Université Abderrahmane MIRA. BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes

Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité:

Physique Théorique

Thème

La Mécanique Analytique Avec Les Variables De Grassmann

Rédigé par

Mr : BOUANDAS Nassim

Mr : AIT BARA Samir

Soutenu le 21/09/2019 devant le Jury composé de

Nom Prénom	Grade	Qualité
GHARI Abdelhakim	Professeur (Béjaia)	Président
BELABBAS Abdelmoumene	MCB (Béjaia)	Examinateur
BELHADI Zahir	MCA (Béjaia)	Rapporteur

Année universitaire 2018/2019

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut…
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect…
Ainsi, je dédie tout simplement ce mémoire de fin d'études

A LA MEMOIRE DE MON GRAND PERE ET DE MA GRANDE MERE

<<Ali >> et << Zouina >>
J'aurais tant aimé qu'ils soient présents. Que Dieu ait vos âmes dans sa sainte miséricorde.

A MES CHERS PARENTS

A mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père.
A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

A MES CHERS FRERES

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour
Abderraouf, Yaakoub, Sid Ahmed.

A MES CHERS AMIS

Megradi Riyadh, Belghoul Abderrahim, Nouali Karim, Loudadji raouf, Batah Laarbi, Sider Ramdhan, Nasri Abdelaziz, Benmadani Maroua-imane.

A TOUS LES MEMEBRES DE MA PROMOTION

Loudadji Charaf, Aitbara samir, Amirouche Mohamed, Faid Massinissa, Louacini Dounia, Heddad Hassiba, Becheker Katia, Kecir Hanane, Guenouche Rahima, Larab Lydia

A TOUTE MA FAMILLE

<< Bouandas >> et << Saadi >> et surtout
Lounis, Lakhdar,Brahim, Smail, Djamila, Nedjima, Yasmina, Amel, Louiza, Aziza

A MES CHERS COUSINS ET COUSINES

Aya, Imane, Khaoula, Asma, Hadjer, Wail, Ramzi, Oussama, Hani

BOUANDAS Nassim

Je dédie ce modeste travail à :

mes parents et toute ma famille

mes chers amis

ma promotion

tous mes enseignants qui m'ont fait part de leur savoir tout au long de mon cursus scolaire

AITBARA Samir

Remerciements

Nous tenons à rendre grâce tout d'abord à Dieu, le Tous Puissant, de nous avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent a notre Encadrant Mr Belhadi Zahir, Maitre de conférences à l'université de Béjaia. Nous avons eu l'honneur d'être parmi vos étudiants et nous vous remercions d'accepter de nous accompagner dans la réalisation de ce projet de fin d'étude. Veuillez trouver ici, l'expression de nos gratitudes et de nos grandes estimes.

Nous voulons également remercier les membres du jury, Monsieur GHARBI Abdelhakim, Professeur à l'université de Béjaia et Monsieur BELABBAS Abdelmoumene, Maitre de conférences à l'université de Béjaia. Vous nous faites un grand honneur en acceptant de juger ce mémoire.

Nous devons un remerciement à tous les enseignants de département physique de l'université de Bejaia et spécialement les enseignants de physique théorique.

Nous tenons à remercier chaleureusement, tous nos proches et tous ceux qui, de près ou de loin, nous ont apporté leurs contributions pour accomplir ce travail.

Table des matières

Introduction

Fondée par Isaac Newton, la mécanique classique se révéla à la fois efficace et puissante pour décrire les phénomènes de la nature en termes de forces agissant sur les systèmes. Joseph-Louis Lagrange proposa une formulation équivalente, mais remarquablement élégante des équations de la mécanique classique, dans sont ouvrage célèbre « la mécanique analytique ». Cette mécanique développée ensuite principalement par Hamilton et Jacobi constitue une formulation particulièrement très puissante dans sa cohérence et l'élégance de son formalisme mathématique [1,2]. Elle est parfaitement adaptée aux développements de la physique moderne dans les domaines quantique et relativiste. Le formalisme hamiltonien en particulier joue un rôle capital si on veut avoir une description quantique des systèmes classiques [6,15].

Cependant, la mécanique analytique dans sa version standard reste impuissante devant les difficultés liées à l'étude classique des systèmes fermioniques qui n'ont pas d'équivalent classique. Nous pouvons citer les cas de l'oscillateur harmonique fermionique et de la dynamique de spin, qui sont considérés comme étant des systèmes purement quantiques.

Pour cette raison, nous considérons la mécanique pseudo-classique [7,8,9,10], c'est-à-dire la mécanique d'un système décrit par les variables de Grassmann en plus des variables canoniques ordinaires. Notre but est de définir les crochets de Poisson relatifs à ces systèmes pseudo-classiques et d'étudier leurs propriétés, afin de montrer que leurs théories quantifiées correspondent à la théorie quantique ordinaire avec des opérateurs Fermionique.

Donc, l'objectif de ce mémoire est d'utiliser l'algèbre de Grassmann pour l'étude de la mécanique analytique et de procéder à la quantification canonique des systèmes pseudo-classiques. Pour y arriver, nous organiserons notre travail en trois chapitres comme suit:

Dans le premier chapitre, nous allons brièvement rappeler certains aspects de la mécanique analytique, en particulier, la formulation lagrangienne pour des systèmes à un nombre fini de degré de liberté, puis la formulation hamiltonienne obtenue suite à une transformation de Legendre, ce qui permet de définir les crochets de Poisson et de procéder à la quantification canonique. Nous allons aussi donner un bref rappel de la mécanique quantique concernant quelques systèmes qui n'ont pas d'analogues classiques comme l'oscillateur harmonique fermionique, la dynamique de spin et l'équation de Pauli.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la mécanique analytique dans les algèbres de Grassmann, où nous allons définir en premier lieu cette algèbre et ses propriétés, puis nous entamerons l'étude des deux formalismes lagrangien et hamiltonien des systèmes pseudo-classiques dans le but de donner une définition des crochets de Poisson pour la mécanique pseudo-classique et d'énumérer leurs propriétés nécessaires à la quantification canonique de ces systèmes.

Dans le troisième chapitre, nous allons faire des applications sur quelques systèmes physique décrits à la fois par des variables canoniques ordinaires et par les variables de Grassmann, afin de donner une bonne description des systèmes classiques de fermions et de procéder à la quantification canonique de la pseudo-mécanique et ensuite la comparer à la théorie quantique ordinaire.

CHAPITRE 1 Rappels sur la mécanique analytique et la mécanique quantique

La mécanique analytique [1,2] est une reformulation de la mécanique classique de Newton élaborée progressivement durant la période 1750-1850. Cette approche de la mécanique a le même contenu physique que celle de Newton, mais elle constitue un autre point de vue avec de nouveaux concepts plus généraux et plus puissants, sur lesquels reposent une grande partie de la physique moderne.

En effet, les méthodes de la mécanique analytique dans ses formulations lagrangienne et hamiltonienne permettent de procéder à la quantification canonique des systèmes classiques afin de les étudier dans un contexte quantique où les grandeurs classiques deviennent des opérateurs hermitiens agissant sur un espace de Hilbert.

Dans ce chapitre nous allons rappeler brièvement certains aspects de la mécanique analytique et de la mécanique quantique [6,14,15].

1-1-Formalisme Lagrangien

En mécanique analytique, l'état d'un système physique à Ndegrés de liberté est déterminé par ses N coordonnées généralisées $q = (q_1(t), \ldots, q_N(t))$ et par ses N vitesses généralisées $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = (\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_N(t))$. L'espace qui caractérise l'état de ce système à un instant donnée t est l'espace des configurations $(q_1 \ldots q_N; \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_N)$. Pour étudier l'évolution de ce dernier, il faut introduire une action $S(q)$ qui est une fonctionnelle de $q(t)$ définie par l'intégrale suivante :

$$S(q)=\int_{t_i}^{t_f} L(q(t);\dot{q}\,(t);t)dt \tag{1.1}$$

où $L(q(t);\dot{q}(t);t)$ est le lagrangien du système et (t_i,t_f) sont les instants initial et final.

Le principe de moindre action (principe de Hamilton) stipule que la trajectoire physique est le chemin qui rend l'action extrémale, autrement dit, il faut que $\delta S(q)=0$. Ce principe sert à nous fournir les équations de mouvement de notre système. En effet,

$$\delta S(q)=\int_{t_i}^{t_f} L(q_i+\delta q_i;\dot{q}_i+\delta\,\dot{q}_i;t)dt-\int_{t_i}^{t_f} L(q;\dot{q}\,;t)dt$$

$$=\int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt \qquad 1\le i\le N$$

$$=\int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right)dt$$

$$=\int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right)dt$$

$$=\int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\,\delta q_i dt+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_i}^{t_f} \tag{1.2}$$

Le deuxième terme de la dernière équation est nul car les accroissements infinitésimaux s'annulant aux extrémités de la trajectoire, donc $\delta q_i(t_i)=\delta q_i\big(t_f\big)=0$, alors

$$\delta S(q)=\int_{t_i}^{t_f}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\,\delta q_i dt \tag{1.3}$$

Comme les variations $\delta q_i(t)$ sont arbitraires et indépendantes, l'action est stationnaire $(\delta S(q)=0)$ si et seulement si

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad i=1\dots.N \tag{1.4}$$

Ces équations différentielles de deuxième degré sont les équations d'Euler-Lagrange, qui régissent l'évolution de notre système en respectant le principe de moindre action.

1-2-Formalisme Hamiltonien :

Dans le formalisme de Hamilton, pour décrire un système à N degrés de liberté, il faut introduire à coté des N coordonnés généralisées$\{q_i\}$, N variables indépendantes supplémentaires notées $\{p_i\}$ appelées les moments conjugués et définis par la relation

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad i=1\dots N \tag{1.5}$$

On peut ainsi écrire les équations d'Euler-Lagrange sous la forme :

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i=1\dots N \tag{1.6}$$

La description d'un système physique n'est plus alors faite dans l'espace des configurations, mais dans un nouvel espace à *2N* dimensions appelé l'espace des phases.

L'utilisation de la transformation de Legendre permet de passer du formalisme lagrangien vers celui de Hamilton : les équations (1.5) doivent être inversées par rapport aux vitesses généralisées $\dot{q}$ afin de remplacer ces dernières par leurs expressions $\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)$ dans le Hamiltonien $H(q,p,t)$ ci-dessous.

$$H(q,p,t)=\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i(q,p,t)-L=\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i-L \tag{1.7}$$

Afin d'utiliser le principe de moindre action, remarquons d'abord que

$$L=\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i-H \tag{1.8}$$

La variation de l'action devient

$$\delta S = \delta \int_{t_i}^{t_f} L dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - H(q;p;t) \right) dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{N} \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{q}_i \delta p_i + \left(\frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i \right) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) dt + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N} [p_i \delta q_i]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \, dt$$

Comme $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ et les variations $(\delta q, \delta p)$ sont indépendantes, le seul moyen de s'assurer que $\delta S = 0$ est d'imposer à la trajectoire physique de vérifier les équations canoniques de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad i = 1 \ldots N \tag{1.9}$$

Il s'agit de *2N* équations différentielles du premier ordre qui remplacent les N équations de Lagrange dans la description des systèmes classsiques.

