



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MASTER

Spécialité: **Dynamique des Fluides et Energétique**

Thème

*Instabilités d'interfaces dans les écoulements gravitaires
est contrôle*

Présenté par

Mr MEHAYECH ABDELMALEK

Soutenu le : 10/07/2019 à 10h

Devant le Jury

Composé de:

Nom Prénom	Département d'affiliation	Qualité
Mme OURRAD MEZIANI OUERDIA	Département de physique	Présidente
Mme BOUCHARA LYDIA	Département de physique	Examinatrice
Mme AMATOUSSE NAWAEL	Département de physique	Encadreuse

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ma source de tendresse ma mère

A mon père, personne la plus chère de ma vie

A mes chères sœurs

A mes chers frères

A mes mignonnes nièces et neveux

A ma fiancée « R »

A toute ma famille

Et à tous mes amis : Naima, Saad, Sofiane, Housseem,
Farouk ...

Et A tous les étudiants de la promotion de dynamique
de physique.

REMERCIEMENT

En préambule à ce mémoire, j'adresse mes remerciements les plus sincères tout d'abord au « Bon Dieu » le plus puissant pour m'avoir guidé vers le chemin du savoir et pour m'avoir donné le courage, la patience et la santé qui m'ont été utiles tout au long de mon parcours.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche Madame AMATOUSSE Nawel qui m'a mis sur la bonne voie par ses précieux conseils et son aide.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux enseignants du département physique.

Je tiens également à remercier les membres du jury pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidée, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Sommaire

Liste des figures

Liste des symboles et abréviations

Introduction Générale 10

Chapitre I : 12

Equations du mouvement d'un film liquide mince sur un plan incliné

I.1 : Introduction 12

I.1.1 : Écoulement à surface libre 12

I.2 : Loi fondamentale de la dynamique des fluides.....13

I.3 : Formulation du problème 14

I.4 : les équations du Mouvement 16

I.4.1 : Equation de continuité 16

I.4.2 : équation bilan de quantité de Mouvement...16

I.5 : Les conditions aux limites 17

I.5.1 : la condition cinématique à l'interface 17

I.5.2 : la condition dynamique 17

I.6 : Écoulement de base 19

I.7 : Ecriture des équations du film mince sous forme
adimensionnelle..... 21

I.7.1 : mise à l'échelle 21

I.7.2 : les nombres adimensionnels	22
I.7.3 : Equations adimensionnées	23
I.8: Conclusion	24
Chapitre II :	25
Principe de la modélisation.	
II.1 : Introduction	25
II.2 : Etat de l'art	25
II.3 : Phénoménologie.....	27
II.4 : Modélisation : un bref état des lieux.....	29
II.4.1 : Modèles intégraux de couche limite.....	29
II.4.2 : Modèles aux résidus pondérés	29
II.4.3 : Principe de la modélisation asymptotique.....	29
II.5 : Résolution des équations de notre problème...	30
II.5.1 : Présentation du programme d'application « MAPLE».....	30
II.5.2 : Résolution des équations aux différents ordres	31
II.5.3 : Résolution à l'ordre zéro	32
II.5.4 : Résolution à l'ordre 1	33
II.5.5 : Résolution à l'ordre 2	35
II.6 : Conclusion.....	36
Chapitre III :	37
Analyse de stabilité linéaire	

III.1 : Introduction	37
II.2 : Introduction de la fonction $f(x, t)$	37
II.3 : Equations aux perturbations	38
III.4 : Etude de stabilité temporelle.....	38
III.5 : Courbes de stabilité marginale	39
III.5.1 : En l'absence de contrôle	40
III.5.2 : En présence de contrôle	40
III.6 : Taux d'amplification des instabilités.....	44
III .7 : Conclusion.....	47
Conclusion Générale.....	48
Références bibliographiques.....	50

LISTE DES FIGURE

Figure 1 : films liquides	11
Figure 2 : films tombants	11
Figure I.3 : configuration du problème	16
Figure I.6 : profil de vitesse dans l'écoulement de base	21
Figure 1.2 : représentation schématique de l'évolution du film	29
Figure III.1 : Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs Du paramètre Ha	42
Figure III.2 : Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs Du paramètre β	42
Figure III.3 : Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs Du paramètre W	43
Figure III.4 : Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs Du paramètre α	43
Figure III.5 : Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs Du contrôle η	44
Figure III.6 : Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs Du paramètre Ha (présence η).....	44
Figure III.7 : Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs Du paramètre β (présence η).....	45
Figure III.8 Taux d'amplification pour différentes valeurs	

Du paramètre η	46
Figure III.9 Taux d'amplification pour différentes valeurs	
Du paramètre Ha	47
Figure III.10 Taux d'amplification pour différentes valeurs	
Du paramètre β.....	47
Figure III.11 Taux d'amplification pour différentes valeurs	
Du paramètre α	48

Liste des symboles et abréviations

- \vec{V}vitesse du fluide
- (U, V) Composantes de la vitesse suivant les axes x et y
- U_N La vitesse moyenne de l'écoulement de base
- (x, y) Coordonnées cartésiennes
- $U(y)$ Vitesse de l'écoulement de base
- γCoefficient de tension superficielle
- \vec{n} Vecteur unitaire normal à l'interface
- \vec{t} Vecteur unitaire tangent à l'interface
- μViscosité dynamique
- p_0 Pression atmosphérique
- \vec{g} Le champ de gravité
- ν Viscosité cinématique
- ρ Masse volumique du fluide
- H_0 Champ magnétique
- E_0Champ électrique
- σ Conductivité du fluide
- α Angle d'inclinaison du plan
- $h(x, t)$ Épaisseur du fluide
- h_0 Épaisseur du film fluide en écoulement stationnaire
- $\bar{\sigma}$ Le tenseur des contraintes
- \bar{D} le tenseur des taux de déformation
- ε Paramètre ondes longues
- Re Nombre de Reynolds
- R_c Nombre de Reynolds critique

- W Nombre de Weber
- β Nombre électrique
- Ha nombre de Hartmann
- A_0 Amplitude de la perturbation
- w Pulsation complexe
- w_r Pulsation réelle
- w_i Taux d'amplification de l'onde
- K Nombre d'onde
- η Paramètre de contrôle
- $\frac{D}{Dt}$ Dérivée particulaire
- $\frac{\partial}{\partial x}$ Dérivée partielle

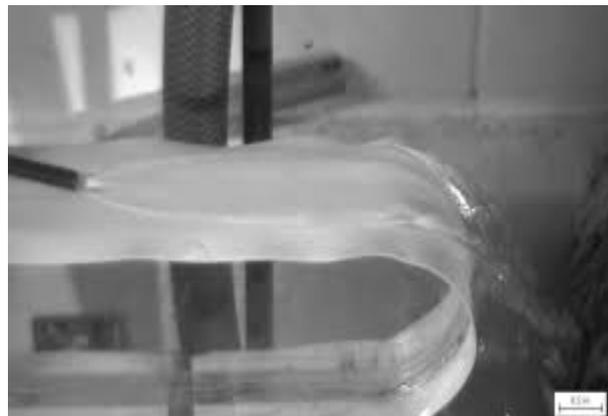
Introduction générale

Les mécanismes de formation des écoulements de films liquides sont très divers (figure 1) [24]. Ils peuvent apparaître simplement sous l'effet de la gravité, ces films «tombants» (Figure2) peuvent être observés sur les vitres ou les trottoirs inclinés les jours de pluie. Les ondes qui apparaissent à l'interface donnent naissance à des structures étonnantes.

Les écoulements des films minces sont rencontrés dans de nombreux domaines industriels et naturels. La stabilité de l'interface entre deux ou plusieurs couches de fluides visqueux en écoulement laminaire a fait l'objet de nombreux [1] travaux tant du point de vue théorique qu'expérimental [2]. Ces écoulements sont devenus l'objet d'études depuis plusieurs décennies et certains cas sont toujours un sujet d'actualité. De ce fait, plusieurs hypothèses d'étude ont été émises et diverses théories élaborées dans le but de comprendre les phénomènes rencontrés dans ce type d'écoulement.



Figure(2)



Figure(1)

L'objectif de ce travail est d'étudier l'instabilité de l'interface dans l'écoulement sur un plan incliné d'un fluide visqueux soumis à l'effet d'un champ électromagnétique. Un contrôle de l'interface a été imposé. Ce travail développe un modèle basé sur la théorie des grandes

longueurs d'onde qui conduit à une équation d'évolution des ondes de la surface libre avec une petite amplitude. Cette équation permet de déterminer les conditions critiques d'apparition des instabilités, c'est ainsi que le problème a été résolu par **Benney** [4], dans le cas d'un écoulement d'un film mince sur un plan incliné.

Ce mémoire est structuré comme suit :

- Le premier chapitre traite Les équations du mouvement ainsi que les conditions aux limites associées. Elles sont exprimées en coordonnées cartésiennes 2D, puis écrites sous forme adimensionnelle.
- Le second chapitre relate les travaux et les efforts de modélisation entrepris dans le domaine des films minces. Le principe d'une analyse asymptotique aux faibles nombres de Reynolds sera décrit. Les hypothèses simplificatrices effectuées nous ont conduits à une équation de surface pour chaque ordre.
- La stabilité de l'interface est étudiée dans le troisième chapitre, il s'agit de regarder la stabilité de l'écoulement de base vis-à-vis de perturbations à l'interface, puis examiner la compétition entre les effets sur la stabilité de l'interface séparant le film de l'air.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale où sont mis en évidence les résultats obtenus.

Chapitre I : Equations du mouvement d'un film liquide mince sur un plan incliné

Ce chapitre est consacré à la description du problème dont nous nous sommes intéressés, celui d'un film liquide mince soumis à l'effet d'un champ électromagnétique. Nous allons présenter la formulation mathématique du problème, où nous allons introduire les équations de la magnétohydrodynamique ainsi que les conditions aux limites correspondantes. On recherchera après une solution en régime stationnaire et uniforme et on écrira les équations et les conditions aux limites sous forme adimensionnée.

I-1- Introduction :

La résolution d'un problème de dynamique des fluides demande normalement de calculer diverses propriétés des fluides comme la vitesse, la viscosité, la densité, la pression et la température en tant que fonctions de l'espace et du temps.

On s'est intéressés à des fluides newtoniens, ce sont des fluides dont la viscosité est constante quelle que soit l'intensité du cisaillement qui lui est appliqué. La majorité des fluides rencontrés dans la nature sont newtoniens. L'eau et l'air en sont les exemples les plus représentatifs. Le comportement d'un fluide newtonien est caractérisé par une dépendance linéaire entre les composantes du tenseur des contraintes et les valeurs instantanées du tenseur des déformations. Le coefficient de proportionnalité étant la viscosité dynamique.

-Écoulement à surface libre :

La surface libre est l'interface entre l'air et un fluide quelconque, nous supposons que la pression y est égale à la pression atmosphérique. L'écoulement dans les canaux naturels et artificiels est dans la plupart des cas, des écoulements à surface libre.

Dans un fluide, spécifiquement pour chaque particule, il y a un ensemble de forces appliquées qui diffèrent par leur nature. Il y a en effet deux types de forces, des forces

volumiques (telles que les forces de gravité et les forces électromagnétiques) et des forces surfaciques (les forces d'origine visqueuse par exemple et les contraintes de pression).

En général, le mécanicien des fluides doit s'occuper de l'effet de la force dominante. Dans la plupart des problèmes d'écoulement des fluides, la pesanteur, la viscosité et l'élasticité sont prépondérantes, mais pas toujours simultanément.

L'importance relative des différentes forces agissant sur un liquide est calculée par des nombres adimensionnels représentant les rapports entre ces forces. L'analyse dimensionnelle permet de déterminer ces rapports. Nous verrons tout cela à la fin du chapitre [26].

I-2- Loi fondamentale de la dynamique des fluides :

Le principe de base de la dynamique des fluides désigne une loi de physique mettant en relation la masse d'un objet m et son accélération \vec{a} (2^{ème} loi de Newton) comme point de départ menant à l'équation fondamentale de l'hydrodynamique. On peut également la voir comme découlant du principe des puissances virtuelles qui en est une formulation duale, elle s'énonce ainsi : [4]

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad (1.1)$$

Pour une particule fluide de masse ρdv , elle s'écrit

$$\sum d\vec{F}_{ext} = \rho dv \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.2)$$

I.e.

$$d\vec{F}_\eta + d\vec{F}_s + d\vec{F}_v = \rho dv \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.3)$$

La dérivée particulaire étant donnée par :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \quad (1.4)$$

Et les expressions des différences forces :

$$\text{-Force de viscosité : } d\vec{F}_\eta = \mu dv \vec{\Delta} \vec{V}$$

$$\text{- Force de pression : } d\vec{F}_s = -(\overrightarrow{\text{grad}P}) dv$$

$$\text{-Force de gravité: } d\vec{F}_v = \rho dv \vec{g}$$

$$\rho dv \vec{g} - (\overrightarrow{\text{grad}V}) dv + \mu dv \vec{\Delta} \vec{V} = \rho dv \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \vec{V}) \cdot \vec{V} \right) \quad (1.5)$$

En divisant par l'élément de volume dv , on obtient l'équation de Navier- Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(V)) \cdot \vec{V} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \vec{\Delta} \vec{V} \quad (1.6)$$

Nous allons ci-après présenter les équations relatives au problème étudié, et préciser les hypothèses simplificatrices de ces équations. Une solution à l'équilibre est ensuite obtenue, ce qui permet de choisir une vitesse caractéristique, afin d'effectuer une analyse dimensionnelle du problème. Cela permet de mettre en évidence les grandeurs caractéristiques de l'étude et les principaux effets physiques sont représentés par les nombres sans dimension.

