République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique **Université A. Mira de Béjaia**

Faculté des Science Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de fin d'études

Spécialité : Mathématiques Financières

Thème :

Méthodes d'approximation du modèle du risque individuel : Comparaison numérique

Présenté par :

Ben Guesmia Rabah et Ghersa Rabah

Devant le jury composé de :

Présidente	Mme. LEKADIR Ouiza,	MCA,	U. de Béjaïa
Encadreur	M. AISSANI Djamil,	Professeur,	U. de Béjaïa
Co-Encadreur	Mme. BENOUARET Zina,	MCB,	U. de Béjaïa
Examinatrice	Mme. HOCINE Safia,	MAA,	U. de Béjaïa
Examinatrice	Mme. ZIANE Yasmina,	MCB,	U. de Béjaïa

∗ ∗ ∗ Promotion 2018/2019 ∗ ∗ ∗

Remerciement

Nous remercions très sincèrement Mme.benouaret Zina et Pr Aissani Djamil de nous proposer ce sujet de mémoire riche en concepts, pour leurs encadrements, leurs conseils et le temps qu'ils nous ont consacré, ainsi que les explications qu'ils ont pu nous fournir avec une grande disponibilité tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à tous nos enseignants pour leurs engagements et conseils assidus dans les phases les plus difficiles du cursus.

Nous remercions également nos famille et que nos proches ainsi nos collègues pour leurs encouragements.

Nos pensées vont aussi à nos collègues qui se sont intéressés à notre travail.

Nous adressons nos remerciements aux membres du jury Mme Lekadir Ouiza, Mme Hocine Safia et Mme Ziane Yasmina por avoir accepter de présider et juger ce travail.

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail à :

Nos très honorables chers parents.

Nos famille, nos amis.

Et à tous ceux qui nous connaissent de prés ou de loin.

Ghersa Rabah
et Ben Guesmia Rabah

Table des matières

Introduction générale

L'homme a toujours été vulnérable et exposé à des risques, soit liés à sa vie, soit liés à ses biens, mais le plus important est que chaque individu soit protégé contre les conséquences économiques de l'aléa, notamment lorsque lui-même, ou ceux ayant droit, se voient privés de la possibilité de revenu à la suite d'un sinistre, d'où l'importance des assurances de personnes. (cf. [7])

La notion d'assurance est née de cette nécessité. Inventée par les Européens dans la foulée de la révolution industrielle qui a fait le bonheur économique de l'Europe, l'assurance a fait le tour du monde pour devenir en quelques années une industrie financière aux multiples acteurs. (cf. [7])

Les compagnies d'assurance permettent à des individus ou des investisseurs d'éliminer certains risques. Les clients transfèrent donc leurs risques assurables à une compagnie d'assurance qui elle, en revanche, doit les gérer efficacement afin d'éviter des scénarios catastrophiques qui pourraient mettre en péril la situation financière de l'entreprise et par le fait même maintenir sa rentabilité. (cf. [7])

De manière générale, le client paie une prime d'assurance afin d'avoir droit à un dédommagement selon les conditions du contrat d'assurance. Le type d'événement donnant droit à une indemnité varie selon le type d'assurance demandé par l'assuré. Ce qu'il est important de comprendre, c'est que les compagnies d'assurance tentent de bien quantifier le risque qu'ils assument afin de déterminer la prime, qui accumulée avec toutes les primes des assurés, servira à compenser les indemnités qu'elle devra faire lorsque l'événement assuré se produira. Ces primes accumulées sont entre-temps placées dans des actifs à risque peu élevé, telles les obligations, et sont retirées lorsqu'une réclamation se présente. Bref, peu importe le risque assuré, le principe de base de l'assurance est le même. (cf. [7])

Dans le cadre de ses opérations, une des tâches les plus importantes d'une compagnie d'assurance est de gérer efficacement les risques auxquels elle s'expose en assurant des clients. (cf. [7])

L'assurance joue un rôle primordial dans les économies du marché à travers les sommes importantes qu'elle mobilise, en effet, elle contribue à la collecte de l'épargne intérieure et dans son acheminement vers le financement des besoins de l'économie. C'est ce qui explique le poids et la place qu'occupe le secteur des assurances dans l'économie moderne, désormais elle représente un appuient pour l'ensemble des activités financière. Outre les garanties qu'elle offre, l'assurance fournit à l'économie une épargne importante favorable à son développement. La branche d'assurance qui permet une contribution efficace à l'épargne est l'assurance vie. Cette dernière est constituée de contrat à long terme sur la vie humaine. Avec l'existence d'un marché financier développé, ce type d'assurance représente la branche la plus développé dans les pays industrialisés. (cf. [13])

