République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Bejaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de master

En Mathématiques

Option : Analyse et probabilité

Thème :

Introduction à la théorie analytique des nombres premiers

Réalisé par :

M^{elle} Hamamouche Siham

M^{elle} Mouloud Naima

Devant le jury :

Président : M^{r} B. Farhi

Examinateur : M^{r} S. Aissaoui

Examinatrice : M^{elle} N. Mohdeb

Promoteur : M^{r} A.M. Bedhouche

Promotion 2013/2014

Remerciements

Nous remercions Dieu de nous avoir donné la vigueur et la patience d'élaborer ce travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur pour avoir proposé le sujet et dirigé ce travail, son entière disponibilité et son suivi incessant.

J'adresse mes sincères remerciements à monsieur Farhi pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être président du jury de ce modeste mémoire.

Je remercie également Monsieur Aissaoui pour sa participation au jury.

Pour tout l'aide que nous a apporté Mademoiselle Mohdeb et sa participation au jury trouve ici toute notre gratitude.

Nous témoignons à tous ce qui ont contribué à notre formation et nous tenons à remercier tous les membres du département de mathématiques de l'université de A.Mira de Béjaia : enseignants, étudiants, ainsi que tous nos camarades.

Enfin, nous remercions nos parents, que dieu les garde pour tous ce qu'ils nous ont fait pour travailler dans les meilleurs conditions.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon cher père que j'aime beaucoup.

A ma chère mère Saliha que dieu la protège.

A ma chère grande mère.

A mes chères frères : Rabia, Bouelam et leurs fiancées Amina et Rima; ainsi mon adorable Hicham.

A ma cousine Feriel.

A ceux qui m'aiment et ceux que j'aime, particulièrement ma Famille.

A tous mes chers oncles et leurs femmes.

A tous mes cousins(es), voisins(es) et toutes mes copines.

Naima

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

En premier, à ma très chère mère que dieu la bénisse, malgré son absence, son esprit m'a toujours accompagné et guidé dans tous ce que j'ai vécu.

A ceux qui me sont les plus chers, mon père et ma belle mère pour leur patience et leurs Bienveillances.

A mes chers frères : Réda, Islam et Wacim.

A mon unique et adorable sœur Rania.

A mon mari Mohand Essadek pour son soutient tout au long de mon cycle d'étude.

A tous mes chers oncles et leurs femmes.

A ceux qui m'aiment et ceux que j'aime, particulièrement ma Famille.

A tous mes cousins(es), voisins(es) et toutes mes copines.

Siham

Table des matières

Introduction

La question de la fréquence des nombres premiers a fait l'objet de beaucoup de spéculation au début du XIX siècle.

Pour étudier cette distribution, on considère une fonction notée $\pi(x)$, qui compte le nombre des nombres premiers inferieurs ou égaux à x; ainsi $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers p satisfaisant $2 \leq p \leq x$.

Voici un bref tableau de cette fonction $\pi(x)$ et sa comparaison avec $\dfrac{x}{\log x}$, ou $\log x$ signifie le logarithme népérien de x.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)}$
10	4	$4,3$	$0,93$
10^2	25	$21,7$	$1,15$
10^3	168	$144,9$	$1,16$
10^4	1229	$1,086$	$1,11$
10^5	9592	$8,686$	$1,10$
10^6	78498	$72,464$	$1,08$
10^7	664579	$621,118$	$1,07$
10^8	5761455	5434780	$1,06$

En examinant le tableau ci-dessus pour $x \geq 10^6$, **Gauss** (1792), puis **Legendre** (1798-1808) conjecturent que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Le problème de décider de la vérité ou la fausseté de la conjecture a attiré l'attention des mathématiciens depuis prés de 100 ans .

En 1851, le mathématicien russe **Tchébychev** a fait un important pas en avant en prouvant que si le rapport $\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)}$ avait la tendance à une limite, cette limite doit être 1; mais il a été incapable de prouver que le rapport ne tend pas une limite.

En 1859, **Riemann** a attaqué le problème par des méthodes analytiques, en utilisant une formule découverte par Euler en 1737 qui concerne les nombres premiers de la fonction $\xi(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ avec $s > 1$ (réel).

Riemann a décri une méthode ingénieuse pour relier la distribution des nombres premiers de propriétés de la fonction ξ, en considerant $s \in \mathbb{C}$. Les mathématiques nécessaires pour justifier tous les détails de cette méthode ont été entièrement développées et **Riemann** a été incapable de régler complètement avant sa mort en 1866.

Vingt ans plus tard les outils d'analyse nécessaires sont à la portée de main et en 1896 **J.Hadamard** et **J.de la Vallée Poussin** indépendamment et presque simultanément ont réussi à prouver : $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$. Ce résultat remarquable est appelé le théorème des nombres premiers, et sa preuve était l'une des plus belles réussites de la théorie analytique des nombres premiers. En 1949, deux mathématiciens contemporains, **Atle Selberg** et **Paul Erdos** ont découvert une preuve élémentaire de la théorie des nombres premiers; leur preuve, bien que très complexe, ne fait aucun usage de $\xi(s)$ ni de la théorie des fonctions complexes et en principe, est accessible à tout ceux qui connaissent les mathématiques minutieusement.

Un des problèmes les plus célèbres concernant les nombres premiers est la conjecture de **Goldbach** en 1742, celui-ci a écri à **Euler** suggèrant que tout nombre superieur ou égal à 4 est une somme de deux nombres premiers. Par exemple :

$4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$,

$10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$.

Cette conjecture reste un problème ouvert à ce jour. Bien que ces dernières années, certains progrès ont été réalisés pour indiquer qu'elle est probablement vrai.

Notre mémoire est réparti en quatres parties : le premier chapitre est consacré à des notions de base que nous allons utiliser tout au long de ce travail et qui nécessite un certain préliminaire théorique.

Le deuxième chapitre est consacré principalement à l'étude de la méthode de **Tchébychev**; les séries de **Dirichlet** sont introduites dans le troisième chapitre.

En fin, en dernier chapitre,on etudie une méthode analytique pour l'amélioration de l'encadrement "$0,92129\dfrac{x}{\log x}+o\left(\dfrac{x}{\log x}\right)\leq\pi\left(x\right)\leq1,10556\frac{x}{\log x}+o\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$".

CHAPITRE 1

Rappels

Pour élaborer notre travail, il est indispensable d'introduire tous les outils et notions de base nécessaires. En effet, ce chapitre comprend les notations et les concepts liés à notre mémoire.

1.1 Notations générales

$[x]$	:	partie fractionnaire de x,
$\{x\}$	:	partie décimalede x,
$PPCM$	:	plus petit commun multiple,
$v_p(n)$	:	valuation p-adique,
e	:	l'élément neutre,
χ	:	la fonction caractéristique,
$\pi(x)$	:	cardinal de l'ensemble des nombres premiers inferieurs ou égaux à x,

1.2 Nombre premiers, crible d'Ératosthène et d'Ibn Al-Banne

Le premier chapitre de ce mémoire concerne les nombres premiers; rappelons qu'on dit qu'un nombre entier $p > 1$ est un nombre premier s'il n'est divisible par aucun autre nombre entier positif que 1 et lui-même. On notera P l'ensemble des nombres premiers.

Il convient de remarquer que tout nombre entier strictement supérieur à 1 est multiple d'un nombre premier : c'est clair s'il est lui-même premier et dans le cas contraire, c'est un multiple de deux nombres entiers strictement plus petits qui sont par récurrence multiples d'un nombre premier. On peut encore raffiner cette remarque : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 qui n'est pas premier est divisible par un nombre premier au plus égal à $\sqrt{n}$.

Cette remarque faite, on peut alors commencer à énumérer les éléments de P à l'aide du crible d'Eratosthène qui consiste à écrire les nombres entiers $2, ...$, jusqu'à un certain rang, disons 20 :

$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$, puis à raisonner de la façon suivante : L'entier 2 est premier, donc ses multiples $4, 6, ...$ ne le sont pas ; on les raye :

2, 3, _4, 5, _6, 7, _8, 9, _10, 11, _12, 13, _14, 15, _16, 17, _18, 19, _20.

Après 2, le premier entier non rayé, en l'occurence 3, est forcément un nombre premier : dans le cas contraire, il aurait été multiple d'un nombre premier déjà détecté; on le sélectionne et on raye ses multiples $6, 9, ...$:

2, 3, _4, 5, _6, 7, _8, _9, _10, 11, _12, 13, _14, _15, _16, 17, _18, 19, _20.

De même, 5 est premier, on raye ses multiples :

On constate cependant qu'on n'a rien rayé de nouveau. En effet, $5^2 > 20$, donc les nombres entiers inférieurs à 25 sont ou bien premiers, ou bien sont divisibles par un nombre premier au plus égal à 5. Par le même argument, tous ceux qui restent sont des nombres premiers, d'où le début de l'énumération : $P \cap [1, 20] = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Remarque 1.2.1 *Le crible d'Eratosthène vérifie si un nombre n est premier en le disant sur tous les nombres inférieurs ou égaux à n.*

Ibn Al-Banna a remarqué (le premier) qu'il suffit de diviser sur tous les nombres qui sont inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$

1.3 Caractère infini de l'ensemble des nombres premiers

L'outil incontournable pour l'étude de l'arithmétique des nombres entiers est la division euclidienne : si a et b sont des nombres entiers relatifs, avec $b \neq 0$, il existe un unique couple (q, r) formé d'entiers relatifs tels que $0 \leq r < |b|$ et $a = bq + r$; on dit que q est le quotient de la division euclidienne de a par b, et que r est le reste. On résumera souvent ces propriétés en disant : « soit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b », ce qui sous-entendra que q est le quotient et r le reste. La démonstration de ce fait, par récurrence sur a, est supposée connue.

Lemme 1.3.1 (Euclide) *Soit a et b des nombres entiers et soit p un nombre premier qui divise le produit ab. Alors p divise a ou p divise b.*

Théorème 1.3.1 (Euclide) *L'ensemble P des nombres premiers est infini.*

Preuve. Dans le cas contraire, P serait un ensemble fini que l'on pourrait énumérer : $P = \{p_1, ..., p_m\}$. Soit alors N l'entier $p_1 p_2 ... p_m + 1$. Il vérifie $N > 1$ donc est multiple d'un nombre premier, c'est-à-dire de l'un des entiers $p_1, ..., p_m$, disons p_i . Par soustraction, l'entier $1 = N - (p_1 p_2 ... p_m)$ est aussi multiple de p_i , ce qui est absurde. ■

1.4 Les valuations -adique

Définition 1.4.1 *Soit p un nombre premier.*

La valuation $p-$addique est l'application de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ qui associe à tout $n \in \mathbb{N}^*$ la plus grand puissance de p qui divise n. Cette application est notée υ_p.

Autrement dit,

$$\begin{array}{llll} \upsilon_p : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \upsilon_p(n) & = \max\{s / p^s \, divise \, n\}. \end{array}$$

Exemple 1.4.1 $\upsilon_2(24) = 3$, *car :* $24 = \ 2^3 \times 3.$

Remarque 1.4.1 *La valuation* $p-$*adique est définie méme sur* $\mathbb{Q}^*$.

Propriétés :

$\upsilon_p(a \times b) = \upsilon_p(a) + \upsilon_p(b)$.
$\upsilon_p\left(\frac{a}{b}\right) = \upsilon_p(a) - \upsilon_p(b)$.
$\upsilon_p(a+b) \geq \min(\upsilon_p(a), \upsilon_p(b))$

1.5 Théoréme d'Euclide

L'intérêt que l'on porte aux nombres premiers vient du fait que tout nombre entier (strictement positif) s'écrit de manière unique comme produit de nombres premiers.

Théorème 1.5.1 *Pour tout nombre entier naturel* $n > 1$*, il existe une unique suite finie* $(p_1, ..., p_m)$ *croissante, de nombres premiers telle que :* $n = p_1...p_m$.

La démonstration se fait par récurrence sur n, est supposée connue.

Remarque 1.5.1 *En utilisant la définition (1.4.1), la décomposition en facteurs premiers de* n *peut donc s'écrire sous la forme :*

$$n = \prod_{p \ premier} p^{\upsilon_p(n)}.$$

1.6 Fonctions multiplicatives

Définition 1.6.1 *Une fonction* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite multiplicative; si* $f(1) = 1$ *et si "*n_1 *et* n_2 *sont premiers entre eux " entraîne* $f(n_1.n_2) = f(n_1).\ f(n_2)$.

