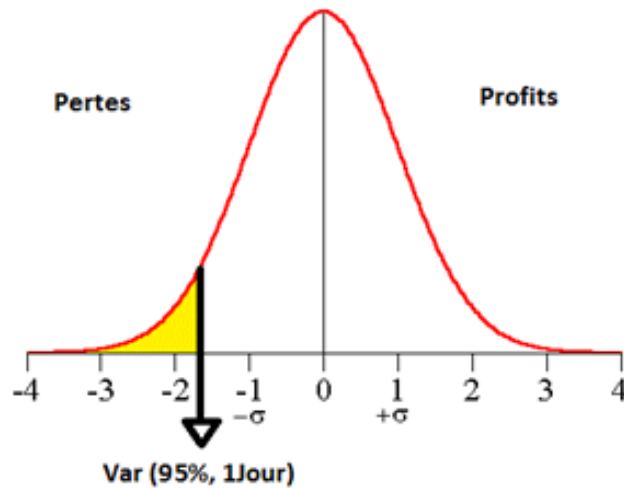


FIGURE 1.1 – Exemple de Valeur à Risque .

### 1.5.2 Formulation mathématique de la VaR

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

La Valeur à Risque de  $X$  au niveau  $\alpha$  est définie comme suit :

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha).$$

Cette définition signifie qu'avec une certitude de  $(100\alpha)\%$ , le montant du risque ne devrait pas dépasser la  $VaR_\alpha(X)$ . Autrement dit :

$$P\{VaR_\alpha(X)\} \leq \alpha.$$

Ou bien :

$$P\{VaR_\alpha(X)\} > 1 - \alpha.$$

### 1.5.3 Avantages et inconvénients de la VaR

– **Avantages de la VaR :**

- Elle est un outil de gestion d'un portefeuille d'instruments financiers pour optimiser le couple risque/rentabilité.
- Elle permet de tenir compte des effets de diversification des portefeuilles.
- Elle peut être utilisée même sur des distributions de rendements qui ne suivent pas une loi normale.

– **Inconvénients de la VaR :**

- La VaR correspond à un quantile donné, elle ne prend pas en compte les risques au-delà de ce quantile.
- La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente parcequ'elle ne satisfait pas la condition de sous-additivité.

**Remarque :**

La VaR est sous-additive si la distribution des *P&L* est gaussienne.

#### 1.5.4 La Valeur à Risque conditionnelle

La Valeur à Risque Conditionnelle (CVaR), aussi appelée Expected Shortfall (ES), est une mesure alternative qui a gagné en popularité au cours des dernières années. Contrairement à la VaR, elle est une mesure de risque cohérente qui prend en compte l'ensemble des pertes dans la queue de gauche de la distribution.

#### 1.5.5 Utilisation de la VaR

La VaR est utilisée aussi bien par les institutions financières et les régulateurs que par les entreprises non financières. Les institutions financières ont été les premières à utiliser cet outil. En effet, la diversification des risques financiers, la complexité des nouveaux instruments financiers et l'évolution de la régulation ont poussé les institutions financières à mettre en place des systèmes centralisés de surveillance et de management des risques. De leur côté, les réglementations doivent évaluer ces risques financiers afin d'imposer aux institutions financières un niveau minimal de capitaux disponibles. Par ailleurs, le management centralisé des risques est utile à toute entreprise exposée à des risques financiers. Les entreprises non financières, comme les multinationales par exemple, utilisent quant à elles la VaR pour se prémunir contre le risque de change.

La VaR peut donc être utilisée :

- De façon passive : **reporting des risques**

L'objectif est de mesurer un risque agrégé (1ère utilisation par la banque JP Morgan). C'est une mesure de risque simple à interpréter car elle s'exprime sous forme d'un montant maximal de perte, et elle permet de synthétiser en une seule mesure une appréciation sur le risque global.

- De façon défensive : **contrôle des risques**

L'objectif est de déterminer des positions limites à ne pas dépasser, qui seront imposées aux commerçants ou aux unités d'affaires. Au-delà de ces limites, il n'est plus possible de prendre une position sans l'autorisation d'un responsable risque. Cette méthode vise à limiter la prise de risque au-delà d'une limite acceptable. Pour être pertinent, le contrôle des



risques doit être global. Les développements informatiques associés, sont donc des applications dites ” transverses ”, souvent complexes, regroupant des informations en provenance de tous les centres d’activités.

- De façon active : **management des risques**

La VaR est utilisée dans l’allocation du capital entre les commerçants, les produits et ou les institutions.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques rappels sur la statistique d’ordre, les quantiles, ainsi que la VaR.

Ces définitions sont indispensables pour le chapitre suivant où nous nous intéressons aux méthodes d’estimation de quantiles (VaR).

# 2

## Synthèse sur les méthodes d'estimation de la VaR

### 2.1 Introduction

L'estimation des quantiles a été intensivement étudiée (voir Azzalini (1981) [1], Chen et Tang (2005) [11], Gouriéroux et al. (2000) [18], Harrel et Davis (1982) [20]). Dans cette partie, nous allons présenter différentes techniques d'estimation de la VaR. Ces différentes méthodes se répartissent en 3 catégories :

- les méthodes d'estimation paramétrique.
- les méthodes d'estimation semi-paramétrique.
- les méthodes d'estimation non paramétrique.

#### 2.1.1 Les méthodes paramétriques

La méthode paramétrique a été proposée et développée par J. P. Morgan en 1994. C'est un modèle statistique qui suppose que les changements des prix d'un portefeuille sont distribués selon une loi normale.

Les méthodes d'estimation paramétrique de la VaR reposent sur 3 hypothèses simplificatrices :

- Les distributions des rendements des actifs qui composent le portefeuille suivent une loi normale.

- La relation entre les variations de la valeur du portefeuille et les variations des variables du marché sont linéaires.
- Les produits dérivés sont linéaires et les obligations peuvent être ramenées à des pay-offs linéaires. La seule exception à cette condition étant les options.

Nous allons donc décrire dans cette partie trois approches d'estimation paramétrique de la VaR :

- l'approche univariée.
- l'approche variance-covariance.
- la méthode RiskMetrics.

#### a) Approche univariée

On considère la VAR associée à la distribution  $P\&L$  (Pertes et Profits) d'un seul actif (change, action, obligation, etc). En d'autres termes, on considère le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier et on calcule la VaR directement sur ce rendement agrégé.

(H1) On suppose que la distribution des  $P\&L$  à la date  $t$  est une distribution normale d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  :

$$R_t \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2).$$

Sous l'hypothèse H1, la VaR associée à un taux de couverture  $\alpha$  est définie par :

$$VAR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha),$$

où :  $\mu$  et  $\sigma^2$  représentent respectivement, l'espérance et la variance de la distribution des  $P\&L$  et  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale  $N(0,1)$ .

#### b) Approche variance covariance

Il s'agit d'une approche multivariée de la VaR. Au lieu de considérer le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier, on prend en compte explicitement les corrélations entre les actifs du portefeuille.

La formule de calcul de la VaR associée à un taux de couverture  $\alpha$  est la suivante :

$$\begin{aligned} VAR_t(\alpha) &= -E[R_t(P)] - \sqrt{\text{Var}[R_t(P)]}\Phi^{-1}(\alpha) \\ &= -x'_t\mu_t - (x'_t\Gamma_t x_t)^{\frac{1}{2}}\Phi^{-1}(\alpha). \end{aligned}$$

où :

- $R_t(P)$  est le rendement du portefeuille d'actifs à la date  $t$ .
- Le vecteur  $x'_t$  représente le poids des actifs dans le portefeuille.
- Le vecteur  $\mu_t$  représente l'espérance des rendements des actifs du portefeuille.
- La matrice  $\Gamma_t$  est la matrice de covariance des actifs du portefeuille.

#### c) Méthode RiskMetrics

Ce modèle a été développé par la banque JP Morgan au début des années 90. Il diffère

de l'approche variance-covariance au niveau du calcul de la volatilité des rendements du portefeuille.

La VaR issue de RiskMetrics définie pour un taux de couverture  $\alpha$  peut s'écrire sous la forme :

$$\text{VAR}_t(\alpha) = -E [R_t(P)] - (v_t)^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}(\alpha),$$

où :

- $v_t$  est estimée à partir de la formule  $v_t = \lambda v_{t-1} + (1 - \lambda) (r_{t-1}(P))^2$ ,  $r_{t-1}$  est la valeur passée de la volatilité des rendements  $R(P)$ , et  $\lambda \in [0, 1]$ .
- $\alpha$  taux de couverture (on fixe souvent  $\alpha = 0,95$ ).

**Remarque :**

Le principal avantage des méthodes d'estimation paramétrique est que les calculs sont simples et rapides, et nécessitent de connaître uniquement la matrice de variance-covariance des rendements du portefeuille. Cependant, ces méthodes restent inadaptées aux portefeuilles " non linéaires ", aux queues de distribution épaisses et aux distributions non normales de rendements.

**2.1.2 Les méthodes non paramétriques**

Les méthodes non paramétriques représentent une alternative intéressante aux méthodes paramétriques, car elles ne nécessitent aucune connaissance sur la forme de la distribution  $F$ . La méthode la plus connue dans la littérature est la méthode du noyau.

**a) Méthode du noyau**

**Définition 2.1.** *La méthode du noyau est l'une des méthodes d'estimation non paramétrique la plus utilisée. Rosenblatt (1956) [39], suivi de Parzen (1962) [33], ont proposé une classe d'estimateurs à noyau d'une densité de probabilité. Cet estimateur est une fonction de deux paramètres : Le noyau  $k$  et le paramètre de lissage  $h$ . Le succès rencontré par cet estimateur s'explique par sa simplicité, sa flexibilité et aussi ses propriétés de convergence. Il laisse à l'utilisateur une grande latitude non seulement dans le choix du noyau  $k$ , mais aussi dans le choix du paramètre de lissage  $h$ .*

**Définition 2.2.** *Soit  $k$  une fonction intégrable définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .*

*Si  $\int_{\mathbb{R}} k(u)du = 1$ , alors  $k$  est dit noyau.*

*Si  $k \geq 0$ , le noyau  $k$  est dit positif.*

*Si  $k(u) = k(-u)$ , le noyau  $k$  est dit symétrique.*

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une séquence de variables aléatoires (i.i.d) de fonction de densité commune  $f$  et de fonction de répartition  $F$ . Un estimateur à noyau de la fonction de densité  $f$  en un point  $x$  est donné par :

$$\hat{f}_h(x) = \left(\frac{1}{nh}\right) \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - X_i}{h}\right),$$

où  $K(x) = \int_{-\infty}^x k(t)dt$ ,  $k$  étant un noyau et  $h$  le paramètre de lissage. L'estimation de  $F$  basée sur le noyau est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{F}_h(x) &= \int_{-\infty}^x K\left(\frac{t-x}{h}\right) dF_h(t) \\ &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x k\left(\frac{X_i-t}{h}\right) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i-x}{h}\right).\end{aligned}$$

- **Choix du paramètre de lissage**

Le choix de paramètre de lissage est crucial dans la méthode d'estimation à noyau. Ce paramètre est indispensable pour la convergence de l'estimateur à noyau et l'efficacité du lissage et la qualité de l'estimation. Plusieurs méthodes pour choisir ce paramètre ont été développées dans la littérature et quelques études comparatives ont été effectuées entre ces méthodes. Ces techniques sont regroupées en deux classes. On présente ici les principales méthodes de chaque classe.

- **Première classe**

La majorité des méthodes de cette classe ont été proposés avant 1990. Dans ce qui suit, on cite quelques méthodes les plus connues.

- **La méthode de validation croisée non biaisée** Le critère consiste à choisir le paramètre de lissage qui minimise un estimateur convenable de :

$$UCV(h) = \int_{\mathbb{R}} f_h^2(x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} f_h(x) f(x) dx.$$

On passe par plusieurs étapes pour arriver à ce critère de la validation croisée qui est donné par :

$$UCV(h) = \frac{\mathcal{R}(k)}{nh} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(nh)^2} k\left(\frac{x-x_i}{h}\right) k\left(\frac{x-x_j}{h}\right) dx - \frac{2}{n(n-1)h} k\left(\frac{x_i-x_j}{h}\right) \right].$$

Nous noterons  $h_{ucv}$  l'estimateur de  $h$  qui minimise  $UCV(h)$ . La popularité de cette méthode est due à la motivation intuitive et au fait que cet estimateur est asymptotiquement optimal sous de faibles conditions.

- **La méthode de validation croisée biaisée**

Cette méthode a été proposée par Scott et Terrell (1987) [40] pour remédier aux problématiques de la validation croisée non biaisée. Il s'agit d'introduire un biais dans la formule de UCV afin de réduire sa variance.