1-3-Les crochets de Poisson :

Les crochets de Poisson sont des expressions mathématiques introduites initialement dans le cadre de la mécanique analytique qui sont indispensables pour la quantification canonique. En effet, si on considère une grandeur quelconque $f(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N, t)$ définie dans l'espace des phases et qui dépend des coordonnées généralisées, des moments conjugués et du temps, sa dérivée totale par rapport au temps sera

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i) \qquad (1.10)$$

En utilisant (1.9), on aboutit à l'expression

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \qquad (1.11)$$

Généralement, le crochet de Poisson entre deux fonction $f(q, p, t)$ et $g(q, p, t)$ est défini par

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \qquad (1.12)$$

Dans le cas des variables dynamiques fondamentales q_i et p_i, les équations de Hamilton s'écrivent alors sous la forme plus symétrique

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases} \qquad i = 1 \dots N \qquad (1.13)$$

La définition (1.12) nous permet de calculer les crochets fondamentaux relatifs aux variables canoniques (p, q) et cela nous donne

$$\begin{cases} \{q_i, q_j\} = 0 \\ \{p_i, p_j\} = 0 \qquad i, j = 1 \dots N \\ \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \end{cases} \qquad (1.14)$$

où δ_{ij} est le symbole Kronecker $(i \neq j \Longrightarrow \delta_{ij} = 0\, ; i = j \Longrightarrow \delta_{ij} = 1)$

Il est possible d'utiliser ces crochets afin de réécrire le crochet $\{f, g\}$ sous la forme

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{N} \{q_i,q_j\}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \{q_i,p_j\}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} + \{p_i,q_j\}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \{p_i,p_j\}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} \quad (1.15)$$

De la définition (1.12), nous pouvons aussi déduire que

$$\begin{cases} \{f,q_i\} = -\dfrac{\partial f}{\partial p_i} \\ \{f,p_i\} = \dfrac{\partial f}{\partial q_i} \end{cases} \quad (1.16)$$

Partant de la même définition, si α et β sont deux réels et f, g et h sont trois fonctions qui dépend de q, p, t, on peut résumer les propriétés du crochet de Poisson dans les points suivants :

1) L'antisymétrie : $\{f,g\} = -\{g,f\} \Longrightarrow \{f,f\} = 0$
2) La linéarité : $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\}$
3) L'identité de Jacobi : $\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$ (1.17)
4) Règle de Leibniz 1 : $\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$
5) Règle de Leibniz 2 : $\left\{\frac{df}{dt},g\right\} + \left\{f,\frac{dg}{dt}\right\} = \frac{d}{dt}\{f,g\}$

1-4- La quantification canonique

En physique théorique, l'étude du comportement d'un système à l'échelle microscopique nécessite une description quantique pour comprendre un certain nombre de phénomènes. La quantification canonique opérée dans le formalisme hamiltonien, consiste à remplacer les positions q_i et les impulsions p_i définies dans l'espace des phases par les opérateurs positions $\widehat{q_i}$ et les opérateurs impulsions $\widehat{p_i}$ qui agissent dans l'espace de Hilbert appelé l'espace des états physiques de telle sorte que les crochets de Poisson soient remplacés par des commutateurs vérifiant la condition

$$[\hat{f},\hat{g}] = \hat{f}\,\hat{g} - \hat{g}\hat{f} = i\hbar\widehat{\{f,g\}} \quad (1.18)$$

où $f(q,p,t)$ et $g(q,p,t)$ sont des grandeurs classiques et $\hat{f} = f(\hat{q},\hat{p},t)$ et $\hat{g} = g(\hat{q},\hat{p},t)$ sont des opérateurs hermétiques. $\widehat{\{f,g\}}$ Est l'opérateur associé au crochet de Poisson $\{f,g\}$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.

Avec la condition (1.18), les commutateurs satisfont toutes les propriétés énumérées dans (1.17). Cette manière de faire les choses n'est pas aussi simple qu'il en paraît, elle se heurte à un problème majeur lié à l'ordre des opérateurs qui ne commutent pas en général, heureusement qu'une grande partie des systèmes physiques est décrite d'une façon simple. Dans le cas particulier les 2*N* opérateurs $\widehat{p_j}$ et $\widehat{q_i}$ correspondantes aux *2N* variables fondamentales q_i et p_j obéissent aux relations de commutations

$$\left[\widehat{q_i},\widehat{p_j}\right] = i\hbar\delta_{ij} \qquad \left[\widehat{q_i},\widehat{q_j}\right] = \left[\widehat{p_i},\widehat{p_j}\right] = 0 \qquad i,j = 1 \dots N \tag{1.19}$$

Dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs évoluent dans le temps tandis que l'état $|\psi\rangle_H$ du système reste constant. L'évolution temporelle d'un opérateur $\hat{A}$ dans cette représentation est régie par l'équation

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{A},\widehat{H}\right] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}$$

où $\widehat{H}$ est l'opérateur Hamiltonien du système. On en déduit facilement les équations de Heisenberg

$$\frac{d\widehat{q_i}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\widehat{q_i},\widehat{H}\right] \quad i = 1 \dots N \tag{1.20}$$

$$\frac{d\widehat{p_i}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\widehat{p_i},\widehat{H}\right] \quad i = 1 \dots N \tag{1.21}$$

Dans la représentation de Schrödinger, les opérateurs ne dépendent pas du temps, alors que l'état $|\psi(t)\rangle_S$ varie dans le temps en obéissent à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_S = \widehat{H}|\psi(t)\rangle_S \tag{1.22}$$

Ces deux représentations sont mathématiquement différentes mais physiquement équivalentes. Elles sont liées par une transformation unitaire et conduisent aux mêmes prédictions sur le plan expérimental.

1-5- L'oscillateur harmonique fermionique

En physique théorique l'oscillateur harmonique est le système le plus simple et le plus important. De façon générale, on peut définir un oscillateur harmonique comme étant un système périodique sinusoïdal avec une amplitude et une fréquence indépendantes des conditions initiales.

L'oscillateur harmonique quantique est le résultat de la quantification d'un oscillateur harmonique classique décrit par le hamiltonien $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ où $\{x, p_x\} = 1$. En effet, après quantification, le hamiltonien devient l'opérateur

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 \qquad avec \qquad [\hat{X}, \hat{P}_x] = i\hbar \tag{1.23}$$

Pour étudier ce système, il est utile d'introduire les opérateurs de créations et d'annihilations

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{X}}{x_0} + i\frac{x_0}{\hbar}\hat{P}_x\right), \qquad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{X}}{x_0} - i\frac{x_0}{\hbar}\hat{P}_x\right) \tag{1.24}$$

où $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Ces derniers vérifient les relations de commutation

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad ; \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0\,. \tag{1.25}$$

Maintenant, le hamiltonien peut se mettre sous la forme

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}[\hat{a}^+, \hat{a}]_+ = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+)$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.26}$$

et $[\hat{a}^+, \hat{a}]_+ = \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+$ est l'anti-commutateur de $\hat{a}$ et $\hat{a}^+$.

Les états propres $\{|n\rangle\}$ d'un oscillateur harmonique vérifient les relations

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle \tag{1.27}$$

$$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases} \qquad n \in \{0,1,2,\dots\} \tag{1.28}$$

On en déduit que l'énergie d'un oscillateur harmonique bosonique est $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ et que l'action de $\hat{a}$ sur $|0\rangle$ est nulle ($\hat{a}|0\rangle = 0$). Les différents niveaux sont reliés au niveau fondamental par l'équation $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle$.

Contrairement à l'oscillateur bosonique, l'oscillateur fermionique n'a pas d'équivalent classique. Il est introduit directement avec un hamiltonien qui s'écrit sous la forme

$$\hat{H}_F = \frac{\hbar\omega}{2}\left[\hat{b}^{+},\hat{b}\right] = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{b}^{+}\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^{+}\right)$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{b}^{+}\hat{b} - \frac{1}{2}\right) \tag{1.29}$$

où $\hat{b}$ et $\hat{b}^{+}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation fermioniques qui obéissent aux relations d'anti-commutations

$$\left\{\hat{b},\hat{b}^{+}\right\} = 1 \tag{1.30}$$

$$\left\{\hat{b},\hat{b}\right\} = \left\{\hat{b}^{+},\hat{b}^{+}\right\} = 0 \tag{1.31}$$

Dans le cas fermionique, le hamiltonien présente juste deux niveaux $|n\rangle \in \{|0\rangle,|1\rangle\}$. L'action de ces opérateurs sur un état propre $|n\rangle$ de $\hat{H}_F$ est donnée par

$$\begin{cases} \hat{b}|n\rangle = n|n-1\rangle \\ \hat{b}^{+}|n\rangle = (1-n)|n+1\rangle \end{cases} \tag{1.32}$$

Explicitement,

$$\hat{b}|0\rangle = 0 \quad ; \quad \hat{b}^{+}|0\rangle = |1\rangle \quad ; \quad \hat{b}|1\rangle = |0\rangle \quad ; \quad \hat{b}^{+}|1\rangle = 0 \tag{1.33}$$

L'état fondamental $|0\rangle$ et le niveau excité $|1\rangle$ satisfont le problème aux valeurs propres

$$\hat{H}_F|0\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \qquad ; \qquad \hat{H}_F|1\rangle = +\frac{\hbar\omega}{2}|1\rangle$$

Les opérateurs $\hat{b}$ et $\hat{b}^+$ admettent également une représentation matricielle

$$\hat{b} = \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \hat{b}^+ = \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.34)$$

où

$$\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_1 \pm i\hat{\sigma}_2 \qquad ; \qquad [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = 4\hat{\sigma}_3 \qquad (1.35)$$

sachant que $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ sont les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1.36)$$

1-6- La dynamique du spin quantique

Comme la masse et la charge électrique sont des propriétés internes des particules, la physique quantique nous enseigne que le spin est aussi unes des propriétés intrinsèques de ces particules qui n'a pas d'équivalent classique. Sa mesure donne des valeurs discrètes et elle est soumise au principe d'incertitude. Nous pouvons classer les particules selon le nombre quantique de spin : les bosons ont un spin entier, contrairement aux fermions ayant un spin demi-entier.

Le spin est un moment cinétique intrinsèque décrit par un opérateur vectoriel hermitien noté $\hat{S}$. Ses trois composantes $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$sont des observables physiques vérifiant les relations de commutations suivantes :

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y \qquad (1.37)$$

En présence d'un champ magnétique $\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$, la dynamique de spin obéit aux équations de Heisenberg :

$$\dot{\hat{S}}_x = \frac{1}{i\hbar}[\hat{S}_x, \hat{H}], \quad \dot{\hat{S}}_y = \frac{1}{i\hbar}[\hat{S}_y, \hat{H}], \quad \dot{\hat{S}}_z = \frac{1}{i\hbar}[\hat{S}_z, \hat{H}] \qquad (1.38)$$

où le hamiltonien de l'interaction est donné par

$$\hat{H} = -\omega\hat{\vec{S}}.\vec{B} = -\omega(\hat{S}_x B_x + \hat{S}_y B_y + \hat{S}_z B_z) \qquad (1.39)$$

avec ω représentant le rapport géomagnétique.

A l'aide des relations de commutations précédentes, on démontre facilement que

$$\dot{\hat{S}}_x = \omega\left(-B_y\hat{S}_z + B_z\hat{S}_y\right) \qquad (1.40)$$

$$\dot{\hat{S}}_y = \omega\left(B_x\hat{S}_z - B_z\hat{S}_x\right) \qquad (1.41)$$

$$\dot{\hat{S}}_z = \omega\left(-B_x\hat{S}_y + B_y\hat{S}_x\right) \qquad (1.42)$$

Sous forme vectorielle

$$\frac{d\hat{\vec{S}}}{dt} = -\omega(\vec{B} \wedge \hat{\vec{S}}) \qquad (1.43)$$

Nous avons ainsi obtenu l'équation d'évolution de l'opérateur de spin dans l'image de Heisenberg.

1-7- L'équation de Pauli

Elaborée par Wolfgang Pauli en 1927, cette équation est considérée comme une reformulation non relativiste de l'équation de Schrödinger pour les particules de spin $1/2$ pour prendre en compte l'interaction du spin de la particule avec un champ électromagnétique externe.

Classiquement, une particule de masse m et de charge q se déplaçant en présence d'un champ électromagnétique $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ va subir la force de Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$, d'où l'équation de mouvement

$$m\vec{a} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \qquad (1.44)$$

où $\vec{v}$ est la vitesse et $\vec{a}$ est l'accélération. Le lagrangien associé à cette équation s'écrit

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q\big(\vec{v}.\vec{A} - V\big) \tag{1.45}$$

sachant que $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ est le potentiel vecteur et $V = V(\vec{r}, t)$ est le potentiel scalaire vérifiant les relations $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{B}$ et $-\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$.

Les moments conjugués obtenus à partir du lagrangien précédent sont $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ et le hamiltonien classique s'écrit donc sous la forme

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qU \tag{1.46}$$

Après quantification, le hamiltonien classique devient l'opérateur hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{P}} - q\hat{\vec{A}})^2 + q\hat{U} \tag{1.47}$$

où $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, $V = U(\vec{r}, t)$ et $\hat{\vec{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}$. L'équation de Schrödinger sera alors

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \big((i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2 + qU\big)\psi \tag{1.48}$$

Examinons maintenant le cas d'une particule chargée avec spin $1/2$ ayant un moment magnétique intrinsèque $\vec{\mu}_s$ dû au moment cinétique du spin $\vec{S}$. Le tableau ci-dessous montre les moments magnétique de quelques particules et leurs facteurs de Landé g.