Définition 1.6.2 *Une fonction* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite complétement multiplicative; si* $f(1) = 1$ *et si* $f(n_1.n_2) = f(n_1).\ f(n_2)$ *Pour tout* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.6.1

$$\begin{array}{rlll} \chi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \chi(n) = 1 \quad \textit{(fonction constante)}. \end{array}$$

La fonction χ *est multiplicative (resp complétement multiplicative).*

1.7 Produit de convolution

1.7.1 Définitions et propriétés

Définition 1.7.1 *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques de $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit leur produit de convolution, noté par $f * g$, comme suit:*

$$\textit{Pour tout } n \in \ \mathbb{N}^* : (f * g)(n) = \sum_{i.j=n} f(i)g(j) = \sum_{i/n} f(i)g(\frac{n}{i}).$$

Propriétès :

Le produit de convolution sur l'ensemble des fonctions arithmétiques possède les propriétès suivantes :

1. La commutativitè.
2. L'associativitè.
3. Un élément neutre.
4. Chaque élément admet un inverse.

Preuve. 1-La commutativité : soient f et g deux fonctions arithmétiques, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}(f * g)(n) &= \sum_{i.j=n} f(i)g(j) \\ &= \sum_{i.j=n} f(j)g(i) \\ &= (g * f)(n).\end{aligned}$$

2-L'assossiativitité : soient f, g et h trois fonctions arithmétiques et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a,

$$
\begin{aligned}
((f*g)*h)(n) &= \sum_{i.j=n}(f*g)(i)h(j)\\
&= \sum_{i.j=n}(\sum_{k.l=i}f(k)g(l))h(j)\\
&= \sum_{k.l.j=n}f(k)g(l))h(j)\\
&= \sum_{kw=n}f(k)\sum_{l.j=w}g(l))h(j)\\
&= f*(g*h)(n).
\end{aligned}
$$

3-L'élément neutre : noté e, défini par :$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f * e(n) = f(n)$.

Pour $n = 1$, on a,

$$
\begin{aligned}
f*e(1) &= f(1) \iff & f(1)e(1) &= f(1)\\
& \iff & e(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

Par contre pour $n \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
f*e(n) = f(n) &\iff \sum_{d/n} f(d)e(\tfrac{n}{d}) = f(n)\\
&\iff f(1)e(n) + ... + f(n)e(1) = f(n)\\
&\iff e(n) = 0,\ \forall n > 1.
\end{aligned}
$$

En résumé, $e(1) = 1$ et $e(n) = 0$ pour tout $n > 1$.

4-Les èléments inversibles, si $f(1) \neq 0$, f est inversible pour $*$, c'est à dire qu'il existe g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f * g\,(n) = e\,(n)\,.$$

En effet, les relations $f * g(n) = e(n)$ déterminent g par récurrence :

$$g(1) = \frac{1}{f(1)}$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$g(n) = \frac{-1}{f(1)}\sum_{\substack{i/n\\ i\neq 1}} f(i).g(\frac{n}{i}).$$

■

Proposition 1.7.1 *Si $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ sont multiplicatives, alors $f * g$ est multiplicatif.*

Preuve. Il est clair que si n_1 est premier avec n_2 alors,

d divise $n_1.n_2 \Rightarrow \exists d_1$ divise $n_1, \exists d_2$ divise $n_2 : d = d_1.d_2$(car on a $d_1 = p\gcd(d, n_1), d_2 = p\gcd(d, n_2)$).

$$\begin{aligned} f * g\,(n_1.n_2) &= \sum_{d/n_1.n_2} f\,(d)\, g\left(\frac{n_1.n_2}{d}\right) \\ &= \sum_{\substack{d_1/n_1 \\ d_2/n_2}} f\,(d_1.d_2)\, g(\frac{n_1}{d_1}.\frac{n_2}{d_2}). \end{aligned}$$

Comme $\frac{n_1}{d_1}$ et $\frac{n_2}{d_2}$ sont premiers entre eux, il en est de même pour d_1 et d_2, on a,

$$\begin{aligned} f * g\,(n_1.n_2) &= \sum_{\substack{d_1/n_1 \\ d_2/n_2}} f\,(d_1)\, f\,(d_2)\, g(\frac{n_1}{d_1}) g(\frac{n_2}{d_2}) \\ &= \sum_{d_1/n_1} f\,(d_1)\, g(\frac{n_1}{d_1}) \sum_{d_2/n_2} f\,(d_2)\, g(\frac{n_2}{d_2}) \end{aligned}$$

D'où,

$$f * g\,(n_1.n_2) = f * g\,(n_1)\,.f * g\,(n_2)\,.$$

■

Proposition 1.7.2 *Si $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est multiplicative, son inverse g pour la loi $*$ est multiplicative.*

Preuve. Comme g existe, $g\,(n)$ pouvant se calculer par récurrence.

Calculons g sur les puissances des nombres premiers.

$$\begin{aligned} g(p) &= -f(p) \\ g\left(p^2\right) &= -f\left(p^2\right) - f(p)\, g(p) \\ &. \\ &. \\ &. \\ g\left(p^k\right) &= -f(p^k) - f(p^{k-1})g(p) - ... - f(p)g(p^{k-1}). \end{aligned}$$

Soit alors g_0 la fonction multiplicative qui coincide avec g sur l'ensemble des nombres premiers.

$g * f$ est mltiplicative d'après la proposition (1.7.1).

$g_0 * f$ coincide avec μ sur l'ensemble des nombres premiers d'après la manière dont g_0 est formée.

Il en résulte que $g_0 * f = \mu$, c'est à dire que $g_0 = g$, ou que g est multiplicative. ■

1.7.2 Fonction de Möbius et Propriétés

Définition 1.7.2 *Soit χ la fonction constante. Notons par μ sa fonction inverse par rapport à la loi $*$.*

La fonction μ vérifiant $\chi * \mu = e$ est appelée fonction de Möbius.

Prpriétés : On a,

1. $\mu(1) = 1$.
2. $\mu(p) = -1$ pour tout p (premier).
3. $\forall k \geq 2, \forall p$ premier, $\mu\left(p^k\right) = 0$.
4. $\mu(p_1 p_2 ... p_k) = (-1)^k$ si p_i sont des nombre premiers deux à deux distincts.
5. $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier. Auterement dit $\mu(n) = 0 \Longleftrightarrow \exists\ p$ (premier) / p^2/n.

6. $|\mu(n)| \leq 1$.

7. $\forall n \in \mathbb{N}^* \left| \sum_{n \leq x} \mu(n) \right| \leq x$.

8. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1 + \frac{1}{x}$.

Preuve. Par définition, on a,

$$\begin{aligned} \chi * \mu(n) &= \sum_{i/n} \chi(i)\, \mu\left(\frac{n}{i}\right) \\ &= \sum_{i/n} \chi\left(\frac{n}{i}\right) \mu(i) \\ &= \sum_{i/n} \mu(i)\,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{i/n} \mu(i) = e(n). \tag{1.7.1}$$

En particulier, pour $n = 1$ on a : $\mu(1) = 1$. Ce qui achéve la démonstration de la première propriété.

Dans la formule (1.7.1), on remplace n par p (p étant un nombre premier), on obtient,

$$\mu(p) = -1.$$

D'une façon analogue, on dèmontre la troisième propriété.

La démonstration de la quatrième propriété est èvidente (il suffit d'appliquer la proposition (1.7.2) et la propriété 2).

Concernant la cinquième propriété, par hypothèse p^2 divise n donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que,

$$n = k.p^2.$$

Après avoir décomposé k en facteurs de nombres premiers, on a,

$$n = \prod_{q \text{ premier}} q^{v_p(k)}.p^2.$$

On en déduit que,

$$\mu(n) = \prod_{q \text{ premier}} \mu\left(q^{v_p(k)}\right).\mu\left(p^2\right) = 0 \quad .$$

La démonstration de la propriétè (6) est triviale.

Maintenant, nous allons montrer la septième propriétè;

en effet :$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\leq x}\mu\left(n\right)\right| &\leq \sum_{n\leq x}\left|\mu\left(n\right)\right| \\ &\leq \sum_{n\leq x}1 = x \text{ (grâce à la propriété 6).}\end{aligned}$$

Reste à montrer la dèrnière proprièté, pour ce faire :

On pose,

$$m(x) = \sum_{j\leq x}\frac{\mu(j)}{j}.$$

On note par $\{x\}$ la partie décimale de x ($[x] = x - \{x\}$).

$$xm(x) = x\sum_{j\leq x}\frac{\mu(j)}{j} = \sum_{j\leq x}\frac{x}{j}\mu(j) \ = \sum_{j\leq x}\left(\{\frac{x}{j}\} + [\frac{x}{j}]\right)\mu(j)$$

$$xm(x) \ = \sum_{j\leq x}[\frac{x}{j}]\mu(j) + \sum_{j\leq x}\{\frac{x}{j}\}\mu(j) \ = \underbrace{\sum_{n\leq x}\left(\sum_{j/n}\mu(j)\right)}_{=1} + \sum_{j\leq x}\{\frac{x}{j}\}\mu(j).$$

C'est à dire,

$$x\sum_{j\leq x}\frac{\mu(j)}{j} = 1 + \sum_{j\leq x}\{\frac{x}{j}\}\mu(j). \tag{1.7.2}$$

D'autre part, on a,

$$\sum_{j\leq x}\mu(j) \ \leq x.$$

D'où,

$$\begin{aligned}xm(x) &\leq 1 + x \\ m(x) &\leq 1 + \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

■

1.8 Théorème de Legendre

Pour tout p premier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a,

$$v_p(n!) = \sum_{k\geq 1}[\frac{n}{p^k}].$$

Preuve. On a,

$$v_p(n!) = v_p(1) + v_p(2) + v_p(3) + ... + v_p(n). \tag{1.8.1}$$

On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x \in [1,n] \;\; v_p(x) = 1\}, \\
A_2 &= \{x \in [1,n] \;\; v_p(x) = 2\}, \\
A_3 &= \{x \in [1,n] \;\; v_p(x) = 3\}, \\
&. \\
&. \\
&. \\
A_k &= \{x \in [1,n] \;\; v_p(x) = k\}.
\end{aligned}$$

On a aussi,

$$v_p(n!) = card(A_1) + 2card(A_2) + 3card(A_3) + ...kcard(A_k). \tag{1.8.2}$$

Calculons $cardA_1$, $cardA_2$, $cardA_3$, ...

Calcul de $cardA_1$: Soit $x \in \{1, 2, ..., n\}$.

$$\begin{aligned}
x \in A_1 \quad &\Leftrightarrow v_p(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow x \text{ est multiple de } p \text{ et } x \text{ n'est pas un multiple de } p^2.
\end{aligned}$$

Le nombre des $x \in \{1, 2, ..., n\}$ qui sont multiples de p est $[\frac{n}{p}]$.

Le nombre des $x \in \{1, 2, ..., n\}$ qui sont multiples de p^2 est $[\frac{n}{p^2}]$.

Donc,

$$cardA_1 = [\frac{n}{p}] - [\frac{n}{p^2}].$$

De même façon, on montre que :

$$card(A_2) = [\frac{n}{p^2}] - [\frac{n}{p^3}],$$
$$card(A_3) = [\frac{n}{p^3}] - [\frac{n}{p^4}],$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$card(A_k) = [\frac{n}{p^k}] - [\frac{n}{pk+1}].$$

En remplaçant toutes ces formules dans (1.8.2), on obtient :

$$v_p(n!) = \left([\frac{n}{p}] - [\frac{n}{p^2}]\right) + 2\left([\frac{n}{p^2}] - [\frac{n}{p^3}]\right) + 3\left([\frac{n}{p^3}] - [\frac{n}{p^4}]\right) + ... + k\left(= [\frac{n}{p^k}] - [\frac{n}{p^{k+1}}]\right).$$

Ce qui donne :

$$v_p(n!) = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + [\frac{n}{p^4}] + ... = \sum_{k=1}[\frac{n}{p^k}].$$

Ce qui démontre la formule de legendre. ■

Exemple 1.8.1 *On va décomposer le nombre* 10! *en produit de nombres premiers.*

On a

$$10! = 2^i 3^j 5^k 7^s$$
$$i = [\frac{10}{2}] + [\frac{10}{2^2}] + [\frac{10}{2^3}] = 8$$
$$j = [\frac{10}{3}] + [\frac{10}{3^2}] = 4$$
$$k = [\frac{10}{5}] = 2$$
$$s = [\frac{10}{7}] = 1$$

Ce qui donne, $10! = 2^8 3^4 5^2 7^1$.

1.9 Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et x_0 un réel, fini ou infini, appartenant à I, ou à l'extrémité de I.

Définition 1.9.1 *On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0, si et seulement si, il existe une fonction ε définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0, telle que : $\forall x \in V_{x_0}$, $f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)$; avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = l$ (finie).*

On note alors, $f = O(g)$.

Définition 1.9.2 *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, si et seulement si, il existe une fonction ε' définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0, telle que :*

$\forall x \in V_{x_0}$, $f(x) = \varepsilon'(x)\, g(x)$; avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon'(x) = 0$. On note alors, $f = o(g)$.