I-3- Formulation du problème :

Dans un souci de simplicité, nous nous limiterons au cas 2D. L'extension aux écoulements 3D ne pose pas de problème particulier mais les premières instabilités étant bidimensionnelles, cette hypothèse simplificatrice est tout à fait justifiée.

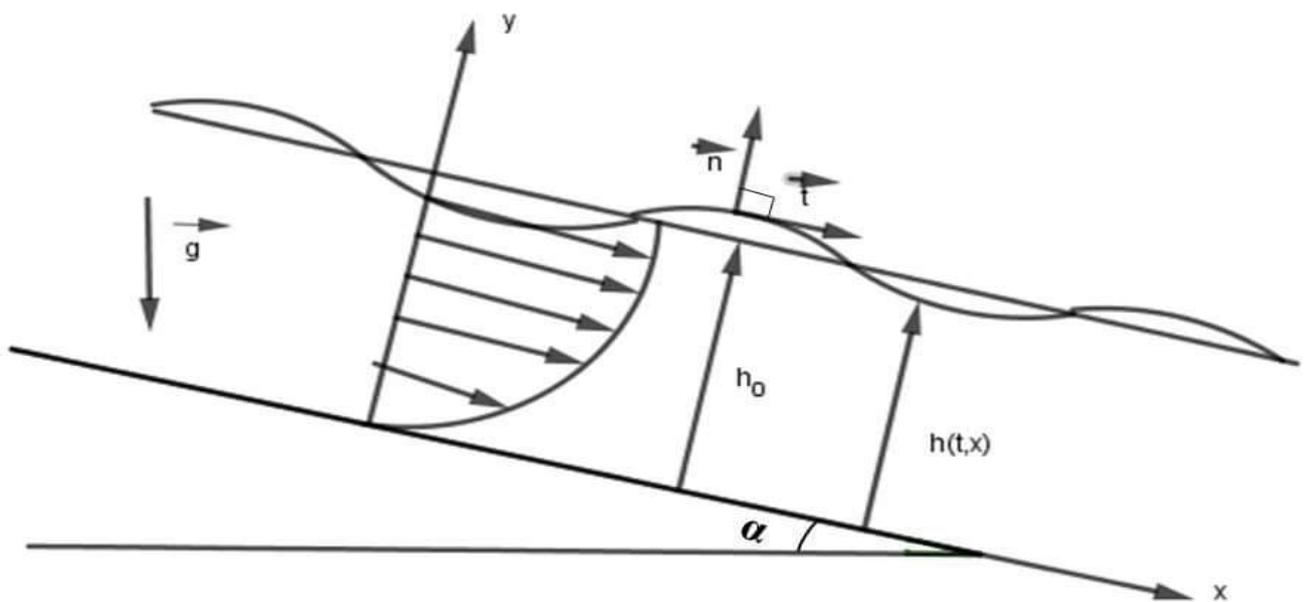
La configuration de l'écoulement est représentée sur la figure(1) où une couche de fluide est posée sur une paroi inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. La couche de fluide a une épaisseur égale à $h(x, t)$, elle est supposée newtonienne, visqueuse, immiscible et incompressible. Sa viscosité dynamique et densité sont respectivement μ et ρ . L'origine du référentiel orthonormé $F(t, x, y)$ est choisi sur la paroi sur laquelle le fluide s'écoule ce qui donne l'interface pour l'écoulement non perturbé en $y = h_0$, l'axe des y est pris selon la direction perpendiculaire à la paroi du plan. L'axe des x est dans la direction de l'écoulement. La position de l'interface est représentée par la fonction $y = h(x, t)$ qui fait partie des inconnues du problème.

Afin de pouvoir contrôler les instabilités à l'interface, on introduit le fluide par la paroi du plan incliné à travers des actionneurs.

On projette les équations du mouvement dans un repère bidimensionnel (2D) qui convient à notre cas d'étude.

Les composantes des vitesses en coordonnées cartésiennes sont (U, V) , le champ de pression est noté $p(x, y, t)$, la dynamique du fluide est gouvernée par les équations de Navier-Stokes et de continuité.

Après cela, nous allons essayer de trouver le profil de vitesse et la pression dans le cas de l'écoulement de base (cas $y = h_0$ tel que $h_0 = \text{constante}$)



figure(1): repère du film liquide mince incline ($\alpha < 0$)

I-4-les équations du Mouvement :

Les équations régissant l'écoulement sont :

I-4-1- équation de continuité :

Généralement l'équation de conservation de masse (continuité) d'un écoulement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.7)$$

- Dans notre cas, le fluide est incompressible ($\rho = \text{cste}$) l'équation de continuité est alors :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

I-4-2- équation bilan de quantité de Mouvement

Le fluide en écoulement sous l'effet de la gravité subit également l'influence d'un champ électromagnétique constant. Nous avons choisi d'orienter le champ magnétique \vec{H} dans la direction de l'écoulement et nous avons préféré la direction transverse au champ électrique :

$$\vec{H} = H_0 \vec{i}, \quad \vec{E} = E_0 \vec{k}$$

- L'équation de Navier-Stokes dans le cas général s'écrit alors :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}) \cdot \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} \vec{p} + \rho \vec{g} + \mu \overrightarrow{\Delta} \vec{v} + \mu_0 \sigma \left(\vec{E} + \mu_0 (\vec{v} \wedge \vec{H}) \right) \wedge \vec{H} \quad (1.9)$$

où μ_0 Est la perméabilité magnétique, σ la conductivité électrique et \vec{g} le champ de gravité tel que :

$$\vec{g} = g \sin(\alpha) \vec{i} - g \cos(\alpha) \vec{j}$$

La projection de l'équation (1.9) présente en coordonnées cartésiennes à (2D) donne :

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (1.10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos(\alpha) + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \cdot \sigma \left(E_0 \cdot H_0 - \mu_0 (V \cdot H_0^2) \right) \quad (1.11)$$

I-5 Les conditions aux limites :

Les conditions aux limites cinématiques en $y = 0$ sont données par la condition de non glissement et la condition décrivant le contrôle imposé :

$$U=0 \quad (I.12)$$

$$V=f(x, t) \quad (I.13)$$

Où f est une fonction donnée qu'on explicitera plus loin.

I-5-1-la condition cinématique à l'interface:

L'équation cinématique appelée aussi équation de non miscibilité reflète le fait que les limites du fluide sont imperméables. Puisque la vitesse du fluide (en $y = h$) est égale à la vitesse de la surface libre, cette équation peut être développée comme suit :

$$\text{Soit} \quad F(x, y, t) = y - h(x, t) = 0 \quad (I.14)$$

La dérivée matérielle s'annule $\frac{dF}{dt}=0$ ou :

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} - U \frac{\partial h}{\partial x} + V = 0 \quad (I.15)$$

Il vient alors :

$$V = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (I.16)$$

I-5-2 la condition dynamique :

La pression p sur la surface libre est égale à la pression atmosphérique dans les cas les plus simples, mais en réalité, à l'interface, les contraintes de pression et de viscosité mises en jeu décrivent la continuité des contraintes tangentielles d'une part et le saut subi par les contraintes normales d'autre part.

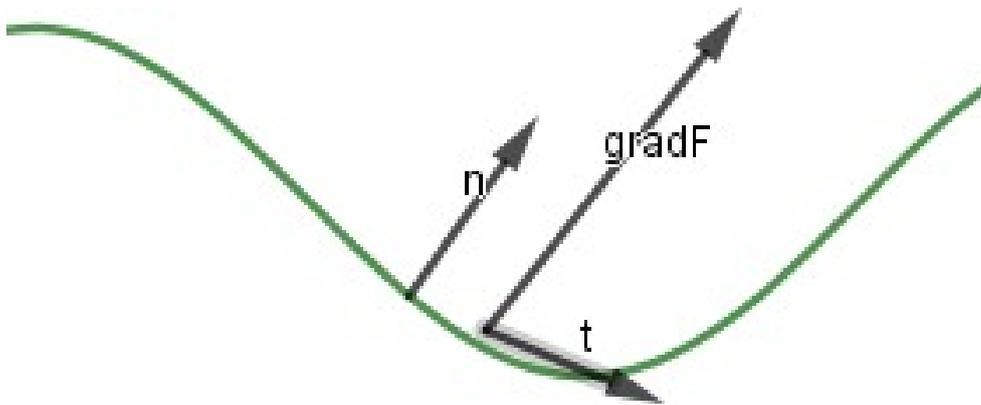
- La continuité des contraintes tangentielles s'écrit comme suit :

$$(\vec{\sigma}\vec{n}) \cdot \vec{t} = 0 \quad (I.17)$$

- Les contraintes normales sont discontinues à cause de la présence d'une tension superficielle, elles obéissent à la relation suivante :

$$(\bar{\sigma}\vec{n}) \cdot \vec{n} - (p_0 \vec{n}) \cdot \vec{n} = \gamma \text{div}(\vec{n}) \quad (I.18)$$

γ : étant le coefficient de tension superficielle.



Avant de développer les deux conditions en $y = h(x, t)$, il est indispensable de définir les vecteurs tangent (\vec{t}) et normal (\vec{n})

On peut définir le vecteur normal (\vec{n}) à partir du gradient de la fonction F

$$\vec{n} = \frac{\overline{\text{grad } F}}{\|\text{grad } F\|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (I.19)$$

Nous savons que les vecteurs normal et tangent sont perpendiculaires, on a donc cette expression pour \vec{t} :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (I.20)$$

le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ dans notre cas s'écrit:

$$\bar{\sigma} = -p\bar{i} + 2\mu\bar{D} \quad (I.21)$$

Où \bar{D} est le tenseur des taux de déformation dont les éléments sont :

$$D_{ij} = 1/2\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \quad (I.22)$$

\bar{i} : représente la matrice identité

Les deux conditions dynamiques (I.15) et (I.16) s'écriront alors comme suit :

$$\frac{2\mu h_x}{1+h_x^2}(V_y - U_x) + \frac{\mu(1-h_x^2)}{1+h_x^2}(U_y + V_x) = 0 \quad (I.23)$$

$$-p + \frac{2\mu}{1+h_x^2}(h_x U_x + V_y - h_x(U_y + V_x)) + p_0 = \gamma \operatorname{div} \vec{n} \quad (I.24)$$

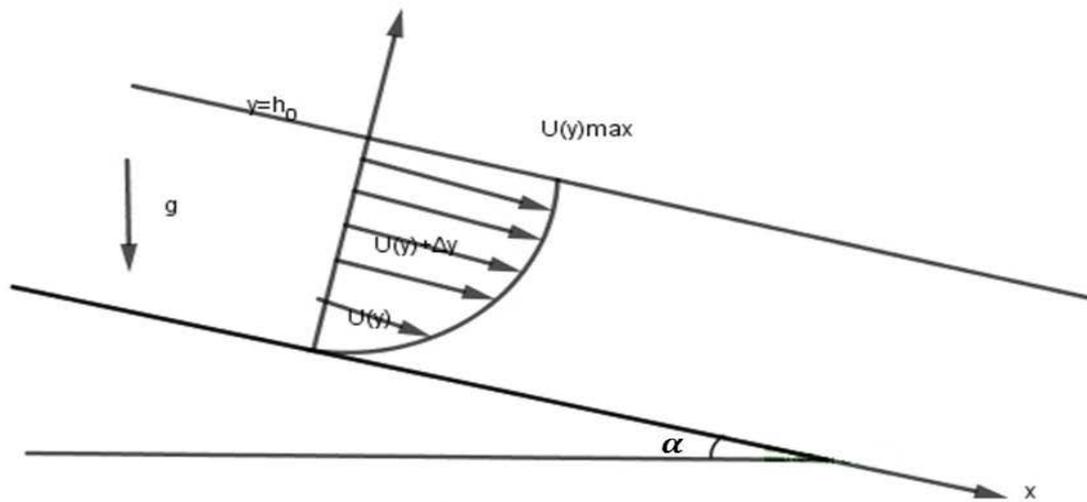
Où γ est la tension de surface et :

$$\operatorname{div} \vec{n} = -\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \quad (I.25)$$

I-6- Écoulement de base :

Le régime d'écoulement est dit uniforme lorsque la hauteur et la vitesse débitante sont indépendantes de l'abscisse. Il en résulte que la surface libre est plane. La tension superficielle ne devrait pas avoir donc une influence dans cet écoulement.