Particule	Moment magnétique	Facteur de Landé
Electron	$\vec{u}_S = -g\frac{\lvert e\rvert}{2m_e}\vec{S}$	$g = 2.002319314$
Proton	$\vec{u}_S = g\frac{\lvert e\rvert}{2m_p}\vec{S}$	$g = 5.5883$
Neutron	$\vec{u}_S = g\frac{\lvert e\rvert}{2m_n}\vec{S}$	$g = -3.8263$

En présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, le moment magnétique de spin va interagir avec ce dernier à l'aide du terme d'interaction

$$H_I = -\vec{u}_S.\overrightarrow{B} \tag{1.49}$$

Donc le hamiltonien du spin ½ en présence d'un champ magnétique va s'écrire

$$\hat{H}_{Pauli} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{P}} - q\vec{A}\right)^2 + qU - \vec{\mu}_s.\vec{B} \tag{1.50}$$

d'où l'équation de Pauli

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_{Pauli}\psi \qquad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{P}} - q\vec{A}\right)^2 + qU - \vec{\mu}_s.\vec{B}\right)\psi \tag{1.51}$$

où $\psi = \begin{bmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{bmatrix}$ est un spineur à 2 composantes et l'opérateur de spin $\vec{S}$ est représenté comme suit :

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x \quad , \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y \quad , \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z$$

sachant que $\vec{\sigma} = \left(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\right)$ est le vecteur des matrices de Pauli. Explicitement,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}\left(i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + qU(\vec{r},t) - g\frac{q}{2m}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}.\vec{B}(\vec{r},t)\right)\psi \tag{1.52}$$

où $\vec{\sigma}.\vec{B} = \sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z = \begin{bmatrix}B_z & B_x - iB_y\\ B_x + iB_y & -B_z\end{bmatrix}$. Cette équation est la limite non relativiste de l'équation de Dirac.

CHAPITRE 2 La mécanique analytique dans les algèbres de Grassmann

Dans ce chapitre, nous allons développer des outils mathématiques sur les algèbres de Grassmann afin de généraliser la mécanique analytique aux systèmes décrits par des variables qui anti-commutent afin de procéder à leur quantification canonique [7,8,9,10,12,13].

2-1- Introduction aux algèbres de Grassmann

2-1-1- Définitions

Une algèbre de Grassmann Gr est un espace vectoriel sur les corps réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$, formée par l'unité et l'ensemble de générateurs $\{\theta_\alpha\}$ avec $\alpha = 1, \dots, M$, dont les produits obéissent aux relations d'anti-commutation [4,5,11] :

$$[\theta_\alpha, \theta_\beta]_+ \equiv \theta_\alpha\theta_\beta + \theta_\beta\theta_\alpha = 0 \Longrightarrow \theta_\alpha\theta_\beta = -\theta_\beta\theta_\alpha \qquad \forall\, \alpha, \beta \tag{2.1}$$

Cela implique notamment que pour tout α donné : $\theta_\alpha^2 = 0$ et que toute puissance d'un nombre de Grassmann supérieure à 1 nous donne 0. L'algèbre de Grassmann est une algèbre associative de dimension 2^M où tous les éléments peuvent s'écrire sous forme de combinaisons linéaires des éléments de la base

$$\{1\,;\, \theta_\alpha\,;\, \theta_\alpha\theta_\beta\,;\, \theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma\,;\, \theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma\theta_\rho\,;\, \dots\,;\theta_1\theta_2\dots\theta_M\} \tag{2.2}$$

Autrement dit, tous les éléments d'une algèbre de Grassmann sont des polynômes formés par les générateurs $\{\theta_\alpha\}$ avec $\alpha = 1, \dots, M$.

Les fonctions des variables de Grassmann ont un développement de Taylor fini. Donc pour $M = 1$, il n'y a qu'une seule variable de Grassmann et une fonction arbitraire s'écrit sous la forme

$$f(\theta_1) = f_0 + f_1\theta_1 \tag{2.3}$$

où $f_0$et f_1 sont considérés comme des nombres réels ou complexes. De même pour $M = 2$, nous avons

$$f(\theta_1, \theta_2) = f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_{12}\theta_1\theta_2 \tag{2.4}$$

Pour M quelconque, la forme générale de f est

$$f = f_0 + f_\alpha\theta_\alpha + f_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta + f_{\alpha\beta\gamma}\theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma + \cdots + f_{12\ldots M}\theta_1\theta_2 \ldots \theta_M \tag{2.5}$$

C'est une somme de 2^M termes avec les coefficients$f_0, f_\alpha, \ldots, f_{12\ldots M}$, où chaque terme est un produit des θ_α.

Nous constatons rapidement que les éléments d'une algèbre de Grassmann peuvent s'écrire comme étant la somme d'un polynôme avec des puissances paires et d'un autre polynôme ayant des puissances impaires :

$$f(\theta_\alpha) = f^{(0)}(\theta_\alpha) + f^{(1)}(\theta_\alpha) \tag{2.6}$$

On dit que la parité de $f^{(0)}$ est égale à 0 tandis que celle de $f^{(1)}$ est égale à 1. En général, les nombres de Grassmann ayant juste des termes avec des puissances pairs des θ_α sont appelés des nombres de Grassmann pairs ou des nombres bosoniques ; et les nombres de Grassmann avec des termes ayant un nombre de θ_α impaire sont appelés des nombres de Grassmann impairs ou des nombres fermioniques. Donc, un nombre bosonique B a une parité P_B=0 et un nombre fermionique Fa une parité P_F=1.

A présent, essayons de voir explicitement l'intérêt d'introduire la parité. En effet, si A et C sont des nombres de Grassmann, alors

$$AC = (-)^{P_A P_C} CA \tag{2.7}$$

En particulier, si B_1 et B_2 sont bosoniques et F_1 et F_2 sont fermioniques, alors

$$\begin{cases} B_1B_2 = B_2B_1 \\ F_1F_2 = -F_2F_1 \\ F_1B_1 = B_1F_1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} [B_1, B_2] = B_1B_2 - B_2B_1 = 0 \\ [F_1, F_2]_+ = F_1F_2 + F_2F_1 = 0 \\ [F_1, B_1] = F_1B_1 - B_1F_1 = 0 \end{array} \tag{2.8}$$

Les nombres bosoniques commutent entre eux, au moment où les nombres fermioniques anti-commutent entre eux et nous avons aussi les nombres bosoniques qui commutent avec les nombres fermioniques. Prenons par exemple $B = \theta_1\theta_2$ et $F = \theta_3$, ensuite calculons leur commutateur :

$$[F, B] = FB - BF = \theta_3\theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_2\theta_3 = \theta_3\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3\theta_2 = \theta_3\theta_1\theta_2 - \theta_3\theta_1\theta_2 = 0.$$

2-1-2- Conjugaison complexe

Par analogie à la conjugaison des nombres complexes et la conjugaison hermitienne des opérateurs, la conjugaison des nombres de Grassmann vérifie les propriétés suivantes : $\forall A_1, A_2 \in Gr \; et \; \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \bar{A}_1 \in Gr \\ \overline{A_1 A_2} = \bar{A}_2 \, \bar{A}_1 \\ \overline{\lambda A_1 + \mu A_2} = \lambda^* \bar{A}_1 + \mu^* \bar{A}_2 \\ \bar{\bar{A}}_1 = A_1 \end{cases} \tag{2.9}$$

où λ^* et μ^* sont les conjugués complexes de λ et μ.

Les nombres de Grassmann peuvent être des réels ou complexes. Un nombre réel satisfait

$$\bar{\theta} = \theta \tag{2.10}$$

Par contre, un nombre imaginaire (complexe pur) satisfait

$$\bar{\theta} = -\theta \tag{2.11}$$

Le produit de deux variables de Grassmann réelles est purement imaginaire

$$\overline{\theta_1 \theta_2} = \theta_2 \theta_1 = -\theta_1 \, \theta_2 \tag{2.12}$$

C'est $i\theta_1\theta_2$ qu'est réel, car

$$\overline{i\theta_1 \theta_2} = -i\theta_2\theta_1 = i\theta_1\theta_2 \tag{2.13}$$

Les variables complexes de Grassmann η et $\bar{\eta}$ peuvent toujours être décomposées en deux variables réelles de Grassmann θ_1 et θ_2 par la relation

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2), \qquad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2) \tag{2.14}$$

La quantité $H = \eta\bar{\eta}$ est réelle et paire. En effet,

$$\bar{H} = \overline{\eta\bar{\eta}} = \bar{\bar{\eta}}\bar{\eta} = \eta\bar{\eta} = H = i\theta_2\theta_1 \tag{2.15}$$

Ces définitions sont utiles pour les applications physiques, car on exige que les variables réelles deviennent des opérateurs hermitiens lors de la quantification.

2-1-3- Dérivation dans les algèbres de Grassmann

Dans les algèbres de Grassmann, la dérivation habituelle serait incohérente avec le caractère non commutatif de cette algèbre. La dérivée à gauche $\frac{\partial f}{\partial \theta_\alpha}$ d'une fonction des variables de Grassmann du type (2.4) ramène θ_α à gauche de son développement de Taylor en utilisant l'anti-commutativité, ensuite le supprimer. Par exemple, si $f(\theta_1, \theta_2) = f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_{12}\theta_1\theta_2$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = f_1 + f_{12}\theta_2 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2}(f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 - f_{12}\theta_2\,\theta_1) = f_1 - f_{12}\theta_1 \tag{2.17}$$

Par analogie, nous pouvons obtenir la dérivée à droite dans les algèbres de Grassmann en commutant θ_α vers la droite avant de le supprimer, alors

$$\frac{\partial_D f}{\partial \theta_1} = f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_1} = (f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 - f_{12}\theta_2\,\theta_1)\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_1} = f_1 - f_{12}\theta_2 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial_D f}{\partial \theta_2} = f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_2} = (f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_{12}\,\theta_1\theta_2)\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_2} = f_2 + f_{12}\theta_1 \tag{2.19}$$

Ces deux dérivées à gauche et à droite sont liées par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_\alpha} = -(-)^{P_f}\, f\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha} \tag{2.20}$$

Comme les puissances supérieures à un des variables de Grassmann sont nulles, l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$ est de carré nul

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha}\right)^2 = 0 \tag{2.21}$$

Les opérateurs de dérivations satisfont aux relations d'anti-commutations

$$[\theta_\alpha, \theta_\beta]_+ = 0 \;\; = \theta_\alpha\theta_\beta + \theta_\beta\theta_\alpha = 0 \tag{2.22}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha},\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\right]_+ = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} + \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} = 0 \tag{2.23}$$

$$\left[\theta_\alpha,\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\right]_+ = \theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} + \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\theta_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \tag{2.24}$$

La dérivée de Grassmann d'une fonction bosonique est une fonction fermionique tandis que la dérivée d'une fonction fermionique est une fonction bosonique, car la dérivation fait diminuer de un (1) le degré de chaque monôme.

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial\theta_\alpha}\right) = 1 - P(f) \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial B}{\partial\theta_\alpha}\ est\ impair \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial\theta_\alpha}\ est\ pair \tag{2.26}$$

La différentielle totale ainsi que la variation d'une fonction des variables de Grassmann s'obtiennent comme suit :

$$df = d\theta_\alpha\frac{\partial_G f}{\partial\theta_\alpha} = \frac{\partial_D f}{\partial\theta_\alpha}d\theta_\alpha \qquad\qquad \delta f = \delta\theta_\alpha\frac{\partial_G f}{\partial\theta_\alpha} = \frac{\partial_D f}{\partial\theta_\alpha}\delta\theta_\alpha \tag{2.27}$$

où $d\theta_\alpha$ et $\delta\theta_\alpha$ sont aussi des nombres de Grassmann qui anti-commutent entre eux.

A présent, parlons un peu de l'intégration avec les variables grassmanniennes qui est défini comme étant une opération identique à la différentiation [11]

$$\int d\theta_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \tag{2.28}$$

Nous vérifions que cette opération a les propriétés formelles que l'on attend de l'intégration

i) L'opération est linéaire.

ii) L'intégrale de la dérivée totale s'annule.

iii) Le résultat suite à l'intégration sur une variable ne dépend plus de cette variable.

iv) Un facteur dans un produit qui ne dépend pas de variable d'intégration peut être factorisé devant le signe d'intégration.

Le choix d'utiliser le symbole d'intégration ou la différentiation dépend du contexte, et permet de construire pour les fermions un formalisme tout à fait parallèle au formalisme des bosons (intégrales de chemin).