Quant à l'Algérie, son système assurantiel se caractérise par la prédominance de compagnies publiques, avec une participation très faible dans le PIB (produit intérieur brute) national. (cf. [13]) Le marché algérien des assurances a progressé de $2,2\%$ en 2015, selon la dernière note de conjoncture du Conseil national des assurances (CNA). Le chiffre d'affaires global du secteur passe de 128,03 milliards de dinars en 2014 à 130,82 milliards de dinars au 31 décembre 2015. Cette croissance est portée essentiellement par la branche des assurances de personnes (assurance vie, voyages...) qui croît de 1,98 milliard de dinars $(+23\%)$ avec un total de 10,58 milliards. Cela dit, le marché reste largement dominé par les assurances dommages (118,1 milliards). La branche automobile, en hausse de $1,3\%$, représente à elle seule 56% de parts de marché (global), avec 66,2 milliards de dinars. (cf. [30])

La modélisation du risque est largement répandue dans les entreprises, beaucoup dans les institutions financières à cause de la réglementation, mais aussi dans de grandes compagnies d'assurance. Cette modélisation nous permet de mieux mesurer l'occurrence de certains événements mais elle ne nous permet pas de les prédire avec exactitude. Le choix des méthodes et techniques permettent la construction du modèle. Une bonne modélisation des déterminants des risques permet de modifier la probabilité associée à l'occurrence d'une catastrophe. (cf. [5,12,34])

Une des raisons pour lesquelles les compagnies d'assurance essaient d'estimer leurs taux de défaut est de déterminer le montant du capital de réserve.

Les modèles du risque individuel et collectif sont les modèle les plus connus en modélisation de risque. Le modèle individuel consiste à considérer les paiements de façon individuelle plutôt que agrégée. Les modèles individuels sont apparus récemment dans la littérature, mais comme mentionné par (Hesselager et Verra li, 2014), ces modèles ne sont pas encore très populaires dans la pratique. En effet, l'absence de données détaillées fiables et la pauvreté des capacités informatiques (jusqu'à récemment) ont considérablement ralenti le développement de cette classe de modèles, et le modèle collectif qui est très utilisé en assurance non-vie.

Ce mémoire comporte une introduction , trois chapitres et une conclusion.

Dans le premier chapitre, nous tacherons d'apporter un éclaircissement sur le champ de l'étude par une présentation des fondements sur lesquels se base l'assurance, la modélisation probabiliste du risque, et à savoir sur les modèles du risque.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons le concept et les propriétés des modèles du risque individuel et collectif.

Le troisième chapitre sera consacré à une présentation de l'approximation du modèle individuel par le modèle collectif avec une comparaison numérique avec quelques méthodes d'approximation basées sur les moments, a savoir l'approximation normale et lognormale.

En fin,Nous terminerons ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives de recherche.

Chapitre 1

Modélisation probabiliste du risque en assurance

1.1 Des notions de base en assurance

1.1.1 Introduction

La notion d'assurance est très ancienne puisqu'on en retrouve des traces dès la plus haute Antiquité, notamment en Mésopotamie, où les commerçants effectuaient une répartition des coûts engendrés par les vols et pillages des caravanes. On trouve également d'autres exemples en Egypte et dans la Rome antique avec l'utilisation des rentes viagères.

Pour trouver des pratiques qui ressemblent plus à l'assurance moderne, il faut cependant revenir plus près de notre époque avec le "prêt à la grosse aventure" dans le domaine maritime au XIVe siècle, les marchands faisaient appel aux banquiers pour financer leurs expéditions maritimes qui coûtaient souvent très cher. Si le bateau faisait naufrage, les marchands n'avaient rien à rembourser aux banques, par contre, s'il arrivait à bon port le banquier était remboursé et pouvait recevoir une compensation financière très élevée.

Par la suite, d'autres types d'assurance sont apparus. Le financier italien Lorenzo Tonti crée en 1652 une forme de contrat d'assurance appelé tontine avec un mode opératoire proche de l'assurance vie. Ces tontines sont des associations de personnes constituées pour une certaine durée et qui mettent en commun des fonds. A l'issue d'une durée définie préalablement, l'association est dissoute et les fonds répartis entre les personnes. Le grand incendie de Londres de 1666 conduit peu après à l'introduction de l'assurance incendie à Hambourgen en 1676. Alors que les premiers contrats d'assurance sur la vie sont proposés à Londres en 1698.