Considérons notre écoulement en régime stationnaire et uniforme $y = h_0$ (figure 2). La vitesse de l'écoulement se réduit à la composante $U(y)$ qui est fonction uniquement de la variable y quand le régime permanent uniforme est établi où il y a équilibre entre forces visqueuses et la force motrice qui est représentée par la gravité.



figure(2):profil de vitesse dans un ecoulement de base

- Avec :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad (I.26)$$

L'équation de Navier-Stokes (I.10) et (I.11) se réduit comme suit :

$$0 = g \sin(\alpha) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (I.27)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - g \cos(\alpha) + \mu_0 \cdot \sigma(E_0 \cdot H_0) \quad (I.28)$$

En intégrant et développement l'équation (I.28) on trouve :

$$p(y) = (\mu_0 \cdot \sigma(E_0 \cdot H_0) - \rho g \cos(\alpha) +)y + A_1 \quad (I.29)$$

Pour déterminer la constante A_1 , on utilise la condition dynamique (I.24) où la pression est égale la pression atmosphérique à la surface libre et donc constante :

$$p = p_0 \quad (I.30)$$

Les calculs donnent le profil de pression suivant :

$$p(y) = \left(\rho g \cos(\alpha) - \mu_0 \cdot \sigma(E_0 \cdot H_0) \right) (h_0 - y) + p_0 \quad (I.31)$$

De l'équation (I.27) on trouve après intégration :

$$U(y) = \frac{\rho g}{2\mu} \sin(\alpha) y^2 + A_2 y + A_3 \quad (I.32)$$

Pour calculer les constantes A_2 et A_3 , on utilise Les conditions (I.12) et (I.23) de non glissement et la condition dynamique tangentielle qui se réduit à :

$$U = 0 \quad (I.33)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{h_0} = 0 \quad (I.34)$$

On déduit le profil de vitesse définissant l'état de base :

$$U(y) = U_0 \left(\frac{y}{h_0} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h_0^2} \right) \quad (I.35)$$

Avec :

$$U_0 = \frac{\rho g \sin(\alpha) h_0^2}{\mu} \quad (I.36)$$

I-7- Ecriture des équations du film mince sous forme adimensionnelle :

Dans cette partie nous proposons des grandeurs de référence pour écrire les équations présentes avec les conditions aux limites associées sous forme adimensionnée.

Les objectifs spécifiques de l'analyse dimensionnelle sont :

- Réduire des variables dimensionnelles sous la forme de groupes sans dimension pourvus d'un sens physique.
- Faciliter l'échange d'information entre des modèles à échelles différentes.
- Diminuer le nombre d'expériences à réaliser.

I-7-1-mise à l'échelle :

-Pour l'a dimensionnement, on utilise des échelles suivantes :

- On a utilisé L , une longueur d'onde caractéristique et l'épaisseur h_0 comme échelles des longueurs suivant les directions X et Y respectivement. Pour les vitesses longitudinales, on a utilisé U_N comme échelle. A partir de ces valeurs on définit d'autres grandeurs :

- l'échelle des vitesses normales $V=U_N \frac{h_0}{L}$

- $\frac{L}{U_N}$ comme échelle des temps.

- $\frac{\rho \nu}{h_0} U_N$ comme échelle des pressions.

- U_N : est la vitesse moyenne de l'écoulement de base définie par :

$$U_N = \frac{1}{h_N} \int_0^{h_N} U(y) dy = \frac{g \sin(\alpha)}{3\nu} h_N^2 \quad (I.37)$$

I- 72- les nombres adimensionnels :

Les équations et conditions aux limites de l'écoulement feront apparaitre les nombres adimensionnés suivants :

- le paramétré ε qui rend compte du caractère ondes longues des modes instables:

$$\varepsilon = \frac{h_0}{L}$$

- le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent). Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses

$$Re = \frac{\rho U_N h_0}{\mu}$$

- le nombre de weber est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface du système. Il représente le rapport entre les forces d'inertie et la tension Superficielle :

$$W = \frac{\gamma}{\rho U_N^2 h_0}$$

- le nombre de Hartmann est un nombre sans dimension utilisé en magnétohydrodynamique pour traiter le mouvement de fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique.

$$Ha = h_0 \mu_0 H_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

- le nombre électrique est un nombre sans dimension qui caractérise le mouvement d'un fluide en présence d'un champ électrique. Il représente le rapport entre les effets magnétiques et électriques:

$$\beta = \frac{E_0}{\mu_0 H_0 u_n}$$

I-7-3-Equations adimensionnées:

Après la mise à l'échelle et compte tenu de notre inventaire des nombres adimensionnels, le système d'équations adimensionnées à résoudre s'écrit comme suit :

-équation de conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1.38)$$

-Bilan de quantité de Mouvement suivant \vec{X} :

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3 \quad (1.39)$$

-Bilan de quantité de Mouvement suivant \vec{Y} :

$$\varepsilon^2 Re \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 3 \cot g(\alpha) + \beta H_a^2 - \varepsilon H_a^2 V \quad (1.40)$$

-conditions en $y = 0$:

$$U(x, 0, t) = 0 \quad (1.41)$$

$$V(x, 0, t) = f(x, t) \quad (1.42)$$

- condition cinématique en $y = h(x, t)$:

$$V = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + U \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (1.43)$$

- condition dynamique (contraintes tangentielles) :

$$2\varepsilon^2 h_x (V_y - U_x) + \frac{(1-\varepsilon^2 h_x^2)}{1+\varepsilon^2 h_x^2} (U_y + \varepsilon^2 V_x) = 0 \quad (1.44)$$

- condition dynamique (contraintes normales) :

$$-p + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2 h_x^2} (\varepsilon h_x U_x + V_y - \varepsilon h_x (U_y + \varepsilon^2 V_x)) = WR e^{-\frac{\varepsilon^2 h_{xx}}{(1+\varepsilon^2 h_x^2)}} \quad (1.45)$$

Enfin, sous forme adimensionnée, le profil des vitesses longitudinales et la pression aura pour expressions :

$$U(y) = 3y(1 - \frac{1}{2}y) \quad (1.46)$$

$$p(y) = \beta Ha^2 (y - h(x, t)) + 3 \cot(\alpha) (h(x, t) - y) - WR(h_{xx}) \quad (1.47)$$

Conclusion :

Dans ce chapitre, on a défini les grandeurs basiques de la dynamique des fluides, puis on a fait une description du problème étudié, celui de l'écoulement de films liquides minces sur une plaque inclinée.

Nous avons ensuite défini les grandeurs caractéristiques de l'écoulement du film mince visqueux qui jouent un rôle important dans la dynamique de l'écoulement.

Après l'écriture du système complet, on a pu calculer la solution uniforme (écoulement de base). Nous avons écrit les équations adimensionnelles qui régissent l'écoulement du film mince et les conditions aux limites associées. La mise sous forme adimensionnelle de ces systèmes équations a été obtenue à l'aide de grandeurs de référence bien choisies.

Chapitre II : Principe de la modélisation.

II.1 : Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons définir quelques modèles qui peuvent se substituer aux équations de **Navier-Stokes** pour décrire le comportement de films fluides tombant sur une plaque inclinée. Parmi ces modèles, on trouve :

Les modèles asymptotiques (appelés aussi modèles ondes longues ou équations du surface), et les modèles intégraux de couche limite.

Dans notre travail, nous avons choisi d'utiliser le modèle asymptotique car nous estimons qu'il est le plus approprié par rapport aux objectifs de notre étude et donne des résultats très réalistes dans la gamme des nombres de Reynolds étudiée. On va également citer le travail de quelques chercheurs et leurs expériences sur les films liquides minces en écoulement sur des parois inclinées.

II .2-Etat de l'art :

Les films minces liquides s'écoulant le long d'une paroi inclinée ont été étudiés au fil des temps par de nombreux chercheurs. **Nusselt** résout le problème laminaire avec une surface uniforme dès 1916 et plusieurs expériences ont été réalisées dans les années 30 et 40 en commençant par les travaux de **Kapitza et Kaptiza** (1894-1984) [5] qui ont attiré l'attention par leurs expériences sur la dynamique non-linéaire à faible nombre de **Reynolds**.

Les premières études de stabilité concernant l'écoulement de films de fluides newtoniens à une couche s'écoulant sur un plan incliné ont été menées par Benjamin (1957) [6] et Yih (1963). Leur étude a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité. Ils montrent ainsi que la vitesse de propagation de ces ondes est deux fois plus grande que la vitesse de

base du liquide au niveau de la surface libre. Les instabilités de grandes longueurs d'onde qui les gouvernent sont des modes dits de surface. Yih (1963) [7] a montré que ces dernières apparaissent à des nombres de Reynolds bien déterminés ($R_c = 6/5 \cot\theta$) et leur célérité est le double de la vitesse à la surface libre confirmant les études de Benjamin et Yih. D'autres travaux dans le domaine ont été réalisés par **Benney** en 1966 grâce à des développements asymptotiques aux grandes ondes. On peut également citer les travaux d'autres chercheurs ayant utilisé la même approche comme : **Kawahara** [1, 2] et **Kuramoto-Sivashinsky**.

Pour comprendre l'effet de la tension superficielle sur l'apparition des instabilités, Hooper et Boyd [8] ont effectué une étude asymptotique aux petites longueurs d'ondes en considérant un écoulement de Couette infini.

Kelly et al. (1989) [9] ont effectué un bilan énergétique afin de déterminer les mécanismes responsables de ces instabilités. Smith (1990) [10] a proposé une explication concernant les mécanismes physiques régissant la croissance de ces instabilités à grandes longueurs d'onde. Il décrit comment une perturbation superficielle produit un mouvement au sein de la couche fluide et de quelle façon ce mouvement peut amplifier ou non les perturbations de l'interface suivant l'importance relative de l'inertie et du gradient de pression dans l'écoulement. [11]

Dernièrement, **Ruyer-Quil et Manneville** ont développé un modèle pour la description des instabilités de la surface libre d'un écoulement d'un fluide newtonien. Leur modélisation sert actuellement de référence aux études de stabilité dans le domaine des films minces, la méthode qu'ils ont suivie permet d'aboutir à des modèles qui sont satisfaisants jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de la centaine. [12]

Les premiers à étudier l'effet d'un champ magnétique uniforme sont Hsieh (1965) [13] et Ladikov (1966) [14]. Ils se sont intéressés à la stabilité de l'écoulement d'une couche de fluide sur un plan horizontal et incliné.

Des modélisations asymptotiques et de type intégral de couche limite ont été utilisées par Korsunsky en 1999 [15] pour les faibles et grands nombres de Reynolds. Des modèles à deux

équations ont également été élaborés pour l'étude de l'effet d'un champ magnétique vertical [16,17].

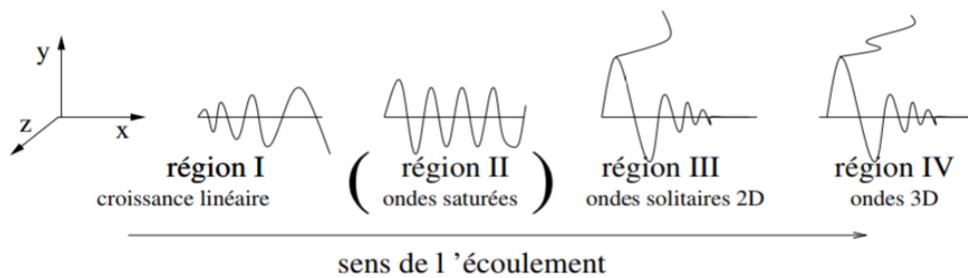
II .3 Phénoménologie :

Après les travaux **pionniers de Piotr et Serguei Kapitza**, de nombreuses expériences conçues pour décrire les instabilités de films minces tombants ont fait apparaître plusieurs types d'instabilités [18, 20, 21, 25, 27, 28, 29, 30, 31] :

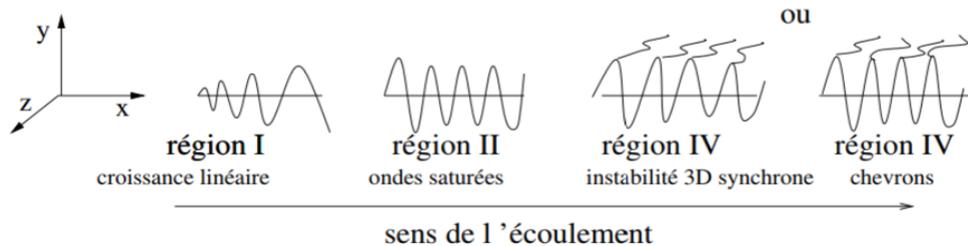
- Le premier type d'instabilité est un mode de cisaillement où le cisaillement moyen au sein du fluide joue un rôle prépondérant. L'instabilité est d'origine visqueuse. En effet, la viscosité permet le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations par le biais du travail du tenseur de Reynolds. L'apparition de ce mode correspond à une inclinaison très faible du plan et à des nombres de Reynolds élevés. [17]
- Le deuxième type l'instabilité est de grande longueur d'onde et est d'origine interrassiale. Cette instabilité est obtenue pour des nombres de Reynolds plus faibles. L'origine des instabilités des modes d'interface de grande longueur d'onde est liée aux efforts de cisaillement créés par les perturbations au niveau de l'interface entre les couches. Emery et Brosse ont démontré que le forçage n'a pratiquement aucun effet sur la dynamique pleinement non-linéaire et tridimensionnelle en aval. [17]
- Le troisième type d'instabilités est celui des modes d'interface de faible longueur d'onde. Elles peuvent dominer les deux autres types d'instabilités, notamment pour de faibles nombres de Reynolds et pour de faibles débits. L'instabilité d'interface de longueur d'onde modérée est donc essentiellement produite par les efforts de cisaillement au niveau de l'interface entre les couches. Toutefois, à ces termes

de cisaillement s'ajoutent les efforts de cisaillement localisés au niveau de la surface libre, ainsi que le transfert d'énergie entre le champ de base et le champ de perturbations pour favoriser l'apparition des instabilités d'interface. [5]

Concernant l'évolution de ces instabilités du bord amont à l'aval du plan, on distingue quatre phases correspondant à quatre régions distinctes du plan incliné.