2-2- Principe de moindre action dans les algèbres de Grassmann et le formalisme hamiltonien

Le but de cette partie est d'étendre le formalisme canonique à un système pseudo-classique décrit par des variables ordinaires[1] $q_i(t)$ $(i = 1, \dots, N)$ et par les variables de Grassmann $\theta_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \dots, M)$ qui sont réelles. La dynamique d'un tel système est déterminée par le principe de moindre action $\delta S = 0$ où l'action est donnée par

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt \qquad , \qquad L = L\big(q_i, \dot{q}_i, \theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha, t\big) \tag{2.29}$$

sachant que
$$\begin{cases} q = \{q_i\} = (q_1 \dots q_N) \\ \theta = \{\theta_\alpha\} = (\theta_1 \dots \theta_M). \end{cases}$$

Pour décrire des systèmes physiques, on exige du lagrangien d'être réel et bosonique (pair), ce qui veut dire qu'il va commuter avec les variables de Grassmann tandis que ses dérivées partielles par rapport à ces variables vont être de parité fermionique.

Afin d'appliquer le principe variationnel, il faut savoir donc que la variation de notre lagrangien suite aux variations δq_i et $\delta\dot{\theta}_\alpha$ est

$$\delta L = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \delta\dot{\theta}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \tag{2.30}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \delta L dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \delta\dot{\theta}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \right) dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left(\delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}(\delta q_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \frac{d}{dt}(\delta\theta_\alpha) \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \right) dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left[\delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \right) - \delta\theta_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \right) \right] dt
\end{aligned}$$ [2]

[1] Ces variables ont un caractère bosonique.

Finalement,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left[\delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) + \delta\theta_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}\right)\right)\right] dt + \left[\delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]_{t_i}^{t_f} + \left[\delta\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}\right]_{t_i}^{t_f}$$

Les deux derniers termes de l'équation précédente sont nuls car les accroissements infinitésimaux s'annulent aux extrémités de la trajectoire. Comme les variations δq_i et $\delta\theta_\alpha$ sont indépendantes, l'action sera stationnaire si et seulement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i \in \{1, \dots, N\} \tag{2.31}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} = 0 \qquad \alpha \in \{1, \dots, M\}. \tag{2.32}$$

Il s'agit des équations de mouvement d'Euler-Lagrange pour un système pseudo-classique. Nous remarquons que les deux types d'équations ont la même forme.

Afin de passer au formalisme hamiltonien, nous allons définir les moments conjugués par les relations

$$\begin{cases} p^i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ \pi^\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \end{cases} \tag{2.33}$$

On voit bien que π^α est un nombre de Gassmann fermionique (impair). Maintenant, les équations d'Euler-Lagrange ci-dessus vont s'écrire

$$\begin{cases} \dot{p}^i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i} \\ \dot{\pi}^\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} \end{cases} \tag{2.34}$$

[2] La convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés est adoptée, sachant que dans ce mémoire, il n'y a aucune différence entre les indices en bas et les indices en haut.

Une fois que les moments conjugués sont inversés par rapport aux vitesses, la transformation de Legendre nous permet de construire le hamiltonien de notre système

$$H(q_i, p_i, \theta_\alpha, \pi_\alpha) = \dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - L \tag{2.35}$$

Ce qui montre bien que ce dernier est une grandeur bosonique (pair). Pennons la différentielle des deux membres de cette égalité

$$dq_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + d\theta_\alpha \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} + dp_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + d\pi_\alpha \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} + dt \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$= d\dot{q}_i p^i + \dot{q}_i dp^i + d\dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha + \dot{\theta}_\alpha d\pi^\alpha - dq_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - d\theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} - d\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - d\dot{\theta}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} - dt \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= d\dot{q}_i p^i + \dot{q}_i dp^i + d\dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - d\pi^\alpha \dot{\theta}_\alpha - dq_i \dot{p}^i - d\theta_\alpha \dot{\pi}^\alpha - d\dot{q}_i p^i - d\dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - dt \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \dot{q}_i dp^i - d\pi^\alpha \dot{\theta}_\alpha - dq_i \dot{p}^i - d\theta_\alpha \dot{\pi}^\alpha - dt \frac{\partial L}{\partial t}$$

Par identification, on obtient les équations canoniques de Hamilton dans le cas d'un système physique

$$\begin{cases} \dot{\theta}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi^\alpha} \\ \dot{\pi}^\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p^i} \\ \dot{p}^i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \tag{2.36}$$

sans oublier l'équation $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. Les équations relatives aux variables θ_α et π^α sont complètement symétrique tandis que les autres sont identiques aux équations de la mécanique analytique standard.

Nous pouvons aussi trouver ces équations d'une autre manière en utilisant le principe de moindre action. En effet,

$$H = \dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - L \quad \Longrightarrow \quad L = \dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - H$$

Alors,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta L dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta(\dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - H) dt =$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\delta\dot{q}_i p^i + \dot{q}_i \delta p^i + \delta\dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha + \dot{\theta}_\alpha \delta\pi^\alpha - \delta q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} - \delta\theta_\alpha \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} - \delta p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \delta\pi_\alpha \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} \right) dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\delta \dot{q}_i p^i + \delta p^i \dot{q}_i + \delta \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - \delta \pi^\alpha \dot{\theta}_\alpha - \delta q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} - \delta \theta_\alpha \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} - \delta p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \delta \pi_\alpha \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} \right) dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\left(\frac{d}{dt} (\delta q_i p^i) - \delta q_i \dot{p^\iota} \right) + \delta p^i \dot{q}_i + \left(\frac{d}{dt} (\delta \theta_\alpha \pi^\alpha) - \delta \theta_\alpha \dot{\pi}^\alpha \right) - \delta \pi^\alpha \dot{\theta}_\alpha - \delta q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} - \delta \theta_\alpha \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \right.$$
$$\left. - \delta p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \delta \pi_\alpha \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} \right) dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\delta q_i \left(-\dot{p^\iota} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \delta p^i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \delta \theta_\alpha \left(-\dot{\pi}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \right) + \delta \pi^\alpha \left(-\dot{\theta}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} \right) \right) dt$$
$$+ \left[\delta q_i p^i \right]_{t_i}^{t_f} + \left[\delta \theta_\alpha \pi^\alpha \right]_{t_i}^{t_f}$$

Comme $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ et $\delta \theta_\alpha(t_i) = \delta \theta_\alpha(t_f) = 0$, les deux derniers termes de la dernière équation sont nuls, et puisque les variations $(\delta q, \delta p, \delta \theta, \delta \pi)$ sont indépendantes, la condition $\delta S = 0$ impose à la trajectoire physique de vérifier les équations

$$\begin{cases} \dot{p}^i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{\pi}^\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p^i} \\ \dot{\theta}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi^\alpha} \end{cases}$$

Ainsi nous avons obtenu à nouveau les équations les équations canoniques de Hamilton décrivant un système physique dans le cadre de la mécanique pseudo-classique.

2-3- Crochet de Poisson et ses propriétés

Dans le but de procéder à la quantification canonique, nous allons généraliser les crochets de Poisson aux cas systèmes décrits par des variables de Grassmann en plus des variables ordinaires [8]. En utilisant les équations de Hamilton (2.36), l'évolution temporelle d'une fonction des variables canoniques $A(q_i, p^i, \theta_\alpha, \pi^\alpha, t)$ est régie par l'équation

$$\frac{dA}{dt} = \dot{q}_i \frac{\partial A}{\partial q_i} + \dot{p}^i \frac{\partial A}{\partial p^i} + \dot{\theta}_\alpha \frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \dot{\pi}^\alpha \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

d'où

$$\dot{A} = \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\right) + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{2.37}$$

L'expression précédente nous permet de définir les crochets de Poisson d'une grandeur A avec le hamiltonien H

$$\{A, H\} = \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{2.38}$$

Maintenant,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \tag{2.39}$$

Dans l'expression du crochet (2.38), la quantité A est quelconque tandis que le hamiltonien H est à caractère bosonique (pair). Nous devons donc penser à la façon de définir le crochet de Poisson lorsque la quantité qui va remplacer H est impaire. La généralisation est directe dans le premier et le deuxième cas ci-dessous.

1er cas (pair-pair) : de la définition (2.38),

$$\{B_1, B_2\} = \left(\frac{\partial B_2}{\partial p^i}\frac{\partial B_1}{\partial q_i} - \frac{\partial B_2}{\partial q_i}\frac{\partial B_1}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial B_2}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial B_1}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial B_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial B_1}{\partial \pi^\alpha}\right)$$

mais comme $\frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}$ et $\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha}$ sont des variables impaires, il s'en suit que

$$\{B_1, B_2\} = \left(\frac{\partial B_1}{\partial q_i}\frac{\partial B_2}{\partial p^i} - \frac{\partial B_2}{\partial q_i}\frac{\partial B_1}{\partial p^i}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial B_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial B_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial B_1}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{2.40}$$

Il est possible de vérifier les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \{B_1, B_2\} = -\{B_2, B_1\} \\ \{B_1, B_2 B_3\} = B_2\{B_1, B_3\} + \{B_1, B_2\}B_3 \\ \big\{B_1, \{B_2, B_3\}\big\} + \big\{B_2, \{B_3, B_1\}\big\} + \big\{B_3, \{B_1, B_2\}\big\} = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

2ème cas (impair-pair) : toujours d'après la définition (2.38),

$$\{F, B\} = \left(\frac{\partial B}{\partial p^i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha}\right)$$

Le fait que $\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha}$ et $\frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}$ sont impairs et que $\frac{\partial F}{\partial \theta_\alpha}$ et $\frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha}$ sont pairs nous permet de mettre ce crochet sous la forme

$$\{F,B\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{2.42}$$

à partir de laquelle on peut vérifier facilement que

$$\begin{cases} \{F,B_1B_2\} = B_1\{F,B_2\} + \{F,B_1\}B_2 \\ \{F_1F_2,B\} = F_1\{F_2,B\} + \{F_1,B\}F_2 \\ \{FB_1,B_2\} = F\{B_1,B_2\} + \{F,B_2\}B_1 \end{cases} \tag{2.43}$$

3ème cas (pair-impair) : comme B et F sont liés par un commutateur nul ($[B,F]=0$), et que ce dernier est antisymétrique, alors le crochet qui leur associé doit l'être aussi, ce qui veut dire que $\{B,F\} = -\{F,B\}$. A partir de (2.8), on déduit que

$$\{B,F\} = \left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i}\right) + \left(\frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{2.44}$$

Les propriétés de ce crochet sont

$$\begin{cases} \{B,F\} = -\{F,B\} \\ \{B_1B_2,F\} = B_1\{B_2,F\} + \{B_1,F\}B_2 \\ \{B_1,F_1F_2\} = F_1\{B,F_2\} + \{B_1,F_1\}F_2 \\ \{B_1,FB_2\} = F\{B_1,B_2\} + \{B_1,F\}B_2 \\ \big\{B_1,\{B_2,F\}\big\} + \big\{B_2,\{F,B_1\}\big\} + \big\{F,\{B_1,B_2\}\big\} = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

4ème cas (impair-impair) : les nombres impairs ont des anti-commutateurs nuls ($[F_1,F_2]=0$), et comme ces derniers sont symétriques, le crochet qui leur associé doit l'être aussi, ce qui veut dire que $\{F_1,F_2\} = \{F_2,F_1\}$. Pour cette raison, le crochet impair-impair doit être défini de la manière suivante :

$$\{F_1,F_2\} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\partial F_2}{\partial p^i} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\frac{\partial F_1}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial F_1}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{2.46}$$

Nous avons les propriétés qui sont

$$\begin{cases} \{F_1, F_2\} = \{F_2, F_1\} \\ \{F_1F_2, F_3\} = F_1\{F_2, F_3\} - \{F_1, F_3\}F_2 \\ \{BF_1, F_2\} = B\{F_1, F_2\} - \{B, F_2\}F_1 \\ \left\{B, \{F_1, F_2\}\right\} + \left\{F_1, \{F_2, B\}\right\} - \left\{F_2, \{B, F_1\}\right\} = 0 \\ \left\{F_1, \{F_2, F_3\}\right\} + \left\{F_2, \{F_3, F_1\}\right\} + \left\{F_3, \{F_1, F_2\}\right\} = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Pour récapituler, la définition générale du crochet de Poisson des quantités A et C est [5]

$$\{A, C\} = \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\right) + (-)^{P_C}\left(\frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial C}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial C}{\partial \theta_\alpha}\right) \quad (2.48)$$