**Proposition** (Scott et Terrell [40]) Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon issu d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de densité  $f$ . Pour un noyau  $k$ , on obtient :

$$BCV(h) = \frac{h^4}{4} \sigma_2^2(k) \left[ R(f_h'') - \frac{R(k'')}{nh^5} \right] + \frac{R(k)}{nh}.$$

- **Deuxième classe**

Beaucoup de méthodes ont été proposées dans cette classe. On présente ici quelques approches :

– **La règle du pouce (Rule of thumb)**

L'idée de cette méthode revient à Deheuvels (1977) [13], avant d'être publiée par Silverman (1986) [43]. Le choix du paramètre de lissage par cette méthode consiste à remplacer la partie inconnue  $R(f_h'')$  dans l'expression suivante :

$h_{AMISE} = \left[ \frac{R(k)}{nR(f'')\sigma_2^2} (k) \right]^{\frac{1}{5}}$ , par une distribution classique afin d'obtenir un estimateur pour  $h$ .

Si on choisit  $f$  comme étant la distribution normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ , on a alors :

$$R(f_h'') = \int (f_h''(x))^2 dx = \frac{3}{8\sqrt{\pi}} \sigma^{-\frac{1}{5}}.$$

De plus, si on utilise un noyan gaussien, alors la valeur de  $h_{AMISE}$ , que l'on note dans ce cas par  $h_{rot}$ , sera comme suit :

$$h_{rot} = (4\pi)^{-1/10} \left[ \frac{3}{8} \pi^{-1/2} \sigma \right] n^{-1/5} = \left( \frac{4}{3} \right)^{1/5} \sigma n^{-1/5} = 1.06 \sigma n^{-1/5}.$$

Il suffit donc d'estimer  $\sigma$  à partir des données et de le remplacer dans la formule de  $h_{rot}$ .

– **La méthode de ré-injection (plug-in)**

En adoptant le critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Intégrée (MISE), Scott et al. (1977) [41] choisissent d'estimer la fonction  $R(f_h'')$  dans l'expression de  $h_{AMISE}$  donnée précédemment à l'aide de l'estimateur naturel  $\hat{R}_h(f'')$ , défini par :

$$\hat{R}_h(f_h'') = R(f_h''),$$

où  $f_h''$  est définie comme suit :

$$f_h''(x) = \frac{1}{nh^3} \sum_{i=1}^n k'' \left( \frac{x - x_i}{h} \right).$$

En choisissant par exemple le noyan gaussien : L'estimateur  $\hat{R}_h(f'')$  devient comme suit :

$$\hat{R}_h(f'') = \frac{3}{8\sqrt{\pi}n^2h^9} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ h^4 - (x_i - x_j)^2 h^2 + \frac{1}{12} (x_i - x_j)^4 \right] \exp \left[ \frac{(x_i - x_j)^2}{4h^2} \right].$$

Il est important de noter que la largeur de la fenêtre  $h$  contrôlant l'estimateur  $\hat{R}_h(f'')$  de  $R(f'')$  est identique à largeur de la fenêtre intervenant dans l'estimateur  $f_h$ . Scott et al [41] proposent finalement d'injecter l'estimateur  $\hat{R}_h(f'')$  dans l'expression de  $h_{AMISE}$ , on obtient l'estimateur de  $h$  noté  $h_p$  :

$$h_p = \left[ \frac{R(k)}{n\hat{R}_h(f'')\sigma_2^2(k)} \right]^{1/5}.$$

- **Choix du noyau**

- Noyaux symétriques : Les noyaux les plus utilisés dans l'estimation de la densité de probabilité sont :

- Noyau uniforme  $K(u) = \frac{1}{2}1_{[-1,1]}(u)$ .
- Noyau triangulaire  $K(u) = (1 - |u|)1_{[-1,1]}(u)$ .
- Noyau gaussien  $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)$ .
- Noyau d'Epanechnikov  $K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2)1_{[-1,1]}(u)$ .
- Noyau Triweight  $K(u) = \frac{35}{32}(1 - u^2)^3 1_{[-1,1]}(u)$ .

- Noyaux asymétriques

- **Noyau Beta**

Le noyau beta a été proposé par Chen (1999) [9] pour l'estimation non paramétrique de la courbe de régression et des densités unidimensionnelles définies sur un support  $[a, b]$ . L'idée de Chen (1999) [9] est d'utiliser le noyau Beta pour estimer la densité à support compact  $[0, 1]$  et de régler ainsi le problème de biais aux bornes.

L'estimateur sera alors de la forme :

$$f_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_\beta \left( x_i, \frac{x}{h} + 1, \frac{1-x}{h} + 1 \right), \quad (2.1)$$

où  $k_\beta$  peut être considéré comme la densité de la distribution Beta de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , définie par :

$$k_{\beta 1}(x, \alpha, \beta) = \frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{\mathbf{B}(\alpha, \beta)}, \quad x \in [0, 1], \quad (2.2)$$

avec

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) + \Gamma(\beta)} \text{ et } \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx, \forall a > 0.$$

L'utilisation d'un noyau symétrique ne convient pas pour estimer une densité avec support borné (voir Charpentier et al. (2006) [8]) pour une discussion et une synthèse sur plusieurs techniques qui peuvent être utilisées). L'utilisation du noyau Beta pourrait être une bonne idée lors de l'estimation d'une telle densité car elle évite le biais multilatéral aux bornes. Mais cet estimateur souffre d'un autre problème lorsque  $n$  est assez faible ( $n = 30, n = 50$ ) : la masse totale de la densité n'est pas 1.

Afin de réduire le biais, et d'avoir une convergence uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , Chen(1999) [9] a proposé une version modifiée de l'estimateur présenté dans (2.1), en modifiant le noyau  $k_{\beta 1}$  défini dans (2.2), qui sera appelé noyau beta modifié, défini par :

$$k_{\beta 2}(Y_i; b; y) = \begin{cases} k_{\frac{y}{b}, \frac{1-y}{b}}(Y_i) & \text{si } y \in [2b, 1 - 2b], \\ k_{\rho_b(y), \frac{1-y}{b}}(Y_i) & \text{si } y \in [0, 2b], \\ k_{\frac{y}{b}, \rho_b(1-y)}(Y_i) & \text{si } y \in (1 - 2b, 1], \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\rho_b(y) = 2b^2 + 2.5 - \sqrt{4b^4 + 6b^2 + 2.25 - y^2 - \frac{y}{b}}$ .

### **Estimateur MACRO-Beta utilisant les noyaux Beta1 et Beta2 (MACRO B1 et MACRO B2)**

Lorsque  $n$  est plutôt petit ( $n = 30$  ou  $n = 50$ ), il arrive que la masse totale de la densité ne soit pas exactement égale à 1. L'approche de Gouriéroux et Monfort (2006) [19] consiste donc à diviser la valeur estimée de la densité,  $\forall y \in [0, 1]$ , par la masse totale de la densité estimée. Cette transformation assure ainsi un poids total de 1.

On transforme donc les 2 densités précédentes (l'une estimée à l'aide du noyau Beta1 et l'autre estimée à l'aide du noyau Beta2) de la manière suivante :

$$\hat{f}_h^{MACRO}(x) = \frac{\hat{f}_h(x)}{\int_0^1 \hat{f}_h(t) dt}, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

### **Remarque**

Le noyau Beta a deux avantages, premièrement il peut parfaitement estimer les densités à support compact et deuxièmement il possède une forme flexible qui change le lissage dans le sens naturel quand on s'éloigne des bornes. Par conséquent, le noyau Beta élimine le biais aux bornes et fournit une réduction de la variance.

Charpentier et al (2006) [8] ont montré par simulation que l'estimateur à noyau Beta est plus performant quand on le compare à d'autres estimateurs avec des noyaux standards.

### **– Noyau Gamma**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$  échantillon issu d'une densité de probabilité inconnue  $f$  qui est définie sur un support positif  $]0, +\infty[$ . Parmi les estimateurs proposés pour cette famille de distributions, on cite l'estimateur de Chen (2000) [10] qui suggère de remplacer l'estimateur classique de Parzen-Rosenblatt (voir Parzen (1962) [33] et Rosenblatt (1956) [39]) par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{(\rho_h(x), h)}(X_i). \quad (2.5)$$

où,  $h$  représente le paramètre du lissage et  $K_{(\rho_h(x), h)}$  est la fonction de densité de la distribution gamma de paramètres  $\rho_h(x) = \frac{x}{h} + 1$  et  $h$ , donnée par la formule suivante :

$$K_{(\rho_h(x), h)}(t) = \frac{t^{\rho_h(x)-1} e^{-t/h}}{h^{\rho_h(x)} \Gamma(\rho_h(x))},$$

avec

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0.$$



– **Noyau (Birnbaum Saunders) (BS)**

Le noyau BS a été introduit par (Jin and Kawczak, 2003) [21] qui est basé sur les distributions BS. Le noyau BS est défini sur le support borné  $[0, +\infty[$ , sous la forme suivante :

$$K_{BS}(h^{\frac{1}{2}}, x)(u) = \frac{1}{2\sqrt{2h\pi}} \left[ \sqrt{\frac{1}{xu}} + \sqrt{\frac{x}{u^3}} \right] e^{-\frac{1}{2h}(\frac{u}{x}-2+\frac{x}{u})}.$$

L'estimateur à noyau BS est donné par :

$$f_h^{BS}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{BS}(h^{\frac{1}{2}}, x)(X_i). \quad (2.6)$$

### La formule de la VaR avec méthode du noyau

L'estimateur quantile à noyau  $VaR(p)$  est donné par :

$$\widehat{VaR}(\alpha) = \int_0^1 \widehat{F}_h^{-1}(t) k(\alpha, t) dt,$$

où  $\widehat{F}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)$ .

### 2.1.3 Les méthodes semi-paramétriques

#### a) La théorie des valeurs extrêmes

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires (i.i.d) de fonction de répartition  $F$ .

Le comportement des événements extrêmes peut être étudié d'une manière plus simple en considérant la variable aléatoire  $M_n$  définie par :

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Soit  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  une suite de  $n$  pertes observées.  $M_n$  représentera la plus grande perte. Ainsi,

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = [F(x)]^n.$$

Cependant, la fonction de répartition  $F$  n'est pas toujours connue, c'est la raison pour laquelle nous nous intéresserons plus au comportement asymptotique de la variable aléatoire  $M_n$ .

Le théorème des valeurs extrêmes permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes.

**Théorème (Fisher-Tipett [17])** Sous certaines conditions de régularité sur la fonction  $F$ , il existe un paramètre réel  $\xi$  et deux suites  $(a_n)_{n \geq 1} > 0$  et  $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathfrak{R}$  et une fonction non dégénérée  $H$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left[ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = H(x)$$

i.e.  $[F(a_n x + b_n)]^n \rightarrow H(x)$ .

**Définition 2.3. Distribution des valeurs extrêmes généralisée (GEV)**

La loi des valeurs extrêmes généralisée notée "GEV" a pour fonction de répartition la fonction de la forme suivante :

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

avec  $\mu + \xi \frac{x}{\sigma} > 0$ . Le paramètre  $\alpha = \frac{1}{\xi}$  est appelé paramètre de forme. Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont des paramètres d'échelle et de normalisation.

**Définition 2.4.** La densité GEV est donnée par :

$$f_{\text{GEV}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{x-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Pour une fonction  $H$  non-dégénérée, la valeur prise par le paramètre forme  $\xi$  définit trois lois connues dans la littérature :

- Si  $\xi > 0$ , nous obtenons la loi de Fréchet "queue lourde".
- Si  $\xi < 0$ , nous obtenons la loi de Weibull "queue légère".
- Si  $\xi = 0$ , nous obtenons la loi de Gumbel "queue moyenne".

**Définition 2.5.** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  (ou une fonction de répartition  $F$ ) appartient au MDA (Maximum Domain of Attraction) de  $H$ , si

$$\exists c_n > 0, d_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x).$$

Dans la pratique, la majorité des lois usuelles appartiennent à l'un des 3 MDA de Gumbel, Fréchet ou Weibull.

**Définition 2.6. Distribution des Excès (Peaks-Over-Threshold approach (P.O.T))**

L'approche par dépassements de seuil, en anglais "Peaks-Over-Threshold approach" notée POT, repose sur l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur de l'échantillon. Elle consiste à ne conserver que les observations dépassant un certain seuil. L'excès au-delà du seuil est défini comme l'écart entre l'observation et le seuil. Cette méthode initialement développée par Pickands (1975) [34] a été abondamment étudiée par divers auteurs tels que Smith (1987) [44], Davison et Smith (1990) [12], ou Reiss et Thomas (2001) [38].

Plus précisément, soit un échantillon de variables aléatoires (i.i.d)  $X_1, \dots, X_n$  de fonction de répartition  $F$  et de point terminal  $x_f$ . Soit  $u$  un seuil fixé (non aléatoire) tel que  $u < x_f$ . Considérons les  $N_u$  observations  $X_{i1}, \dots, X_{iN_u}$  dépassant le seuil  $u$  tel que  $N_u$  suit la loi de Poisson. On appelle excès au-delà du seuil  $u$  les  $Y_j = X_{ij} - u$ , où  $j = 1, \dots, N_u$ , l'excès au delà de seuil  $u$  (voir Figure 2.1).