(a) basse fréquence ou près du seuil d'instabilité



(b) haute fréquence et loin du seuil d'instabilité

Fig1.2 : représentation schématique de l'évolution du film. [5]

Après une première région de croissance linéaire dont la nature convective a été confirmée par des études théoriques (JOO et DEVIS), les ondes saturent par des effets faiblement non-linéaires. On observe ensuite deux types d'évolution dont l'observabilité est inhérente à la valeur du nombre de Reynolds et à la fréquence de forçage au bord amont.

II .4 Modélisation du problème :

1) Modèles intégraux de couche limite :

Nous allons décrire ici les principaux modèles rencontrés dans littérature et se présentant sous forme de deux équations pour l'épaisseur du film h et le débit instantané local. Les premières équations de ce type ont été obtenues en intégrant les équations de continuité et le bilan de quantité de mouvement suivant l'épaisseur du film. Cette idée simple remonte en fait aux premières études sur le sujet. La dynamique du film n'est plus complètement asservie à sa cinématique comme pour les modèles asymptotiques cités plus loin. Ce modèle formulé dès 1927 par SHKADOV est parfois appelé modèle intégral de couche limite. On passe dans ce cas d'une représentation de champs de vitesse à une description intégrée sur l'épaisseur. Les degrés de liberté de l'écoulement deviennent l'épaisseur du film h et le débit q . Le modèle de Shkadov décrit très mal le comportement du film au début de l'instabilité mais donne des résultats très réalistes à des nombres de Reynolds modérés.

2) Modèles aux résidus pondérés :

Ruyer-Quil et Manneville ont amélioré le modèle de Shkadov grâce à une méthode combinant l'approximation en série de Taylor du champ des vitesses à la méthode des résidus pondérés. En utilisant l'approximation de couche limite qui consiste à négliger les termes d'inertie du second ordre en ε , ils ont pu donner une expression pour la pression qui est ensuite injectée dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x .

On arrive alors à une formulation composée d'un système d'équations d'évolution couplées pour trois inconnues, l'équation du film h , le débit instantané local et des corrections au débit.

3) Principe de la modélisation asymptotique (modèle à une équation) :

Il est possible de résoudre asymptotiquement les équations de **Navier-Stokes** en utilisant l'hypothèse du film mince. Les développements asymptotiques seront faits par rapport à un petit paramètre ε appelé paramètre ondes longues. Il s'agit du rapport entre la hauteur h et la longueur caractéristique du film L .

La solution ainsi obtenue sera injectée dans l'équation cinématique sous sa forme intégrale pour obtenir des modèles à une équation sur la hauteur du film h . [22]

Ces modèles supposent que le débit est fonction uniquement de l'épaisseur h et de ses dérivées en temps et en espace. Dans notre cas, ils ont la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = f(x, t) \quad (\text{II.1})$$

$$q(x, t) = Q(h) \quad (\text{II.2})$$

(II.1) est l'équation exacte de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur du film.

(II.2) exprime formellement l'expression du débit et dépend du niveau d'approximation vis-à-vis du paramètre ε .

Dans notre travail, les champs de vitesses et de pression peuvent être développés sous forme d'une série asymptotique en ε :

- $U = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + 0(\varepsilon^3) \quad (\text{II.3})$

- $V = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + 0(\varepsilon^3) \quad (\text{II.4})$

- $P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + 0(\varepsilon^3) \quad (\text{II.5})$

II.5 Résolution des équations de notre problème :

L'instabilité des films tombants correspond à un mode de grande longueur d'onde. Cette propriété peut s'exprimer en introduisant le paramètre déjà défini ε .

Pour la résolution de ces équations, il est nécessaire d'utiliser un logiciel de calcul technique et formel qui permet d'exécuter des calculs rapides. Parmi ces logiciels, nous nous sommes intéressés au 'Maple'.

II.5.1 Présentation du programme d'application « MAPLE »

Maple est un logiciel de calcul technique et formel, il permet :

- D'exécuter des calculs rapides, plus complexes nécessitant des outils mathématiques avancés.
- De travailler avec des données symboliques comme des variables, des polynômes ou des expressions.

-De développer des modèles sophistiqués de simulation avec une haute-fidélité.

-dispose également de fonctions de programmation et d'outils graphiques

II.5.2 Résolution des équations aux différents ordres :

Grace à l'hypothèse ondes longues, nous pouvons à présent écrire les équations de Navier-Stokes du problème (conservation de la masse et de la quantité de mouvement) et les conditions aux limites sans les termes d'ordre ε^2 et plus. Ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3 \quad (\text{II.7})$$

$$\varepsilon^2 Re \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 3 \cot g(\alpha) + \alpha H_a^2 - \varepsilon H_a^2 V \quad (\text{II.8})$$

-Les conditions aux bords $y=0$ et cinématique en $y = h(x, t)$ restent inchangés :

$$U(x, 0, t) = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$V(x, 0, t) = f(x, t) \quad (\text{II.10})$$

Condition cinématique :

$$V(x, h, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + U \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II.11})$$

On intègre l'équation de conservation de la masse (continuité) à partir de (II.2), on trouve :

$$V_h - V_0 = - \int_0^h \frac{\delta V}{\delta x} dy \quad (\text{II.12})$$

On introduit le débit par unité de longueur :

$$Q(x, t) = \int_0^h U(x, y, t) dy \quad (\text{II.13})$$

Pour simplifier l'équation (II.11) on utilise la règle d'intégration de Leibniz :

$$V_h - V_0 = - \frac{\delta}{\delta x} \int_0^h U(x, y, t) dy - U(x, h) \frac{\delta h}{\delta x} - U(x, 0) \quad (\text{II.14})$$

Comme $U(x, 0)=0$, on obtient en remplaçant (II.13) dans (II.11):

$$\frac{\delta Q}{\delta x} + \frac{\delta h}{\delta t} = f(x, t) \quad (\text{II.15})$$

Condition dynamique (contrainte normale et tangentielle) :

$$U_y + 2\varepsilon^2 h_x (V_y + U_x) + \varepsilon^2 V_x = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$-p + 2\varepsilon V_y - 2\varepsilon h_x U_y - WR\varepsilon^2 h_{xx} = 0 \quad (\text{II.17})$$

II.5.3. Résolution à l'ordre zéro :

On reporte les expressions (II.3)-(II.5) dans les équations de notre problème. On regroupe ensuite les termes du même ordre en ε . A l'aide du logiciel MAPLE, on ne tire de ces équations que les termes d'ordre 0 en ε :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} U_0(x, y, t) + 3 = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$-\frac{\delta}{\delta y} p_0(x, y, t) - 3 \cot(\alpha) + \beta H a^2 = 0 \quad (\text{II.19})$$

-Condition à la limite $y=0$:

$$U_0(x, 0, t) = 0 \quad (\text{II.20})$$

-Conditions à la limite $y=h(x, t)$:

$$\text{Condition normale } -p_0(x, h, t) - WR(h_{xx}) = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\text{Condition tangentielle } \frac{\delta U_0}{\delta y}(x, h, t) = 0 \quad (\text{II.22})$$

Remarquons qu'il y'a une grande similitude entre les équations du problème à l'ordre 0 et celles menant à l'écoulement de base.

Le terme lié à la tension superficielle apparait dans ces équations bien que d'ordre ε^2 car le nombre de Weber W est supposé $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$, ce qui justifie l'hypothèse des ondes longues.

En intégrant (II.18) et (II.19), on trouve :

$$U_0(x, y, t) = -\frac{3}{2}y^2 + C_1 y + C_2 \quad (\text{II.23})$$

$$p_0(x, y, t) = -3ycot(\alpha) + y\beta Ha^2 + C_3 \quad (\text{II.24})$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 ont été déterminées en utilisant les équations (II.22) et (II.20). Pour C_3 on utilise l'équation (II.21). Les champs de vitesse U_0 et de pression p_0 à cet ordre de l'approximation s'écrivent comme suit :

$$U_0(x, y, t) = 3y \left(h(x, t) - \frac{1}{2}y \right) \quad (\text{II.25})$$

$$p_0(x, y, t) = \beta Ha^2 (y - h(x, t)) + 3 \cot(\alpha) (h(x, t) - y) - WR(h_{xx}) \quad (\text{II.26})$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse(II.12), on trouve l'expression suivante du champ de vitesse V_0 :

$$V_0(x, y, t) = f(x, t) + \int_0^h \frac{\delta U_0}{\delta x} dy \quad (\text{II.27})$$

Le calcul Maple nous a donné cette expression pour V_0 :

$$V_0(x, y, t) = f(x, t) - \frac{3}{2} \left(\frac{\delta}{\delta x} h(x, t) \right) y^2 \quad (\text{II.28})$$

On aura enfin l'expression suivante pour le débit local à l'ordre 0 :

$$Q_0(x, t) = h(x, t)^3 \quad (\text{II.29})$$

Les solutions sont substituées dans la condition cinématique pour obtenir une équation d'évolution de l'interface $h(x, t)$. L'expression de l'équation de **Benney généralisée** à l'ordre zéro pour un film mince à surface libre se présente ainsi comme suit :

$$h_t(x, t) + 3h^2(x, t)h_x(x, t) = f(x, t) \quad (\text{II.30})$$

Cette équation qui est une approximation du comportement d'un film mince sur une plaque ne fait pas intervenir les effets du champ électromagnétique et du contrôle, ils le seront à l'ordre suivant.

II.5.4 Résolution à l'ordre 1 :

En utilisant le logiciel MAPLE, on écrit les équations de notre problème à l'ordre 1. Voici donc les équations à résoudre à cet ordre de l'approximation :

$$-R(3(h_t y + 3(-\frac{3y^2}{2} + 3h(x,t)y))(h_x y + (f(x,t) - \frac{3}{2}h_x y^2)(-3y + 3h)) - 3(h_x \cot(\alpha) + h_x \beta H a^2 + WRh_{xxx} + \frac{\partial^2}{\partial y} U_1(x,y,t) = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{\delta}{\delta x} p_1(x,y,t) + 3h_x + H a^2 \left(f(x,t) - \frac{3}{2}(h_x y^2) \right) = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$- \text{ en } y=0 : U_1(x,0,t) = 0 \quad (\text{II.33})$$

$$- \text{ en } y=h(x,t) :$$

$$\text{Condition normale } -p_1(x,y,t) - 6h_x y + 6h_x^2 y = 0 \quad (\text{II.34})$$

$$\text{Condition tangentielle } \frac{\delta U_1}{\delta y}(x,h,t) = 0 \quad (\text{II.35})$$

En intégrant et développant les deux équations (II.32) et (II.31), on trouve :

$$U_1(x,y,t) = \frac{3}{2}R(\frac{1}{4}h h_x y^4 + \frac{1}{6}(2h_t - 2f(x,t))y^3) + \frac{1}{2}(-3Rf(x,t)h + 3h_x \cot(\alpha) - h_t \beta H a^2 - WRh_{xxx})y^2 + C_4 y + C_5 \quad (\text{II.36})$$

$$p_1(x,y,t) = -(H a^2 f(x,t) + 3h_x)y + \frac{1}{2}H a^2 h_x y^3 + C_6 \quad (\text{II.37})$$

On utilise les équations (II.33) et (II.35) pour calculer C_4 et C_5 et on obtient le champ de vitesse U_1 :

$$U_1(x,y,t) = \frac{3}{2}R(\frac{1}{4}h_x h y^4 + \frac{1}{6}(2h_t - 2f y^3) + \frac{1}{2}(3Rf h + 3h_x \cot(\alpha) - h_x \beta H a^2 - WRh_{xxx})y^2 + \left(-\frac{3}{2}R h_x h^4 - \frac{3}{2}R h^2 h_t - \frac{3}{2}R h^2 f - 3h h_x \cot(\alpha) + h h_x \beta H a^2 + hWRh_{xxx} \right) y \quad (\text{II.38})$$

La résolution de l'équation (II.32) en considérant la condition (II.34) pour calculer C_6 nous donne le champ de pression p_1 :

$$p_1(x,y,t) = -H a^2 f y + \frac{1}{2}H a^2 h_x y^3 - 3h_x y + H a^2 f h - \frac{1}{2}H a^2 h_x h^3 - 3h_x h + 6h_x^2 h \quad (\text{II.39})$$