Ce crochet vérifie les relations

- $\{A, C\} = -(-)^{P_C P_A}\{C, A\}$; (symétrie ou antisymétrie)
- $\{A, aC + bD\} = a\{A, C\} + b\{A, D\}$ $\quad a, b \in \mathbb{C}$ (linéarité)
- $\{A, CD\} = \{A, C\}D + (-)^{P_C P_A}C\{A, D\}$ (règle de Leibnitz)
- $\{AC, D\} = A\{C, D\} + (-)^{P_C P_D}\{A, D\}C$ (règle de Leibnitz)
- $(-)^{P_A P_D}\left\{A, \{C, D\}\right\} + (-)^{P_D P_C}\left\{D, \{A, C\}\right\} + (-)^{P_C P_A}\left\{C, \{D, A\}\right\} = 0$ (Identité de Jacobi)

Le théorème fondamental suivant reste valable : «le crochet de Poisson de deux constantes de mouvement est aussi un constante de mouvement»

Avant de passer à la section suivante, il faut savoir qu'en particulier les crochets relatifs aux variables canoniques sont

$$\left\{q_i, q_j\right\} = 0, \qquad \left\{p_i, p_j\right\} = 0, \qquad \left\{q_i, p_j\right\} = \delta_{ij} \quad (2.49)$$

et

$$\left\{\theta_\alpha, \theta_\beta\right\} = 0, \qquad \left\{\pi_\alpha, \pi_\beta\right\} = 0, \qquad \left\{\theta_\alpha, \pi_\beta\right\} = -\delta_{\alpha\beta} \quad (2.50)$$

Les autres crochets contenant les variables fondamentales sont nuls :

$$\left\{q_j, \theta_\alpha\right\} = 0 \quad \left\{q_j, \pi_\alpha\right\} = 0 \quad \{p_i, \theta_\alpha\} = 0 \quad \{p_i, \pi_\alpha\} = 0 \quad (2.51)$$

Nous avons ainsi construit les crochets de Poisson qui sont susceptibles d'être utilisés pour décrire les systèmes faisant intervenir les variables de Grassmann.

2-4- La quantification canonique des algèbres de Grassmann:

La quantification canonique dans une théorie consiste à obtenir les crochets de Poisson entre deux variables physiques classiques quelconques et à les transposer en relations de commutation quantique ou d'anti-commutation des opérateurs qui leur correspondent dans le domaine quantique. En présence des variables de Gassmann, la quantification se fait en imposant les relations de commutation et d'anti-commutation suivantes :

$$\begin{cases} \left[\hat{B}_1, \hat{B}_2\right] = i\hbar\widehat{\{B_1, B_2\}} \\ \left[\hat{F}, \hat{B}\right] = i\hbar\widehat{\{F, B\}} \\ \left[\hat{F}_1, \hat{F}_2\right]_+ = i\hbar\widehat{\{F_1, F_2\}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{B}_1\hat{B}_2 - \hat{B}_2\hat{B}_1 = i\hbar\widehat{\{B_1, B_2\}} \\ \hat{F}\hat{B} - \hat{B}\hat{F} = i\hbar\widehat{\{F, B\}} \\ \hat{F}_1\hat{F}_2 + \hat{F}_2\hat{F}_1 = i\hbar\widehat{\{F_1, F_2\}} \end{cases} \tag{2.52}$$

Nous observons que les opérateurs impairs sont quantifiés avec des anti-commutateurs, et que les crochets mixtes entre les opérateurs pairs et impairs sont des commutateurs.

En particulier pour les variables fondamentales, nous avons

$$\left[\hat{\theta}_\alpha, \hat{\pi}_\beta\right]_+ = -i\hbar \qquad \left[\hat{\theta}_\alpha, \hat{\theta}_\beta\right]_+ = \left[\hat{\pi}_\alpha, \hat{\pi}_\beta\right]_+ = 0 \qquad \left[\hat{x}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar \tag{2.53}$$

tandis que les commutateurs des autres variables fondamentales sont nuls. Les équations de Heisenberg des opérateurs fondamentaux seront alors

$$\dot{\hat{\theta}}_\alpha = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\theta}_\alpha, \hat{H}\,\right] \qquad \dot{\hat{\pi}}_\alpha = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\pi}_\alpha, \hat{H}\,\right] \tag{2.54}$$

et

$$\dot{\hat{x}}_i = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{x}_i, \hat{H}\,\right] \qquad \dot{\hat{p}}_i = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{p}_i, \hat{H}\,\right] \tag{2.55}$$

où $\hat{H} = \hat{H}\left(\hat{x}_i, \hat{p}_i, \hat{\theta}_\alpha, \hat{\pi}_\alpha, t\right)$ est l'opérateur hamiltonien. Nous avons utilisé des commutateurs seulement car $\hat{H}$ est un opérateur bosonique.

Pour faire une quantification dans l'image de Schrödinger, nous allons faire appel à un résultat obtenu plus haut. En effet, nous savons que

$$\theta_\alpha\theta_\beta + \theta_\beta\theta_\alpha = 0 \quad \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} + \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} = 0 \quad \theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} + \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\theta_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$$

Donc, pour réaliser les relations (2.53), il suffit de prendre la correspondance suivante :

$$\hat{x}_i = x_i \quad , \quad \hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad \hat{\theta}_\alpha = \theta_\alpha \quad , \quad \hat{\pi}_\alpha = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \tag{2.56}$$

L'équation de Schrödinger sera alors

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x,\theta) = \hat{H}\left(x_i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, \theta_\alpha, -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, t\right)\psi(t,x,\theta) \tag{2.57}$$

2-5- Exemple d'application

Afin de bien illustrer le formalisme de la mécanique pseudo-classique, nous allons étudier le cas du lagrangien pair et réel

$$L = \frac{i}{2}\dot{\theta}\dot{\xi} - \frac{i}{2}\omega^2\theta\xi$$

où $\theta \; et \; \xi$ sont deux variables de Grassmann indépendantes. Les équations d'Euler – Lagrange par rapport à ces variables sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{i}{2}\ddot{\xi} + \frac{i}{2}\omega^2\xi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial\xi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{i}{2}\ddot{\theta} - \frac{i}{2}\omega^2\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

La solution générale de ces équations s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \xi = A\cos\omega t + B\,\sin\omega t \\ \theta = C\,\cos\omega t + D\,\sin\omega t \end{cases}$$

où *A*,*B*, *C* et *D* sont des nombres de Grassmann indépendants du temps.

Pour faire le passage au formalisme hamiltonien, nous allons d'abord définir les moments conjugués,

$$\pi_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{i}{2}\dot{\xi} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\xi} = -2i\pi_\theta$$

et

$$\pi_\xi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}} = -\frac{i}{2}\dot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = 2i\pi_\xi.$$

En utilisant la transformation de Legendre, nous pouvons obtenir le hamiltonien comme suit :

$$H = \dot{\theta}\pi_\theta + \dot{\xi}\pi_\xi - L$$

$$= 2i\pi_\xi\pi_\theta - 2i\pi_\theta\pi_\xi - \left(\frac{i}{2}\left(2i\pi_\xi\right)(-2i\pi_\theta) - i\frac{\omega^2\theta\xi}{2}\right)$$

$$= -4i\pi_\theta\pi_\xi + 2i\pi_\theta\pi_\xi + i\frac{\omega^2\theta\xi}{2}$$

d'où le hamiltonien

$$H = 2i\pi_\xi\pi_\theta + i\frac{\omega^2\theta\xi}{2}$$

En partant du résultat obtenu, nous pouvons écrire les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi_\theta} = 2i\pi_\xi \\ \dot{\pi}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\dfrac{i}{2}\omega^2\xi \\ \dot{\xi} = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi_\xi} = -2i\pi_\theta \\ \dot{\pi}_\xi = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi} = \dfrac{i}{2}\omega^2\theta \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0 \\ \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \end{cases}$$

En comparant les résultats obtenus dans les deux formalismes lagrangien et hamiltonien, nous pouvons conclure qu'ils sont bien équivalents.

A ce stade, calculons les crochets de Poisson, en utilisant (2.46) et tout en sachant que la partie spatiale dans cette équation est nulle, car notre système ne dépend que des variables de Grassmann. En effet, dans notre cas le crochet de Poisson est défini par la relation

$$\{F_1, F_2\} = -\left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta}\frac{\partial F_2}{\partial \pi_\theta} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta}\frac{\partial F_1}{\partial \pi_\theta}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\frac{\partial F_2}{\partial\, \pi_\xi} + \frac{\partial F_2}{\partial \xi}\frac{\partial F_1}{\partial\, \pi_\xi}\right)\right)$$

Un calcul direct montre facilement que les seuls crochets non nuls sont bien

$$\{\theta, \pi_\theta\} = -1 \qquad ; \qquad \{\xi, \pi_\xi\} = -1.$$

Après la quantification, les variables fondamentales $\theta, \pi_\theta, \xi, \pi_\xi$ vont devenir des opérateurs hermitien $\hat{\theta}, \hat{\pi}_\theta, \hat{\xi}, \hat{\pi}_\xi$ vérifiant les relations d'anti-commutation

$$\left[\hat{\theta},\hat{\pi}_{\theta}\right]_{+}=i\hbar\{\widehat{\theta,\pi_{\theta}}\}=-i\hbar$$

et

$$\left[\hat{\xi},\hat{\pi}_{\xi}\right]_{+}=i\hbar\{\widehat{\xi,\pi_{\xi}}\}=-i\hbar$$

sachant que les autres anti-commutateurs sont nuls. Le hamiltonien à son tour devient l'opérateur

$$\hat{H}\ =2i\hat{\pi}_{\xi}\hat{\pi}_{\theta}+i\frac{\omega^{2}}{2}\hat{\theta}\hat{\xi}$$

Maintenant, les équations de Heisenberg vont remplacer les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}=\dfrac{1}{i\hbar}[\hat{\theta},\hat{H}\ ]=2i\hat{\pi}_{\xi} \\ \dot{\hat{\pi}}_{\theta}=\dfrac{1}{i\hbar}\left[\hat{\pi}_{\theta},\hat{H}\ \right]\ =\ -\dfrac{i}{2}\omega^{2}\hat{\xi} \\ \dot{\hat{\xi}}=\dfrac{1}{i\hbar}[\hat{\xi},\hat{H}\ ]=-2i\hat{\pi}_{\theta} \\ \dot{\hat{\pi}}_{\xi}=\dfrac{1}{i\hbar}\left[\hat{\pi}_{\xi},\hat{H}\ \right]=\dfrac{i}{2}\omega^{2}\hat{\theta} \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous avons fait l'extension du formalisme canonique au cas de la mécanique pseudo-classique avec succès, ce qui nous a permis de garder la quantification canonique comme une méthode efficace pour quantifier les systèmes décrits classiquement par les variables de Grassmann.

CHAPITRE 3 Applications à des systèmes physiques

Dans ce chapitre nous allons utiliser les outils mathématiques relatifs aux algèbres de Grassmann développés dans le chapitre précédent, afin d'étudier quelques systèmes physiques classiques et de trouver leurs versions quantiques. Par la suite, nous allons comparer nos résultats avec les rappels du premier chapitre dans le but de démontrer que les systèmes constitués de fermions, ayant d'habitude une description purement quantique, peuvent avoir des systèmes correspondants classiques décrits à l'aide des variables de Grassmann.

3-1- L'algèbre de Grassmann avec une seule variable

Dans cette section nous voulons étudier un système physique dans les deux formalismes lagrangien et hamiltonien en utilisant une seule variable de Grassmann. Le lagrangien général, pair et réel, qu'on peut construire dans ce cas est

$$L = \frac{i}{2}\theta\dot{\theta} \tag{3.1}$$

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange on trouve l'équation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{i}{2}\dot{\theta} - \frac{i}{2}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 0 \tag{3.2}$$

Donc il n'y a pas de dynamique pour ce système car la solution de notre équation est $\theta = \theta_0$ qui est une constante de mouvement indépendante du temps.

Si on utilise la transformation de Legendre, le hamiltonien sera

$$H = \dot{\theta}\pi_\theta - L$$

avec

$$\pi_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{i}{2}\ \theta$$

d'où

$$H = \dot{\theta}\left(-\frac{i}{2}\ \theta\right) - \frac{i}{2}\theta\dot{\theta} = 0$$

Le hamiltonien est nul, ce qui montre qu'une algèbre avec une seule variable de Grassmann ne peut pas servir à décrire un système physique en évolution dans le temps.