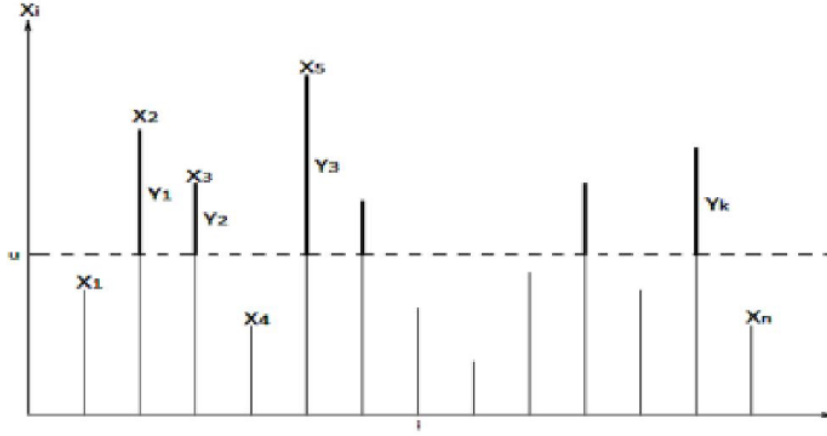


FIGURE 2.1 – Dépassement de seuil (P.O.T)

La distribution des excès  $F_u$  est définie,  $\forall y \in \mathfrak{R}$  par :

$$F_u(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0, \\ 1 - \frac{1-F(u+y)}{1-F(u)} & 0 < y < x_F - u, \\ 1 & y \geq x_F - u. \end{cases}$$

- L'objectif de la méthode POT est de déterminer par quelle loi de probabilité il est possible d'estimer cette distribution conditionnelle des excès.

**Théorème** (Pickands (1975) [34], Balkema et De Hann (1974) [3])

Si  $F_u(x) \in MDA(H(x))$ , alors il est possible de trouver une fonction  $\sigma(u) > 0$  et mesurable de telle sorte que :

$$\sup_{0 \leq x \leq x^* - u} |F_u(x) - G_{\xi, \sigma(u)}(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x^*} 0.$$

où  $x^*$  représente le point terminal.

Les auteurs font le lien entre le comportement asymptotique de la distribution des excès  $F_u(x)$  et celui de la GPD (Generalized Pareto Distribution),  $G_{\xi, \sigma(u)}(x)$ .

- D'après les résultats précédents un estimateur de la distribution conditionnelle des excès et donc un estimateur de la VaR, sont ainsi donnés par :

$$\hat{F}_u(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left( 1 + \hat{\xi} \frac{x - u}{\hat{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\hat{\xi}}},$$

et donc :

$$\widehat{VaR}_{\alpha} = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right)^{\frac{-1}{\hat{\xi}}} - 1 \right],$$

avec  $N_u$  le nombre d'excès au-delà du seuil  $u$ .

## b) Distribution lambda généralisée (GLD)

Les distributions lambda ont été introduites pour la première fois par Tukey (1962) [45], qui

ont ensuite été généralisées aux GLD, une famille de distributions statistiques à quatre paramètres (Filliben (1975) [16]; Joiner et Rosenblatt (1971) [22], Ramberg et Schmeiser (1972) [36]; Ramberg et Schmeiser (1974) [37]). La GLD peut produire une grande variété de formes de courbes, y compris celles de nombreuses distributions symétriques et asymétriques standards. L'ajustement GLD a été appliqué avec succès dans une variété de disciplines. Celles-ci incluent la modélisation de la réponse quantile dans les essais biologiques et l'économie (Mudholkar et Phatak (1984) [28]; Pregibon (1980) [35]) et la gestion de la qualité (Silver (1977) [42]; Dudewicz (1999) [15]).

La fonction de densité de probabilité de la distribution lambda généralisée avec les paramètres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  est donné par :

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}},$$

avec  $x = \phi(y)$ .

La formule de la VaR s'obtient d'après la fonction inverse de la distribution de GLD :

$$VaR(y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

où

\*  $0 \leq y \leq 1$

\*  $\lambda_1$  : paramètre de position.

\*  $\lambda_2$  : paramètre d'échelle.

\*  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont liés à l'asymétrie.

La GLD est souvent utilisée pour modéliser des données empiriques et plusieurs méthodes d'estimation de ses paramètres ont été élaborées : la méthode des moments, la méthode des centiles, la méthode des « moindres carrés » et les méthodes d'ajustement (voir Karian et Dudewicz (2000) [23]; King et MacGillivray (1999) [25]; Öztürk et Dale (1985) [30]).

Dans notre étude dans le chapitre suivant on utilise la méthode des moments pour estimer les paramètres de la GLD.

### c) Distribution de Champernowne généralisée

L'idée de cette estimation semi paramétrique est de transformer d'abord l'échantillon initial  $\{X_1, \dots, X_n\}$  en un nouvel échantillon  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  sur  $[0, 1]$  avec la distribution Champernowne généralisée définie par :

$$\forall y \geq 0, F_{\alpha, M, c}(y) = \frac{(y+c)^\alpha - c^\alpha}{(y+c)^\alpha + (M+c)^\alpha - 2c^\alpha},$$

où  $\alpha > 0, c \geq 0$  et  $M > 0$ .

La densité associée est définie par :

$$\forall y \geq 0, f_{\alpha, M, c}(y) = \frac{\alpha(y+c)^{\alpha-1} - ((M+c)^\alpha - c^\alpha)}{((y+c)^\alpha + (M+c)^\alpha - 2c^\alpha)^2}.$$

La distribution de Champernowne généralisée a été utilisée dans Buch-Larsen et al. [5], lors de la modélisation des réclamations d'assurance.

On remarque que  $F_{(\alpha, M, c)}(M) = 1/2$ . On estime donc le paramètre  $M$  par la médiane empirique de l'échantillon  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Les estimateurs des deux autres paramètres  $\alpha$  et  $c$  sont obtenus avec la méthode du maximum de vraisemblance.

$$(\hat{\alpha}, \hat{c}) \in \operatorname{argmax}\{\log \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_n; \alpha, \hat{M}, c)\}.$$

où :  $\log \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_n; \alpha, \hat{M}, c) = n(\log(\alpha) + \log((M + c)^\alpha - c^\alpha)) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (\log(Y_i + c) - 2 \sum_{i=1}^n \log((Y_i + c)^\alpha + (M + c)^\alpha - 2c^\alpha))$ .

Après l'estimation des paramètres de la distribution Champernowne, on aura l'échantillon transformé  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ , qui aura une distribution proche de la distribution uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , d'où l'intérêt d'utiliser l'estimateur à noyau Beta défini précédemment dans la formule (2.1). La VaR est obtenue d'après la fonction inverse de la distribution de Champernowne :

$$\widehat{VaR}(X) = F_{\hat{\alpha}, \hat{M}, \hat{c}}^{-1}(y).$$

## 2.2 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes d'estimation de la VaR existant dans littérature, et les notions de base qui sont indispensables pour le chapitre suivant où nous nous intéressons à l'évaluation numérique de la VaR en utilisant les méthodes d'estimation citées précédemment.

# 3

## Comparaison de quelques estimateurs de la VaR : Exemple d'application et simulation

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de faire une comparaison de quelques estimateurs de la VaR et d'étudier leur performance. La première partie est basée sur la simulation et la deuxième partie est réalisée sur des données réelles.

Pour chacun des estimateurs décrits ci-dessous, on considère :

- $X_1, \dots, X_n$  l'échantillon simulé.
- $n$  la taille de l'échantillon.
- Seuil de confiance  $\alpha = 0.95$ .

Ces études ont été réalisées sous le logiciel R, soit pour les représentations graphiques (**Boîte à moustaches** qui est un moyen rapide de figurer le profil d'une série statistique), ou bien pour les calculs numériques.

## 3.2 Etude basée sur la simulation

### 3.2.1 Description des estimateurs utilisés

On rappelle ci-dessous les différents estimateurs utilisés.

- R : La VaR empirique suggérée par le logiciel R.
- B1 : Estimateur Champernowne-Beta utilisant le noyau Beta1, défini dans (2.1)-(2.2).
- MACRO B1 : Estimateur Champernowne-Beta MACRO-Beta défini dans (2.4), utilisant le noyau Beta1.
- B2 : Estimateur Champernowne-Beta utilisant le noyau Beta2, défini dans (2.1)-(2.3)
- MACRO B2 : Estimateur Champernowne MACRO-Beta défini dans (2.4), utilisant le noyau Beta2.
- Gamma : Estimateur non paramétrique défini dans (2.5).
- Birnbaum Saunders (BS) : Estimateur non paramétrique défini dans (2.6).
- GLD : Estimateur basé sur la GLD.

Dans la suite de notre travail, les performances des quatre estimateurs semi paramétriques proposés peuvent être comparées avec le critère de l'erreur quadratique moyenne MSE (Mean Squared Error) :

$$MSE = \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{VaR}(\alpha) - VaR(\alpha) \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

où :

- $\alpha$  est l'ordre de la VaR recherchée, ou niveau de confiance (ici  $\alpha = 0,95$ ).
- $\widehat{VaR}(\alpha)$  est la VaR estimée d'ordre  $\alpha$  de la distribution considérée.
- $VaR(\alpha)$  est la VaR empirique d'ordre  $\alpha$  de la distribution considérée.

### 3.2.2 Description des distributions utilisées

On présente dans ce qui suit les principales caractéristiques de chacune des distributions étudiées (lognormale et Weibull).

- Distribution lognormale de paramètres  $\mu = 0$  et  $\sigma = 0.5$ . Sa fonction de densité s'écrit sous la forme suivante :

$$f_{LN}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in ]0, +\infty[.$$

Sa fonction de répartition s'écrit comme suit :

$$F_{LN}(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale.

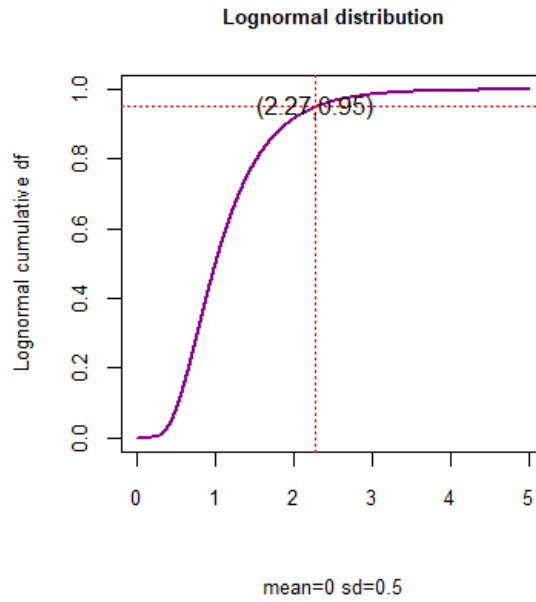


FIGURE 3.1 – Fonction de répartition de la distribution lognormale

- Distribution Weibull de paramètres  $\lambda = 3$  et  $k = 2$ . Sa fonction de densité s'écrit comme suit :

$$f_W(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Sa fonction de répartition est donnée comme suit :

$$F_W(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}.$$



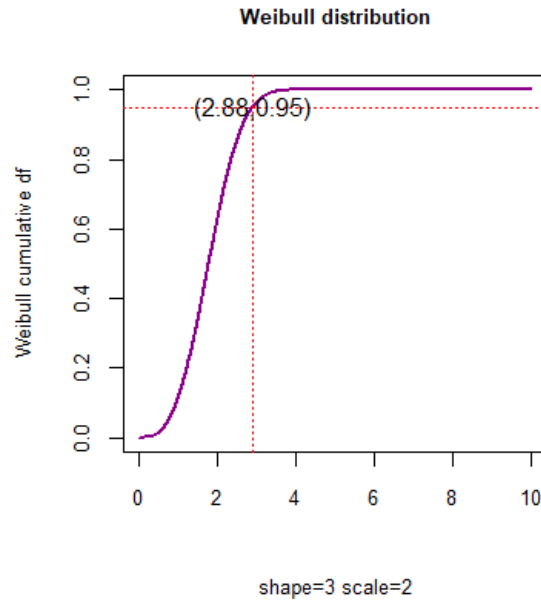


FIGURE 3.2 – Fonction de répartition de la distribution Weibull

### 3.2.3 Algorithme 1 : Algorithme de calcul de la VaR par la méthode semi-paramétrique Champernowne-Beta

1. Introduire le seuil de confiance  $\alpha = 0.95$  ;
2. Générer un échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de taille  $n$ , avec une distribution choisie (Weibull, Lognormale) ;
3. Estimer les paramètres de la distribution Champernowne :  $M$  (médiane empirique) et  $a$  et  $c$  en utilisant les techniques du maximum de vraisemblance ;
4. Transformer les  $X_i$  en  $Y_i$  tels que  $Y_i = F_{\hat{a}, \hat{M}, \hat{c}}(X_i)$  ;
5. Estimer la distribution cumulative des  $Y_i$  notée  $\hat{F}_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)$  en utilisant l'un des noyaux B1, B2, MACRO B1, MACRO B2 ;
6. Calculer la VaR estimée en utilisant la fonction inverse de  $\hat{F}_h$  par

$$\widehat{VaR}(\alpha) = \int_0^1 \hat{F}_h^{-1}(t) k(\alpha, t) dt,$$

7. Calculer le MSE par

$$MSE = \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{VaR}(\alpha) - VaR(\alpha) \right)^2 \right].$$

### 3.2.4 Résultats graphiques et numériques

#### Résultats de simulation par Champernowne-Beta

Les résultats sont obtenus en utilisant l'Algorithme 1 défini dans la section 3.2.3 précédente et d'après le code source (voir Annexe B, page 50).