Le développement de l'assurance s'est ensuite poursuivi aux XVIIe et XVIIIe siècles grâce a l'apparition d'outils mathématiques notamment le calcul des probabilités. Il deviens alors possible de mesurer les paramètres des contrats d'assurance (tables de mortalité, risque de perte pour une compagnie d'assurance, rentes viagères…).

En général, l'assurance connait un essor considérable au cours du XXe siècle. Dans la première partie du XXe siècle, cet essor s'est illustré par le développement de compagnie de secours mutuels contre les maladies, les accidents de travail, le chômage et par le développement des assurances obligatoires principalement en assurance non-vie. L'évolution économique des sociétés et la complexification des échanges ont depuis conduit à une importance accrue de la place de l'assurance dans ces sociétés.(cf. [18])

1.1.2 Définition de l'activité assurance

L'assurance est un contrat par lequel l'assureur s'oblige, moyennant des primes ou autres versements pécuniaires, à fournir à l'assuré ou au tiers bénéficiaire au profit duquel l'assurance est souscrite, une somme d'argent, une rente ou une autre prestation pécuniaire, en cas de réalisation du risque prévu au contrat .(cf. [33])

Un produit d'assurance doit explicitement identifier les cinq éléments suivants :

1. **l'événement assuré :** l'événement déclencheur (par exemple, le décès de l'assuré, accident) qui provoque le paiement d'une indemnité,
2. **le montant de la prestation :** le montant de l'indemnité qui devient payable lorsque l'événement assuré intervient,
3. **le bénéficiaire :** la personne qui reçoit le montant de l'indemnité si l'événement assuré intervient,
4. **la durée de la couverture :** la période pendant laquelle l'événement assuré doit intervenir pour donner droit au paiement de l'indemnité.
5. **La prime :** c'est le montant payé par le client pour la couverture des sinistres. Les primes ou cotisations doivent êtres suffisantes pour l'assureur afin de faire face à ses obligations, à savoir :
   - les coûts des sinistres,
   - tous les frais (d'acquisition, de gestion, d'encaissement) exposés par l'organisme assureur.

   Il existe trois types de primes : unique, périodique et unique périodique :
   - **les primes uniques :** sont généralement versées lors de la souscription du contrat et couvrent toute sa durée. Elles sont faciles à gérer et n'impliquent aucun risque de défaut de paiement.
   - **les primes périodiques :**Elle sont payées régulièrement, par exemple chaque année ou chaque mois, pendant toute la durée du contrat.

     Il existe un troisième type de prime, qui est une combinaison des deux types présentés ci-dessus,
   - **la prime unique périodique :** Elle est utilise dans le cadre des polices à échéance renouvelable et se paie pour chaque période successive de couverture, c'est-à-dire chaque année ou mois (ou toute autre période). Ni les taux ni les indemnités payables ne sont définis au-delà de la période couverte par la prime unique. Si l'assuré désire prolonger la couverture, celle-ci est proposée au prix et aux conditions applicables à la date du renouvellement du contrat.

Les éléments d'un produit d'assurance doivent être définis dans toute police ou contrat légal établi entre l'assureur et son client (appelé l'assuré)

1.1.3 Notion du risque en assurance

Le risque est un événement futur et incertain qui dépend uniquement du hasard. Sa réalisation se traduit par des dégâts ou des dommages pouvant affecter soit des biens (meubles ou immeubles), soit des personnes.

L'activité assurance est née du besoin de se prémunir contre le risque, en transférant les risques de l'assuré vers l'assureur qui, en vertu de la loi des grands nombres, bénéficie des effets de la mutualisation et est donc relativement moins exposé au risque que l'assuré .

le risque garant

Le risque garanti est l'élément fondamental du contrat d'assurance, il détermine la nature et l'étendue de la protection attendue par l'assuré. Cependant, pour qu'un risque soit assurable, celui-ci doit répondre à certaines conditions. Ainsi, tous les événements ne sont pas assurables. En effet, seuls les événements revêtant les caractères suivants pourront être assurés : (cf. [33])

1. l'événement ne doit pas être déjà réalisé,
2. Il doit y avoir incertitude, on parle d'événement aléatoire, c'est à dire qui dépend du hasard. Cette incertitude réside dans :
   (a) la survenance de l'événement : on ne sait pas s'il y aura incendie ou vol,
   (b) la date de survenance de l'événement : on ne sait pas à quelle date le décès intervient,
3. l'arrivée de l'événement ne doit pas dépendre exclusivement de la volonté de l'assuré.