3-2- Oscillateur harmonique fermionique

Pour cette section prenons un lagrangien classique réel et pair dépendant de deux variables de Grassmann qui peut se mettre sous la forme [7]

$$L = \frac{i}{2}\left(\theta\dot{\theta} + \xi\dot{\xi}\right) - \frac{i}{2}\omega(\theta\xi - \xi\theta) = \frac{i}{2}\left(\theta\dot{\theta} + \xi\dot{\xi}\right) - \frac{i}{2}\omega(\theta\xi + \theta\xi)$$

$$L = \frac{i}{2}\left(\theta\dot{\theta} + \xi\dot{\xi}\right) - i\omega\theta\xi \qquad (3.3)$$

Les équations de mouvement de ce système d'après les équations d'Euler –Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \end{cases}$$

sont

$$\begin{cases} -\dfrac{i}{2}\dot{\theta} - \dfrac{i}{2}\dot{\theta} + i\omega\xi = 0 \\ -\dfrac{i}{2}\dot{\xi} - \dfrac{i}{2}\dot{\xi} - i\omega\theta = 0 \end{cases}$$

D'où la forme définitive

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega\xi \\ \dot{\xi} = -\omega\theta \end{cases} \qquad (3.4)$$

D'après la définition des moments conjugués

$$\pi_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{i}{2}\,\theta \quad ; \qquad \pi_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{i}{2}\,\xi \tag{3.5}$$

Nous remarquons que ces moments conjugués ne peuvent pas être inversés par rapport aux vitesses $\dot{\theta}$ et $\dot{\xi}$, ce qui est un signe que notre lagrangien est singulier. A l'aide de la transformation de Legendre, nous pouvons trouver le hamiltonien de notre système

$$H = \dot{\theta}\pi_\theta + \dot{\xi}\pi_\xi - L$$

$$= \dot{\theta}\left(-\frac{i}{2}\,\theta\right) + \dot{\xi}\left(-\frac{i}{2}\,\xi\right) - \left(\frac{i}{2}\left(\theta\dot{\theta} + \xi\dot{\xi}\right) - i\omega\theta\xi\right)$$

$$= \frac{i}{2}\,\theta\dot{\theta} + \frac{i}{2}\,\xi\dot{\xi} - \frac{i}{2}\,\theta\dot{\theta} - \frac{i}{2}\xi\dot{\xi} + i\omega\theta\xi$$

Finalement,

$$H = i\omega\theta\xi \tag{3.6}$$

Comme lagrangien est singulier, les équations de Hamilton ainsi que les crochets de Poisson obtenus dans le chapitre précédant ne peuvent pas s'appliquer sans erreurs. En effet, ces derniers supposent que les moments conjugués sont inversibles par rapport aux vitesses, ce qui n'est pas le cas ici. Pour remédier à cette situation, nous allons postuler qu'il existe des crochets appelés crochets de Dirac [3,4,5,16,17] généralisant les crochets de Poisson aux cas singuliers, ayant les mêmes propriétés énumérées dans le chapitre précédent, dans la section consacrée aux crochets de Poisson (voir les relations qui sont juste en dessous de l'équation (2.48)).

Les équations de Hamilton s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \{\theta, H\} = \{\theta, i\omega\theta\xi\} = i\omega\{\theta, \theta\xi\} \\ \dot{\xi} = \{\xi\,, \mathrm{H}\} = \{\xi\,, i\omega\theta\xi\} = i\omega\{\xi, \theta\xi\} \end{cases} \tag{3.7}$$

En utilisant les propriétés des crochets qu'on a vu dans le chapitre précédent, on trouve que

$$\dot{\theta} = i\omega\{\theta, \theta\xi\} = -\, i\omega\{\theta\xi, \theta\} = -\, i\omega(\theta\{\xi, \theta\} - \{\theta, \theta\}\xi)$$

$$\dot{\theta} = -i\omega\theta\{\xi, \theta\} + i\omega\{\theta, \theta\}\xi$$

Par identification avec le résultat obtenu par les équations d'Euler-Lagrange en (3.4), on conclut que

$$\{\xi, \theta\} = 0 \qquad ; \qquad \{\theta, \theta\} = -i$$

Pour que

$$\dot{\theta} = \omega\xi \tag{3.8}$$

De la même façon, nous avons

$$\dot{\xi} = i\omega\{\xi, \theta\xi\} = -i\omega\{\theta\xi, \xi\} = -i\omega(\theta\{\xi, \xi\} - \{\theta, \xi\}\xi)$$

$$\dot{\xi} = -i\omega\theta\{\xi, \xi\} + i\omega\{\theta, \xi\}\xi$$

Par identification avec le résultat obtenu en (3.4), on obtient

$$\{\theta, \xi\} = 0 \qquad ; \qquad \{\xi, \xi\} = -i$$

d'où

$$\dot{\xi} = -\omega\theta \tag{3.9}$$

Avec ces crochets de Dirac, les deux formalismes lagrangien et hamiltonien sont équivalents.

A l'aide de ces crochets, nous pouvons procéder à une quantification canonique de notre système où les variables de Grassmann θ et ξ vont devenir des opérateurs $\hat{\theta}$ et $\hat{\xi}$ hermitiens vérifiant les anti-commutateurs

$$\begin{cases} [\hat{\theta}, \hat{\theta}]_+ = \hbar \\ [\hat{\xi}, \hat{\xi}]_+ = \hbar \\ [\hat{\theta}, \hat{\xi}]_+ = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\theta}^2 + \hat{\theta}^2 = \hbar \Longrightarrow \hat{\theta}^2 = \dfrac{\hbar}{2} \\ \hat{\xi}^2 + \hat{\xi}^2 = \hbar \Longrightarrow \hat{\xi}^2 = \dfrac{\hbar}{2} \\ \hat{\theta}\hat{\xi} + \hat{\xi}\hat{\theta} = 0 \Longrightarrow \hat{\theta}\hat{\xi} = -\hat{\xi}\hat{\theta} \end{cases}$$

L'hamiltonien classique devient après la quantification l'opérateur

$$\hat{H} = i\omega\hat{\theta}\hat{\xi} \tag{3.10}$$

Avant de continuer l'analyse dans le domaine quantique, il est utile d'introduire les variables de Grassmann complexes suivantes d'abord dans le domaine classique

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta + i\xi), \qquad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta - i\xi) \tag{3.11}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}\dot{\eta} - \dot{\bar{\eta}}\,\eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta - i\xi)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{\theta} + i\dot{\xi}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{\theta} - i\dot{\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta + i\xi) \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta\dot{\theta} + i\theta\dot{\xi} - i\xi\dot{\theta} + \xi\dot{\xi}\right) - \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}\theta + i\dot{\theta}\xi - i\dot{\xi}\theta + \dot{\xi}\xi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta\dot{\theta} + i\theta\dot{\xi} - i\xi\dot{\theta} + \xi\dot{\xi} + \dot{\theta}\theta + i\xi\dot{\theta} - i\theta\dot{\xi} + \xi\dot{\xi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\theta\dot{\theta} + 2\,\xi\dot{\xi}\right) \\
&= \theta\dot{\theta} + \xi\dot{\xi} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}\,\eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta - i\xi)\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta + i\xi) = \frac{1}{2}(\theta^2 + i\theta\xi - i\xi\theta + \xi^2) = \frac{1}{2}(2i\theta\xi) \\
&= i\theta\xi \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

car : $\theta^2 = \xi^2 = 0$

Remplaçons (3.12) et (3.13) dans (3.3), pour que le lagrangien de notre système peut s'écrire sous la forme

$$L = \frac{i}{2}(\bar{\eta}\dot{\eta} - \dot{\bar{\eta}}\eta) - \omega\bar{\eta}\eta \tag{3.14}$$

Ce lagrangien est du même type que la densité lagrangienne de Dirac L_D connue en théorie des champs, mais à une seule dimension

$$L_D = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) + m\bar{\psi}\psi \qquad (3.15)$$

Cela montre l'analogie frappante entre l'oscillateur harmonique fermionique et le champ spinoriel de Dirac.

Revenons maintenant au domaine quantique où nous avons

$$\left[\hat{\theta},\hat{\theta}\right]_+ = \hbar \qquad et \qquad \left[\hat{\xi},\hat{\xi}\right]_+ = \hbar \qquad (3.16)$$

Les variables complexes dans la théorie quantique deviennent des opérateurs non-hermitiens

$$\hat{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\theta} + i\hat{\xi}\right) \qquad ; \qquad \hat{\eta}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\theta} - i\hat{\xi}\right) \qquad (3.17)$$

Soient maintenant les deux opérateurs $\hat{b}$ et $\hat{b}^+$définis par

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{\theta} + i\hat{\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\hat{\eta} \qquad (3.18)$$

et

$$\hat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\hat{\theta} - i\hat{\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\hat{\eta}^+ \qquad (3.19)$$

D'après les équations (3.17), on vérifie facilement que

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \dfrac{\hat{\eta} + \hat{\eta}^+}{\sqrt{2}} \\ \hat{\xi} = \dfrac{\hat{\eta} - \hat{\eta}^+}{i\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (3.20)$$

d'où

$$\left[\hat{b},\hat{b}^+\right]_+ = \frac{1}{\hbar}[\hat{\eta},\hat{\eta}^+]_+ = \frac{1}{2\hbar}\left[\hat{\theta} + i\hat{\xi},\hat{\theta} - i\hat{\xi}\right]_+$$

$$= \frac{1}{2\hbar}\left([\hat{\theta},\hat{\theta}]_+ - i[\hat{\theta},\hat{\xi}]_+ + i[\hat{\xi},\hat{\theta}]_+ + [\hat{\xi},\hat{\xi}]_+\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar}(\hbar - 0 + 0 + \hbar) = 1 \tag{3.21}$$

et de la même manière, on démontre que

$$[\hat{b},\hat{b}]_+ = [\hat{b}^+,\hat{b}^+]_+ = 0 \tag{3.22}$$

Ce résultat montre bel et bien que les opérateurs $\hat{b}$ et $\hat{b}^+$sont des opérateurs d'annihilation et de création fermionique.

Passons à présent au Hamiltonien en remplaçant (3.20) dans (3.10)

$$\hat{H} = i\omega\hat{\theta}\hat{\xi} = i\omega\left(\frac{\hat{\eta}+\hat{\eta}^+}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\hat{\eta}-\hat{\eta}^+}{i\sqrt{2}}\right) = \frac{\hbar\omega}{2\hbar}(\hat{\eta}+\hat{\eta}^+)(\hat{\eta}-\hat{\eta}^+)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{b}+\hat{b}^+)(\hat{b}-\hat{b}^+) = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{b}^2 - \hat{b}\hat{b}^+ + \hat{b}^+\hat{b} - (\hat{b}^+)^2)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(0 + 2\hat{b}^+\hat{b} - 1 + 0\right)$$

car $[\hat{b},\hat{b}^+]_+ = \hat{b}\hat{b}^+ + \hat{b}^+\hat{b} = 1 \implies \hat{b}\hat{b}^+ = -\hat{b}^+\hat{b} + 1$ et aussi $\hat{b}^2 = (\hat{b}^+)^2 = 0$.

Finalement, on trouve que

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{b}^+\hat{b} - \frac{1}{2}\right) \tag{3.23}$$

En comparant ce résultat avec l'équation (1.29) du premier chapitre, on conclut que nous avons obtenu le hamiltonien d'un oscillateur harmonique fermionique quantique. Donc on peut dire que les variables de Grassmann nous ont permis de trouver une version classique de l'oscillateur fermionique.