- Distribution Weibull :

Estimateur	VaR (95%)
R	2.883131
B1	1.575
MACRO B1	2.925
B2	1.59
MACRO B2	<b>2.9</b>

TABLE 3.1 – Les valeurs prises par les estimateurs Champernowne-Beta de la VaR avec la distribution Weibull.

**Boxplot for the 5 quantile estimators  
Weibull Distribution**

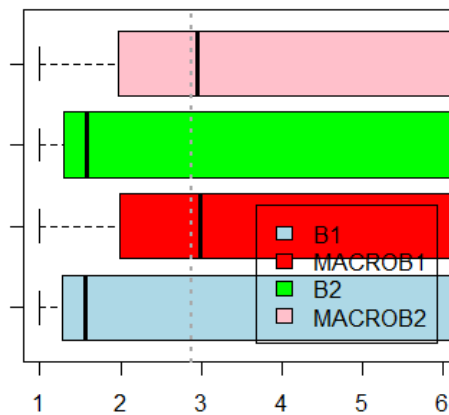


FIGURE 3.3 – Boîte à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution Weibull

La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces derniers s'étalent sur des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs des quantiles varient approximativement entre 1.5 et 3) et sont centrées autour de la VaR empirique (2.88). L'estimateur MACRO B2 est le plus performant car il est très proche de la VaR empirique. Par la suite, vient l'estimateur MACROB1 qui est aussi très proche de la VaR. Par contre les estimateurs B1 et B2 sont légèrement excentrés vers la gauche.

Estimateur	Rapport MSE
B1/R	0.0008556029
MACRO B1/R	8.765197e-07
B2/R	0.0008360935
MACRO B2/R	<b>1.422869e-07</b>

TABLE 3.2 – *Ratio MSE pour les estimateurs Champernowne-Beta avec la distribution Weibull*

### Interprétation

Du point de vue du critère de la MSE, l'estimateur utilisant le noyau MACRO B2 est le plus performant, car le rapport de MSE obtenu égal à 1.422869e-07 est le plus proche de 0. Les estimateurs les moins performants sont encore les estimateurs B1 et B2 avec un rapport de MSE égal à 0.0008556029 et 0.0008360935 successivement.

### Résultats de simulation par la GLD

A l'aide de la fonction `fit.gld()` qu'on trouve dans le package `gb`,

`> (out1=fit.gld(x,method='MOM'))`

nous obtenons les paramètres de la GLD suivants :

Modèle	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
GLD	2.02	0.656	5.635	2.551

TABLE 3.3 – *Les paramètres de GLD pour la distribution Weibull*

Méthode	VaR (95%)
GLD	0.4956098

TABLE 3.4 – *La VaR estimée par GLD pour la distribution Weibull*

### Interprétation

La VaR estimée par la GLD (0.4956098) est légèrement excentrée autour de la VaR empirique (2.88) pour la distribution Weibull.

## Résultats de simulation pour les estimateurs non paramétriques BS et Gamma

On obtient

La taille	Estimateur	VaR (95%)
n=200	BS	1.654549e-43
n=500	BS	<b>1.75123e-23</b>
n=200	Gamma	2.0486e-240
n=500	Gamma	2.49e-120

TABLE 3.5 – Les valeurs prises par les estimateurs non paramétriques de la VaR avec la distribution Weibull

### Interprétation

Pour la distribution Weibull, la VaR obtenue par l'estimateur BS (1.75123e-23) est plus proche de la VaR empirique (2.88) pour la taille  $n = 500$ , par contre la valeur obtenue par l'estimateur gamma (2.49e-120) est un peu loin de la VaR empirique pour les deux tailles. L'estimateur à noyau BS est plus performant que l'estimateur à noyau Gamma.

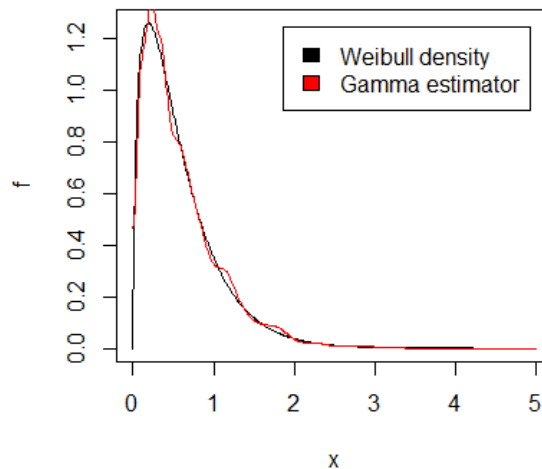


FIGURE 3.4 – Estimateur à noyau gamma de la densité Weibull

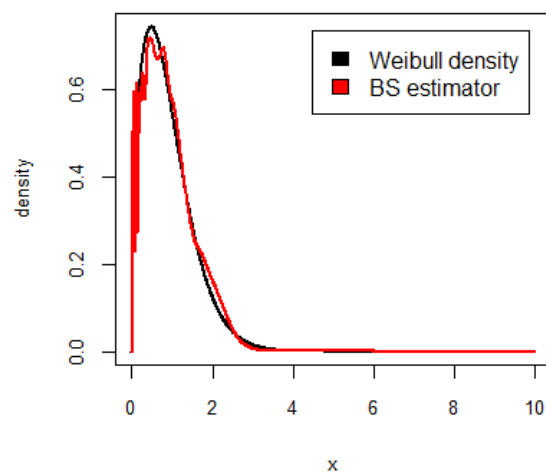


FIGURE 3.5 – Estimateur à noyau BS de la densité Weibull

### Interprétation

D'après les courbes des densités, avec la distribution Weibull, on confirme les résultats numériques obtenus dans le tableau (3.5). On voit que l'estimateur à noyau BS est plus proche de la densité Weibull.

- Distribution lognormale

Estimateur	$VaR(95\%)$
R	2.276017
B1	0.84
MACRO B1	2.495
B2	0.85
MACRO B2	<b>2.445</b>

TABLE 3.6 – La  $VaR$  estimée par les estimateurs Champernoune-Beta avec la distribution lognormale

**Boxplot for the 4 quantile estimators  
LogNormal Distribution**

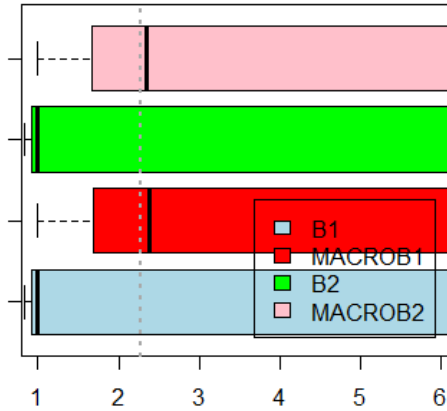


FIGURE 3.6 – Boîte à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution lognormale

### Interprétation

La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces derniers s'étalent sur des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs de la VaR varient approximativement entre 0.8 et 3) et sont presque centrées autour de la VaR empirique (2.27), excepté les estimateurs de B1 et B2 qui sont légèrement excentrés. A priori, les estimateurs MACRO B1 (2.49) et MACRO B2 (2.44) semblent les plus performants.

Estimateur	Rapport MSE
B1/R	0.0010096
MACRO B1/R	0.0010025
B2/R	0.0000239
MACRO B2/R	<b>0.0000142</b>

TABLE 3.7 – *Ratio MSE pour tous les estimateurs Champernowne-Beta avec la distribution lognormale*

Du point de vue du critère de la MSE, l'estimateur utilisant le noyau MACRO B2 est le plus performant, car le rapport de MSE obtenu égal à 0.0000142, est le plus proche de 0. On obtient également de bons résultats avec l'estimateur Beta2. Le critère de MSE confirme donc ce que l'observation des boîtes à moustache avait mis en évidence.

### Résultats de simulation par la GLD

D'après la méthode des moments, on obtient les paramètres suivants :

Modèle	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
GLD	2.54	0.4303	0.9415	5.279

TABLE 3.8 – Les paramètres de GLD pour la distribution lognormale

Méthode	VaR (95%)
GLD	0.21604

TABLE 3.9 – La VaR estimée par GLD pour la distribution lognormale

### Interprétation

La VaR estimée par la GLD (0.21604) est relativement proche de la VaR empirique (2.27) pour la distribution lognormale.

### Résultats de simulation pour les estimateurs non paramétriques BS et Gamma

La taille	Estimateur	VaR(95%)
n=200	BS	23.987004e-30
n=500	BS	9.93116e-28
n=200	Gamma	3.977096e-177
n=500	Gamma	<b>7.488331e-24</b>

TABLE 3.10 – Les valeurs prises par les estimateurs non paramétriques de la VaR avec la distribution lognormale

### Interprétation

Pour la distribution lognormale, les deux estimateurs à noyaux BS et Gamma de la VaR sont tous plus performants pour la taille  $n = 500$ , mais l'estimateur à noyau Gamma est plus performant que l'estimateur à noyau BS.

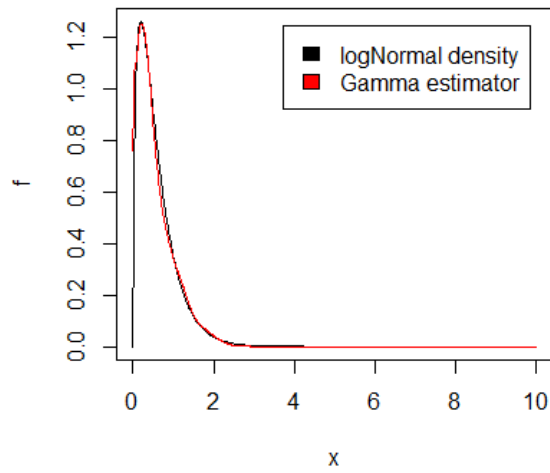


FIGURE 3.7 – Estimateur à noyau gamma de la densité lognormale

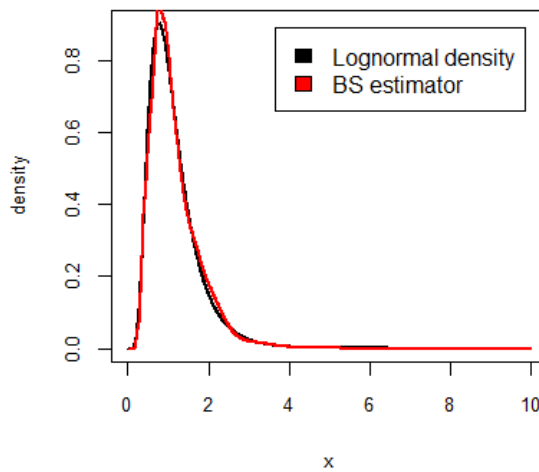


FIGURE 3.8 – Estimateur à noyau BS de la densité lognormale

### Interprétation

Pour la distribution lognormale, les deux estimateurs BS et Gamma sont tous les deux très proches de la densité.

### Conclusion

Pour la partie simulation, on conclut d'après les résultats que les estimateurs semi-paramétriques



(Champernowne-Beta et GLD) sont plus performants que les estimateurs non paramétriques (Gamma et BS), car ils donnent de meilleures valeurs de la VaR.

### 3.3 Etude basée sur les données réelles

#### 3.3.1 Description des données utilisées

Dans cette étude, on s'intéresse au prix de clôture (voir l'annexe A, page 48). Le cours de clôture est le dernier prix enregistré à la fermeture du marché pour la journée. L'obtention de ce prix n'est pas certaine au cas où l'on achète le titre le lendemain, car le cours évolue constamment (même après la fermeture de la bourse pour la journée). Le cours de clôture est seulement un indicateur du rendement antérieur et, sauf en des circonstances extrêmes, il constitue une approximation de ce qu'on doit payer. Pour mener à bien notre étude, on a extrait nos données du site web [www.Yahoo.Finance.com](http://www.Yahoo.Finance.com). Prenons l'exemple de l'action Koninklijke Volker Wessels (KVV) qui est cotée à la bourse d'Amsterdam avec des prix en Euros. La période qu'on a choisi est celle entre 17 avril 2018 et 1 avril 2020. On dispose en tout de 501 observations correspondantes aux prix de clôture journaliers de l'action KVV.