Les types de risque

Les différents types de risque sont regroupés en cinq grandes familles : (cf. [21])

- les risques naturels : avalanche, feu de forêt, inondation, mouvement de terrain, cyclone, tempête, etc,
- les risques technologiques : d'origine anthropique, ils regroupent les risques industriels, nucléaires, biologiques, transport de matières dangereuses,etc. Ils sont associés à la prévention des pollutions et des risques sanitaires,
- les risques de transports collectifs (personnes, matières dangereuses) sont un cas particulier des risques technologiques, car les enjeux varient en fonction de l'endroit où se produit l'accident,
- les risques de la vie quotidienne (accidents domestiques, accidents de la route,etc),
- les risques liés aux conflits.

1.1.4 La prestation de l'assureur

A la signature du contrat d'assurance, l'assureur s'engage à verser une somme d'argent, en cas de réalisation du risque. Il s'agit, d'une manière générale, d'une somme destinée :(cf. [33])

- au souscripteur ou l'assuré, par exemple en assurance incendie,
- à un tiers, par exemple en assurance de responsabilité,
- au bénéficiaire, par exemple en assurance vie (en cas de décès).

1.1.5 La compensation au sein de la mutualité

Le mécanisme de l'assurance s'appuie sur la compensation (ou la répartition) des risques qui menacent toutes les personnes et ne se réalisent en définitive que sur quelques-uns. Il serait donc possible de prendre en charge le montant des dommages subis par le sinistré grâce au fond crée par l'ensemble des cotisations versées par chacun des membres. C'est en recourant à des techniques appropriées de prévisions et de répartitions des risques, notamment, le calcul de probabilité de la survenance et la fréquence des risques, qu'une société d'assurance peut prendre des engagements. L'ensemble des personnes assurées contre un même risque et qui cotisent mutuellement pour faire face à ses conséquences, constitue une mutualité.

L'assurance est donc l'organisation de la solidarité entre les gens assurés contre la survenance d'un même événement.Autrement dit, le mécanisme de l'assurance s'appuie sur la compensation (ou la répartition) des risques.

1.1.6 Les mécanismes de l'assurance

Les risques doivent réunir un certain nombre de conditions que nous exposons ci-dessous :(cf. [33])

- **des risques homogènes :** pour que la compensation entre les risques puisse se faire dans les meilleures conditions, il faut réunir un grand nombre de risques semblables qui ont les mêmes chances de se réaliser et qui occasionneront des charges de même catégorie, c'est à dire des risques homogènes. A cet effet, l'organisme d'assurance procède à l'analyse de chaque type de risque pour pouvoir les classer dans une catégorie et ainsi proposer des tarifs appropriés pour chaque catégorie de risque.
- **des risques dispersés :** l'organisme d'assurance doit éviter aussi d'assurer les mêmes types de risques qui pourraient éventuellement se réaliser en même temps. Ce principe est souvent difficile à respecter, néanmoins, les techniques de réassurance et de coassurance permettent le plus souvent de limiter les éventuels cumuls de risques.
- **la division des risques :** il ne suffit pas de sélectionner et de disperser les risques, mais il faut éviter d'accepter un trop grand risque qui pourrait ne pas être compensé par les primes.

Les techniques de division du risque : tous les risques ont recours à deux techniques de division : la coassurance et la réassurance. Ces deux techniques sont indispensables et peuvent être mises en œuvre en même temps.(cf. [33])

- **La coassurance :**

  La coassurance est une répartition proportionnelle d'un même risque entre plusieurs assureurs. L'assureur qui accepte un pourcentage du risque, reçoit en échange une prime proportionnelle au risque supporté et doit supporter la même proportion des prestations dues en cas de sinistre.
- **La réassurance :**

  La mise en œuvre d'une sécurité supplémentaire devient indispensable afin de réduire le plus possible au client, le risque de ne pas être indemnisé.

  C'est dans ce cadre qu'intervient la réassurance qui est considérée comme une technique de répartition des risques. En termes plus simplifiés, la réassurance est " l'assurance de l'assurance " ou une assurance au second degré.

1.2 Modèles du risque

Dans cette section, nous rappelons les principaux modèles probabilistes utilisés dans la théorie du risque qui servent à décrire l'activité purement d'assurance.(cf.[33])

1.2.1 Modèle du risque classique

Le modèle du risque classique ou de Cramér-Lundberg , qui est désigné aussi sous le nom "Poisson composé", a été introduit en 1903 par l'actuaire Suédois Filip Lundberg (cf. [33]).