3-3- La dynamique de spin

Pour cette section, Partons d'un lagrangien classique dépendant de trois variables de Grassmann, et essayons de voir l'interprétation physique des résultats obtenus après une quantification canonique. Dans ce cas le lagrangien pair et réel le plus général est de la forme [7,10]

$$L = \frac{i}{2}\left(\xi_1\dot{\xi}_1 + \xi_2\dot{\xi}_2 + \xi_3\dot{\xi}_3\right) - i\omega(B_1\xi_2\xi_3 + B_2\xi_3\xi_1 + B_3\xi_1\xi_2) \tag{3.24}$$

où ω et $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ sont des constantes réelles. En utilisant la transformation de Legendre

$$H = \vec{\dot{\xi}}.\vec{\pi}_\xi - L$$

on obtient le hamiltonien

$$H = i\omega(B_1\xi_2\xi_3 + B_2\xi_3\xi_1 + B_3\xi_1\xi_2) \tag{3.25}$$

D'après les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \xi_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{i}{2}\dot{\xi}_1 - \frac{i}{2}\dot{\xi}_1 + i\omega B_2\xi_3 - i\omega B_3\xi_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\xi}_1 = -\omega B_2\xi_3 + \omega B_3\xi_2 \tag{3.26}$$

Maintenant, on va faire appel aux équations de Hamilton pour trouver les crochets associés à notre lagrangien. En effet,

$$\dot{\xi}_1 = \{\xi_1, H\}$$

d'où

$$\dot{\xi}_1 = \{\xi_1, H\} = i\omega\{\xi_1, B_1\xi_2\xi_3 + B_2\xi_3\xi_1 + B_3\xi_1\xi_2\}$$

Mais, d'après les propriétés des crochets de Poisson, nous avons

$$\{\xi_1, \xi_2\xi_3\} = -\xi_2\{\xi_3, \xi_1\} + \{\xi_2, \xi_1\}\xi_3$$

$$\{\xi_1, \xi_3\xi_1\} = -\xi_3\{\xi_1, \xi_1\} + \{\xi_3, \xi_1\}\xi_1$$

$$\{\xi_1, \xi_1\xi_2\} = -\xi_1\{\xi_2, \xi_1\} + \{\xi_1, \xi_1\}\xi_2$$

alors

$$\dot{\xi}_1 = -i\omega B_1(\xi_2\{\xi_3,\xi_1\} - \{\xi_2,\xi_1\}\xi_3) - i\omega B_2(\xi_3\{\xi_1,\xi_1\} - \{\xi_3,\xi_1\}\xi_1) - i\omega B_3(\xi_1\{\xi_2,\xi_1\} - \{\xi_1,\xi_1\}\xi_2)$$

Suite à une identification avec l'équation (3.26), on déduit facilement les crochets ci-dessous.

$$\{\xi_1,\xi_1\} = -i \quad \text{et} \quad \{\xi_i,\xi_j\} \neq 0,\ i = j$$

De la même manière, nous avons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\xi}_2 = -\omega B_1\xi_3 + \omega B_3\xi_1 \tag{3.27}$$

et

$$\dot{\xi}_2 = \{\xi_2, H\} = -i\omega B_1\xi_3\{\xi_2,\xi_2\} + i\omega B_3\{\xi_2,\xi_2\}\xi_1$$

Par identification, on obtient

$$\{\xi_2,\xi_2\} = -i.$$

Toujours par identification, nous avons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_3} - \frac{\partial L}{\partial \xi_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\xi}_3 = -\omega B_1\xi_2 + \omega B_2\xi_1 \tag{3.28}$$

et

$$\dot{\xi}_3 = \{\xi_3, H\} = -i\omega B_1\xi_2\{\xi_3,\xi_3\} + i\omega B_2\{\xi_3,\xi_3\}\xi_1$$

D'où

$$\{\xi_3,\xi_3\} = -i.$$

Nous avons ainsi obtenu les crochets relatifs aux variables fondamentales $\{\xi_i,\xi_j\} = -i\delta_{ij}$ qui vont nous permettre de procéder à une quantification canonique.

Avant cela, et par analogie avec le moment cinétique orbital

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \tag{3.29}$$

définissons le moment cinétique $\vec{S}$ par la relation

$$\vec{S} = \vec{\xi} \wedge \vec{\pi}_\xi = \vec{\xi} \wedge \left(-\frac{i}{2}\vec{\xi}\right) = -\frac{i}{2}(\vec{\xi} \wedge \vec{\xi}) \tag{3.30}$$

où

$$\vec{\pi}_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\xi}}} = (-\frac{i}{2}\vec{\xi}).$$

Autrement dit,

$$\vec{S} = -\frac{i}{2}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \tag{3.31}$$

Explicitement,

$$\vec{S} = -\frac{i}{2}\left(\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\left((\xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_2)\vec{\imath} - (\xi_1\xi_3 - \xi_3\xi_1)\vec{\jmath} + (\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1)\vec{k}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\left(2\xi_2\xi_3\vec{\imath} + 2\xi_3\xi_1\vec{\jmath} + 2\xi_1\xi_2\vec{k}\right)$$

$$= -i\xi_2\xi_3\vec{\imath} - i\xi_3\xi_1\vec{\jmath} - i\xi_1\xi_2\vec{k}$$

d'où

$$\vec{S} = \begin{cases} S_1 = -i\xi_2\xi_3 \\ S_2 = -i\xi_3\xi_1 \\ S_3 = -i\xi_1\xi_2 \end{cases} \tag{3.32}$$

Maintenant, calculons les crochets relatifs aux composantes $\vec{S}$. En effet,

$$\{S_1, S_2\} = -\{\xi_2\xi_3, \xi_3\xi_1\} = -(\xi_2\{\xi_3, \xi_3\xi_1\} + \{\xi_2, \xi_3\xi_1\}\xi_3)$$

$$= -(-\xi_2\{\xi_3\xi_1, \xi_3\} - \{\xi_3\xi_1, \xi_2\}\xi_3)$$

$$= \xi_2\xi_3\{\xi_1, \xi_3\} - \xi_2\{\xi_3, \xi_3\}\xi_1 + \xi_3\{\xi_1, \xi_2\}\xi_3 - \{\xi_3, \xi_2\}\xi_1\xi_3$$

$$= i\xi_2\xi_1 = -i\xi_1\xi_2 = S_3$$

car les seuls crochets non nuls sont

$$\{\xi_1, \xi_1\} = \{\xi_2, \xi_2\} = \{\xi_3, \xi_3\} = -i \quad \Leftrightarrow \quad \{\xi_i, \xi_j\} = -i\delta_{ij}$$

De la même façon, on démontre que :

$$\{S_2, S_3\} = -i\xi_2\xi_3 = S_1 \qquad ; \qquad \{S_3, S_1\} = -i\xi_3\xi_1 = S_2$$

Ces crochets montrent que la grandeur $\vec{S}$ est bel et bien un moment cinétique de spin classique.

A ce stade, utilisons les crochets du cas classique obtenus plus haut dans le but de donner une version quantique de notre système. Nous avons

$$\{\xi_i, \xi_j\} = -i\delta_{ij} \tag{3.33}$$

et après la quantification, on aura

$$\left[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j\right]_+ = i\hbar\widehat{\{\xi_i, \xi_j\}} = \hbar\delta_{ij} \tag{3.34}$$

où les $\hat{\xi}_i$ sont des opérateurs hermitiens. Alors, les composantes de spin après la quantification deviennent

$$\begin{cases} \hat{S}_1 = -i\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3 \\ \hat{S}_2 = -i\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1 \\ \hat{S}_3 = -i\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 \end{cases} \tag{3.35}$$

Le calcul des commutateurs entre les composantes de spin dans le cas quantique nous donne

$$[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = -[\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3, \hat{\xi}_3\hat{\xi}_1] = -\left(\hat{\xi}_2[\hat{\xi}_3, \hat{\xi}_3\hat{\xi}_1] + [\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\hat{\xi}_1]\hat{\xi}_3\right)$$

$$= \hat{\xi}_2[\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_3] + [\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]\hat{\xi}_3$$

$$= \hat{\xi}_2\hat{\xi}_3[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_3]_+ - \hat{\xi}_2[\hat{\xi}_3, \hat{\xi}_3]_+\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_3[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]_+\hat{\xi}_3 - [\hat{\xi}_3, \hat{\xi}_2]_+\hat{\xi}_1\hat{\xi}_3$$

$$= -\hat{\xi}_2\hat{\xi}_1\hbar = \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2\hbar = \frac{i}{i}\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2\hbar = i\hbar\hat{S}_3 \tag{3.36}$$

où nous avons utilisé les propriétés suivantes des commutateurs $[,]$et des anti-commutateurs $[,]_+$:

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

$$[A, BC] = -B[A, C]_+ + [A, B]_+C$$

De même manière, on démontre que

$$\left[\hat{S}_2, \hat{S}_3\right] = i\hbar\hat{S}_1, \quad \left[\hat{S}_3, \hat{S}_1\right] = i\hbar\hat{S}_2 \tag{3.37}$$

Ces relations de commutation prouvent que $\hat{S}$ est un opérateur moment cinétique malgré le fait que les opérateurs $\hat{\xi}_i$ vérifient des relations d'anti-commutation.

Après quantification, le hamiltonien de notre système (3.25) devient l'opérateur hermitien

$$\hat{H} = i\omega\left(B_1\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3 + B_2\hat{\xi}_3\hat{\xi}_1 + B_3\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2\right) \tag{3.38}$$

A l'aide des équations de Heisenberg $\dot{\hat{\xi}}_i = {}^1\!/_{i\hbar}\left[\hat{\xi}_i, \hat{H}\right]$ et des propriétés ci-dessus liant les commutateurs et les anti-commutateurs, on démontre facilement que les équations de mouvement des opérateurs fondamentaux sont

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = -\omega B_2\hat{\xi}_3 + \omega B_3\hat{\xi}_2 \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = +\omega B_1\hat{\xi}_3 - \omega B_3\hat{\xi}_1 \\ \dot{\hat{\xi}}_3 = -\omega B_1\hat{\xi}_2 + \omega B_2\hat{\xi}_1 \end{cases} \tag{3.39}$$

En utilisant ces équations, calculons $\frac{d\hat{S}_i}{dt}$. En effet,

$$\frac{d\hat{S}_1}{dt} = -i\frac{d\hat{\xi}_2\hat{\xi}_3}{dt} = -i\dot{\hat{\xi}}_2\hat{\xi}_3 - i\hat{\xi}_2\dot{\hat{\xi}}_3$$

$$= -i\left(\omega B_1\left(\hat{\xi}_3\right)^2 - \omega B_3\hat{\xi}_1\hat{\xi}_3\right) - i\left(-\omega B_1\left(\hat{\xi}_2\right)^2 + \omega B_2\hat{\xi}_2\hat{\xi}_1\right)$$

$$= -i\left(\omega B_1\frac{\hbar}{2} - \omega B_3\frac{\hat{S}_2}{i}\right) - i\left(-\omega B_1\frac{\hbar}{2} + \omega B_2\frac{\hat{S}_3}{i}\right)$$

Finalement,

$$\frac{d\hat{S}_1}{dt} = \omega\left(-B_2\hat{S}_3 + B_3\hat{S}_2\right) \tag{3.40}$$

D'une manière analogue, on vérifie que

$$\frac{d\hat{S}_2}{dt} = \omega\left(B_1\hat{S}_3 - B_3\hat{S}_1\right) \quad ; \quad \frac{d\hat{S}_3}{dt} = \omega\left(-B_1\hat{S}_2 + B_2\hat{S}_1\right) \tag{3.41}$$

Sous forme vectorielle,

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = -\omega\left(\vec{B} \wedge \vec{\hat{S}}\right) \tag{3.42}$$

On conclut que le recours à un lagrangien avec trois variables de Grassmann nous a permis après quantification de retrouver les résultats relatifs à la dynamique de spin qu'on a exposée dans le premier chapitre de ce mémoire.

3-4- Equation de Pauli d'une particule non relativiste avec spin 1/2

Dans cette section, nous souhaitons montrer comment aboutir à l'équation de Pauli qui représente l'équation d'une particule non-relativiste avec spin ½ en interaction avec un champ électromagnétique, en partant d'un lagrangien qui est la somme du lagrangien électromagnétique habituel plus le lagrangien de la dynamique de spin étudié plus haut.

Autrement dit, prenons le lagrangien pair et réel ci-dessous dépendant des variables ordinaires et des variables de Grassmann

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{i}{2}\vec{\xi}.\overrightarrow{\dot{\xi}} + q\vec{v}.\vec{A} - qU - \frac{i}{2}\omega\vec{B}.\left(\vec{\xi} \wedge \vec{\xi}\right) \tag{3.43}$$

où

- $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$est énergie cinétique tel que $\vec{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ et m est la masse de la particule ;

- $\frac{i}{2}\vec{\xi}.\dot{\vec{\xi}}$ est la partie libre des variables de Grassmann (spin) sachant que $\vec{\xi}.\dot{\vec{\xi}} = \xi_1\dot{\xi}_1 + \xi_2\dot{\xi}_2 + \xi_3\dot{\xi}_3$;
- $q\vec{v}.\vec{A} - qU$ décrit l'interaction avec le champ électromagnétique extérieur $\big(U(t,x,y,z), \vec{A}(t,x,y,z)\,\big)$ où $\vec{v}.\vec{A} = \dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z$;
- $-\frac{i}{2}\omega\vec{B}.(\vec{\xi}\wedge\vec{\xi})$ décrit l'interaction du spin avec le champ magnétique $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ sachant que $\vec{B}.\big(\vec{\xi}\wedge\vec{\xi}\big) = B_1\xi_2\xi_3 + B_2\xi_3\xi_1 + B_3\xi_1\xi_2$.