La réalisation de cette application nécessite de faire appel à des commandes et des fonctions prédéfinies sous le logiciel R.

#### L'action Koninklijke Volker Wessels

Koninklijke Volker Wessels est un groupe de construction coté aux activités diversifiées pratiquant le mot d'ordre. KVV opère principalement aux Pays-Bas, au Royaume-Uni, en Amérique du Nord et en Allemagne. Sur le plan opérationnel, son activité est organisée en six segments. Dans les pays où Volker Wessels opère, le groupe compte plus de 120 entreprises d'exploitation locales, possédant des bureaux et des directions au niveau national et régional.

#### Etude descriptive des prix de clôture

Pour introduire les prix de clôture sous le logiciel R, on utilise la commande suivante :

```
base3 = read.table("C:/Users/lenovo/Desktop/exptab1.txt",header=TRUE)
```

Le résumé statistique des données du tableau prix de clôture (voir Annexe A, page 48) est présenté comme suit :

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
12.24	16.27	17.59	18.01	20.79	22.15

TABLE 3.11 – Description de la série des variations des prix.

### Le graphe des prix de clôture

La représentation graphique des prix de clôture pendant les deux années :

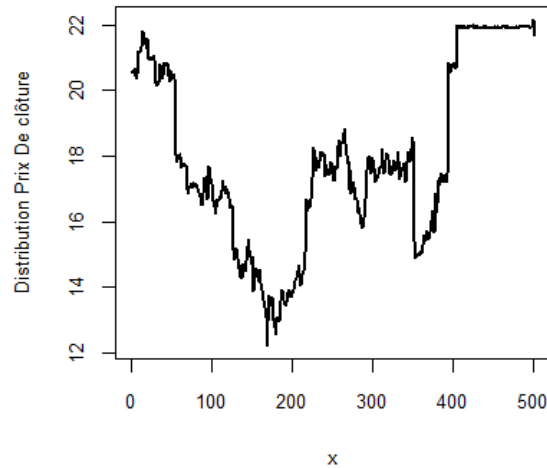


FIGURE 3.9 – Le graphe des prix de clôture.

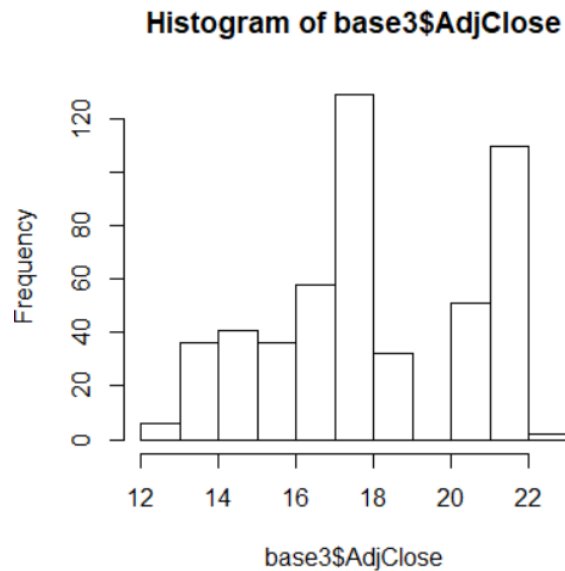


FIGURE 3.10 – Histogramme des prix de clôture.

**Interprétation** D'après le graphe (3.9), on constate que le prix de clôture est stable jusqu'au 50-ème jour et perd sa stabilité à partir du 200-ème jour, après il revient à sa stabilité au 400-ème jour.

### Calcul des rendements journaliers

Les rendements sont exprimés comme suit :

$$R_i = \ln \left( \frac{P_i}{P_{i-1}} \right),$$

où  $P_i$  et  $P_{i-1}$  sont les valeurs d'un actif ou d'un portefeuille à la date  $t_i$  et  $t_{i-1}$  respectivement.

**Etude descriptive des rendements journaliers** Le résumé statistique des données représentant les rendements est donné comme suit :

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
-0.1645321	-0.0062615	0.0000000	0.0001078	0.0064773	0.1709578

TABLE 3.12 – Description de la série des variations des rendements.

### Le graphe des rendements

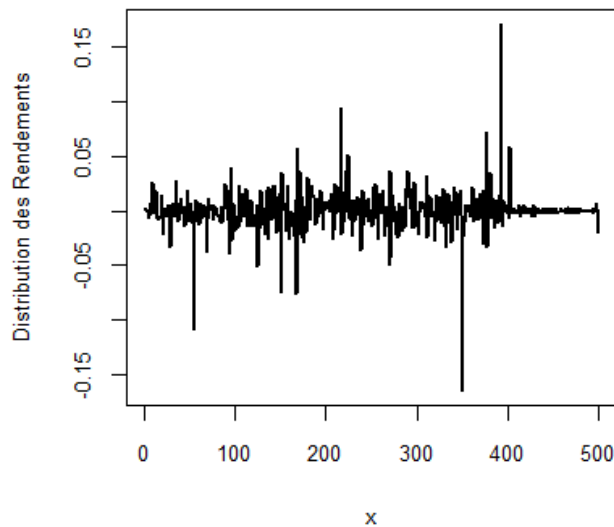


FIGURE 3.11 – Le graphe des rendements journaliers.

Les deux graphiques ci-après présentent la fonction de répartition de la variable prix de clôture. Le deuxième graphe (Figure 3.13) est un **zoom** effectué sous le logiciel R du premier graphe (Figure 3.12) pour des pertes comprises entre 0 et 50 Euros, afin de mieux visualiser la VaR d'ordre  $\alpha = 0,95$ .

### Fonction de répartition des prix de clôture

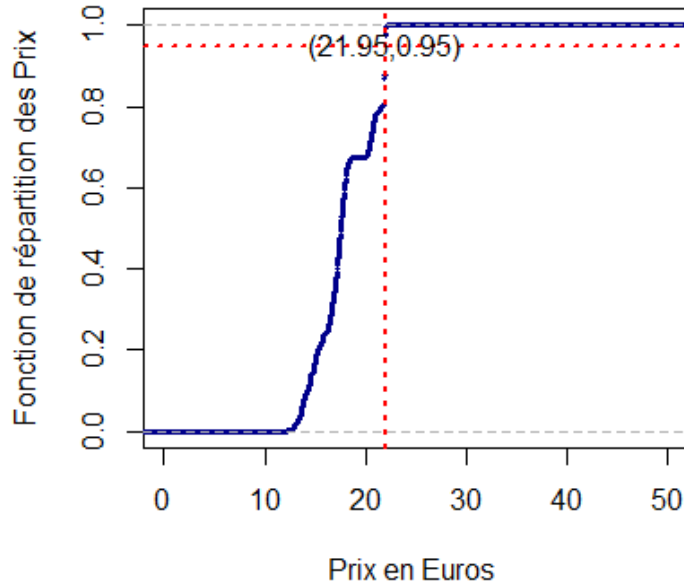


FIGURE 3.12 – Fonction de répartition des prix de clôture

### Fonction de répartition des Prix de clôture

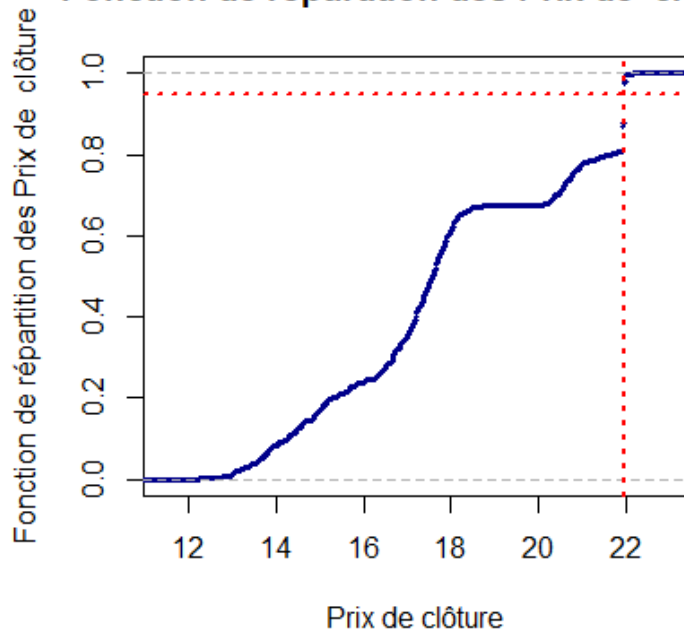


FIGURE 3.13 – Fonction de répartition des prix de clôture zoomée

On constate que la VaR d'ordre 0.95 de la distribution des pertes appartient aux prix peu élevés. Elle est d'environ 22 de prix d'Euros.

Etant donné que la distribution des prix de clôture est très concentrée sur la droite, on se propose d'étudier la distribution des rendements, et d'obtenir ainsi une distribution plus régulière et plus aplatie.

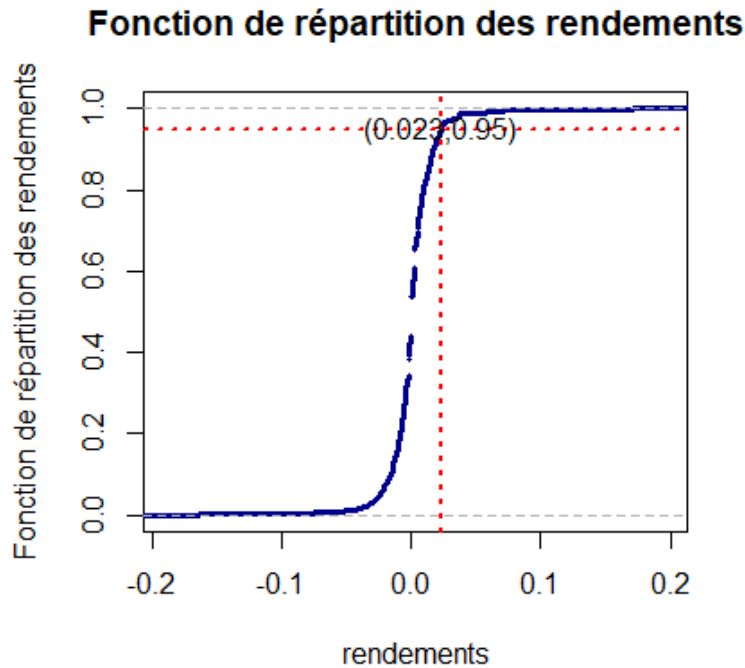


FIGURE 3.14 – Fonction de répartition des rendements

Dans ce qui suit, on se propose d'estimer la VaR d'ordre 0.95 de la distribution des prix de clôture à l'aide des estimateurs que nous avons définis dans le chapitre précédent (B1, MACRO B1, B2, MACRO B2, BS, Gamma, GLD). Nous utilisons aussi le même critère MSE défini dans l'expression (3.1) pour juger la performance de nos estimateurs semi-paramétriques Champernowne-Beta de la VaR.

### 3.3.2 Résultats graphiques et numériques

#### a) Distribution des prix de clôture

Le tableau ci-dessous regroupe les valeurs des différents estimateurs Champernowne-Beta de la VaR à 95 % pour la distribution des prix de clôture.

Estimateur	VaR(95%)
R	21.95
B1	44.06
MACRO B1	42.37
B2	<b>42.065</b>
MACRO B2	42.685

TABLE 3.13 – la VaR estimée par les estimateurs Champernowne-Beta pour les prix de clôture.

**Boxplot for the 4 quantile estimators  
PriX Distribution**

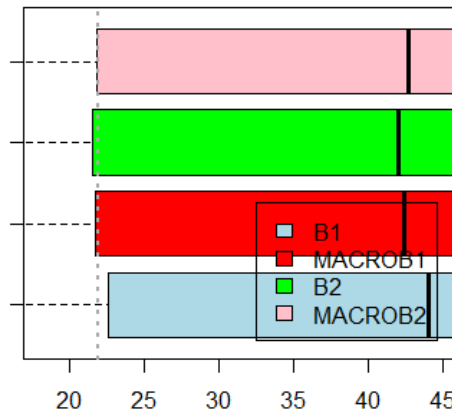


FIGURE 3.15 – Boite à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution des prix de clôture

### Interprétation

La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces derniers s'étalent sur la droite de la VaR empirique (21.95) (les valeurs des estimateurs de la VaR varient approximativement entre 42 et 45) et sont légèrement excentrées de la VaR empirique, et l'estimateur B2 est le plus performant.