Les solutions à l'ordre un de V_1 et Q_1 sont obtenues de la même manière que celles à l'ordre zéro. La solution se présente sous la forme suivante :

$$V_1(x, y, t) = f(x, t) - \frac{3}{40}R(h_{xx}h + h_x^2)y^5 - \frac{3}{24}R(h_{xt} - f_x)y^4 - \frac{1}{2}(Rf_xh + Rfh_x + h_{xx} \cot(\alpha) - \frac{1}{3}(h_{xx}\beta Ha^2 - WRh_{xxxx}))y^3 \quad (\text{II.40})$$

$$Q_1(x, t) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{10}Rh_x + Rh_x\right)h^6 + \frac{3}{4}R\left(\frac{1}{6}h_t - Rh_t - Rf - f + Rh_x\right)h^4 + \frac{1}{2}\left(Rfh + h_x \cot(\alpha) - 3h_x \cot(\alpha) + h_x\beta Ha^2 - \frac{1}{3}(h_x\beta Ha^2 - 2WRh_{xxxx})\right)h^3 \quad (\text{II.41})$$

Les solutions sont substituées dans la condition cinématique et comme pour l'ordre 0 on obtient une équation d'évolution de l'interface $h(x, t)$. C'est une expression qui généralise l'équation de **Benney** à l'ordre 1 pour un film mince à surface libre en incluant les effets du champ électromagnétique et du contrôle :

$$\frac{\delta}{\delta t}h(x, t) + \frac{\delta}{\delta x}\left(Q_0(x, t) + \varepsilon Q_1(x, t)\right) = f(x, t) \quad (\text{II.42})$$

$$R\left(-\frac{1}{5}h_{xx} - h_x\right)h^6 + \frac{31}{10}Rh_x^2h^5 + R\left(\frac{9}{2}h_{xx}^2 - f_x\right)h^4 + \left(R\left(\frac{1}{3}Wh_{xxxx} - 4fh_x\right) + h_{xx}\left(\frac{1}{3}\beta Ha^2 - \cot(\alpha)\right)\right)h^3 + \left(h_x^2\left(\beta Ha^2 - \frac{9}{2}\cot(\alpha)\right) + h_x(3 + WRh_{xxxx})\right)h^2 + h_t - f = 0 \quad (\text{II.43})$$

II.5.5 Résolution à l'ordre 2 :

Les solutions à l'ordre deux U_2, V_2 et p_2 sont obtenues de la même manière. La résolution des équations à cet ordre de l'approximation ne présente pas plus de difficultés si ce n'est que les équations deviennent plus longues, nous n'allons donc pas les donner ici.

Les solutions obtenues peuvent être remplacées dans la condition cinématique pour obtenir une équation d'évolution de l'interface $h(x, t)$ d'ordre 2. Elle peut être écrite formellement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2) = f(x, t) \quad (\text{II.44})$$

Notons que cette équation qui présente des dérivées spatiale et temporelle [8] est non linéaire. La résolution de cette équation nous permet de déterminer le seuil du déclenchement de l'instabilité de manière précise.

Conclusion :

Afin de répondre à la problématique posée dans ce travail, nous avons présenté dans ce chapitre l'histoire des travaux sur l'étude du comportement de la surface libre d'un film de fluide visqueux en écoulement sur un plan incliné. Nous avons cité les différentes recherches qui ont été développées dans ce domaine puis nous avons présenté les deux familles de modèles qui sont rencontrées dans la littérature. Des modèles à une équation donnant l'évolution de l'épaisseur du film et des modèles à deux équations décrivant en plus l'évolution du débit local. Parmi ces derniers, nous avons cité les modèles intégraux de couche limite et le modèle aux résidus pondérés de Ruyer-Quil et Manneville. Nous avons opté pour l'approche asymptotique, un programme de calcul formel a été utilisé pour la résolution des équations de notre problème aux différents ordres pour enfin obtenir un modèle à une équation donnant l'évolution de l'épaisseur du film. Le choix de l'approche utilisée a été dicté par la précision des résultats d'études antérieures sur la stabilité non loin du seuil de l'instabilité.

Chapitre III : Analyse de stabilité linéaire

III.1. Introduction :

La stabilité linéaire de l'écoulement à surface libre sur un plan incliné a été largement étudiée. Le principe de la théorie linéaire consiste à examiner la réponse du système à une perturbation de faible amplitude. Nous allons l'appliquer dans ce chapitre au problème auquel nous avons porté notre intérêt.

III.2. Introduction de la fonction $f(x, t)$:

L'objectif de ce travail est de voir l'effet de l'injection et de l'aspiration du fluide en tant que mécanisme d'un contrôle linéaire en réponse à des observations de la hauteur de l'interface. En suivant l'approche de [23], nous allons examiner le cas du contrôle de l'état uniforme de Nusselt basé uniquement sur des observations de h .

Pour y parvenir, nous définissons le paramètre de contrôle η

$$f(x, t) = -\eta(h(x, t) - 1) \dots \dots \dots \text{(III.1)}$$

η Est une constante réelle à choisir. Dans la plupart des cas, nous constatons que l'état uniforme devient de plus en plus stable pour les valeurs grandes et positives de η . [23]

Notez que si $h = 1$ partout, alors les contrôles ont une magnitude nulle.

L'équation (III.1) nécessite une connaissance parfaite de la forme de l'interface instantanée $h(x, t)$.

En pratique, nous ne prévoyons aucune de ces hypothèses. Le fluide est injecté via un certain nombre d'actionneurs localisés, ou fentes, dans le substrat, et les observations de l'interface sont possibles à un petit nombre d'emplacements dans le domaine d'écoulement.

Il est possible de considérer des schémas de contrôle basés sur des actionneurs ponctuels et des observateurs localisés, avec des observations statiques et des observateurs dynamiques.

En remplaçant l'expression de la fonction f (III.1) dans équation de surface (II.43), on obtient ce qui suit :

$$R \left(-\frac{1}{5} h_{xx} - h_x \right) h^6 + \frac{31}{10} R h_x^2 h^5 + R \left(\frac{9}{2} h_{xx}^2 - \eta(h(x, t) - 1) \right) h^4 + \left(R \left(\frac{1}{3} W h_{xxxx} - 4(-\eta(h(x, t) - 1)) h_x \right) + h_{xx} \left(\frac{1}{3} \beta H a^2 - \cot(\alpha) \right) \right) h^3 + \left(h_x^2 \left(\beta H a^2 - \frac{9}{2} \cot(\alpha) \right) + h_x (3 + W R h_{xxx}) \right) h^2 + h_t + \eta(h(x, t) - 1) = 0 \quad (\text{III.2})$$

III.3. Equations aux perturbations :

Dans une étude de stabilité linéaire, l'écoulement de base correspondant à une épaisseur unité est d'abord légèrement perturbé, on aura donc cette expression pour l'épaisseur $h(x, t)$:

$$h(x, t) = 1 + \tilde{H}(x, t) \quad (\text{III.3})$$

La perturbation \tilde{H} est donc toute petite et on négligera de ce fait dans les équations obtenues tout produit de deux termes perturbés.

On a pour habitude pour des problèmes linéarisés de rechercher des solutions sous forme de modes normaux de nombre d'onde k et de pulsation w . On écrit donc :

$$\tilde{H}(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{III.4})$$

Après avoir remplacé l'expression (III.4) associée à (III.3) dans l'équation de surface (III.2), on obtient la relation de dispersion des perturbations de faible amplitude. Elle s'écrit comme suit :

$$\eta + R\eta ki + \frac{WRk^4}{3} - \frac{k^2 \beta H a^2}{3} - wi + k^2 \cot(\alpha) - \frac{6Rk^2}{5} + 3ik = 0 \quad (\text{III.5})$$

III.4. Etude de stabilité temporelle :

Nous avons choisi d'effectuer une étude temporelle de stabilité. Nous avons pour cela considéré un nombre d'onde k réel et l'objectif dans ce cas est de suivre l'évolution temporelle de perturbations dont la pulsation w est complexe.

On aura alors :

$$\tilde{H} = H_0 \exp(w_i t) * \exp[i(kx - w_r t)] \quad (\text{III.6})$$

Les ondes à l'interface sont donc amplifiées dans le temps si $w_i > 0$ où amorties dans le temps si $w_i < 0$, w_i représente donc le taux d'amplification de ces perturbations. Elles sont neutres si $w_i = 0$ et on parle alors de stabilité marginale.

La partie réelle de la relation de dispersion (III.5) étant nulle, on aura ce qui suit :

$$-\frac{6Rk^2}{5} + k^2 \cot(\alpha) - \frac{k^2 \beta H_a^2}{3} + \frac{Wk^4 R}{3} + \eta - w_i = 0 \quad (\text{III.7})$$

Pour un nombre d'onde critique nul avec absence de contrôle ($\eta = 0$), l'écoulement devient instable dès que le nombre de Reynolds atteint sa valeur critique donnée par la relation suivante :

$$R_c = \frac{5}{6} \left(\cot(\alpha) - \frac{\beta H_a^2}{3} \right) \quad (\text{III.8})$$

Si $\cot(\alpha) > \frac{\beta H_a^2}{3}$, le nombre de Reynolds critique diminue avec l'augmentation de β et H_a , les champs électrique et magnétique déstabilisent dans ce cas l'écoulement.

Si $\cot(\alpha) \leq \frac{\beta H_a^2}{3}$, l'écoulement est toujours instable.

L'orientation inverse du champ électrique a un effet stabilisant sur l'écoulement puisque le nombre de Reynolds critique augmente avec l'augmentation de β et H_a .

Nous avons choisi de nous mettre dans les situations où ces paramètres déstabilisent l'écoulement. Nous espérons alors que le contrôle imposé aura pour effet de stabiliser le système.

III.5 Courbes de stabilité marginale :

Les courbes de stabilité marginale sont obtenues en posant $w_i = 0$ dans la relation (III.4.3), elles sont généralement représentées dans le plan (R, k) . Ces courbes déterminent la limite entre les régions où les perturbations sont stables et celles où elles sont instables.

III.5.1 En l'absence de contrôle :

Nous avons examiné l'effet des champs électrique et magnétique, de l'inclinaison du plan α et de la tension de surface sur la stabilité de l'interface. Les résultats sont représentés sur les figures (III.5.1) -(III.5.4)).

On remarque que la zone de stabilité rétrécit lorsqu'on augmente les valeurs de β et Ha , de plus la valeur du Reynolds à la criticalité diminue, ce qui confirme le résultat donné en (III.1) et (fig. (III.2)). Concernant l'effet du nombre de Weber (fig. (III.3)), nous remarquons un élargissement clair de la zone de stabilité à mesure que W augmente. Cependant, il semblerait qu'il n'ait aucun effet sur le seuil du déclenchement de l'instabilité, l'écoulement devient instable à la même valeur du nombre de Reynolds critique.

Dans la figure (III.4), On peut remarquer qu'une augmentation de l'inclinaison du plan fait augmenter la zone stable. C'est aussi une confirmation du résultat donnant le seuil de l'instabilité (III.8).

III.5.2 En présence de contrôle:

L'effet du contrôle sur les courbes de stabilité marginale est représenté sur les figures (III.5), (III.6) et (III.7)). Nous avons tout d'abord fait varier le paramètre de contrôle η et fixé les valeurs de β et Ha . Nous avons remarqué un élargissement de la zone stable à mesure que η augmente. La valeur du nombre de Reynolds au seuil de l'instabilité augmente également cela veut dire que l'écoulement est plus stable. Sur les figures (III.6) et (III.7), nous avons fixé l'amplitude du contrôle et avons fait varier le nombre de Hartmann et le paramètre électrique. Les champs électrique et magnétique sont toujours déstabilisants mais la zone stable est beaucoup plus large qu'en l'absence de contrôle, de plus le nombre de Reynolds marquant le passage à l'instabilité est également plus grand.