Ce lagrangien est de la forme

$$L = L_{EM} + L_{DS} \tag{3.44}$$

avec

- $L_{EM} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v}.\vec{A} - qU$ est le lagrangien électromagnétique
- $L_{DS} = \frac{i}{2}\vec{\xi}\dot{\vec{\xi}} - \frac{i}{2}\omega\vec{B}.(\vec{\xi}\wedge\vec{\xi})$ est le lagrangien de la dynamique de spin

Appliquons l'équation de d'Euler-Lagrange par rapport à la coordonnée spatiale *x*. En effet,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{d}{dt}(m\dot{x} + qA_x) = m\ddot{x} + q\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \dfrac{\partial A_x}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = q\vec{v}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x} - q\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{i\omega}{2}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x}(\vec{\xi}\wedge\vec{\xi}) = q\left(\dot{x}\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\dfrac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) - q\dfrac{\partial U}{\partial x} + \omega\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x}.\overrightarrow{S} \end{cases}$$

d'où l'équation de mouvement

$$m\ddot{x} = q\left[\left(-\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\right] + \omega\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}.\overrightarrow{S} \tag{3.45}$$

Mais comme

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{E} = -Grad\,\vec{U} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}\right)\vec{\jmath} + \left(-\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)\vec{k}$$

alors

$$m\ddot{x} = q\left[E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y\right] + \omega\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}.\overrightarrow{S} = q\left[E_x + (\vec{v}\wedge\vec{B})_x\right] + \omega\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}.\overrightarrow{S} \quad (3.46)$$

De la même manière, on trouve que

$$m\ddot{y} = q\left[E_y + (\vec{v}\wedge\vec{B})_y\right] + \omega\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}.\overrightarrow{S} \quad (3.47)$$

et

$$m\ddot{z} = q\left[E_z + (\vec{v}\wedge\vec{B})_z\right] + \omega\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}.\overrightarrow{S} \quad (3.48)$$

Sous forme vectorielle,

$$m\frac{d\vec{r}^2}{dt^2} = q\left[\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right] + \omega\overrightarrow{Grad}\left(\vec{B}.\vec{S}\right) \quad (3.49)$$

Cette équation montre que la variation des coordonnées spatiales est influencée par l'interaction du spin avec le champ magnétique. Mais dans le cas où $\frac{\partial\vec{B}}{\partial x_i} = 0$, ce qui revient à dire que $\vec{B} = \vec{B}(t)$, les parties spatiale et spinorielle sont complètement séparables. En ce qui concerne les variables de Grassmann, le calcul est pratiquement identique au calcul effectué dans la section précédente et le résultat est le même

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\omega\left(\vec{B}\wedge\vec{S}\right) \quad (3.50)$$

Pour passer au formalisme hamiltonien, il faut d'abord déterminer les moments conjugués $p_x, p_y, p_z, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ comme suit :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} \quad \Longrightarrow \quad p_x = m\dot{x} + qA_x = mv_x + qA_x \quad (3.51)$$

d'où

$$v_x = \frac{p_x - qA_x}{m} \tag{3.52}$$

De la même méthode on peut trouver aussi

$$v_y = \frac{p_y - qA_y}{m} \quad ; \quad v_z = \frac{p_z - qA_z}{m} \tag{3.53}$$

Sous forme vectorielle,

$$\vec{v} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \tag{3.54}$$

On a aussi

$$\pi_{\xi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = -\frac{i}{2}\vec{\xi}_1 \tag{3.55}$$

et

$$\pi_{\xi_2} = -\frac{i}{2}\vec{\xi}_2, \qquad \pi_{\xi_3} = -\frac{i}{2}\vec{\xi}_3 \tag{3.56}$$

donc

$$\vec{\pi} = -\frac{i}{2}\vec{\xi} \tag{3.57}$$

A l'aide de la transformation de Legendre

$$H = \dot{q}_i p_i + \dot{\xi}_i \pi_{\xi_i} - L \tag{3.58}$$

Si on remplace la vitesse et le lagrangien dans l'équation (3.58) par les équations (3.54) et (3.43), on aura

$$H = \vec{p}.\left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}\right) - \frac{i}{2}\dot{\vec{\xi}}.\vec{\xi} - \frac{1}{2}m\left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}\right)^2 - \frac{i}{2}\vec{\xi}\dot{\vec{\xi}} - q\left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{2m}\right)\vec{A} + qU - \omega\vec{B}.\vec{S}$$

$$= \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}\right).\left(\vec{p} - q\vec{A}\right) - \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qU - \omega\vec{B}.\vec{S}$$

$$= \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 - \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qU - \omega\vec{B}.\vec{S}$$

Finalement,

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qU - \omega\vec{B}.\vec{S} \tag{3.59}$$

La partie spatiale $\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qU\right)$ de ce hamiltonien est égale au hamiltonien classique d'une particule sans spin dans un champ électromagnétique ; cela justifie la quantification avec les commutateurs habituels

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \qquad i,j = 1 \dots 3 \tag{3.60}$$

L'autre partie $\left(-\omega\vec{B}.\vec{S}\right)$ n'est rien d'autre que celle de la dynamique de spin étudiée dans la section précédente, d'où la raison de faire la quantification à l'aide des anti-commutateurs

$$[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j]_+ = \hbar\delta_{ij} \tag{3.61}$$

Nous allons maintenant trouver des opérateurs réalisant ces différents commutateurs et anti-commutateurs. Pour les variables spatiales, nous faisons le choix habituel où

$$\hat{x}_i = x_i \qquad ; \qquad \hat{p}_i = -i\hbar\partial_i \tag{3.62}$$

Les variables de Grassmann peuvent être représentées par les matrices de Pauli $\vec{\sigma}$

$$\hat{\vec{\xi}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\vec{\sigma} \tag{3.63}$$

D'après (3.30) après la quantification et les propriétés des matrices de Pauli, nous avons aussi

$$\hat{\vec{S}} = -\frac{i}{2}\left(\hat{\vec{\xi}} \wedge \hat{\vec{\xi}}\right) = -\frac{i\hbar}{4}(\vec{\sigma} \wedge \vec{\sigma}) = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \tag{3.64}$$

Ce résultat est bien connu en mécanique quantique où le spin est représenté par les matrices de Pauli.

Avec cette représentation des différents opérateurs, l'opérateur hamiltonien va prendre la forme

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + qU - \omega\vec{B}.\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \tag{3.65}$$

Maintenant, si on fixe la valeur de ω à $\frac{q}{m}$, on retrouve le fameux hamiltonien de Pauli

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2 + qU - \frac{q\hbar}{2m}\vec{B}.\vec{\sigma} \tag{3.66}$$

d'où l'équation de Pauli qui va avoir l'expression

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\frac{1}{2m}(i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2 + qU - \frac{q\hbar}{2m}\vec{B}.\vec{\sigma}\right)\psi \tag{3.67}$$

En fin de compte, nous avons retrouvé le même résultat que celui du premier chapitre pour l'équation de Pauli. Cela traduit une fois de plus le fait que les variables de Grassmann, qui anti-commutent entre-elles, peuvent être utilisées pour construire un lagrangien classique, pair et réel, à partir duquel il est possible de reproduire l'équation de Pauli après quantification canonique.

Tout au long de ce dernier chapitre, nous avons montré à travers plusieurs exemples comment construire des lagrangiens avec les variables de Grassmann susceptibles de décrire classiquement des systèmes physiques bien connus en mécanique quantique dont l'usage veut qu'ils soient purement quantiques sans équivalents classiques.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la mécanique analytique dans les algèbres de Grassmann dans le but de développer une théorie consistante avec des variables qui anti-commutent, afin aborder les systèmes physiques décrits par des lagrangiens pseudo-classiques.

A cet effet, nous avons d'abord construit le formalisme de la pseudo-mécanique qu'est la mécanique d'un système pseudo-classique décrit par les variables canoniques ordinaires et par les variables de Grassmann. Cette mécanique nous a permis de trouver une méthode puissante pour l'étude des systèmes Fermioniques et de leur donner une description classique, car à la limite, les systèmes de Fermions ont un caractère purement quantique et ne possèdent pas de correspondants classiques.

En effet, l'utilisation de l'algèbre de Grassmann pour faire de la mécanique analytique nous a permis d'obtenir les crochets de Poisson entre les différentes variables physiques et de les transformer en relations de commutation et d'anti-commutation dans le domaine quantique, ce qui est une généralisation de la quantification canonique aux systèmes pseudo-classiques. Les opérateurs bosoniques vérifient des relations de commutation entre eux et avec les opérateurs fermioniques, tandis que ces derniers obéissent à des relations d'anti-commutation entre eux. La version quantifiée de la pseudo-mécanique n'est rien d'autre que la théorie quantique ordinaire.

Enfin, nous mentionnons que moyennant ces systèmes pseudo-classiques nous avons la possibilité de décrire le spin à un niveau pseudo-classique, d'ailleurs, c'est la motivation initiale de ce travail. Nous avons pu aussi retrouver l'oscillateur harmonique fermionique en partant d'un lagrangien pseudo-classique. Dans une dernière application, nous avons démontré que l'équation de Pauli décrivant une particule ayant un spin ½ se déplaçant dans l'espace et le temps, peut être obtenue en commençant par un lagrangien pseudo-classique, réel et pair, contenant des variables ordinaires et des variables de Grassmann.

Ce travail nous a montré aussi que la limite classique $\ll \hbar \longrightarrow 0 \gg$ de la théorie quantique avec les opérateurs de Fermi est la pseudo-mécanique. L'intérêt de ce résultat est qu'il n'y plus de distinction formelle entre le cas classique et pseudo-classique, nous avons toujours une formulation classique et quantique.

Donc nous avons pu constater que cette théorie unifie les variables qui commutent et qui anti-commutent, afin d'étudier les fermions et les bosons d'une manière symétrique.

Bibliographie

[1] P. Amiot et L. Marleau, *Mécanique analytique*, Département de physique, de génie physique et d'optique, Université Laval, Québec, Canada.

[2] Jean Hare, *Mécanique Analytique,* 13 novembre 2007.

[3] P. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Yeshiva university, New York, (1964).

[4] Kurt Sundermeyer, *Constrained Dynamics,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1982).

[5] Marc Henneaux, Claudio Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems,* Princeton University Press (1992).

[6] Dr. Yazid Delenda, *Advanced Quantum Mechanics* Part II, Université Hadj Lakhdar – Batna.

[7] R. Casalbuoni, The *classical mechanics for bose-fermi systems*, Article in Il Nuovo Cimento A · June 1976, University of Florence.

[8] R.Casalbuoni, *On the Quantization of Systems with Anticommuting Variables*.

[9] Peter Woit, *Anti-commuting Variables and Pseudo-classical Mechanics,* Department of Mathematics, Columbia University, June 10, 2013.

[10] F. A. BEREZIN, M. S. MARINOV, *Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics*, Moscow State University,1976.

[11] Jean Zinn-Justin, *Intégrale de chemin en mécanique quantique* , EDP Sciences, 2003.

[12] Fiorenzo Bastianelli, *Path integrals for fermions and supersymmetric quantum mechanics*, Appunti per il corso di Fisica Teorica 2 , 2015/2016.

[13] Bijan Kumar Bagchi, Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics.

[14] Arnab Ghosh, Sudarson Sekhar Sinha, and Deb Shankar Ray, *Fermionic oscillator in a fermionic bath*.

[15] David Sénéchal, *Mécanique Quantique II*, Université de Sherbrooke, 30 mai 2018.

[16] Z. Belhadi, *Application de la mécanique quantique non commutative en relativité et quantification des systèmes avec contraintes*, Thèse de doctorat, Université de Tizi-Ouzou (2016).

[17] L. Ichallal, Z. Belhadi, *introduction aux systèmes hamiltoniens avec contraintes*, Mémoire de master, Université de Béjaia (2013).