Exemple 1.9.1 $\sum\limits_{1 \leq i \leq n} \log i = n \log n - n + O(\log n)$.

En effet : Soit $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq x$.

On a

$$0 \leq \log k \leq \log x.$$

En intégrant les deux membres on obtient,

$$\int_k^{k+1} \log k dx \leq \int_k^{k+1} \log x dx.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\log k &\leq \int_k^{k+1} \log x dx \\
\sum_{k=1}^{k=n-1} \log k &\leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_k^{k+1} \log x dx \\
\sum_{k=1}^{k=n-1} \log k &\leq \int_1^n \ln x dx = \left. x \log x - x \right|_1^n = n \log n - n + 1 \\
\sum_{k=1}^{k=n} \log k &\leq n \log n - n + \log n + 1.
\end{aligned}$$

Donc,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{k=n} \log k - (n \log n - n) \leq \log n + 1.$$

On en déduit que,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \log k = (n \log n - n) + O(\log n).$$

Définition 1.9.3 *On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, si et seulement si, il existe une fonction ε'' définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0 telle que,*

$\forall x \in V_{x_0},\ f(x) = \varepsilon''(x)\, g(x)$; *avec* $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon''(x) = 1$. *On note alors,* $f \sim g$ *ou* $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Exemple 1.9.2

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad et \ \log(x+1) \underset{0}{\sim} x.$$

CHAPITRE 2

La méthode de Tchébychev

Ce chapitre est une introduction rapide à la théorie analytique des nombres. Cette théorie part des résultats d'Euclide selon lesquels chaque entier naturel admet une factorisation de la forme $\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$, où les p_i sont des premiers et les r_i des entiers ≥ 1, et qu'il y'a une infinité de nombres premiers et il convient d'étudier leur répartition et par exemple leur nombre $\pi\ (x)$ dans un intervalle $[1, x]$.

2.1 Fonctions de Tchébychev

Définition 2.1.1 *On définit les fonctions de Tchébychev comme suit :*

1- $\theta : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \theta(x) = \sum_{\substack{p \ premier \\ p \leq x}} \log p.$$

2- $\psi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \psi(x) = \sum_{\substack{p \ premier, k entier \\ p^k \leq x}} \log p.$$

On a, $\psi(x) = \log PPCM\left\{1, 2, ..., [x]\right\}$.

Il suffit de remarquer,

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p.$$

Proposition 2.1.1 *On a*

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right).$$

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{\substack{p \text{ premier}, k \\ p^k \leq x}} \log p = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p^2 \leq x} \log p + \sum_{p^3 \leq x} \log p + ... \\
&= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p \leq x^{\frac{1}{2}}} \log p + \sum_{p \leq x^{\frac{1}{3}}} \log p + ... \\
&= \theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + ... \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right).
\end{aligned}$$

■

2.2 Ordre de grandeur de la fonction π

Proposition 2.2.1 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\pi(2n) = O\left(\frac{2n}{\log 2n}\right).$$

Preuve. Rappellons que $\pi(2n) = card\{p \text{ premier } /p \leq 2n\}$.

Il suffit de montrer que : $\exists\ c_1, c_2$ vérifiant, $c_1 \dfrac{2n}{\log 2n} \leq \pi(2n) \leq c_2 \dfrac{2n}{\log(2n)}$.

En effet, considérons le nombre C_{2n}^n.

On a,

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(n+1)...(2n)}{n!} = \frac{(2n)...(n+1)}{n(n-1)...1}.$$

La factorisation en nombres premiers de C_{2n}^n donne,

$$C_{2n}^n = \prod_{p \text{ premier}} p^{v_p\left(C_{2n}^n\right)}. \tag{2.2.1}$$

Dans le but d'obtenir une meilleure majoration de p sous cité dans la formule (2.2.1), on procède comme suit :

Soit p un nombre premier quelconque, comme,

$$\begin{aligned} p \text{ divise } C_{2n}^{n} &\Rightarrow p \text{ divise } (2n)\ldots(n+1) \\ &\Rightarrow \quad p \ \text{ divise l'un des facteurs } \ (2n, 2n-1, \ldots, n+1). \\ &\Rightarrow p \leq 2n. \end{aligned}$$

Alors, (2.2.1) devient,

$$C_{2n}^{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{v_p\left(C_{2n}^{n}\right)}.$$

De même,

$$\begin{aligned} p^{v_p\left(C_{2n}^{n}\right)} \text{divise } C_{2n}^{n} &\Rightarrow p^{v_p\left(C_{n}^{2n}\right)} \text{divise} \, (2n)\,(2n-1)\ldots(n+1) \\ &\Rightarrow p^{v_p\left(C_{2n}^{n}\right)} \leq 2n \\ &\Rightarrow v_p\left(C_{2n}^{n}\right) \quad \leq \frac{\log 2n}{\log p}. \end{aligned}$$

On en déduit,

$$C_{2n}^{n} \leq \prod_{p \leq 2n} p^{\frac{\log 2n}{\log p}}.$$

Comme,

$$\prod_{p \leq 2n} p^{\frac{\log 2n}{\log p}} \leq \prod_{p \leq 2n} 2n.$$

Alors,

$$C_{2n}^{n} \quad \leq (2n)^{\pi(2n)}. \tag{2.2.2}$$

D'autre part, si l'on écrit : $C_{2n}^{n} = \dfrac{2n}{n}\dfrac{2n-1}{n-1}\ldots\dfrac{n+1}{1}$, alors on obtient,

$$C_{2n}^{n} \geq 2^{n}. \tag{2.2.3}$$

Car $\dfrac{2n-c}{n-c} \geq 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^{*} / \forall c \, (n \neq c)$.

En tenant compte de (2.2.2) et (2.2.3), on a,

$$2^n \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

Cela entraîne,

$$\frac{2n \log 2}{2 \log 2n} \leq \pi(2n). \tag{2.2.4}$$

Enfin la constante c_1 souhaitée est bien dèterminée.

Il reste à déterminer la constante c_2.

Il est clair que,

$$C_{2n}^{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} = 2^{2n}. \tag{2.2.5}$$

Si $p \in \{1, 2, ..., n\}$ (quelconque); visiblement on a :

$$p \text{ divise } (n+1) \ldots (2n) \Rightarrow p \text{ divise } C_{2n}^{n}.$$

Si $p \in \{n+1, ..., 2n\}$ quelconque; donc :

$$p \text{ divise } (n+1)(n+2) \ldots (2n) = n! C_{2n}^{n}.$$

Comme p ne divise pas $n!$, alors d'après le lemme d'Euclide, on a,

$$p \text{ divise } C_{2n}^{n}.$$

D'où, $\prod\limits_{n<p\leq 2n} p$ divise C_{2n}^{n} et cela entraîne,

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq C_{2n}^{n}. \tag{2.2.6}$$

De (2.2.5) et (2.2.6), on déduit que,

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq 2^{2n}.$$

Or,

$$\prod_{n<p\leq 2n} p > \prod_{n<p\leq 2n} n.$$

D'où,

$$\prod_{n<p\leq 2n} n \leq 2^{2n} \Rightarrow n^{(\pi(2n)-\pi(n))} \leq 2^{2n}$$
$$\Rightarrow (\pi(2n) - \pi(n)) \log n \leq 2n \log 2$$

C'est à dire,

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{2n \log 2}{\log n}. \tag{2.2.7}$$

Deux écritures possibles pour $n \in \mathbb{N}^*$: soit $\underbrace{n = 2[\frac{n}{2}] + 1}_{n \text{ impair}}$ ou $\underbrace{n = 2[\frac{n}{2}]}_{n \text{ pair}}$.

Donc si n est pair, alors (2.2.7) devient,

$$\pi(2n) - \pi\left(2[\frac{n}{2}]\right) \leq \frac{2n \log 2}{\log n}. \tag{2.2.8}$$

Et si n est impair, alors (2.2.7) devient,

$$\pi(2n) - \pi\left(2[\frac{n}{2}] + 1\right) \leq \frac{2n \log 2}{\log n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\pi(2n) - \pi\left(2[\frac{n}{2}]\right) - 1 \leq \frac{2n \log 2}{\log n}.$$

C'est à dire,

$$\pi(2n) - \pi\left(2[\frac{n}{2}]\right) \leq 1 + 2n\frac{\log 2}{\log n}. \tag{2.2.9}$$

Si on pose $n_1 = [\frac{n}{2}]$, alors,

$$\pi(2n) - \pi(2n_1) \leq 1 + \frac{2n \log 2}{\log n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.2.10}$$

On a donc,

$$\begin{aligned}
\pi(2n) - \pi(2n_1) &\leq 1 + \frac{2n \log 2}{\log n} \\
&\leq 1 + 2\left(\frac{n}{\log n}\right) \log 2 \\
&\leq 1 + 2\left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log n} + \ldots \frac{1}{\log n}\right) \log 2 \\
&\leq 1 + 2\left(\frac{1}{\log\left(\frac{2n}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n-1}{2}\right)} + \ldots \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1+1}{2}\right)}\right) \log 2.
\end{aligned}$$

Car chaque terme de la somme entre parenthéses majorant $\left(\dfrac{1}{\log n}\right)$.

De même, on pose $n_2 = [\dfrac{n_1}{2}]$, la formule (2.2.10) devient,

$$\pi\left(2n_1\right) - \pi\left(2n_2\right) \leq 1 + 2\left(\frac{1}{\log\left(\frac{2n_1}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_1-1}{2}\right)} + \ldots \frac{1}{\log\left(\frac{2n_2+1}{2}\right)}\right)\log 2.$$

On répète le procédé jusqu'à ce que l'on trouve,

$$\pi\left(2n_{k-1}\right) - \pi\left(2n_k\right) \leq 1 + 2\left(\frac{1}{\log\left(\frac{2n_{k-1}}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{2n_{k-1}-1}{2}\right)} + \ldots \frac{1}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\log 2 \text{ (avec } n_k = [\frac{n_{k-1}}{2}] \; = 1).$$

En additionnant les inégalités on trouve,

$$\begin{aligned}\pi\left(2n\right) - \pi\left(2\right) &\leq (1 + 1 + \ldots 1) + 2\left(\frac{1}{\log\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{\log\left(\frac{4}{2}\right)} + \ldots + \frac{1}{\log\left(\frac{2n}{2}\right)}\right)\log 2 \\ &\leq k + 2\log 2\sum_{m=3}^{2n}\frac{1}{\log\left(\dfrac{m}{2}\right)} \quad \text{(avec } k < \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] \text{)}.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\pi\left(2n\right) \leq \frac{\log n}{\log 2} + 1 + 2\log 2\sum_{m=3}^{2n}\frac{1}{\log\left(\dfrac{m}{2}\right)} = \frac{\log 2n}{\log 2} + 2\log 2\sum_{m=3}^{2n}\frac{1}{\log\left(\dfrac{m}{2}\right)}.$$

Si n est assez grand, écrivons,

$$\sum_{m=3}^{2n}\frac{1}{\log\left(\dfrac{m}{2}\right)} = \sum_{3\leq m\leq \frac{2n}{(\log n)^2}}\frac{1}{\log\dfrac{m}{2}} + \sum_{\frac{2n}{(\log n)^2}<m\leq 2n}\frac{1}{\log\left(\dfrac{m}{2}\right)}.$$

La première somme du second membre apparient à $O\left(\dfrac{2n}{(\log n)^2}\right)$, car elle contient $\left[\dfrac{2n}{(\log n)^2} - 2\right]$ termes tous inférieurs à $\dfrac{1}{\log\dfrac{3}{2}}$; la deuxième est équivalente à $\dfrac{2n}{(\log n)^2}$, car :

$$2n - \left[\frac{2n}{(\log n)^2}\right]\frac{1}{\log n} < \sum_{\dfrac{2n}{(\log n)^2}<m\leq 2n}\frac{1}{\log\frac{m}{2}} < \left(2n - \left[\frac{2n}{(\log n)^2}\right]\right)\frac{1}{\log\left(\frac{n}{(\log)^2}\right)}.$$

Et les membres extérieurs de cette inégalité sont équivalents à $\dfrac{2n}{\log(2n)}$.

D'où,

$$\frac{\pi\left(2n\right)\log\left(2n\right)}{n} \leq 2\log 2.$$

C'est à dire,

$$\pi\left(2n\right) \leq \log 2\frac{2n}{\log\left(2n\right)}. \tag{2.2.11}$$

De (2.2.4) et (2.2.11), on atteint le résultat,

$$c_1\frac{2n}{\log 2n} < \pi\left(2n\right) < c_2\frac{2n}{\log 2n}.$$

Avec : $c_1 = \dfrac{\log 2}{2}$et $c_2 = \log 2$. ■

Corollaire 2.2.1 *Soit* $x \in \mathbb{R}_+$. *On a :*

$$\pi\left(x\right) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Preuve. (Conséquence directe de la proposition précèdente).