Estimateur	Rapport MSE
B1 / R	0.244426
MACRO B1/R	0.2084882
B2 / R	<b>0.2023066</b>
MACRO B2/R	0.2149701

TABLE 3.14 – *Les rapports de MSE des estimateurs Champernowne-Beta utilisés pour le prix de clôture.*

### Interprétation

L'estimateur utilisant le noyau B2 est le plus performant du point de vue du critère de la MSE, car le rapport de MSE obtenu, égal à 0.2023066, est le plus proche de 0. Les autres estimateurs aussi ont des performances semblables et acceptables car ils sont proches de la VaR empirique.

### Résultats de la VaR par GLD

D'après la méthode des moments, on obtient les paramètres suivants :

Modèle	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
GLD	18.21	0.1994	2.612	2.194

TABLE 3.15 – *Les paramètres de GLD pour la distribution des prix de clôture*

Méthode	VaR (95%)
GLD	13.19495

TABLE 3.16 – *La VaR estimée par GLD pour la distribution des prix de clôture*

### Interprétation

La VaR estimée par la GLD (13.19495) est relativement proche de la VaR empirique (21.95).

### Résultats de la VaR pour Gamma et BS

Estimateur	VaR(95%)
BS	0.0004420303
Gamma	2.07698e-271

TABLE 3.17 – *La VaR pour les estimateurs non paramétriques avec la distribution des prix.*

### Interprétation

Pour la distribution des prix de clôture, les deux estimateurs non paramétriques à noyau sont un peu loin de la VaR empirique (21.95).

### b) Distribution des rendements

Le logiciel R calcule la valeur empirique  $VaR(95\%) = 0.023$ .

Estimateur	VaR(95%)
R	0.023
B1	0.18
MACRO B1	0.165
B2	<b>0.155</b>
MACRO B2	0.165

TABLE 3.18 – La VaR estimée par les estimateurs Champernowne-Beta pour les rendements.

**Boxplot for the 4 quantile estimators  
LogNormal Distribution**

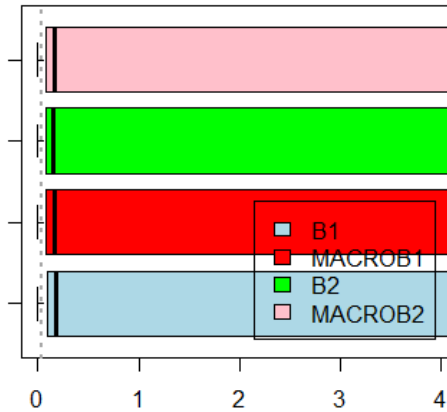


FIGURE 3.16 – Boite à moustaches des estimateurs Champernowne-Beta de la distribution des rendements

La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces derniers s'étalent autour des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs de la VaR varient approximativement entre 0.15 et 0.18) et sont centrées autour de la VaR empirique (0.023), et l'estimateur B2 c'est le plus performant.



Estimateur	Rapport MSE
B1 / R	1.075412e-05
MACRO B1/R	8.666763e-06
B2 / R	<b>7.400194e-06</b>
MACRO B2/R	8.666763e-06

TABLE 3.19 – *Les rapports de MSE des estimateurs Champernowne-Beta utilisés sur les rendements.*

L'estimateur utilisant le noyau B2 est le plus performant du point de vue du critère de la MSE, car le rapport de MSE obtenu, égal à 7.400194e-0.6, est le plus proche de 0. Les autres estimateurs aussi ont des performances semblables et très acceptables.

### Résultats de la VaR par GLD

D'après la méthode des moments, on obtient les paramètres suivants :

Modèle	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
GLD	0.1881483	-5.8913937	14.1238629	0.1763880

TABLE 3.20 – *Les paramètres de GLD pour la distribution des rendements*

Méthode	VaR (95%)
GLD	0.3578874

TABLE 3.21 – *La VaR estimée par GLD pour la distribution des rendements*

### Interprétation

La VaR estimée par la GLD (0.3578874) est relativement proche de la VaR empirique (0.023).

### Résultats de la VaR pour les estimateurs BS et Gamma

Estimateur	VaR(95%)
BS	2.1467e-12
Gamma	7.118199e-271

TABLE 3.22 – *La VaR pour les estimateurs non paramétriques avec la distribution des rendements.*

### Interprétation

Pour la distribution des rendements, l'estimateur à noyau BS est plus performant par rapport à l'estimateur à noyau Gamma.

### Comparaison globale

L'indice	Méthode	VaR(95%)
KVVW(rendement)	Champernowne-Beta (semi-paramétrique)	0.155
	Noyau (non-paramétrique)	2.1467 e-12
	Variance-Covariance (paramétrique)	1.677699
	TVE (semi-paramétrique)	0.02655
	GLD (semi-paramétrique)	0.3578854

TABLE 3.23 – La VaR par différentes méthodes d'estimation pour les rendements avec seuil 0.95

D'après le tableau (3.23), on constate que :

\* La VaR par les méthode TVE (0.02655), Champernowne-Beta (0.155) et GLD (0.3578854) donnent des résultats plus proches de la VaR empirique (0.023).

\* Les VaR par la méthode du noyau et la méthode de variance-covariance donnent des résultats éloignés des autres méthodes.

\* La méthode semi paramétrique est la meilleure méthode d'estimation de la VaR, dans le contexte de notre étude.

**Remarque :**

Les VaR par les méthodes de TVE et Variance-Covariance ont été déjà obtenues dans le travail de Benboudjema (2020) [4].

## Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons donné, dans un première temps, quelques rappels sur la statistique d'ordre, les mesures de risque, les quantiles et la VaR. Nous avons effectué ensuite une synthèse sur les méthodes d'estimation de la VaR (paramétriques, semi paramétriques et non paramétriques).

Enfin, nous avons fait une comparaison entre les estimateurs de la VaR par méthode de Champernowne-Beta, lambda généralisée, théorie des valeurs extrême, variance-covariance, noyaux Gamma et BS, a été effectuée.

Six estimateurs de la VaR sont utilisés pour la partie simulation pour les deux distributions Weibull et lognormale, ainsi que pour la partie des données réelles. Dans le cas semi paramétrique, on construit les boîtes à moustaches pour la méthode Champernowne-Beta, et les résultats de la VaR sont données dans les tableaux pour la GLD et les estimateurs non paramétriques BS et Gamma.

Pour comparer les différents estimateurs, le critère d'erreur quadratique moyenne est utilisé. Grâce à la comparaison, on conclut que les estimateurs semi paramétriques sont plus performants que les estimateurs non paramétriques et paramétriques, car ils donnent de meilleurs résultats.

## Bibliographie

- [1] A. Azzalini. A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method. *Biometrika* 68, 326-328, 1981.
- [2] U. Balasooriya, C. K. Low. Modeling insurance claims with extreme observations : Transformed kernel density and generalized lambda distribution. *North American Actuarial Journal* 12(2), 129-142, 2008.
- [3] A. Balkema, L. Haan. Residual life time at great age. *The annals of probability* 2, 792-804, 1974.
- [4] M. Benboudjema. Estimation de quantiles et application en finance. Mémoire Master en mathématiques, Université Bejaia, 2020.
- [5] T. Buch-Larsen, J. P. Nielsen, M. Guillén, C. Bolancé. Kernel density estimation for heavy-tailed distribution using the Champernowne transformation. *Statistics* 39(6), 503-518, 2005.
- [6] A. Charpentier. Mesures de risque - Chapitre 3 - Freakonometrics. <https://freakonometrics.hypotheses.org/files/2013/04/mesures-de-risque-charpentier.pdf>, 1-47, 2013.
- [7] A. Charpentier, A. Oulidi. Beta kernel quantile estimators of heavy-tailed loss distributions. *Statistics and Computing* 20, 35-55, 2010.
- [8] A. Charpentier, J. D. Fermanian, O. Scaillet. The estimate of copulas : theory and practice. In : *Copula Methods in Derivatives and Risk Management : From Credit Risk to market Risk*. Risk Book, 2006.
- [9] S. X. Chen. Beta Kernel Estimators for Density Functions. *Computational Statistics and Data Analysis* 31,131-145, 1999.
- [10] S. X. Chen. Probability density functions estimation using gamma kernels. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 52, 471-480, 2000.
- [11] S. X. Chen, C. Y. Tang. Nonparametric inference of value at risk for dependent financial returns. *J. Financ. Econom.* 3, 227-255, 2005.
- [12] A. C. Davison, R. L. Smith. "Models for exceedances over high thresholds", *Journal of Royal Statistic Society Ser. B* 52, 393-442, 1990.

- [13] L. Devroye, L. Györfi. Nonparametric density estimation : the L1 View. Wiley. New. York, 1977.
- [14] K. Down. Measuring market risk. John Wiley and Sons, 2005.
- [15] E. D. Dudewicz. Basic Statistical Methods. In Juran's Quality Handbook, 5th edition, edited by J. M. Juran, A. Blanton, and R. E. Godfrey, chapter 44. New York : McGraw-Hill, 1999.
- [16] J. J. Filliben. The probability plot correlation coefficient test for normality. *Technometrics* 17, 1-11, 1975.
- [17] R. A. Fisher, L. H. C. Tippett. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 24, 180-190. Cambridge University Press, 1928.
- [18] C. Gouriéroux, J. P. Laurent, O. Scaillet. Sensitivity analysis of Values at Risk. *J. Empir. Finance* 7, 225-245, 2000.
- [19] C. Gouriéroux, A. Monfort, (Non) Consistency of the Beta Kernel Estimator for Recovery Rate Distribution. CREST-DP 2006-32, 2006.
- [20] F. E. Harrell, C. E. Davis. A New Distribution-Free Quantile Estimators. *Biometrika* 69, 635-640, 1989.
- [21] X. Jin, and J. Kawczak. Birnbaum-Saunders and lognormal kernel estimators for modelling durations in high frequency financial data. *Annals of Economics and Finance*, 4, 103-124, 2003.
- [22] B. L. Joiner, J. R. Rosenblatt. Some properties of the range in samples from tukey's symmetric lambda distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* 66, 394, 1971.
- [23] Z. A. Karian, E. J. Dudewicz. *Fitting Statistical Distributions : The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Method*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2000. Uses in *Fitting Data*. *Technometrics* 21, 201-14, 2000.
- [24] Z. A. Karian, E. J. Dudewicz. Comparison of gld fitting methods : superiority of percentile fits to moments in L2 norm. *J. Iranian Statist. Soc* 2, 171-187, 2003.
- [25] R. King, H. MacGillivray. A starship estimation method for the generalized lambda distributions. *Austral. New Zealand J. Statist.* 41, 353-374, 1999.
- [26] G. Libengué. *Méthodes non paramétriques des noyaux associés mixtes et applications*. PhD thesis, Université de Franche-Comté (France) et Université de Ouagadougou (Burkina-Faso), 2013.
- [27] H. M. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance* 7, 77-91, 1952.
- [28] G. D. Modholkar, and M. V. Phatak. Quantile Function Models for Quantal Response Analysis : An Outline. In *Topics in Applied* 8, 621-27, 1984.

- [29] E. A. Nadaraya. Some new estimates for distribution functions. *Theory Prob . Applic.* 15, 497-500, 1964.
- [30] A. Öztürk, R. Dale. Least squares estimation of the parameters of the generalized lambda distribution. *Technometrics* 27, 81–84, 1985.
- [31] W. J. Padgett. A kernel-type estimator of a quantile function from right censored data. *Am. Stat. Assoc* 74, 215-222, 1986.
- [32] E. Parzen. Nonparametric statistical data modelling . *J. Am. Stat. Assoc* 74, 105-131, 1979.
- [33] E. Parzen. On estimation of probability density function and mode, *Ann. Math. Statist.* 33, 1065-1076, 1962.
- [34] J. Pickands. Statistical inference using extreme order statistics, *the annals of statistics*, 1975.
- [35] D. Pregibon, Goodness of Link Tests for Generalized Linear Models. *Applied Statistics* 29, 15-24, 1980.
- [36] J. S. Ramberg, B. W. Schmeiser. An Approximate Method for Generating Symmetric Random Variables. *Communications of the ACM* 15 : 987-90, 1972.
- [37] J. S. Ramberg, B. W. Schmeiser. An approximate method for generating asymmetric random variables. *Comm. ACM* 17, 78–82, 1974.
- [38] R. Reiss, M. Thomas. *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Basel, Birkhauser, Verlag 24. 180-190. 2001.
- [39] M. Rosenblatt. Remarks on some Nonparametric Estimates of a Density Function, *Annals of Mathematics and Statistics*, 27, 832-835, 1956.
- [40] D. W. Scott, G . R. Terell. Biased and unbiased cross-validation in density estimation . *Journal of the American Statistical Association.* 82, 1131-1146, 1987.
- [41] D. W. Scott, R. A. Tapia and J. R. Thomson. Kernel quantile estimator. *J. Am. Stat. Assoc* 85, 410-433, 1977.
- [42] E. A. Silver. A Safety Factor Approximation Based upon Tukey’s Lambda Distribution. *Operational Research Quarterly* 28(3) : 743-46, 1977.
- [43] B. W. Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall, London. 1986.
- [44] R. L. Smith. Estimating tails of probability distributions. *The annals of Statistics* 15(3), 1174-1207, 1987.
- [45] J. W. Tukey, The future of data analysis. *Ann. Math. Statist.* 33, 1-67, 1962.