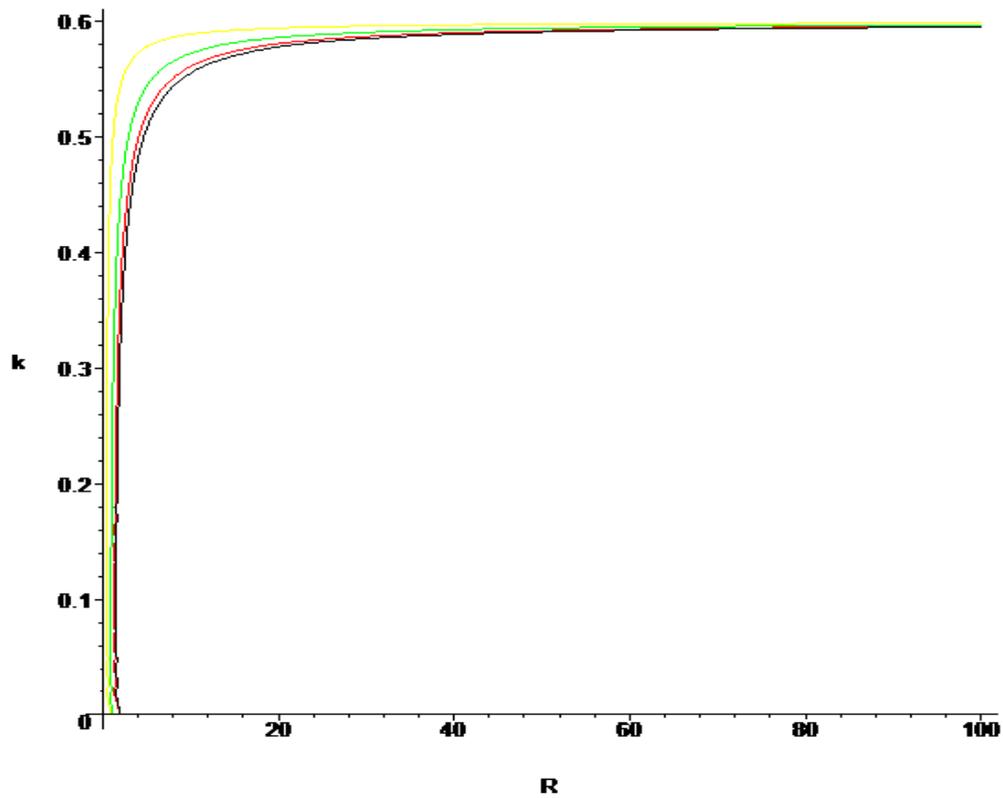


Figure (III.1) – Courbes de stabilité marginale obtenues pour $W=10, \alpha = 30^\circ, \beta = 1$ et pour différentes valeurs du paramètre Ha (noir=0.2, rouge=0.6, vert=1, Jaune=1.4)

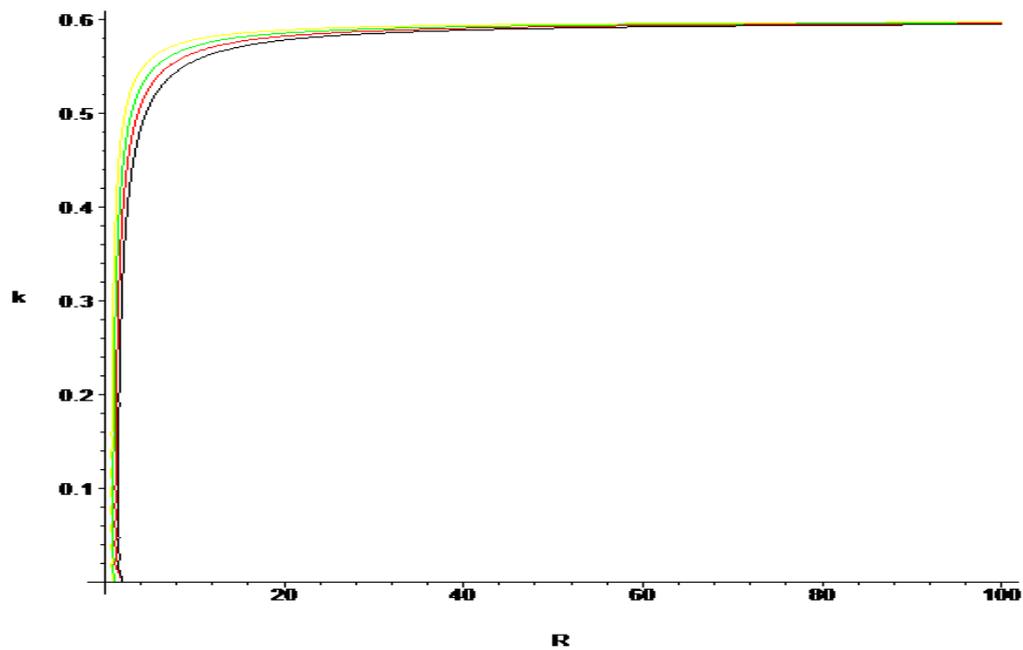


Figure (III.2) – Courbes de stabilité marginale obtenues pour $W=10, \alpha = 30^\circ, Ha = 1.4$ et pour différentes valeurs du paramètre β (noir=0.1, rouge=0.6, vert=1, Jaune=1.4)

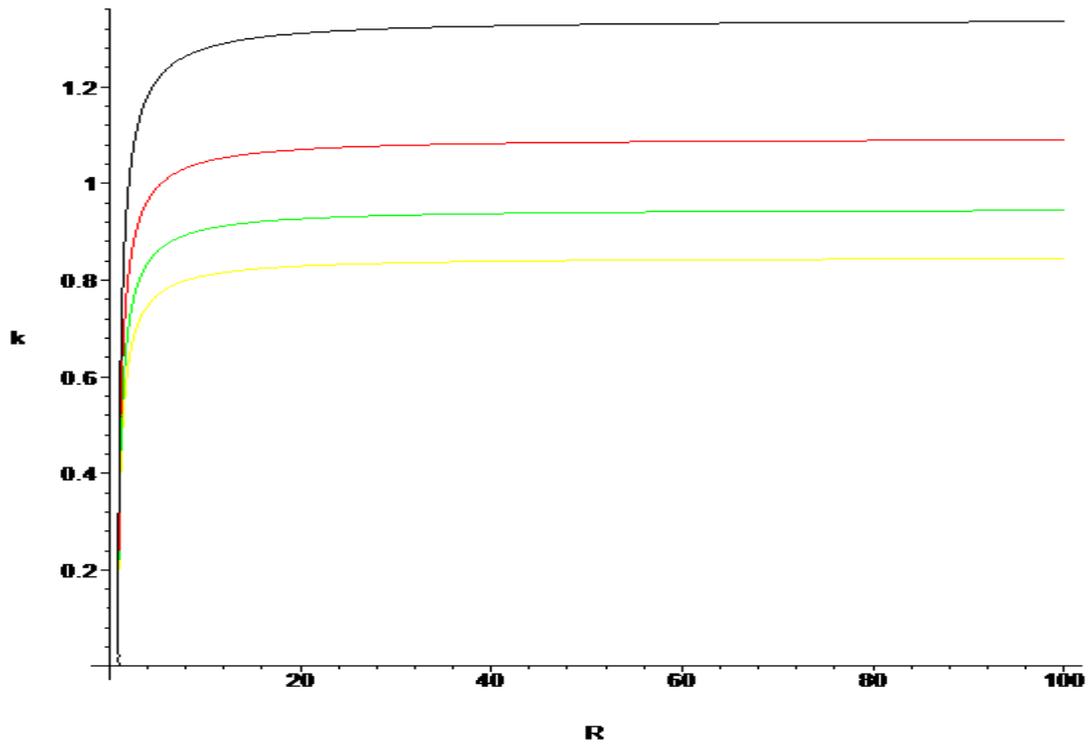


Figure (III.3) – Courbes de stabilité marginale obtenues pour $\alpha = 30^\circ, \beta = 1, Ha = 1.4$ et pour différentes valeurs du nombre de Weber W (noir=2, rouge=3, vert=4, Jaune=5).

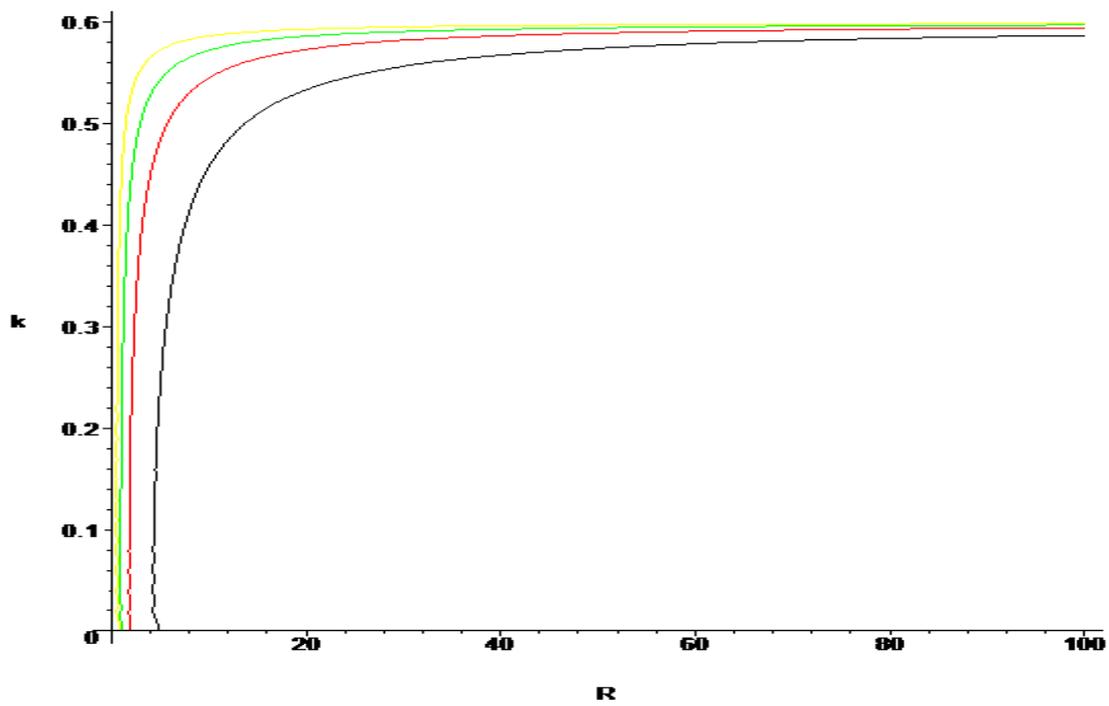


Figure (III.4) – Courbes de stabilité marginale obtenues pour $W = 10, \beta = 1, Ha = 1.4$ et pour différentes valeurs de l'angle α (noir=10°, rouge=20°, vert=30°, Jaune=40°).

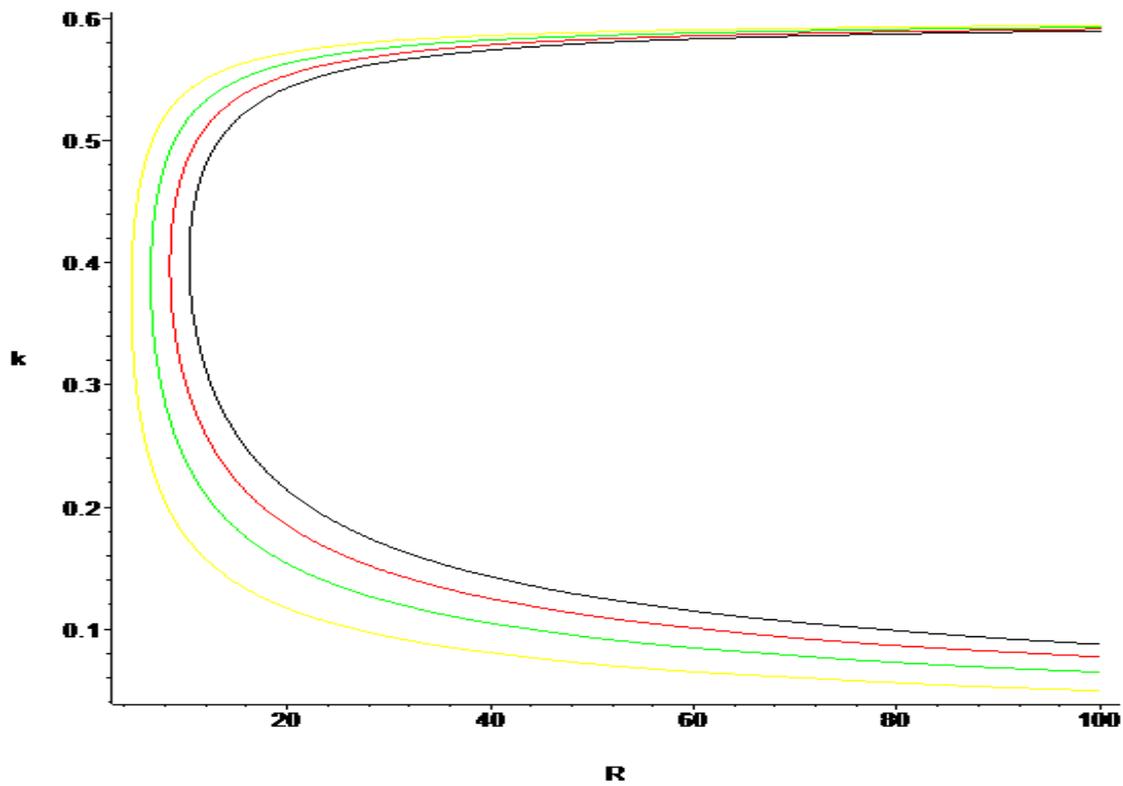


Figure (III.5) – Courbes de stabilité marginale obtenues pour $\alpha = 30^\circ, \beta = 1, W=10$
 $Ha = 1.4$ et pour différentes amplitudes du contrôle η (noir=0.9, rouge=0.7, vert=0.5, Jaune=0.3).