Soit $2n$ le plus grand entier positif inferieur ou égal à x.

On a, $2n \leq x < 2\left(n+1\right) = 2n+2$.
Donc, $\pi\left(x\right) \leq \pi\left(2n\right) + 1 = O\left(\dfrac{2n}{\log 2n}\right)$.
D'où, $\pi\left(x\right) = O\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$. ■

Proposition 2.2.2 (Formule de Legendre et la fonction de Tchébychev) *On a,*

$$\log\left[x\right]! = \sum_{k\geq 1}\psi(\frac{x}{k}).$$

Preuve. On a,

$$\left[x\right]! = \prod_{p\leq x} p^{v_p([x]!)}.$$

En vertu de la formule (1.8.1),

$$\left[x\right]! = \prod_{p\leq x} p^{\alpha} = \text{tel que } \alpha = \sum_{k\leq\frac{\log x}{\log p}}\left[\frac{x}{p^k}\right]$$

Ce qui implique,

$$\begin{aligned}
\log [x]! &= \sum_{p \leq x} \log p^{\alpha} \\
&= \sum_{p \leq x} \sum_{k \leq \frac{\log x}{\log p}} \left[\frac{x}{p^k}\right] \log p \\
&= \sum_{h.p^k \leq x} \log p\chi \\
&= \sum_{h \leq x} \left(\sum_{p^k \leq \dfrac{x}{h}} \log p \right).
\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\log [x]! = \sum_{h \leq x} \psi\left(\frac{x}{h}\right). \tag{2.2.12}$$

■

Proposition 2.2.3 (formule de Stirling) *On a pour tout $n > 1$*

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12\,(n+1)} < \log n! < \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12\,(n-1)}. \tag{2.2.13}$$

2.3 Estimation de $\limsup \frac{\psi(x)}{x}$ et de $\liminf \frac{\psi(x)}{x}$

Proposition 2.3.1 *On a,*

$$\overline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} \leq 2 \log 2 \ \textit{et}\ \underline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} \geq \log 2.$$

Preuve. On a d'après (2.2.12),

$$\log \frac{[x]!}{\left[\frac{x}{2}\right]^2 !} = \sum_{h \leq x} \psi\left(\frac{x}{h}\right) - 2 \sum_{h \leq \frac{x}{2}} \psi\left(\frac{x}{2h}\right) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + ...$$

Comme ψ est une fonction croissante, alors,

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \log \frac{[x]!}{\left[\frac{x}{2}\right]^2!} \leq \psi(x). \tag{2.3.1}$$

Mais,

$$\log \frac{[x]!}{\left[\dfrac{x}{2}\right]!} = \left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x \bmod (O(1))\right) - \left(\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\right) 2\log\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \bmod (O(1))\right)$$
$$= x\log 2 \bmod (O(\log x)).$$

D'après l'inégalité de droite de (2.3.1), on a

$\log 2 \bmod (O(\log x)) \leq \dfrac{\psi(x)}{x}$; alors,

$$\underline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \geq \log 2.$$

En ajoutant les inégalitès de gauche de (2.3.1) relatives à $\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{4}, ..., \dfrac{x}{p^k}$, s'arrêtant le processus à $k \leq \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$; on trouve,

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \left(1+\frac{1}{2}+...\frac{1}{2^{\left[\dfrac{\log x}{\log 2}\right]}}\right)\log 2 \bmod (O(\log x)) \leq 2\log 2 \bmod (O(\log x))$$

D'où,

$$\overline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \leq 2\log 2.$$

■

(Dans le but d'améliorer la proposition (2.3.1)), on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.2 *On a,*

$$\underline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \geq \log\left(2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{2}}\right) \quad et\ \overline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{3}{2}\log\left(2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{2}}\right).$$

Preuve. L'idée de cette démonstration repose sur le développement de $\log \dfrac{[x]!\left[\dfrac{x}{6}\right]!}{\left[\dfrac{x}{2}\right]!\left[\dfrac{x}{3}\right]^2!}$ (comme précédemment). ■

Proposition 2.3.3 *On a,*

$$\underline{\lim}\frac{\psi\left(x\right)}{x}\geq a\ ,\overline{\lim}\frac{\psi\left(x\right)}{x}\leq\frac{6}{5}a,\ \textit{avec}\ a=\log\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right).$$

Preuve. La démonstration est analogue à celle qui précède en développant $\log\dfrac{[x]!\left[\frac{x}{30}\right]!}{\left[\frac{x}{2}\right]!\left[\frac{x}{3}\right]!\left[\frac{x}{5}\right]^{2}!}$.

■

Lemme 2.3.1 *Soient $x\in\mathbb{R}^*$et ψ la fonction de Tchèbychev, alors on a la proprieté suivante :*

$$\psi(x)\leq\pi(x)\log x.$$

Preuve. Pour se faire, $\psi(x)=\sum\limits_{\substack{p^k\leq x\\ p\text{ premier}}}\log p=\sum\limits_{p\leq x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p.$

Comme, $\left[\dfrac{\log x}{\log p}\right]\leq\dfrac{\log x}{\log p}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$,$\forall p:p\leq x$; alors,

$$\psi(x)\leq\sum_{p\leq x}\log x=\underbrace{\log x+\log x+...+\log x}_{\pi(x)\text{ fois}}$$

$$\psi(x)\leq\pi\left(x\right)\log x.$$

Ce qui achéve cette simple démonstration. ■

Proposition 2.3.4 *On a*

$$\psi(x)=O(x).$$

Preuve. Pour démontrer cette proposition, nous allons utiliser l'identité suivante :

$\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \ \chi*\Lambda\left(n\right)=\log n$; où $\ \Lambda\left(n\right)=\begin{cases}\log p & \text{si}\quad n=p^{\alpha},\ \alpha\geq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$,

et χ la fonction constante.

En effet, soit $x\in\mathbb{R}^*$; on a,

$$\sum_{n\leq x}\chi*\Lambda\left(n\right)=\sum_{n\leq x}\log p.$$

Ce qui donne, en utilisant la définition (1.7.1), la formule suivante :

$$\sum_{n\leq x}\left(\sum_{i/n}\Lambda(i)\right)=\sum_{n\leq x}\log n.$$

Ce qui entraîne,

$$\sum_{i\leq[x]}\left[\frac{x}{i}\right]\Lambda(i)=\sum_{i\leq x}\log i. \tag{2.3.2}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Striling, on a,

$$\log[x]! \underset{+\infty}{\sim} x\log x.$$

Comme $\log[x]! = \sum_{0<i\leq[x]}\log i$; on obtient,

$$\sum_{i\leq[x]}\log i \underset{+\infty}{\sim} x\log x \Rightarrow \sum_{i\leq[x]}\log i = x\log x + O(x).$$

Donc (2.3.2) devient,

$$\sum_{i\leq[x]}\left[\frac{x}{i}\right]\Lambda(i)=x\log x+O(x).$$

On pose,

$$S(x)=\sum_{i\leq[x]}\left[\frac{x}{i}\right]\Lambda(i).$$

On prend cette estimation avec $\dfrac{x}{2}$, on obtient,

$$S\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{i\leq\left[\frac{x}{2}\right]}\left[\frac{x}{2i}\right]\Lambda(i)=\frac{x}{2}\log\frac{x}{2}+O\left(\frac{x}{2}\right).$$

On peut aussi écrire,

$$S\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{i\leq[x]}\left[\frac{x}{2i}\right]\Lambda(i)-\sum_{\left[\frac{x}{2}\right]<i\leq[x]}\left[\frac{x}{2i}\right]\Lambda(i).$$

Or, $\sum_{\left[\frac{x}{2}\right]<i\leq[x]}\left[\frac{x}{2i}\right]\Lambda(i)=0$ (car $\forall i\in\left]\left[\frac{x}{2}\right];[x]\right]\,:\,x<2i$),
Donc,

$$S\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{i\leq[x]}\left[\frac{x}{2i}\right]\Lambda(i).$$

Calculons maintenant $S(x) - 2S\left(\frac{x}{n}\right)$.

On a,

$$S(x) - 2S\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{i \leq [x]} \left(\left[\frac{x}{i}\right] - 2\left[\frac{x}{2i}\right]\right) \Lambda(i) = x \log 2 + O(x) = O(x) \tag{2.3.3}$$

Comme : $\begin{cases} \left[\dfrac{x}{2i}\right] = 0, \; \forall i \in \left] \left[\frac{x}{2}\right], x\right], \\ \left[\dfrac{x}{i}\right] = 1, \; \forall i \in \left] \left[\frac{x}{2}\right], x\right]. \end{cases}$

Alors,

$$\begin{aligned} S(x) - 2S\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{i \leq \left[\frac{x}{2}\right]} \left(\left[\frac{x}{i}\right] - \left[\frac{x}{2i}\right]\right) \Lambda(i) + \sum_{\left[\frac{x}{2}\right] < i \leq x} \Lambda(i) \\ &= \sum_{i \leq \left[\frac{x}{2}\right]} \left(\left[\frac{x}{i}\right] - 2\left[\frac{x}{2i}\right]\right) \Lambda(i) + \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{i \leq \left[\frac{x}{2}\right]} \left(\left[\frac{x}{i}\right] - 2\left[\frac{x}{2i}\right]\right) \Lambda(i) + \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) = O(x).$$

Mais on a d'après (2.3.3),

$$\sum_{i \leq \left[\frac{x}{2}\right]} \left(\left[\frac{x}{i}\right] - 2\left[\frac{x}{2i}\right]\right) \Lambda(i) = O(x).$$

Cela vérifie que,

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) = O(x).$$

De même,

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^2}\right) &= O\left(\frac{x}{2}\right) \\ \psi\left(\frac{x}{2^2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^3}\right) &= O\left(\frac{x}{2^2}\right) \\ &. \\ &. \\ &. \\ \psi\left(\frac{x}{2^n}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) &= O\left(\frac{x}{2^n}\right). \end{aligned}$$

En faisant la somme, on obtient,

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2^n}\right) = O(x) + O\left(\frac{x}{2}\right) + ... + O\left(\frac{x}{2^n}\right) = O(x)\,, \text{ avec } \psi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 0.$$

D'où,

$$\psi(x) = O(x)\,. \tag{2.3.4}$$

■

Proposition 2.3.5 *On a,*

$$\overline{\lim}\frac{\pi(x)\log x}{x} = \overline{\lim}\frac{\theta(x)}{x} = \overline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \;\; et \;\; \underline{\lim}\frac{\pi(x)\log x}{x} = \underline{\lim}\frac{\theta(x)}{x} = \underline{\lim}\frac{\psi(x)}{x}.$$

Preuve. On a pour $1 < y < x$,

$$(\pi(x) - \pi(y))\log y \leq \theta(x) \leq \pi(x)\log x. \tag{2.3.5}$$

Choisissons $y = \left[\frac{x}{(\log x)^2}\right]$, on a,

$$\left(\frac{x}{(\log x)^2} - 1\right) < \left[\frac{x}{(\log x)^2}\right] \leq \frac{x}{(\log x)^2} \Rightarrow \log\left(\frac{x}{(\log x)^2} - 1\right) < \log y \leq \log\frac{x}{(\log x)^2}$$
$$\Rightarrow \log\left(x - (\log x)^2\right) - 2\log\log x < \log y \leq \log x - 2\log\log x$$
$$\Rightarrow \log x - 2\log\log x < \log y \leq \log x - 2\log\log x.$$

D'où,

$$\log y = \log x \bmod (O(\log\log x))\,.$$

Ainsi,

$$\pi(y) = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Comme,

$$\log y = \log x + \varepsilon_1(x)\log\log x, et \pi(x) - \pi(y) = \pi(x) + \varepsilon_2(x)\frac{x}{(\log x)^2},$$

alors,

$$(\pi(x) - \pi(y))\log y = \pi(x)\log x \bmod \left(O\left(\pi(x)\log\log x + \frac{x}{\log x}\right)\right).$$

La propriété $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ et la formule (2.3.5), entraînent donc,

$$\theta(x) = \pi(x)\log x \bmod O\left(\frac{x\log\log x}{\log x}\right).$$

Inversement, la propriété $\theta(x) \in O(x)$ entraîne aussi que $\pi(x)\log x \in O(x)$, ensuite,

$$\theta(x) = \pi(x)\log x \bmod \left(O\left(\frac{x\log\log x}{\log x}\right)\right).$$

On obtient finalement,

$$\overline{\lim}\frac{\theta(x)}{x} = \overline{\lim}\frac{\pi(x)\log x}{x} \text{ } et \text{ } \underline{\lim}\frac{\theta(x)}{x} = \underline{\lim}\frac{\pi(x)\log x}{x}.$$

De même, on a d'aprés la proposition (2.1.1),

$$\begin{aligned}\psi(x) - 2\psi\left(\sqrt{x}\right) &= \left(\theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + ...\right) - 2\left(\theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + ...\right) \\ &= \theta(x) - \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \theta\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + ...\end{aligned}$$

D'aprés la croissance de la fonction θ, on obtient,

$$\psi(x) - 2\psi\left(\sqrt{x}\right) \leq \theta(x) \leq \psi(x). \tag{2.3.6}$$

D'où,

$$\theta(x) = \psi(x) \bmod \left(O\left(\sqrt{x}\log x\right)\right).$$

On en tire immédiatement que,

$$\overline{\lim}\frac{\theta(x)}{x} = \overline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \text{ et } \underline{\lim}\frac{\theta(x)}{x} = \underline{\lim}\frac{\psi(x)}{x}.$$

■

2.4 Théorème voisin du postulat de Bertrand

Proposition 2.4.1 (Postulat de Bertrand-Théorème de Tchébychev) *Pour tout x superieur à 1, il existe un nombre premier strictement compris entre x et $2x$.*

Proposition 2.4.2 *Pour $x \geq 24$, il existe un nombre premier entre x et $\frac{5}{4}x$.*

Preuve. On a tout d'abord $x-1<[x]\leq x$, et d'après (2.2.13), on a,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(x-1)-x+\log\sqrt{2\pi}+\frac{1}{12\,(x+1)}<\log[x]!<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-(x-1)+\log 2\pi. \tag{2.4.1}$$

Mais on a pour $x\geq 4$, $\left|\log 1-\frac{1}{x}\right|\leq\frac{1}{x-1}$ et $\frac{x-\frac{1}{2}}{x-1}\leq 1+\frac{1}{6}$.