## Annexe A : Données représentant les prix de clôture en Euros

Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close
17/04/2018	20,560995	17/05/2018	20,99151	15/06/2018	20,805418	16/07/2018	17,744154	14/08/2018	16,767155	12/09/2018	16,627584
18/04/2018	20,578999	18/05/2018	20,935684	18/06/2018	20,768198	17/07/2018	17,790678	15/08/2018	16,832289	13/09/2018	16,450794
19/04/2018	20,615005	21/05/2018	20,972902	19/06/2018	20,842634	18/07/2018	17,67902	16/08/2018	16,646193	14/09/2018	16,702023
20/04/2018	20,615005	22/05/2018	21,01012	20/06/2018	20,563494	19/07/2018	17,781374	17/08/2018	16,515928	17/09/2018	16,664803
23/04/2018	20,615005	23/05/2018	20,917072	21/06/2018	20,470446	20/07/2018	17,688326	20/08/2018	16,534536	18/09/2018	16,785767
24/04/2018	20,470974	24/05/2018	20,935684	22/06/2018	20,265743	23/07/2018	17,651108	21/08/2018	16,841595	19/09/2018	16,692717
25/04/2018	20,380947	25/05/2018	21,04734	25/06/2018	20,637932	24/07/2018	16,999777	22/08/2018	17,251003	20/09/2018	16,953251
26/04/2018	20,506983	28/05/2018	20,917072	26/06/2018	20,507666	25/07/2018	16,850899	23/08/2018	17,353355	21/09/2018	16,925337
27/04/2018	20,651016	29/05/2018	20,228523	27/06/2018	20,321571	26/07/2018	17,046299	24/08/2018	17,223089	24/09/2018	17,269613
30/04/2018	21,191149	30/05/2018	20,321571	28/06/2018	20,470446	27/07/2018	17,064909	27/08/2018	17,381271	25/09/2018	17,036993
02/05/2018	21,137133	31/05/2018	20,191303	29/06/2018	20,489056	30/07/2018	17,074213	28/08/2018	16,702023	26/09/2018	16,999777
03/05/2018	21,281168	01/06/2018	20,154085	02/07/2018	20,358788	31/07/2018	17,167261	29/08/2018	17,018385	27/09/2018	17,074213
04/05/2018	21,317177	04/06/2018	20,284351	03/07/2018	20,135473	01/08/2018	17,185869	30/08/2018	17,706936	28/09/2018	16,841595
07/05/2018	21,717283	05/06/2018	20,265743	04/07/2018	18,05121	02/08/2018	17,055605	31/08/2018	17,223089	01/10/2018	16,999777
08/05/2018	21,810329	06/06/2018	20,824026	05/07/2018	17,846506	03/08/2018	17,157957	03/09/2018	17,334745	02/10/2018	16,897423
09/05/2018	21,680063	07/06/2018	20,71237	06/07/2018	17,865118	06/08/2018	17,102127	04/09/2018	17,148651	03/10/2018	16,841595
10/05/2018	21,512577	08/06/2018	20,582104	09/07/2018	18,05121	07/08/2018	17,120737	05/09/2018	16,832289	04/10/2018	16,748545
11/05/2018	21,400919	11/06/2018	20,377398	10/07/2018	18,05121	08/08/2018	17,148651	06/09/2018	16,664803	05/10/2018	16,506622
14/05/2018	21,307873	12/06/2018	20,470446	11/07/2018	18,023298	09/08/2018	17,102127	07/09/2018	16,590364	08/10/2018	16,432184
15/05/2018	21,605623	13/06/2018	20,61932	12/07/2018	17,809288	10/08/2018	17,027689	10/09/2018	16,488012	09/10/2018	16,525232
16/05/2018	21,456747	14/06/2018	20,861246	13/07/2018	17,632498	13/08/2018	16,925337	11/09/2018	16,24609	10/10/2018	15,697111

Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close
11/10/2018	15,166739	09/11/2018	15,055083	10/12/2018	12,242028	11/01/2019	13,61594	11/02/2019	14,051802	12/03/2019	17,851377
12/10/2018	15,0923	12/11/2018	14,93412	11/12/2018	12,971622	14/01/2019	13,511712	12/02/2019	14,392911	13/03/2019	17,671349
15/10/2018	14,859682	13/11/2018	14,72011	12/12/2018	13,265355	15/01/2019	13,426435	13/02/2019	14,364485	14/03/2019	17,851377
16/10/2018	15,14813	14/11/2018	14,943425	13/12/2018	13,748593	16/01/2019	13,568563	14/02/2019	14,506614	15/03/2019	17,879807
17/10/2018	15,203958	15/11/2018	13,864074	14/12/2018	13,454861	17/01/2019	13,59699	15/02/2019	14,828772	18/03/2019	18,116688
18/10/2018	15,0923	16/11/2018	14,357226	17/12/2018	13,644365	18/01/2019	13,843346	18/02/2019	15,084604	19/03/2019	18,078785
19/10/2018	14,906207	19/11/2018	14,468884	18/12/2018	13,720167	21/01/2019	13,81492	19/02/2019	15,188832	20/03/2019	18,021935
22/10/2018	14,580541	20/11/2018	14,478188	19/12/2018	13,39801	22/01/2019	13,919147	20/02/2019	16,695398	21/03/2019	18,088261
23/10/2018	14,310703	21/11/2018	14,572941	20/12/2018	13,009523	23/01/2019	13,691742	21/02/2019	16,335337	22/03/2019	17,443943
24/10/2018	14,571235	22/11/2018	14,307634	21/12/2018	13,0569	24/01/2019	13,720167	22/02/2019	16,62907	25/03/2019	17,406042
25/10/2018	14,664283	23/11/2018	14,203405	24/12/2018	12,801068	25/01/2019	13,824395	25/02/2019	16,477467	26/03/2019	17,737675
26/10/2018	14,282789	26/11/2018	14,53504	27/12/2018	12,592613	28/01/2019	13,833872	26/02/2019	16,439566	27/03/2019	17,519743
29/10/2018	14,599149	27/11/2018	14,497139	28/12/2018	12,990573	29/01/2019	13,947574	27/02/2019	16,676447	28/03/2019	17,415516
30/10/2018	14,72011	28/11/2018	14,137079	31/12/2018	13,104277	30/01/2019	14,070752	28/02/2019	17,292339	29/03/2019	17,415516
31/10/2018	14,608454	29/11/2018	13,928623	02/01/2019	13,085326	31/01/2019	14,19393	01/03/2019	17,339714	01/04/2019	17,434467
01/11/2018	14,841073	30/11/2018	13,919147	03/01/2019	12,971622	01/02/2019	14,279207	04/03/2019	18,249338	02/04/2019	17,605022
02/11/2018	14,822464	03/12/2018	13,805445	04/01/2019	13,265355	04/02/2019	14,269732	05/03/2019	18,135635	03/04/2019	17,813477
05/11/2018	14,887597	04/12/2018	13,625416	07/01/2019	13,559089	05/02/2019	14,497139	06/03/2019	18,135635	04/04/2019	17,642923
06/11/2018	15,241177	05/12/2018	13,388534	08/01/2019	13,729643	06/02/2019	14,686645	07/03/2019	17,984032	05/04/2019	17,472368
07/11/2018	15,455187	06/12/2018	13,085326	09/01/2019	13,909674	07/02/2019	14,307634	08/03/2019	17,567122	08/04/2019	17,491318
08/11/2018	15,14813	07/12/2018	13,208504	10/01/2019	13,79597	08/02/2019	14,042326	11/03/2019	17,74715	09/04/2019	17,244963

Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close
10/04/2019	17,320765	14/05/2019	17,161285	12/06/2019	17,951218	11/07/2019	17,891973	09/08/2019	17,556252	09/09/2019	15,008718
11/04/2019	17,699774	15/05/2019	17,141539	13/06/2019	17,990713	12/07/2019	18,089457	12/08/2019	17,635246	10/09/2019	15,087712
12/04/2019	17,586071	16/05/2019	17,220531	14/06/2019	17,714239	15/07/2019	18,010462	13/08/2019	17,793232	11/09/2019	15,107461
15/04/2019	18,021935	17/05/2019	17,062544	17/06/2019	17,477259	16/07/2019	17,990713	14/08/2019	17,299524	12/09/2019	15,028468
16/04/2019	18,287239	20/05/2019	16,707075	18/06/2019	17,951218	17/07/2019	17,931469	15/08/2019	17,200783	13/09/2019	15,265448
17/04/2019	18,495695	21/05/2019	16,687325	19/06/2019	17,911172	18/07/2019	17,45751	16/08/2019	17,575998	16/09/2019	15,601169
18/04/2019	18,021935	22/05/2019	16,667576	20/06/2019	17,654993	19/07/2019	17,418013	19/08/2019	17,832727	17/09/2019	15,46293
23/04/2019	18,059834	23/05/2019	16,272612	21/06/2019	17,635246	22/07/2019	17,674742	20/08/2019	17,852476	18/09/2019	15,423433
24/04/2019	18,346184	24/05/2019	16,391102	24/06/2019	17,260027	23/07/2019	17,497005	21/08/2019	18,148701	19/09/2019	15,541924
25/04/2019	18,425177	27/05/2019	16,410851	25/06/2019	17,220531	24/07/2019	17,595749	22/08/2019	17,832727	20/09/2019	15,719659
26/04/2019	18,385681	28/05/2019	16,252863	26/06/2019	17,358768	25/07/2019	17,654993	23/08/2019	17,911172	23/09/2019	15,640665
29/04/2019	18,721401	29/05/2019	15,956638	27/06/2019	17,378517	26/07/2019	17,891973	26/08/2019	18,207947	24/09/2019	15,58142
30/04/2019	18,820143	30/05/2019	16,015882	28/06/2019	17,437761	29/07/2019	17,69449	27/08/2019	18,563416	25/09/2019	15,46293
02/05/2019	18,385681	31/05/2019	16,05538	01/07/2019	17,575998	30/07/2019	17,556252	28/08/2019	18,484423	26/09/2019	15,69991
03/05/2019	18,28694	03/06/2019	15,8184	02/07/2019	17,654993	31/07/2019	17,793232	29/08/2019	15,680161	27/09/2019	15,8184
06/05/2019	18,030212	04/06/2019	16,134373	03/07/2019	17,714239	01/08/2019	18,148701	30/08/2019	15,403686	30/09/2019	16,035631
07/05/2019	17,773483	05/06/2019	16,312109	04/07/2019	17,635246	02/08/2019	17,891973	02/09/2019	15,048216	01/10/2019	16,331858
08/05/2019	17,852476	06/06/2019	16,707075	05/07/2019	18,207947	05/08/2019	17,319273	03/09/2019	14,890229	02/10/2019	15,838149
09/05/2019	16,983551	07/06/2019	17,33902	08/07/2019	17,773483	06/08/2019	17,575998	04/09/2019	14,969222	03/10/2019	15,69991
10/05/2019	17,615498	10/06/2019	17,556252	09/07/2019	17,497005	07/08/2019	17,378517	05/09/2019	15,008718	04/10/2019	15,69991
13/05/2019	16,884809	11/06/2019	17,911172	10/07/2019	17,753735	08/08/2019	17,654993	06/09/2019	14,988971	07/10/2019	16,865061

Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close	Date	Adj Close
08/10/2019	16,312109	06/11/2019	20,785101	05/12/2019	22	08/01/2020	21,9	06/02/2020	21,950001	06/03/2020	21,950001
09/10/2019	16,549088	07/11/2019	20,735731	06/12/2019	21,950001	09/01/2020	21,950001	07/02/2020	21,950001	09/03/2020	21,950001
10/10/2019	16,667576	08/11/2019	20,834473	09/12/2019	22	10/01/2020	21,9	10/02/2020	21,9	10/03/2020	21,950001
11/10/2019	17,260027	11/11/2019	20,686359	10/12/2019	22	13/01/2020	21,950001	11/02/2020	21,950001	11/03/2020	21,950001
14/10/2019	17,141539	12/11/2019	21,92063	11/12/2019	21,950001	14/01/2020	21,9	12/02/2020	22	12/03/2020	21,950001
15/10/2019	17,358768	13/11/2019	21,969999	12/12/2019	21,9	15/01/2020	21,950001	13/02/2020	21,950001	13/03/2020	21,950001
16/10/2019	17,299524	14/11/2019	21,92063	13/12/2019	21,950001	16/01/2020	21,9	14/02/2020	21,9	16/03/2020	21,950001
17/10/2019	17,477259	15/11/2019	21,92063	16/12/2019	22	17/01/2020	21,950001	17/02/2020	21,950001	17/03/2020	21,950001
18/10/2019	17,200783	18/11/2019	21,92063	17/12/2019	21,9	20/01/2020	21,9	18/02/2020	21,9	18/03/2020	21,950001
21/10/2019	17,200783	19/11/2019	21,969999	18/12/2019	22	21/01/2020	21,950001	19/02/2020	21,9	19/03/2020	21,950001
22/10/2019	17,358768	20/11/2019	21,950001	19/12/2019	21,9	22/01/2020	21,950001	20/02/2020	21,950001	20/03/2020	21,950001
23/10/2019	17,418013	21/11/2019	21,9	20/12/2019	21,950001	23/01/2020	21,9	21/02/2020	21,9	23/03/2020	21,9
24/10/2019	17,220531	22/11/2019	21,9	23/12/2019	21,9	24/01/2020	21,950001	24/02/2020	21,950001	24/03/2020	21,950001
25/10/2019	17,220531	25/11/2019	21,9	24/12/2019	21,950001	27/01/2020	21,950001	25/02/2020	21,9	25/03/2020	21,950001
28/10/2019	17,477259	26/11/2019	22	27/12/2019	21,9	28/01/2020	21,9	26/02/2020	21,9	26/03/2020	21,950001
29/10/2019	20,735731	27/11/2019	21,9	30/12/2019	21,950001	29/01/2020	21,9	27/02/2020	21,950001	27/03/2020	22,1
30/10/2019	20,834473	28/11/2019	21,9	31/12/2019	21,950001	30/01/2020	21,9	28/02/2020	21,9	30/03/2020	22,15
31/10/2019	20,538246	29/11/2019	21,950001	02/01/2020	21,950001	31/01/2020	21,9	02/03/2020	22	31/03/2020	21,700001
01/11/2019	20,735731	02/12/2019	21,950001	03/01/2020	21,9	03/02/2020	21,950001	03/03/2020	21,950001		
04/11/2019	20,735731	03/12/2019	21,9	06/01/2020	21,950001	04/02/2020	21,950001	04/03/2020	21,950001		
05/11/2019	20,785101	04/12/2019	22	07/01/2020	21,950001	05/02/2020	21,950001	05/03/2020	21,950001		



## Annexe B : Les codes source

Code source utilisant l'estimateur Champernowne-Beta :

```
library(fBasics)
#Champernowne function
#density
dchampernowne<-function(y,alfa,M,c)
  {return ((alfa*(y+c)^(alfa-1)*(M+c)^alfa-c^alfa)/((y+c)^alfa +
(M+c)^alfa - (2*c^alfa)^2))}
#df
pchampernowne<-function(y,alfa,M,c)
  {return ((y+c)^alfa-c^alfa)/((y+c)^alfa+(M+c)^alfa-2*c^alfa)}
n=500
MAT=matrix(0,nrow=2000,ncol=2) ### définir une matrice
M contenant des "0" pour les remplacer par la suite par les estimateurs
Vect=numeric(2000)
for(i in 1:2000){
##### Generating variables Weibull distribution #####
data=rweibull(n,3,2)
z=seq(0,5,by=0.001)
dl=dweibull(z,3,2)
ql=qweibull(0.95,3,2)
Champ<-function (parms)
{
alfa=parms[1]
c=parms[2]
v=dchampernowne(data,exp(alfa),log(median(data)),exp(c))
return(-sum(log(v)))}
Vect[i]=median(data)
est=optim(par=c(0,0),fn=Champ)
estt=est$par
MAT[i,]=est$par}
MAT
param1=mean(MAT[,1]) ##### calcul la moyenne de tous les estimateurs du paramètre
param2=mean(MAT[,2]) ##### calcul la moyenne de tous les estimateurs du paramètre
param3=mean(Vect)
param1
param2
param3
#transformation de l'échantillon
Y1<-pchampernowne(data,param1,param3,param2)
Y1
#Largeur de fenêtre b
b<-sqrt(0.95*0.05/501)
#####Quantile d'ordre p=0.95 de la distribution considérée
VraiQuantile<-qweibull(0.95,3,2)
VraiQuantile
##### Estimateur Betal #####
#Les vecteurs Q1 à Q9 contiennent les valeurs des quantiles estimés à partir des diffe
Q1<-c(1,2000) #Quantiles historiques (fonction quantile de R)
Q6<-c(1,2000) #Estimateur à noyau Betal de la densité
Qest6<-c(1,2000)
Q7<-c(1,2000) #Estimateur à noyau MACRO-Betal de la densité
```

```

Qest7<-c(1,2000)
Q8<-c(1,2000) #Estimateur à noyau Beta2 de la densité
Qest8<-c(1,2000)
Q9<-c(1,2000) #Estimateur à noyau MACRO-Beta2 de la densité
Qest9<-c(1,2000)
B<-c(1,2000)
K1<-c(1,2000)
FB1<-c(1,999)
FBBis1<-c(1,999)
FBMACRO1<-c(1,999)
FBBisMACRO1<-c(1,999)
densNoyauBeta1<-c(1,999)
densNoyauBetaBis1<-c(1,999)
densNoyauBetaMACRO1<-c(1,999)
densNoyauBetaBisMACRO1<-c(1,999)
#Inverse de la fonction de Champernowne
xx<-seq(0,50,0.005)
Yref1<-pchampernowne(xx,param1,param3,param2)
InvChampl<-cbind(xx,Yref1)
plot( Yref1)
#Beta1 B1
for(d in 1:999)
  {x<-d/1000
  densNoyauBeta1[d]<-1/200*sum(dbeta(Y1,(x/b)+1,((1-x)/b)+1))/999}
YY<-seq(0.001,0.999,0.001)
for(m in 1:999) {FB1[m]<-sum(densNoyauBeta1[1:m])}
FFB1<-cbind(YY,FB1)

Qest6[i]<-FFB1[FB1>=0.95][1]
Q6[i]<-InvChampl[Yref1>=Qest6[i]][1]
#Beta1 MACRO
for(d in 1:999)
  {x<-d/1000
  densNoyauBetaMACRO1[d]<-densNoyauBeta1[d]/sum(densNoyauBeta1)}
for(m in 1:999) {FBMACRO1[m]<-sum(densNoyauBetaMACRO1[1:m])}
FFBMACRO1<-cbind(YY,FBMACRO1)
Qest7[i]<-FFBMACRO1[FBMACRO1>=0.95][1]
Q7[i]<-InvChampl[Yref1>=Qest7[i]][1]
#Beta2 B2
for(d in 1:999)
  {
  x<-d/1000
  if(x<2*b){densNoyauBetaBis1[d]<-1/500*sum(dbeta(Y1,ro(x),(1-x)/b))/999}
  if(x>2*b && x<(1-2*b)){densNoyauBetaBis1[d]<-1/500*sum(dbeta(Y1,x/b,(1-x)/b))/999}
  if(x>1-2*b){densNoyauBetaBis1[d]<-1/500*sum(dbeta(Y1,x/b,ro(1-x)))/999}
  }
for(m in 1:999) {FBBis1[m]<-sum(densNoyauBetaBis1[1:m])}
FFB1<-cbind(YY,FBBis1)
Qest8[i]<-FFB1[FBBis1>=0.95][1]
Q8[i]<-InvChampl[Yref1>=Qest8[i]][1]
#Beta2 MACRO
for(d in 1:999)
  {x<-d/1000
  densNoyauBetaBisMACRO1[d]<-densNoyauBetaBis1[d]/sum(densNoyauBetaBis1)}

```

```

densNoyauBetaBisMACRO1[d]<-densNoyauBetaBis1[d]/sum(densNoyauBetaBis1)
for(m in 1:999){FBBisMACRO1[m]<-sum(densNoyauBetaBisMACRO1[1:m])}
FFBBisMACRO1<-cbind(YY,FBBisMACRO1)
Qest9[i]<-FFBBisMACRO1[FBBisMACRO1>=0.95][1]
Q9[i]<-InvChampl[Yref1>=Qest9[i]][1]
boxplot(Q6,Q7,Q8,Q9,main="Boxplot for the 5 quantile estimators\n
Weibull Distribution",col=c("light blue","red","green","pink"),
horizontal=TRUE,ylim=c(1,6))
legend("bottomright",inset=0.05,c("B1","B2","MACROB1","MACROB2")
,fill=c("light blue","red","green","pink"),horiz=FALSE)
abline(v=VraiQuantile,lty=3,lwd=2,col="dark gray")
#B1
MSE11<-1/2000*sum((Q6[i]-VraiQuantile)^2)
MSE11
#B2
MSE13<-1/2000*sum((Q7[i]-VraiQuantile)^2)
MSE13
#MACRO B1
MSE15<-1/2000*sum((Q8[i]-VraiQuantile)^2)
MSE15
#MACRO B2
MSE17<-1/2000*sum((Q9[i]-VraiQuantile)^2)
MSE17

```

---

Code source utilisant l'estimateur BS :

```

library(actuar)
library(stats4)
library(Matrix)
library(fBasics)
library(Metrics)
library(stats)
n=500
#####wuibull avec le noyau BS#####
rm(x)
rm(X)
n=500
#Weibull distribution
d2<-dweibull(x2,shape=1.5,scale=1)
fdr2<-pweibull(x2,shape=1.5,scale=1)
q2<-qweibull(0.95,shape=1.5,scale=1)
X=rweibull(n,shape=1.5,scale=1)
x=seq(0,10,by=0.01)
#####Fonction de densité#####
dens=0
for(i in 1:length(x)){
dens[i]=dweibull(x[i],shape= 1.5,scale =1)}
dens
plot(x,dens,type="l")
##### definir un noyau BS #####
rm(h)
rm(u)
noyau=function(u,x,h){
NBS=1/(2*sqrt(2*h*pi))*((1/sqrt(x*u))+sqrt(x/(u^3)))*exp((-1/(2*h))*((u/x)-2+(x/u)))}
##### ESTIMATEUR ? NOYAU BS #####
ESTD=function(X,x,h){
ESTG=mean(noyau(X,x,h))}
### calcule de b ###
b<-sqrt(0.95*0.05/501)
b
##### tracer le graphe de la fonction de densité estimée #####
x=seq(0,10,by=0.01)
ESTT=0
for(i in 1:length(x)){
ESTT[i]=ESTD(X,x[i],b)}
ESTT
plot(x,dens,type="l",col = "black",ylab="density",xlab="x",lwd=2,
cex.main=0.8,cex.lab=0.8,cex.axis=0.8,cex.sub=0.8,add="TRUE")
lines(x,ESTT,type="l",col = "red",ylab="density",xlab="x",lwd=2,
cex.main=0.8,cex.lab=0.8,cex.axis=0.8,cex.sub=0.8,add="TRUE")
legend("topright",inset=0.05,c("Weibull density","BS estimator"),
fill=c("black","red"),horiz=FALSE)

```

Code source utilisant l'estimateur Gamma :

```
library(actuar)
library(stats4)
library(Matrix)
library(fBasics)
library(Metrics)
library(stats)
n=500
Est_Gam=function(V,x,h){
out=(1/length(V))*sum(dgamma(V,(x/h)+1,1/h))
out
}
V=rgamma(n,1.5,2.6)
h=0.00097
test=Est_Gam(V,x,h)
test
x=seq(0,10,0.01)
F_est=0
for (i in 1:length(x)){
F_est[i]=Est_Gam(V,x[i],h)
}
F_est
f=dgamma(x,1.5,2.6)
plot(x,f,type="l")
lines(x,F_est,type="l",col="red")
legend("topright",inset=0.05,c("logNormal density","Gamma estimator"),
fill=c("black","red"),horiz=FALSE)
```

## Résumé

Dans ce mémoire, nous donnons, dans un premier temps, quelques rappels et définitions sur la statistique d'ordre, les quantiles et la Valeur à Risque. Dans un second temps, nous effectuons une synthèse sur les différentes méthodes d'estimation de la VaR utilisées dans la littérature (la méthode paramétrique, la méthode semi-paramétrique et la méthode non paramétrique). Enfin, une étude comparative de quelques estimateurs de la VaR a été réalisée en se basant sur les résultats de simulation et de données réelles. Ces derniers montrent que les méthodes d'estimation semi paramétrique sont plus performantes que les méthodes d'estimation non paramétrique et paramétrique.

**Mots-clés :** Statistique d'ordre, Quantile, Valeur à Risque, Distribution Champernwone, Méthode du noyau, Noyau Beta, Distribution lambda généralisée.

## Abstract

In this work, we first give some reminders and definitions on order statistics, quantiles and Value at Risk. In a second step, we carry out a synthesis on the different methods of estimation of the VaR used in the literature (the parametric method, the semi-parametric method and the non parametric method). Finally, a comparative study of some estimators of the VaR is performed based on results of simulation and real data. These latter show that semi parametric estimation methods are more efficient than non parametric and parametric ones.

**Keywords :** Order statistics, Quantile, Value at Risk, Champernwone Distribution, Kernel method, Beta kernel, Generalized lambda distribution.