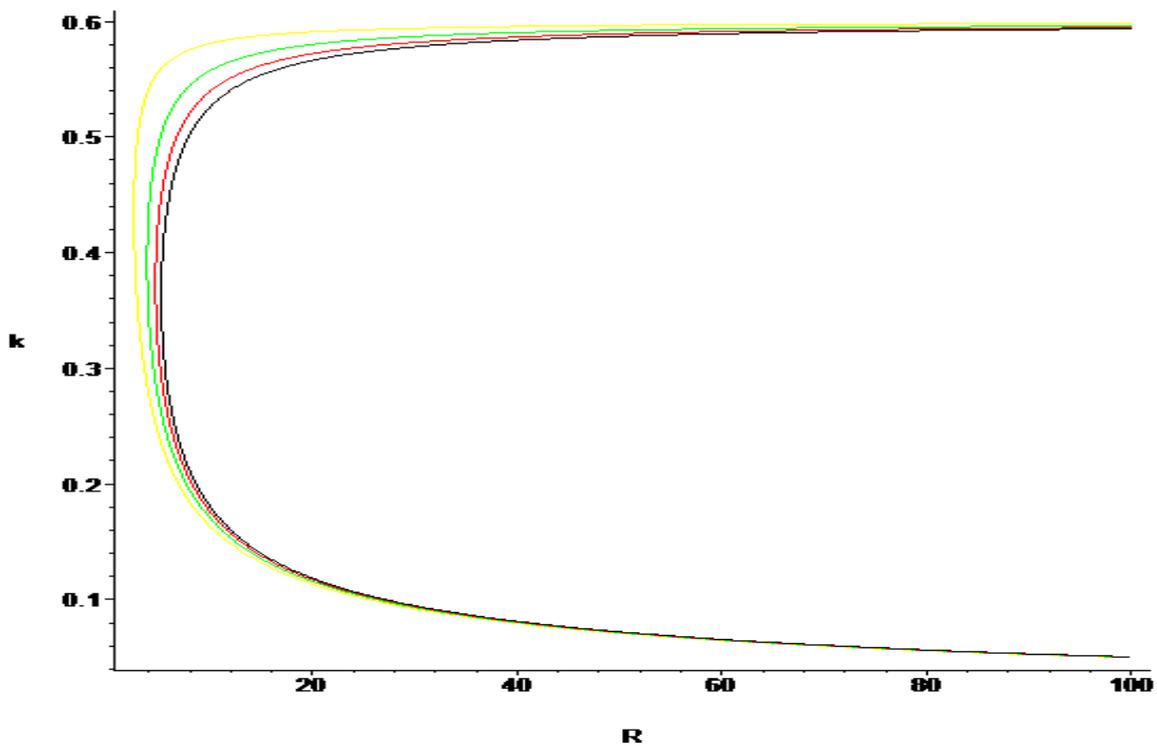


Figure (III.6) – Courbes de stabilité marginale obtenues pour $W=10, \alpha = 30^\circ, \beta = 1.4$ et $\eta = 0.3$
pour différentes valeurs du paramètre Ha (noir=0.3, rouge=1, vert=1,5,Jaune=1.2)

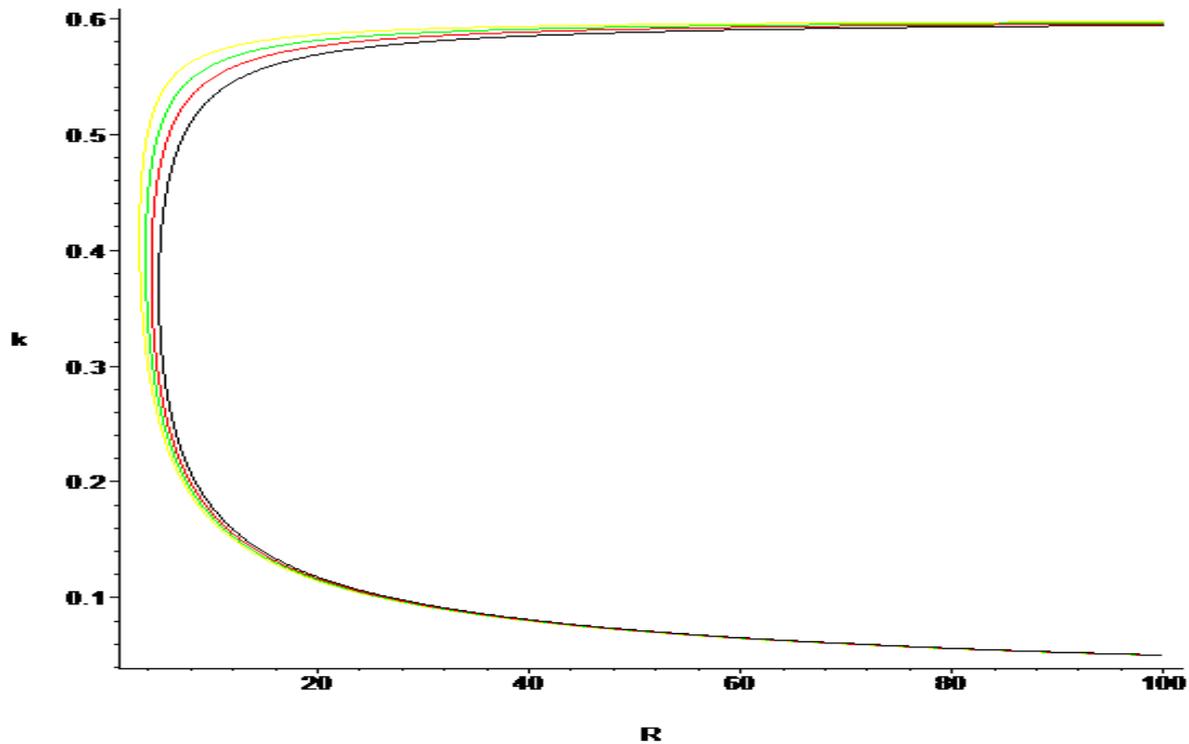


Figure (III.7) – Courbes de stabilité marginale obtenues pour $W=10, \alpha = 30^\circ Ha = 1.5$ et $\eta = 0.3$ pour différentes valeurs du paramètre de β (noir=0.1, rouge=0.6, vert=1,Jaune=1.4)

III.6. Taux d’amplification des instabilités :

Nous avons également examiné l’effet du contrôle imposé sur le taux d’amplification des perturbations. Nous utilisons toujours la relation (III.5), où nous avons fixé le nombre de Reynolds à 10. Le taux d’amplification est représenté en fonction du nombre d’onde k . Les figures qui suivent montrent l’influence des paramètres du problème sur w_i dans différents cas.

Sur la figure (III.8), nous avons représenté le taux d’amplification w_i pour différentes valeurs du paramètre contrôle η . En l’absence de contrôle, les ondes longues sont toujours instables mais dès qu’il est imposé, elles deviennent stables. De plus, la valeur de w_i diminue avec l’augmentation de η . Le maximum d’amplification est atteint pour un nombre d’onde $k = 0.4$. Le contrôle ne semble pas avoir d’effet sur le mode le plus dangereux.

Sur les figures (III.9) et(III.10), nous avons représenté le taux d’amplification w_i pour différentes valeurs des paramètres Ha et β et pour un contrôle dont l’amplitude a été fixé

à 0.2. Les champs électrique et magnétique font augmenter la valeur de w_i , il s'agit d'un résultat prévisible, le mode le plus instable est cependant moins amplifié qu'en cas d'absence de contrôle. Le même effet a été observé lorsque l'on a fait augmenter l'inclinaison du plan (fig. (III.11)). Nous remarquons également que ces dernières courbes se rejoignent toutes au mode de nombre d'onde $k = 0$ et de taux d'amplification $w_i = -0.2$.

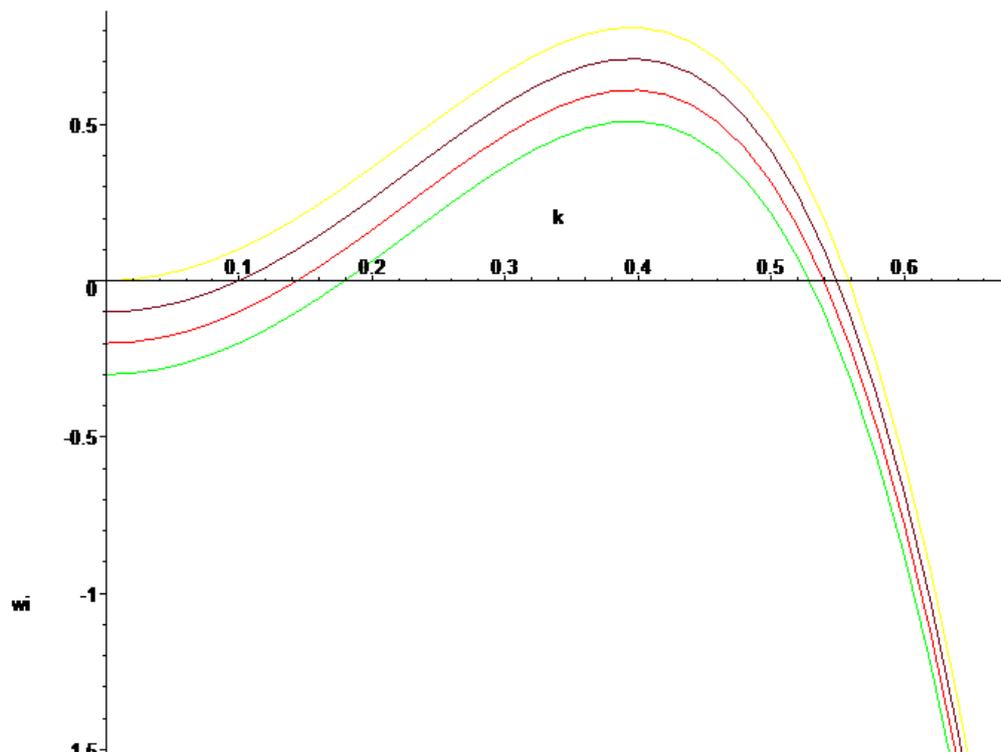


Figure (III.8) – Taux d'amplification w_i des ondes en fonction du nombre d'onde k pour $\alpha = 30^\circ, \beta = 1.5, W=10, Ha = 0.5$ Et pour différentes valeurs de contrôle η (jaune=0, noir=0.1, rouge=0.2, vert=0.3).

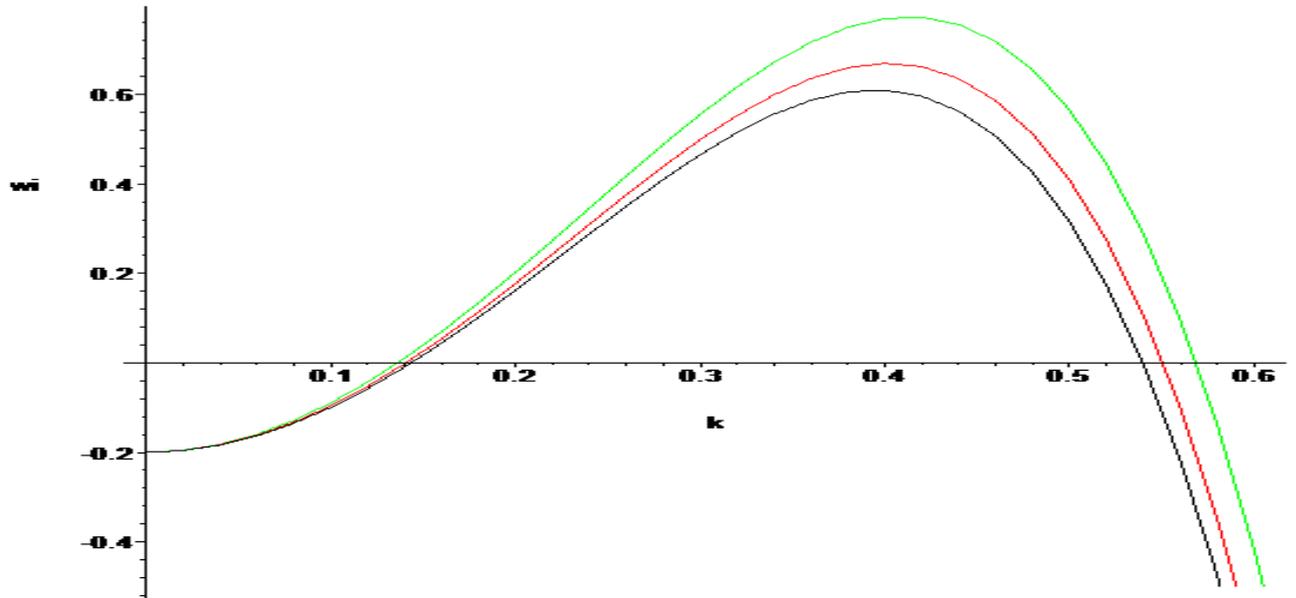


Figure (III.9) –Taux d’amplification w_i des ondes en fonction du nombre d’onde k pour $W=10, \alpha = 30^\circ, \beta = 1.5$ et $\eta = 0.2$ pour différentes valeurs du paramètre Ha (noir=0.5, rouge=1, vert=1.5)