Comme la valeur de $\log(\sqrt{2\pi})$ est $0,918...$, alors pour tout $x\geq 4$, la formule (2.4.1) entraîne,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x-1<\log[x]!<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+2. \tag{2.4.2}$$

Si on considère les valeurs des trois membres dans les intervalles $[1,2[\,,[2,3[\,,[3,4[$, on voit que (2.4.2) est valable pour tout $x\geq 1$.

En appliquant (2.4.2) pour $\log[x]!$, $\log\left[\frac{x}{30}\right]!$, $\log\left[\frac{x}{2}\right]!$, $\log\left[\frac{x}{3}\right]!$, $\log\left[\frac{x}{5}\right]!$, on trouve,

$$\log\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right)x-\left(\frac{3}{2}+1\right)\log x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\log 30-8<\log\frac{[x]!\left[\frac{x}{30}\right]!}{\left[\frac{x}{2}\right]!\left[\frac{x}{3}\right]!\left[\frac{x}{5}\right]!}\text{ et}$$

$$\log\frac{[x]!\left[\frac{x}{30}\right]!}{\left[\frac{x}{2}\right]!\left[\frac{x}{3}\right]!\left[\frac{x}{5}\right]!}<\log\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right)x+\left(\frac{3}{2}+1\right)\log x-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\log 30+7.$$

Pour $x\geq 30$, posons $a=\log\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right)$.

On obtient,

$$ax-\frac{5}{2}\log x+\log 30-8<\log\frac{[x]!\left[\frac{x}{30}\right]!}{\left[\frac{x}{2}\right]!\left[\frac{x}{3}\right]!\left[\frac{x}{5}\right]!}<ax+\frac{5}{2}\log x-\log 30+7.$$

Comme $\log 30=3,40$, on a pour tout $x\geq 30$,

$$ax-\frac{5}{2}\log x-5<\log\frac{[x]!\left[\frac{x}{30}\right]!}{\left[\frac{x}{2}\right]!\left[\frac{x}{3}\right]!\left[\frac{x}{5}\right]!}<ax+\frac{5}{2}\log x+4.$$

C qui implique, pour $x\geq 30$,

$$\psi(x)>ax-\frac{5}{2}\log x-5, \tag{2.4.3}$$

et

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)<ax+\frac{5}{2}\log x+4 \tag{2.4.4}$$

On peut écrire aussi,

$$\psi\left(\frac{x}{6^k}\right) - \psi\left(\frac{x}{6^{k+1}}\right) < \frac{ax}{6^k} + \frac{5}{2}\log x + 4 \tag{2.4.5}$$

jusqu'à ce que $\dfrac{x}{6^{k+1}}$ soit dans l'intervalle $[5, 30]$.

En sommant les inégalités (2.4.4)-(2.4.5), on trouve :

$$\psi(x) < \frac{6}{5}ax + \left(\frac{5}{2}\log x + 4\right)\left[\frac{\log x}{\log 6}\right] + \psi(30).$$

Or, $\log 6 = 1,79...$; $\psi(30) = 28,4...$

On en déduit alors,

$$\psi(x) < \frac{6}{5}ax + 2(\log x)^2 + 3\log x + 30. \tag{2.4.6}$$

En tenant compte des formules (2.3.6), (2.4.3) et (2.4.6), on a pour $x \geq 900$,

$$\left(ax - \frac{5}{2}\log x - 5\right) - 2\left(\frac{6}{5}a\sqrt{x} + 2\left(\log\sqrt{x}\right)^2 + 3\log\sqrt{x} + 30\right) < \theta(x) < \left(\frac{6}{5}ax + 2(\log x)^2 + 3\log x + 3\right.$$

D'où,

$$ax - \frac{12}{5}a\sqrt{x} - (\log x)^2 - \frac{11}{2}\log x - 65 < \theta(x) < \frac{6}{5}ax + 2(\log x)^2 + 3\log x + 30. \tag{2.4.7}$$

En remarque que si $x = 40000$, il est facile de vérifier que : $0,904x < \theta(x) < 1,113x$, donc aussi $\left(\frac{5}{4}x\right) > \theta(x)$; ce qui implique l'existence d'un nombre premier compris entre x et $\dfrac{5}{4}x$. ∎

Proposition 2.4.3 *On a :*

$$\underline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \leq 1 \leq \overline{\lim}\frac{\psi(x)}{x}.$$

Preuve. Reprenons la formule (2.2.12),

$$\log[x]! = \sum_{n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Ècrivons $\sum_{n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leq y(x)}\psi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{y(x)<n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, avec $y(x)$ sera choisie de façon que le rapport $\dfrac{x}{y(x)}$ croit trés lentement, par exemple $y(x) = \left[\dfrac{x}{\log\log x}\right]$.

Alors : on a pour tout $n > y(x)$, $\psi\left(\frac{x}{n}\right) \in O(\log\log x)$, ensuite
$\sum\limits_{y(x)<n\leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \in O(x\log\log x)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, $u = \frac{x}{n}$ est assez grand entraîne,

$$\frac{x}{n}\left(\underline{\lim}\frac{\psi(u)}{u} - \varepsilon\right) \leq \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n}\frac{\psi(u)}{u} \leq \frac{x}{n}\left(\overline{\lim}\frac{\psi(u)}{u} + \varepsilon\right).$$

D'où,

$$x\left(\underline{\lim}\frac{\psi(u)}{u} - \varepsilon\right)\sum_{n\leq y(x)}\frac{1}{n} \leq \sum_{n\leq y(x)}\psi\left(\frac{x}{n}\right) \leq x\left(\overline{\lim}\frac{\psi(u)}{u} + \varepsilon\right)\sum_{n\leq y(x)}\frac{1}{n}.$$

Mais, $\sum\limits_{n\leq y(x)}\frac{1}{n} \leq \sum\limits_{n\leq x}\frac{1}{n} \in O(\log x)$, d'où $\sum\limits_{n\leq y(x)}\frac{1}{n} \in O(\log x)$; on en déduit :

$$\underline{\lim}\frac{\psi(u)}{u} \leq \underline{\lim}\frac{1}{x\log x}\sum_{n\leq y(x)}\psi\left(\frac{x}{n}\right),$$

et

$$\overline{\lim}\frac{1}{x\log x}\sum_{n\leq y(x)}\psi\left(\frac{x}{n}\right) \leq \overline{\lim}\frac{\psi(u)}{u}.$$

D'où finalement,

$$\underline{\lim}\frac{\psi(u)}{u} \leq \underline{\lim}\frac{1}{x\log x}\sum_{n\leq y(x)}\psi\left(\frac{x}{n}\right) \leq \overline{\lim}\frac{1}{x\log x}\sum_{n\leq y(x)}\psi\left(\frac{x}{n}\right) \leq \overline{\lim}\frac{\psi(u)}{u}$$

Sachant que : $\sum\limits_{n\leq y(x)}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = \log[x]!$ qui est équivalent à $x\log x$ (d'après 2.4.2)
D'où on déduit,

$$\underline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} \leq 1 \leq \overline{\lim}\frac{\psi(x)}{x}.$$

■

Remarque 2.4.1 *Si* $\underline{\lim}\frac{\psi(x)}{x} = \overline{\lim}\frac{\psi(x)}{x}$, *alors* $\lim\frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$ *(théorème des nombres premiers).*

CHAPITRE 3 Séries de Dirichlet

Après une courte introduction aux nombres premiers et aux fonctions arithmétiques, on étudie la fonction *Zéta* de Riemann et la fonction π; ce qui nous permettra de démontrer un cas particulier du théorème de Tchébychev.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. L'expression formelle $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ avec $s \in \mathbb{C}$ est appelée "séries de Dirichlet".*

Proposition 3.1.1 *On a,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} . \sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{f * g(n)}{n^s}.$$

Remarque 3.1.1 *Il est assez facile de voir que l'ensembles des séries de Dirichlet a une structure commutative d'algèbre sur $\mathbb{C}$.*

Définition 3.1.2 *L'unitè de l'algèbre est : $1 = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\delta(n)}{n^s}$ avec δ désigne la fonction de Dirac définie par : $\delta(n) = \begin{cases} 1 \ si \ n = 1 \\ 0 \ \forall n \geq 2 \end{cases}$.*

3.2 Convergence des séries de Dirichlet

3.2.1 Abscisse de convergence absolue

Soit σ_1 un réel; il est alors évident que si $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_1}}$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolument et uniformément pour $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_1$.

On a en général une abscisse de convergence absolue σ_0 telle que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolument si et seulement si $R(s) > \sigma_0$.

On convient que $\sigma_0 = -\infty$ si la série converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $\sigma_0 = +\infty$ si la série ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2.1 *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}$ convergent absolument; alors la série double $\sum\limits_{nm\geq 1} \frac{f(n)\,g(m)}{(nm)^s}$ converge absolument vers le produit $\left(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}\right) \cdot \left(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}\right)$.*

En regroupant les termes ayant le même dénominateur, on obtient,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f * g(n)}{n^s} = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}\right).$$

Proposition 3.2.2 *Si la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ converge en un point $s_0 = \sigma_0 + it_0$, alors elle converge uniformément dans tout secteur défini par :*

$$\left\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} \ / \ \sigma - \sigma_0 \geq 0, -\alpha \leq Arg(s - s_0) \leq \alpha; avec\ 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}\right\}.$$

Preuve. Nous allons utiliser dans cette dèmonstration la transformation d'Abel et la notion d'intégrale de Stieltjes.

Posons : $S(x) = \sum\limits_{n\leq x} \frac{f(n)}{n^{s_0}}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme S est une série de Cauchy, il existe $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $x \geq N(\varepsilon)$ et $y \geq N(\varepsilon)$; on a $|S(x) - S(y)| < \varepsilon$.

Pour x et y non entiers, $y > x \geq 1$.

Calculons $\sum\limits_{x<n<y} \frac{f(n)}{n^s} = \int_x^y \frac{d(S(u) - S(x))}{u^{s-s_0}}$ (integration au sens de Stieldjes).

En intégrant par parties, on obtient,

$$\sum_{x<n<y} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{S(y) - S(x)}{y^{s-s_0}} + (s - s_0) \int_x^y \frac{S(u) - S(x)}{u^{s-s_0+1}} du.$$

Pour $x > N(\varepsilon)$, on a,

$$\left|\sum_{x<n<y} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \frac{\varepsilon}{y^{\sigma-\sigma_0}} + |s-s_0| \int_x^y \frac{\varepsilon}{u^{\sigma-\sigma_0+1}} du \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} = \varepsilon + \varepsilon \frac{1}{\cos Arg(s-s_0)}.$$

Comme $-\alpha \leq Arg(s-s_0) \leq \alpha$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors on obtient :

$$\left|\sum_{x<n<y} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right).$$

D'òu, la convergence uniform. Le corollaire suivant est immédiat. ■

Corollaire 3.2.1 *Si* $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge en* s_0*, alors* $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge pour tout* s *tel que* $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0)$.

Remarque 3.2.1 *Il existe en général une abscisse de convergence* σ_c *telle que* $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge pour tout* $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \sigma_c$ *et diverge pour tout* $\sigma = \mathrm{Re}(s) < \sigma_c$.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge uniformément sur tout compact du demi plan ouvert* $\sigma > \sigma_c$ *où* ($\sigma = \mathrm{Re}(s)$).

Remarque 3.2.2 *On a* $\sigma_c \leq \sigma_a$ *(abscisse de convergence absolue), et on peut avoir* $\sigma_c < \sigma_a$ *(alors que pour les séries entières, il n'y a pas à distinguer un rayon de convergence absolue et un rayon de convergence simple).*

Exemple 3.2.1 *Pour la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$, *il est immédiat que* $\sigma_a = 1$ *alors que* $\sigma_c = 0$.

3.2.2 Nature de la fonction définie dans le demi-plan de convergence

Les fonctions $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ sont holomorphes. La convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ dans tout compact du demi-plan ouvert $\sigma > \sigma_c$ entraîne la proposition suivante.

Proposition 3.2.3 *Soit* σ_c *l'abscisse de convergence de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$.*La somme* $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ *est holomorphe dans le demi-plan ouvert* $\sigma > \sigma_c$*, et il est légitime de dériver la série terme à terme autant de fois qu'on le désire dans ce demi-plan.*

Proposition 3.2.4 *(Application aux nombres premiers "voir la référence [1]")*

Si f est une fonction multiplicative et si la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ *a une abscisse de convergence absolue $\sigma_a < +\infty$, alors on a,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\ prmier} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + ... + \frac{f\left(p^k\right)}{p^{ks}} + ...\right)$$

Pour tout $\sigma > \sigma_a$.

La convergence du produit infini (produit Eulerien) étant uniforme dans tout demi-plan $\sigma > \sigma_a$.

De plus, si f est complétement multiplicative alors,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\ prmier} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Exemple 3.2.2 (De la fonction zeta "ξ") *Pour $f = 1$, on trouve :*

$$\xi(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ premier} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \text{pour } \sigma > 1$$

.

3.3 Applications

Proposition 3.3.1 *La fonction ξ dèfinie dans le demi-plan,* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *par :*

$$\xi(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

possède un prolongement méromorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ *où elle admet seulement pour pôle simple en $p = 1$.Le résidu en ce point est ègale à* 1.

Preuve. On peut écrire (pour $\operatorname{Re}(s) > 1$) :

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \int_{1-\varepsilon}^{\infty} \frac{d[x]}{x^s} \\
&= \underbrace{\left[\frac{[x]}{x^s}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty}}_{=0} + s\int_{1-\varepsilon}^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}dx = s\int_{1-\varepsilon}^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}dx \ . \\
&= s\int_{1-\varepsilon}^{\infty} \frac{(x-\{x\})}{x^{s+1}}dx \\
&= \frac{s}{s-1} - s\int_{1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx
\end{aligned}$$

D'où,

$$\xi(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{k\geq 1} \alpha_k (s-1)^k \text{ avec } \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{3.3.1a}$$

Dont 1 est un pôle simple et $res(\xi, 1) = 1$ (coefficient de $(s-1)^{-1}$ dans le développement de Laurent de $\xi(s)$).

En outre, d'aprés(3.3.1a), on a une fonction méromorphe pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. ■

3.3.1 Applications

Nous allons retrouver la formule suivante :

$$\underline{\lim} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1 \leq \overline{\lim} \frac{\psi(x)}{x}$$

Qui est déja vu au chapitre 2.

En effet, de la formule (3.3.1a) on tire,

$$\left.\begin{array}{r} \xi(s) = \frac{1}{s-1} + O(1) \text{ et} \\ \log \xi(s) = -\log(s-1) + O(s-1) \end{array}\right\} \text{Autour de 1} \tag{3.3.2}$$

D'autre part, d'après (3.2.4) on a :

$$\xi(s) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

où,

$$\log \xi(s) = \sum_{p \text{ premier}} -\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p \text{ premier}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}}\right)$$

.

Les termes $\dfrac{1}{kp^{ks}}$ $(k \geq 1)$ étant positifs, on peut modifier leur ordre de sommation, on écrit,

$$\log \xi (s) = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^s} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ k \geq 2}} \frac{1}{kp^{ks}}$$

D'autre part, pour tout premier p, on a,

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} < \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ k \geq 2}} \frac{1}{kp^{ks}} &= \frac{1}{p^{2s}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &\leq \frac{1}{p^{2s}} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \text{ pour } s > 1. \end{aligned}$$

D'où, pour $s > 1$,

$$\sum_{\substack{p \text{ prmier} \\ k \geq 2}} \frac{1}{kp^{ks}} < \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^{2s}}.$$

Et par conséquent, pour $s > 1$,

$$\log \xi (s) = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^s} + O(1) \ . \tag{3.3.3}$$

En utilisant l'intégral de Stieltjes, puis une integration par parties, on a,

$$\sum_{p \text{ prmier}} \frac{1}{p^s} = \int_1^{\infty} \frac{d\pi (x)}{x^s} = s \int_1^{\infty} \frac{\pi (x)\, dx}{x^{s+1}}. \tag{3.3.4}$$

On note,

$$L_i (x) = \int \frac{1}{\log x} dx.$$

On a de même, pour $s > 1$:

$$s \int_2^{\infty} \frac{L_i (x)}{x^{s+1}} dx = \frac{L_i (2)}{2^{s+1}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s \log x} \quad \text{(intégration par partie).}$$

La dérivée de cette dernière expression est donnée comme suit :

$$-2^{-s} L_i (2) \log 2 - \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{-1}{s-1} \bmod (O(1)).$$

D'où,

$$s\int_2^{\infty}\frac{L_i\left(x\right)}{x^{s+1}}dx=-\log\left(s-1\right)\operatorname{mod}\left(O\left(1\right)\right).$$

Il est facile de vérifier que,

$$s\int_1^{\infty}\frac{\pi\left(x\right)dx}{x^{s+1}}=-\log\left(s-1\right)\operatorname{mod}\left(O\left(1\right)\right). \tag{3.3.5}$$

Les résultat de (3.3.2),(3.3.3) et (3.3.4) montre avec (3.3.5) que,

$$\underline{\lim}\frac{\pi\left(x\right)}{L_i\left(x\right)}\leq 1\leq\overline{\lim}\frac{\pi\left(x\right)}{L_i\left(x\right)}.$$

Ce qui est équivalentt à la proposition (2.4.3).

CHAPITRE 4

Autour de la fonction qui compte le nombre des nombres premiers

Notre objectif dans ce qui suit, est de donner une méthode analytique afin d'améliorer l'encadrement :

$$"0,92129\frac{x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right)\leq \pi\left(x\right)\leq 1,10556\frac{x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right)".$$

Définition 4.0.1 *La fonction de Von Mangoldt est définie par,*

$$\textit{pour tout entier } n,\ \wedge(n)=\begin{cases}\log p & \textit{si } n=p^{\alpha} \quad \textit{avec } p \textit{ premier et } \alpha\geq 1\\ 0 & \textit{sinon .}\end{cases}$$

De plus, on a pour tout réel $x\geq 1$, $\psi(x)=\sum_{n\leq x}\wedge(n)$.

Proposition 4.0.2 *On a les identités* $\chi * \wedge = \log$ *et* $\mu * \wedge = -\mu\log$*;où* μ *est la fonction de Möbius.*

Preuve. Nous allons montrer tout d'abord la première identité, on sait que la décomposition en facteurs de nombres premiers de n donne,

$$n=\prod_{p\leq n}p^{v_p(n)}. \tag{4.0.1}$$

On a,

$$\chi * \Lambda(n) = \sum_{i/n} \Lambda(i).$$

On remarque que,

$$\begin{cases} i \text{ divise } n \\ \text{et} \\ \Lambda(i) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in [1, v_p(n)] \cap \mathbb{N} : i = p^{\alpha}.$$

Ce qui implique,

$$\begin{aligned} \chi * \Lambda(n) &= \sum_{p/n} \left(\Lambda(1) + \Lambda(p) + ... + \Lambda\left(p^{v_p(n)}\right)\right) \\ &= \sum_{p/n} \left(\sum_{k=1}^{v_p(n)} \log p \right) \\ &= \sum_{p/n} (\log p)\, v_p(n) \\ &= \log n. \end{aligned}$$

Ce qui achève cette démonstration.

Montrons maintenant la deuxième identité, on a,

$$\begin{aligned} \mu * \Lambda(n) &= \sum_{i/n} \mu\left(\frac{n}{i}\right) \Lambda(i) \\ &= \sum_{p/n} \sum_{k=1}^{v_p(n)} \mu\left(\frac{n}{p^k}\right) \Lambda\left(p^k\right) \\ &= \sum_{p/n} \log p \left(\sum_{k=1}^{v_p(n)} \mu\left(\frac{n}{p^k}\right) \right). \end{aligned}$$

On considère l'ensemble suivant,

$$A = \{v_p(n) / p \text{ premier et } v_p(n) > 1\}.$$

Si $card\,(A) \geq 2$, alors, $\mu\left(\dfrac{n}{p^k}\right) = 0,\ \forall k \in \{1, 2, ..., v_p(n)\}$.

Par conséquent,

$$\mu * \Lambda(n) = 0 = -\underbrace{\mu(n)}_{=0} \log(n).$$

Si $card\ (A) = 1$, alors, $\mu(n) = 0$ et de plus,

$$\mu\left(\frac{n}{p^k}\right) = 0 \qquad \text{avec} \;\; 1 \leq k < v_p(n) - 1.$$

$$\mu\left(\frac{n}{p^k}\right) = (-1)^s \qquad \text{avec} \quad k = v_p(n) - 1.$$

$$\mu\left(\frac{n}{p^k}\right) = (-1)^{s-1} \quad \text{avec} \quad k = v_p(n) \;\; (\; s = card\,\{p/p \text{ divise } n\}).$$

Dans cette situation,

$$\begin{aligned}
\mu * \Lambda(n) &= \sum_{p/n} \sum_{k=1}^{v_p(n)-2} \mu\left(\frac{n}{p^k}\right) \Lambda(p) + \mu\left(\frac{n}{p^{v_p(n)-1}}\right) \Lambda(p) + \mu\left(\frac{n}{p^{v_p(n)}}\right) \Lambda(p) \\
&= (\log p)\left((-1)^s + (-1)^{s-1}\right) \\
&= (\log p)\left((-1)^s - (-1)^s\right) = 0 = -\mu(n)\log n.
\end{aligned}$$

Si $card\ (A) = 0$, alors dans ce cas on a,

$$\begin{aligned}
\mu * \Lambda(n) &= \sum_{p/n} (-1)^{s-1} \log p \\
&= (-1)^{s-1} \sum_{p/n} \log p \\
&= -(-1)^s \log n = -\mu(n)\log n.
\end{aligned}$$

En résumé : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \mu * \Lambda(n) = -\mu \log(n)$. ■

4.1 Transformation d'Abel

Etant données deux séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

On a,

$$\sum_{n=k+1}^{k+P} u_n v_n = \sum_{n=k+1}^{k+P} U_n\left(v_n - v_{n-1}\right) + U_{k+p} v_{k+p} - U_k v_{k+1},$$

où $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (Somme partielle de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$).

En effet, posons. $U_n - U_{n-1} = u_n$, Ce qui donne,

$$\begin{aligned}\sum_{n=k+1}^{k+P} u_n v_n &= \sum_{n=k+1}^{k+P} (U_n - \quad U_{n-1})\, v_n \\ &= \sum_{n=k+1}^{k+P} U_n v_n \;-\sum_{n=k+1}^{k+P} \; U_{n-1} v_n.\end{aligned}$$

Pour Un changement de variable (d'indice) sur la deuxième série on obtient,

$$\begin{aligned}\sum_{n=k+1}^{k+P} u_n v_n &= \sum_{n=k+1}^{k+P} U_n v_n - \sum_{n=k}^{k+P-1} U_n v_{n+1} \\ &= U_{k+p} v_{k+p} \; + \sum_{n=k+1}^{k+P-1} U_n v_n - U_k v_{k+1} - \sum^{k+P-1} U_n v_{n-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{k+P-1} U_n \left(v_n - v_{n-1}\right) + U_{k+p} v_{k+p} - U_k v_{k+1}.\end{aligned}$$

4.1.1 Application

Supposons qu'on a des renseignements sur la somme, $\sum\limits_{n\leq x} v_n$ avec $v_n = u_n \log n$.