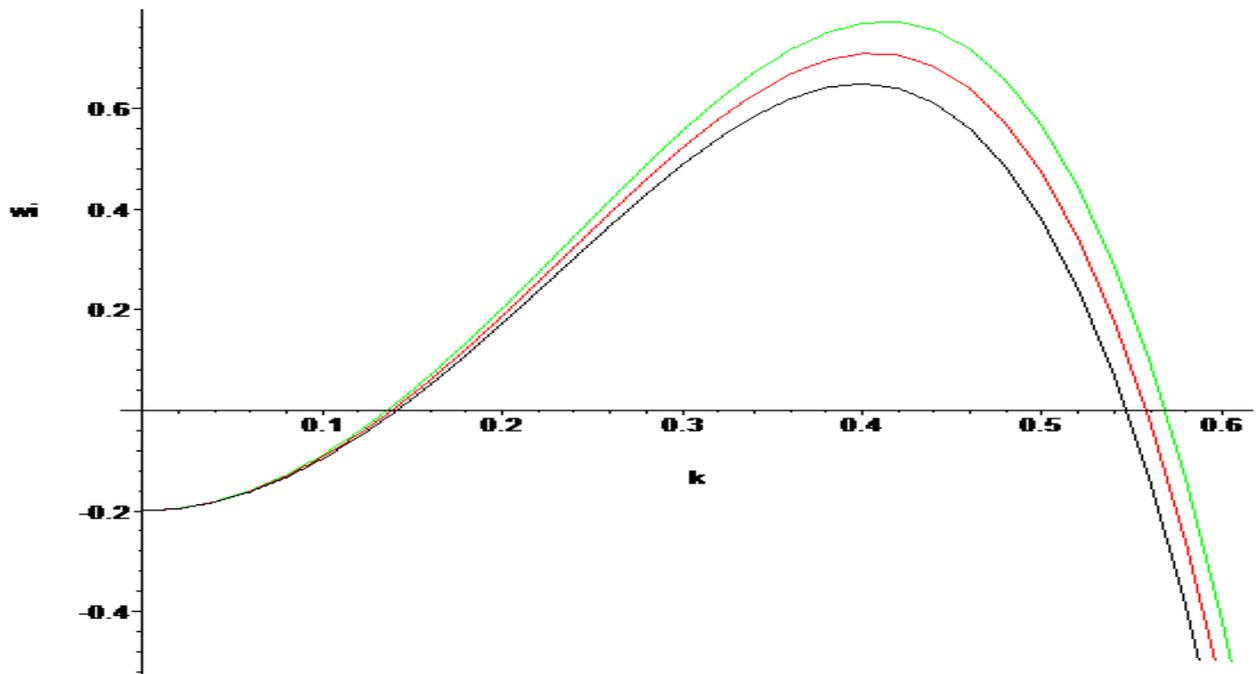


Figure (III.10) –Taux d’amplification w_i des ondes en fonction du nombre d’onde k pour $W=10, \alpha = 30^\circ, Ha = 0.5, \eta = 0.2$ et pour différentes valeurs du paramètre β (noir=0.5, rouge=1, vert=1.5)

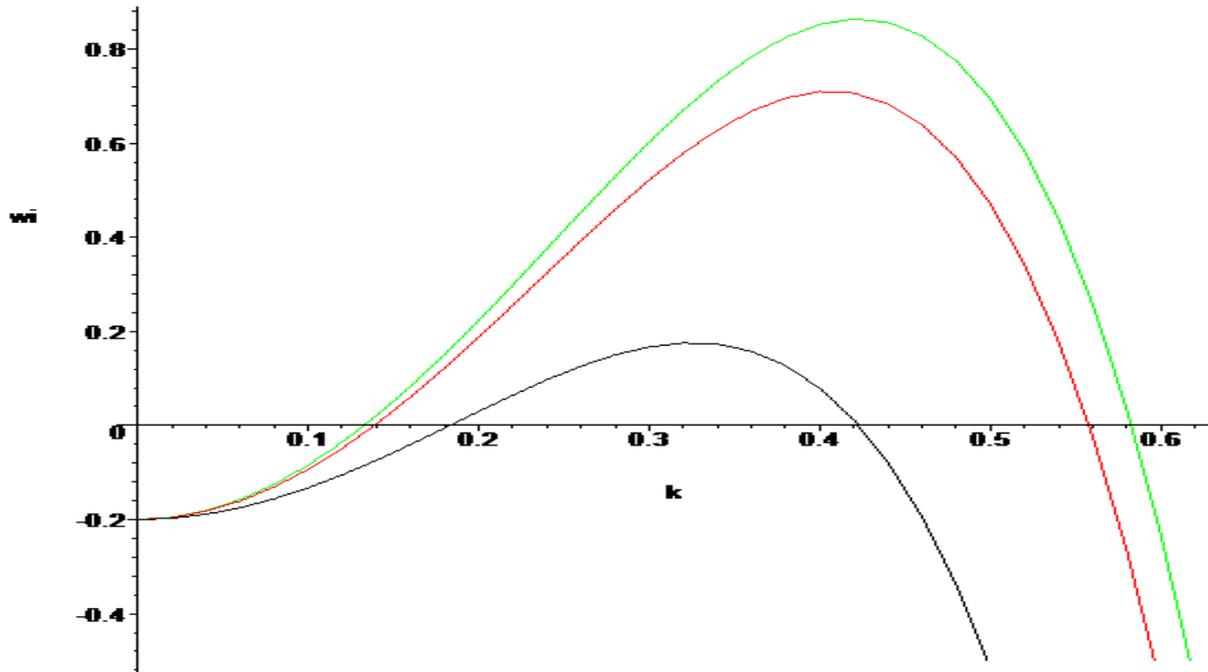


Figure (III.11) –Taux d’amplification w_i des ondes en fonction du nombre d’onde k pour $W=10$, $Ha = 1\eta = 0.2$, $\beta = 1$ et pour différentes valeurs de l’angle α (noir= 10° , rouge= 20° , vert= 30°)

Conclusion :

Dans ce chapitre, en soumettant l’écoulement à des perturbations d’amplitude infinitésimale, nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire de la solution de base préétablie dans le but d’examiner l’effet du contrôle sur la stabilité de l’interface.

Cet effet a été analysé à travers le tracé de courbes de stabilité marginale et de courbes donnant le taux d’amplification w_i des ondes en fonction de nombre d’onde k des perturbations.

Conclusion générale

Nous avons abordé dans ce mémoire de fin cycle une étude sur la stabilité d'un écoulement gravitaire d'un film mince de fluide non newtonien en présence d'un champ électromagnétique et soumis à un contrôle imposé de la paroi sur laquelle le fluide s'écoule. Le but de ce travail est de formuler un modèle à une équation décrivant l'évolution de l'interface à partir d'un développement asymptotique. Cette formulation est obtenue dans une configuration plane pour un fluide visqueux en écoulement 2D.

Afin de réaliser cette étude, une modélisation approchée des équations gouvernant l'écoulement à surface libre a été mise en œuvre. La méthodologie suivie est adaptée à l'étude des instabilités de grandes longueurs d'ondes observées dans les écoulements de films minces.

Pour répondre à la problématique posée dans ce travail, nous avons partagé ce mémoire en trois parties :

- Dans la première partie nous avons établi les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement avec les conditions aux limites, puis écrit les équations obtenue sous forme adimensionnelle. Cela nous a permis de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant le problème. Nous avons par la suite déterminé la solution de ces équations dans le cadre relativement restreint d'un écoulement permanent.
- Dans la deuxième partie, nous avons présenté les modèles théoriques déjà développés pour décrire les équations de la surface libre et citer quelques travaux antérieurs importants. Avec des approximations adaptées, nous avons pu formuler un modèle à une équation «développement asymptotique aux grandes ondes» valide aux faibles nombres de Reynolds. Le choix de l'approche utilisée a été dicté par la précision des résultats obtenus dans son domaine d'application. Les études basées sur les développements asymptotiques appliquées aux écoulements de

films liquides minces permettent de déterminer de manière précise les conditions critiques au seuil des instabilités.

- Dans la troisième partie, nous avons soumis l'écoulement à des perturbations de faible amplitude, nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire de la solution de base préétablie, puis déterminé les courbes de stabilité marginale et le taux d'amplification des ondes en fonction du nombre d'onde k . Ces courbes nous ont permis d'examiner la compétition entre les effets stabilisants et déstabilisants des paramètres contrôlant le problème. Les champs électrique et magnétique sont déstabilisants, mais grâce au contrôle imposé nous avons pu stabiliser l'écoulement ou du moins élargir la zone des modes stables.

Les résultats obtenus dans ce travail peuvent être appliqués à d'autres situations rencontrées dans l'industrie en incluant d'autres paramètres physiques :

- Le système d'équations obtenu peut être résolu numériquement sans restriction sur les nombres d'onde.
- Considérer le cas des fluides non newtoniens.
- Considérer un écoulement 3D de films de fluides newtoniens en présence d'un champ électromagnétique.

Références bibliographiques

- [1] BOUKORRAS Sarra, Etude de la stabilité d'écoulements gravitaires de films liquides, Juin 2015
- [2] D. J. Benney, Long waves on liquid films, *J. Math. Phys.*45 (1966), 150–155.
- [3] P.L Kapitza & S.P Kapitza., Wave flow of thin layers of viscous fluid. *Zh.Eksp.Teor.Fiz*
- [4] ABDELHAKIM Bensliman., cour .., universite A. mira –Bejaia décembre 2016
- [5] Christian Jean RUYER-QUIL, Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné soutenue le 29 novembre 1999
- [6] T.B. Benjamin, Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*2, 554-573, 1957.
- [7] C.-S. Yih, Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid Mech.* 27, 337-352, 1967
- [8] Hooper, A. P., Boyd, W. G. C., Shear Flow Instability At The Interface Between Two Viscous Fluids., *J. Fluid. Mech.*, 128, 507, 1983
- [9] R. E. Kelly, D. A. Goussis, S. P. Lin, et F. K. Hsu, The mechanism for surface wave instability in film flow down an inclined plane. *Phys. Fluids A* 1(5), 819-828, 1989.
- [10] M. K. SMITH, The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films, *J. Fluid Mech.* 217, 469-485, 1990.
- [11] Séverine Millet (2007) Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné Formation doctorale : MECANIQUE DES FLUIDES, École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Acoustique de Lyon
- [12] D.Y. Hsieh, Stability of a conducting fluid film flowing down inclined plane in a magnetic field. *Phys. Fluid*, 8. 1785-1791, 1965.
- [13] Ladikov Yu P., Flow stability of a conducting liquid flowing down inclined plane in the presence of a magnetic field, *Fluid Dynamics*, 1,1-4, 1966.
- [14] Korsunsky, Long waves on a film layer of conducting fluid film flowing down inclined plane in an electromagnetic field. *Eur.J.Mech. B/fluids* 18 2.295-313, 1999.
- [15] M. Amaouche, H. Ait Abderrahmane and L. Bourdache, Hydromagnetic thin film flow: Linear stability. *Physical Review* 88, 023028, 2013.
- [16] H. Ait Abderrahmane, G.H. Vastistas, Effect of uniform and constant electromagnetic fields on the stability of thin layer of liquid metal flow, *Fusion Engineering and Design*, 83, 661-666, 2008.
- [17] Millet Séverine, Rousset François, Botton Valéry & Ben Hadid Hamda, Etude De Stabilité Linéaire De L'Écoulement À Deux Couches De Films Non-newtoniens Sur Un Plan Incliné, Laboratoire De Mécanique Des Fluides Et D'acoustique - Umr Cnrs 5509 Insa - Lyon / Université Lyon 1 / Ecole Centrale De Lyon , Grenoble, 27-31 Août, 2007

- [18] Alekseenko, S.V., Nakoryakov, V.Y. and Pokusaev, B.G. 1985. Wave Formation on a Vertical Falling Liquid Film. *AIChE J.*31 : 1446-60.
- [19] Binnie, A.M. 1957. Experiments on the onset of wave formation on a film of water flowing down a vertical plane. *J. Fluid Mech.* 2 : 551-553.
- [20] Floryan, J.M., Davis, S.H. and Kelly, R.E. 1987. Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane. *Phys. Fluids* 30 : 983-9.
- [21] Carbone, F., Aubry, N., Liu, J., Gollub, J.P. and Lima, R. 1996. Space-time description of the splitting and coalescence of wave fronts in films. *Physica D* 96 (1996) 182-199
- [22] M. Boutounet. Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince. Thèse de doctorat université Toulouse Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace. Spécialité : Mathématiques appliquées et dynamique des fluides. Novembre 2011
- [23] Alice B. Thompson, Susana N. Gomes, Grigorios A. Pavliotis, and Demetrios T. Papageorgiou. Stabilising falling liquid film flows using feedback control.
- [24] Nicolas Kofman Films liquides tombants avec ou sans contre-écoulement de gaz : application au problème de l'engorgement dans les colonnes de distillation. 7 Novembre 2014
- [25] Stainthorp, F.P. & Allen, J.M. 1965. The development of ripples on the inside of a liquid film flowing inside a vertical tube. *Trans. Inst. Chem. Eng.*43 : 85-91
- [26] ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG... HYDRAULIQUE GENERALE, page 20
- [27] Liu, J. and Gollub, J.P. 1993. Onset of Spatially Chaotic Waves on Flowing Films. *Phys. Rev. Letters* 70 : 2289-92.
- [28] Liu, J., Paul, J. D. and Gollub, J.P. 1993. Measurements of the primary instabilities of films. *J. Fluid Mech.* 250 : 69-101
- [29] Nakoryakov, V.E., Pokusaev, B.G. and Alekseenko, C.B. and Orlov, V.V. 1977. *Inzh.-Fiz Zh.* 33 : 399-404.
- [30] Petviashvili, V.I. and Tselodub, O.Y. 1978. Horseshoe-shaped solitons on a flowing viscous film of fluid. *Sov. Phys. Dokl.* 23 : 117-8.
- [31] Pierson, F.W. and Whitaker, S. 1977. Some theoretical and experimental observations of the wave structure of falling liquid films. *Ind. Eng. Chem. Fundam.* 16 : 401-408