Notre objectif, consiste à déduire des informations sur la série $\sum\limits_{n\leq x} u_n$, $x \in \mathbb{R}$

On a

$$\begin{aligned}U_x &= \sum_{n\leq x} u_n = u_1 + \sum_{2\leq n\leq x} u_n \\ &= u_1 + \sum_{2\leq n\leq x} \underbrace{u_n \log n}_{v_n} \frac{1}{\log n} \\ &= u_1 + \sum_{n=2}^{n=x} v_n \frac{1}{\log n} \\ &= u_1 + \sum_{n=2}^{n=x} V_n \Big(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\Big) + V_{x+1} \frac{1}{\log(x+1)} - v_1 \frac{1}{\log 2} \\ &= u_1 + \sum_{n=2}^{n=x-1} V_n \Big(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\Big) + V_x \frac{1}{\log[x]} \;\; (\text{avec } V_x = v_1 + v_2 + ... + v_{[x]}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*).\end{aligned}$$

D'où,

$$U_x = u_1 + \frac{V_x}{\log[x]} + \sum_{n=2}^{n=x-1} V_n \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right). \qquad (4.1.1)$$

Nature de U_x :

La quantité $\dfrac{V_x}{\log[x]}$ est finie.

La série $\sum_{n=2}^{[x-1]} V_n \left(\dfrac{1}{\log n} - \dfrac{1}{\log(n+1)}\right)$ converge car :

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \sim \frac{1}{n\log^2 n}.$$

Ordre de grandeur de U_x :

Supposons que l'on sache que $V_x = O(x)$. Alors, le terme général de la série qui apparait dans le membre de droite de (4.1.1) est un $O(\dfrac{1}{\log^2 x})$. Or

$$\begin{aligned}\sum_{2\le n\le x}\frac{1}{\log^2 n} &= \sum_{2\le n\le\sqrt{x}}\frac{1}{\log^2 n} + \sum_{\sqrt{x}\le n\le x}\frac{1}{\log^2 n}\\ &\le \frac{\sqrt{x}}{\log^2 x} + \frac{4x}{\log^2 x} = O\left(\frac{x}{\log^2 n}\right).\end{aligned}$$

D'où, en déduit que

$$U_x = u_1 + \frac{v(x)}{\log[x]} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) = \frac{v(x)}{\log x} + O(\frac{x}{\log^2 x}).$$

La dernière égalité prouvent de

$$\left|\frac{v(x)}{\log[x]} - \frac{v(x)}{\log x}\right| \le |v(x)|\,(\frac{1}{\log(x-1)} - \frac{1}{\log x}) = O(\frac{1}{\log^2 x}).$$

Proposition 4.1.1 *On a*

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Preuve. Nous allons appliquer la transformation d'Abel pour la série $\sum_{n\le x} u_n v_n$.

Pour se faire, considerons les suites suivantes : $u_n = \chi_p(n)$ et $v_n = \chi_p(n)\log n$; avec

$$\chi_p(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ premier,}\\ \;0 \quad\;\; \text{sinon.}\end{cases}$$

On a,

$$\pi(x) = \sum_{n\le x}\chi_p(n) = u_1 + \sum_{2\le n\le x}\chi_p(n)\frac{\log n}{\log n} = u_1 + \sum_{2\le n\le x} v_n\frac{1}{\log n}.$$

En utilisant la transformation d'Abel, on obtient,

$$\pi(x) = u_1 + \frac{V_x}{\log[x]} + \sum_{n=2}^{n=x-1} V_n(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}).$$

il est clair que,

$$\begin{aligned} V(x) &= \chi_p(1)\log 1 + \chi_p(2)\log 2 + \chi_p(3)\log 3 + ... + \chi_p(n)\log n + \chi_p(x)\log x \\ &= \sum_{n\leq x} \chi_p(n)\log n \\ &= \sum_{p\leq x} \log p = \theta\left(x\right) \text{ (fonction de Tchébychev).} \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\pi(x) = u_1 + \frac{\theta(x)}{\log\left[x\right]} + \sum_{n=2}^{n=x-1} \theta(x)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right).$$

Comme, $\theta(x) = O(x)$; alors d'aprés (4.1.1), on en tire que,

$$\pi(x) = u_1 + \frac{\theta(x)}{\log[x]} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) = \frac{\theta(x)}{\log x} + O(\frac{x}{\log^2 x}) = \frac{O(x)}{\log[x]} + O(\frac{x}{\log^2 x}) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Ce qui achéve la démonstration. ■

4.2 Théorème principal

On a besoin des fonctions : μ_T, g_T, G_T $(T \in \mathbb{N}^*)$, définies comme suit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

1. $\mu_T(n) = \begin{cases} \mu(n) \text{ si } n < T \\ -T\sum\limits_{i<T} \frac{\mu(i)}{i} \text{ si } n = T \\ 0 \quad \text{si} \quad n > T. \end{cases}$

2. $g_T(n) = 1 * \mu_T\left(n\right).$

3. $G_T = \sum\limits_{n\leq x} g_T(n)$, pour tout réel $x \geq 1$.

Propriétés

On a,

1. $\forall n < T : g_T(n) = e\left(n\right).$

2. $\forall n < T : G_T\left(n\right) = 1.$

3. $\Lambda * g_T = \log * \mu_T$.
4. $\sum_{n>1} \dfrac{\mu_T(n)}{n} = 0$.

Démonstration. 1) Soit n, $T \in \mathbb{N}^*$ avec $n < T$.

On a,

$$\begin{aligned} g_T(n) &= \chi * \mu_T\,(n) \\ &= \sum_{i/n} \mu_T\,(i) \\ &= \sum_{i/n} \mu\,(i) \\ &= \chi * \mu\,(n) \\ &= e\,(n)\,. \end{aligned}$$

2) Soient n, $T \in \mathbb{N}^*$, avec $n < T$; soit $x \in [1, +\infty[$.

On a,

$$\begin{aligned} G_T\,(n) &= \sum_{n \leq x} g_T(n) \\ &= \sum_{n \leq x} e(n). \end{aligned}$$

D'où,

$$G_T\,(n) = 1 \tag{4.2.1}$$

3) On a,

$$\begin{aligned} \Lambda * g_T &= \Lambda * (1 * \mu_T\,(n)) \\ &= (\Lambda * 1) * \mu_T\,(n) \\ &= \log * \mu_T \quad \text{(d'aprés la proposition (4.0.2).} \end{aligned}$$

4) Soient $n, T \in \mathbb{N}^*$, On a,

$$\sum_{n\leq T}\frac{\mu_T(n)}{n} = \frac{\mu_T(1)}{1}+\frac{\mu_T(2)}{2}+...\frac{\mu_T(T-1)}{T-1}+\frac{\mu_T(T)}{T}+0+...$$
$$= \sum_{i<T}\frac{\mu_T(i)}{i} - \sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i}$$
$$= \sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i} - \sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i} = 0.$$

■

Théorème 4.2.1 *Soient $T \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0,1]$ un nombre réel. On pose,*
$\delta = 1 + \sum_{j\leq T}\frac{\log j}{j}\mu_T(j)$, $C = 1 + \max_{T\leq y<\frac{T}{\alpha}}|G_T(y)|$ *et* $\grave{\delta} = 2\alpha + \frac{C}{T}$.
On suppose que $\grave{\delta} < 1$*.Aalors,* $\lim_{x\to\infty}\sup\left|\frac{\pi(x)\log x}{x}-1\right| \leq \frac{|\delta|+\acute{\delta}}{1-\acute{\delta}}$.
Application numérique,

T	25	100	200	400	800
α	$0,005$	$0,010$	$0,010$	$0,010$	$0,002$
$\frac{\lvert\delta\rvert+\acute{\delta}}{1-\acute{\delta}}$	$0,263$	$0,127$	$0,087$	$0,063$	$0,033$

Preuve. La démonstration commence par l'identité : $\Lambda * g_T\ (n) = \Lambda * \chi * \mu_T = \log *\mu_T$, qui fournit en sommant,

$$\underbrace{\sum_{n\leq x}\Lambda * g_T\ (n)}_{S_1} = \underbrace{\sum_{n\leq x}\log *\mu_T}_{S_2}.$$

D'abord, on va séparer chacun des deux membres de l'égalité; précisémment, nous allons montrer que S_1 est proche de $\psi(x)$ alors S_2 est de l'ordre de x .

Développons S_2,

On a,

$$\sum_{n\leq x}\log *\mu_T(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{ij=n}\log i.\mu_T(j)$$
$$= \sum_{ij\leq x}\log i.\mu_T(j).$$

On déduit que,

$$\sum_{n\leq x}\log *\mu_T(n)=\sum_{j\leq x}\mu_T(j)\sum_{i\leq \frac{x}{j}}\log(i).$$

En utilisant (1.9.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\log *\mu_T(n)&=\sum_{j\leq x}\mu_T(j)\left(\frac{x}{j}\log\frac{x}{j}-\frac{x}{j}+O(\log(x)\right)\\&=(x\log x-x)\sum_{j\leq x}\frac{\mu_T(j)}{j}-x\sum_{j\leq x}\frac{\log j}{j}\mu_T(j)+O\left(\log x\right).\end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{j\leq x}\dfrac{\mu_T(j)}{j}=0$ (d'après la propriété 4) on a

$$\sum\frac{\log j}{j}\mu_T(j)=\sum_{j\leq T}\frac{\log j}{j}\mu_T(j)+\underbrace{\sum_{T<j\leq x}\frac{\log j}{j}\mu_T(j)}_{=0}=\delta-1;x\geq T.$$

Alors,

$$\sum_{n\leq x}\log *\mu_T(n)=-x\left(\delta-1\right)+O\left(\log x\right)=x-\delta x+O\left(\log x\right).$$

Développons S_1,

On a,

$$\sum_{n\leq x}\Lambda*g_T\left(n\right)=\sum_{n\leq x}\sum_{j/n}\Lambda(j)g_T\left(\frac{n}{j}\right).$$

En posant $\dfrac{n}{j}=i$;

$$\sum_{n\leq x}\Lambda*g_T\left(n\right)=\sum_{j\leq x}\Lambda(j)\sum_{i\leq\frac{x}{j}}g_T\left(i\right). \tag{4.2.2}$$

En vertu de la définition sous-citée,

$$\sum_{i\leq\frac{x}{j}}g_T\left(i\right)=G_T(\frac{x}{j}).$$

En exploitant la propriété (4.2.1); $G_T(\dfrac{x}{j})=1\Rightarrow\dfrac{x}{j}<T$ (c'est à dire $j>\frac{x}{T}$).

L'ensemble des valeurs de j sera cindé en deux sous ensembles,

$$\{j/j\leq x\}=\left\{j/j\leq\frac{x}{T}\right\}\cup\left\{j/\frac{x}{T}<j\leq x\right\}.$$

Donc, la formule (4.2.2) devient,

$$\sum_{n\leq x}\Lambda * g_T(n) = \sum_{j\leq \frac{x}{T}}\Lambda(j)G_T\left(\frac{x}{j}\right) + \sum_{\frac{x}{T}<j\leq x}\Lambda(j).$$

De plus, on a

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n).$$

D'où

$$\sum_{n\leq x}\Lambda * g_T(n) = \sum_{j\leq \frac{x}{T}}\Lambda(j)G_T\left(\frac{x}{j}\right) + \psi(x) - \psi(\frac{x}{T}).$$

■

Lemme 4.2.1 *La fonction G_T est majorée en valeur absolue par $2T$, c'est à dire :*

$$G_T(y) \leq 2T \ ,\forall T \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. On a par définition pour tout réel $y \geq 1$:

$$\begin{aligned}
G_T(y) &= \sum_{n\leq y} g_T(n) \\
&= \sum_{n\leq y}\chi * \mu_T(n) \\
&= \sum_{n\leq y}\sum_{i/n}\mu_T(n) \\
&= \sum_{i\leq y}\left[\frac{y}{i}\right]\mu_T(i) \\
&= \sum_{i\leq T}\left[\frac{y}{i}\right]\mu_T(i)(\text{car } \mu_T(i) = 0 \text{ si } i > T) \\
&= \sum_{i<T}\left[\frac{y}{i}\right]\mu_T(i) + \left[\frac{y}{T}\right]\mu_T(T).
\end{aligned}$$

Comme, $\mu_T(T) = -T\sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i}$, on a,

$$G_T(y) = \sum_{i<T}\left[\frac{y}{i}\right]\mu_T(i) - T\left[\frac{y}{T}\right]\sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i}.$$

D'où,

$$G_T(y) = \sum_{i<T}\left(\frac{y}{i} - \{\frac{y}{i}\}\right)\mu_T(i) - T\left(\frac{y}{T} - \{\frac{y}{T}\}\right)\sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i}.$$

En simplifiant cette formule on obtient,

$$G_T(y) \quad = -\sum_{i\leq T}\{\frac{y}{i}\}\mu_T(i) + T\sum_{i<T}\{\frac{y}{T}\}\frac{\mu(i)}{i}. \tag{4.2.3}$$

Par conséquent,

$$|G_T(y)| \leq \sum_{i<T}\left|\{\frac{y}{i}\}\mu_T(i)\right| + T\sum_{i<T}\left|\{\frac{y}{T}\}\frac{\mu(i)}{i}\right|.$$

En se servant des propriétés suivantes,

$$\begin{cases} \left|\left\{\frac{y}{i}\right\}\right| < 1 \\ |\mu_T\ (i)| \leq 1\ \forall i \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

on obtient,

$$\sum_{i<T}\left|\{\frac{y}{i}\}\mu_T(i)\right| \leq \sum_{i<T} 1 = T - 1.$$

Reste à majorer le terme $\sum\limits_{i<T}\left|\frac{\mu(i)}{i}\right|$, pour ce faire, on a,

$$\begin{aligned} T\sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i} &= \sum_{i<T}\frac{T}{i}\mu(i) \\ &= \sum_{i<T}\{\frac{T}{i}\}\mu(i) + \sum_{i<T}\left[\frac{T}{i}\right]\mu(i). \end{aligned}$$

Or par définition, $g_T(y) = \sum\limits_{i<T}\left[\frac{y}{i}\right]\mu_T(i)$.

Donc,

$$\begin{aligned} T\sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i} &= \sum_{i<T}\{\frac{T}{i}\}\mu(i) + \sum_{i\leq T}\left[\frac{T}{i}\right]\mu(i) - \mu(T) \\ &= \sum_{i<T}\{\frac{T}{i}\}\mu(i) + G_{T(}(T) - \mu(T). \end{aligned}$$

Or, $G_{T(}(T) = \sum\limits_{n\leq T} g_T(n) = \sum\limits_{n\leq T} e(n) = 1$ (d'après la propriète(1)).

Ce qui donne,

$$T\sum_{i<T}\frac{\mu(i)}{i} = \sum_{i<T}\{\frac{T}{i}\}\mu(i) + 1 - \mu(T).$$

Comme $|\mu(T)| \leq 1$, on a,

$$\begin{aligned} T\sum_{i<T}\left|\frac{\mu(i)}{i}\right| &\leq \sum_{i<T}\left|\{\frac{T}{i}\}\right| |\mu(i)| + 1 + |\mu(T)| \\ &\leq T - 1 + 1 + 1 = T + 1. \end{aligned}$$

Ce qui donne,

$$\left|\{\frac{y}{T}\}T\right| \sum_{i<T}\left|\frac{\mu(i)}{i}\right| \leq T + 1 \text{ (car}\{\frac{y}{T}\} < 1).$$

D'où,

$$|G_T(y)| \leq T - 1 + T + 1 = 2T. \tag{4.2.4}$$

Ce qui achéve la démonstration du lemme.

Nous allons compléter la démonstration du théorème.

Concérnant S_1,

$$H = \sum_{n\leq x}\Lambda * g_T\,(n) = \sum_{j\leq x}\Lambda(j)G_T\left(\frac{x}{j}\right) + \psi(x) - \psi(\frac{x}{T}).$$

Donc,

$$\begin{aligned} |H| &\leq \sum_{j\leq\frac{x}{T}} |\Lambda(i)| \left|G_T\left(\frac{x}{j}\right)\right| + \left|\psi(x) - \psi(\frac{x}{T})\right| \\ |H| &\leq 2T\sum_{j\leq\frac{x}{T}} |\Lambda(i)| + \left|\psi(x) - \psi(\frac{x}{T})\right| \text{ (d'après le 4.2.1).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H - \psi(\frac{x}{T}) = &\sum_{j\leq\frac{x}{T}} G_T(\frac{x}{j})\Lambda(j) - \psi(\frac{x}{T}) \\ &= \sum_{\frac{x}{j}\geq T} G_T(\frac{x}{j})\Lambda(j) - \psi(\frac{x}{T}). \end{aligned}$$

Dans le d'introduire la constante C, indiqueé dans le théoréme on procéde comme suit,

$$H - \psi(\frac{x}{T}) = \sum_{T\leq\frac{x}{j}<\frac{T}{\alpha}} G_T(\frac{x}{j})\Lambda(j) + \sum_{\frac{x}{j}\geq\frac{T}{\alpha}} G_T(\frac{x}{j})\Lambda(j) - \psi(\frac{x}{T}).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left|H-\psi(\frac{x}{T})\right| &\leq \sum_{T\leq \frac{x}{j}<\frac{T}{\alpha}}\left|G_T(\frac{x}{j})\Lambda(j)\right| + \sum_{\frac{x}{j}\geq\frac{T}{\alpha}}\left|G_T(\frac{x}{j})\Lambda(j)\right| + \psi(\frac{x}{T})\\
&\leq C\sum_{T\leq \frac{x}{j}<\frac{T}{\alpha}}\Lambda(j) + 2T\sum_{\frac{x}{j}\geq\frac{T}{\alpha}}\Lambda(j)+\psi(\frac{x}{T})\\
&\leq C\sum_{\frac{\alpha x}{T}<j\leq \frac{x}{T}}\Lambda(j) + 2T\sum_{j\leq\frac{x\alpha}{T}}\Lambda(j)+\psi(\frac{x}{T})\\
&\leq C\psi(\frac{x}{T}) + 2T\psi(\frac{x\alpha}{T}).
\end{aligned}$$

On a les estimations que l'on vient d'obtenir sur les membres (S_1) et (S_2),

$$\begin{aligned}
|\psi(x)-x| &\leq |\delta|\,x + C.\psi(\tfrac{x}{T}) + 2T\psi(\tfrac{\alpha x}{T}) + O(\log x)\\
x\left|\tfrac{\psi(x)}{x}-1\right| &\leq |\delta|\,x + C.\psi(\tfrac{x}{T}) + 2T\psi(\tfrac{\alpha x}{T}) + O(\log x).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\left|\frac{\psi(x)}{x}-1\right| \leq |\delta| + \frac{C}{x}\psi(\frac{x}{T}) + \frac{2T}{x}\psi(\frac{\alpha x}{T}) + O(\frac{\log x}{x}).$$

En posant $f(x)=\left|\frac{\psi(x)}{x}-1\right|$ et en appliquant $\left|\frac{\psi(x)}{x}-1\right|\geq\frac{\psi(x)}{x}-1$, on trouve

$$f(x)\leq|\delta|+\frac{C}{T}\left(f\left(\frac{x}{T}\right)+1\right)+2\alpha\left(f\left(\frac{\alpha x}{T}\right)+1\right)+O(\frac{\log x}{x}).$$

Soit, $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ (est finie), donc,

$$\begin{aligned}
l &\leq |\delta| + \tfrac{C}{T}(l+1) + 2\alpha(l+1)\\
&\leq |\delta| + \grave{\delta} + \grave{\delta} l.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\left|\frac{\psi(x)}{x}-1\right|\leq\frac{|\delta|+\grave{\delta}}{1-\grave{\delta}}.$$

Évidemment, ce théorème donne une panoplie d'encadrement de la fonction de $\pi(x)$. ■

La question se pose naturellement de savoir s'il est possible de trouver des couples (T,α), pour lesquels la borne $\dfrac{|\delta|+\grave{\delta}}{1-\grave{\delta}}$ est arbtrairement petite.

Remarque 4.2.1 *Pour un x fixé et T choisi en fonction de x, on a :*

$$\left|\frac{\psi(x)}{x}-1\right| \leq |\delta| + \frac{C}{x}.\psi(\frac{x}{T}) + \frac{2T}{x}\psi(\frac{\alpha x}{T}) + O(\frac{\log x}{x})$$

$$|f\,(x)| \leq |\delta| + \frac{C}{T}\left(f\left(\frac{x}{T}\right)+1\right) + 2\alpha\left(f\left(\frac{x\alpha}{T}\right)+1\right) + O(\frac{\log x}{x})$$

Comme $f\,(x) = \frac{\psi(x)}{x} - 1$ *et en posant* $\left(f\left(\frac{x}{T}\right)+1\right) = k_0$, $f\left(\frac{x\alpha}{T}\right)+1 = k_1$; *on obtient :*

$$|f\,(x)| \leq |\delta| + \frac{C}{T}k_0 + 2\alpha k_1 + \varepsilon_1\,(x)\,\frac{\log x}{x}$$

$$-B+1 \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq B+1$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\psi(x)}{x} = \frac{\pi(x)\log x}{x} - \varepsilon_2\,(x)\,\frac{x}{\log x}$$

D'où :

$$-B+1+\varepsilon_2\,(x)\,\frac{x}{\log x} \leq \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq B+1+\varepsilon_2\,(x)\,\frac{x}{\log x}$$

$$\frac{-Bx}{\log x}+1+\varepsilon_2\,(x)\,\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{Bx}{\log x}+1+\varepsilon_2\,(x)\,\frac{x}{\log x}$$

$$-\frac{|\delta|+\frac{C}{T}k_0+2\alpha k_1+\varepsilon_1\,(x)\,\frac{\log x}{x}}{\log x}x+1+\varepsilon_2\,(x)\,\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{|\delta|+\frac{C}{T}k_0+2\alpha k_1+\varepsilon_1\,(x)\,\frac{\log x}{x}}{\log x}x+1+\varepsilon_2\,(x$$

$$-\frac{\left(|\delta|+\frac{C}{T}k_0+2\alpha k_1\right)x}{\log x}+1+\varepsilon\,(x)\,\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{\left(|\delta|+\frac{C}{T}k_0+2\alpha k_1\right)x}{\log x}+1+\varepsilon\,(x)\,\frac{x}{\log x}$$

Proposition 4.2.1 *On a,* $\forall\alpha > 0$,

$$|\delta| = o\left(T^{2\alpha}\right).$$

Preuve. On a,

$$\begin{aligned}\delta &= 1+\sum_{j\leq T}\frac{\log j}{j}\mu_T\,(j)\\ &= 1+\sum_{j<T}\frac{\log j}{j}\mu_T\,(j)+\frac{\log T}{T}\mu_T\,(T)\\ &= 1+\sum_{j<T}\frac{\log j}{j}\mu_T\,(j)-\log T\sum_{j<T}\frac{\mu\,(j)}{j}\\ &= 1+\sum_{j<T}\frac{\log j-\log T}{j}\mu_T\,(j).\end{aligned}$$

Par consèquent,

$$
\begin{aligned}
|\delta| &\leq 1+\sum_{j<T}\frac{\log T-\log j}{j}\left|\mu_T\left(j\right)\right| \\
&\leq 1+\sum_{j<T}\frac{T^{\alpha}}{j^{\alpha+1}} \text{ (car } \log\left(\frac{T}{j}\right)\leq\left(\frac{T}{j}\right)^{\alpha}, \ (\forall\alpha>0, \text{ à partir de certain rang).}
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\frac{|\delta|}{T^{2\alpha}}=\frac{1}{T^{2\alpha}}+\frac{1}{T^{\alpha}}\sum_{j<T}\frac{1}{j^{\alpha+1}}.$$

Mais, on a,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{|\delta|}{T^{2\alpha}}=0.$$

C'est à dire,

$$|\delta|=o\left(T^{2\alpha}\right), \ \forall\alpha>0.$$

■

Proposition 4.2.2 *On a,*

$$\lim_{T\to\infty}\inf|\delta|=0.$$

$$\lim_{T\to\infty}\inf\delta^{'}=2\alpha.$$

$$\lim_{T\to\infty}\inf\frac{|\delta|+\delta^{'}}{1+\delta^{'}}=\frac{2\alpha}{1-2\alpha}.$$

En particulier, l'infinimum des $\frac{2\alpha}{1-2\alpha}$ *pris sur tous les couples* (T,α)*, est nul.*

Preuve. Voir la référence (5). ■

Conclusion

L'objectif de ce travail est d'améliorer l'encadrement :

"$0,92129(\frac{x}{\log x}) + o(\frac{x}{\log x}) \leq \pi(x) \leq 1,10556(\frac{x}{\log x}) + o(\frac{x}{\log x}$", avec une méthode differente de celle de Tchébychev, reposant sur la transformation d'**Abel** et le produit de convolution basé sur une construction.

Afin d'atteindre notre but, nous avons donné un aperçu des résultats de **Tchebychev**, en abordant un cas particulier par les séries de **Dirichlet**.

Bibliographie

[1] **André Blanchard, Initiation à la théorie des nombres premiers, Dunod, Paris, 1996.**

[2] **Antoine Chambert-Loir. Théorie des nombres : Université de rennes, Irmars, 2008, P(1-139).**

[3] **Hubert Delonge, Annales Scientifiques de L'É.N.S, Un théorème sur les fonctions multiplicatives et ses applications Tome 78(1961), P (1-29).**

[4] **Francis Pécastein, Jacky Sevin, Chemin vers analyse, Velbert, St Germain, 1985.**

[5] **Xavier Carusio et David Pigeon, Théorie analytique des nombres, Autour du théorème des nombres premiers 2007.**