La notation P/G, empruntée de la théorie des files d'attentes, fournit l'information au sujet des lois des arrivées et des montants des réclamations des sinistres. La lettre G signifie général et P signifie Poisson. Il s'ensuite que la suite $\{\sigma_n\}, n \in \mathbb{N}$ des arrivées des réclamations forme un processus de Poisson ce qui est équivalent à dire que les temps des inter-occurrences $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}, n \geq 1$ sont de distribution exponentielle(cf. [33]).

Ce modèle est construit selon les hypothèses suivantes :

- Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de réclamations est un processus de Poisson d'intensité λ.
- La séquence $\{Z_n, n \in N^*\}$ des montants des réclamations est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ.
- La prime est proportionnelle au temps, c'est-à-dire, $\sqcap(t) = ct$ où $c > 0$ est le taux de prime constant choisi de telle sorte que la société soit rentable.
- Pour tout $t > 0$ et $n \geq 1$, la variable aléatoire N(t) et le vecteur aléatoire $(Z_1, ..., Z_n)$ sont indépendants.

Le processus de Poisson composé modélise la réserve de la compagne d'assurance $\{X(t), t \geq 0\}$ avec

$$X(t) = u + ct - R(t), \qquad t \geq 0, \tag{1.1}$$

où

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \tag{1.2}$$

est le montant cumulé des réclamations à l'instant t.

Le processus de risque est donné par

$$S(t) = ct - R(t), \qquad t \geq 0.$$

De plus,

$$E[ct - R(t)] = ct - E[N(t)]\mu = ct - \lambda t \mu = (c - \lambda \mu)t = \theta t \tag{1.3}$$

où θ est le chargement de sécurité qui doit être positif.

Cas particulier :

Modèle de Lundberg où P/P

Un cas particulier du modèle classique est le modèle P/P appelé aussi modèle de Lundberg, se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est à-dire

$$F_Z(y) = 1 - \exp^{-\mu y}, \qquad y \geq 0,$$

où F_Z est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z qui génère les montants des réclamations.

Généralisation du modèle du risque classique

Le modèle du risque classique tient compte de certaines propriétés de base du portefeuille d'assurance, mais il n'est pas toujours réaliste. Une importante partie de la gestion du risque en assurance est consacrée à la généralisation de ce modèle de différentes manières. En particulier, au relâchement des hypothèses sur la distribution des arrivées et des montants des réclamations. Une autre modification du modèle classique a été développée en considèrent une prime avec une structure plus complexe ou variable.

Dans le cas où les primes sont reçues à des moments aléatoires et leurs montants soit également aléatoire, Le capital de la société est de la forme suivante :

$$X(t) = u + \sum_{i=1}^{N'(t)} c_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \qquad t \geq 0, \tag{1.4}$$

où $\{N'(t), t \geq 0\}$ et $\{N(t), t \geq 0\}$ sont des processus de Poisson indépendants d'intensités λ' et λ, respectivement, c_i et Z_i des variables aléatoires indépendantes de fonctions de répartition F_c et F_Z respectivement.(cf. [1,31,32])

1.2.2 Modèle de Sparre Andersen

En 1957 Sparre Andersen, dans un article présenté au Congrès international des actuaires à New York, a proposé une première généralisation du modèle classique du risque. En effet, au lieu de supposer que les temps entre deux réclamations successives sont des variables aléatoires indépendantes et suivent une même loi exponentielle, il a conservé l'hypothèse d'indépendance tout en permettant que le temps entre les réclamations ait une distribution autre qu'exponentielle. Ce modèle implique des calculs généralement plus compliqués que dans le cas du modèle de Poisson composé, mais celui-ci apparaît déjà plus général pour la modélisation de produits d'assurance.(cf. [33])

1.2.3 Modèle markovien

Dans le modèle markovien, l'arrivée des réclamations est décrite par un processus ponctuel $\{N(t), t \geq 0\}$, où $N(t)$ étant le nombre de sauts d'une chaîne de Markov sur un espace d'état fini dans l'intervalle$(0, t]$. Les montants des réclamations sont présentée par une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec une prime $c > 0$ constante. Ce modèle est de Poisson lorsque les éléments diagonaux de la matrice de transition de la chaîne de Markov sont identiques et constants.

Considérons un espace de probabilité (ω, F, P). $\{X_s\}_{s \geq 0}$ est le processus de saut markovien d'espace des états fini $E = \{1, 2, ..., m\}$ et sa matrice de transition est

$Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$.

$\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition commune F_Z avec $F(0) = 0$ et de moyenne μ.

On suppose toujours que $\{X_s\}_{s \geq 0}$ est indépendant de $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\text{Soient} \qquad S_0 = 0, \quad S_n = \inf\{t > S_{n-1} : X_t \leq X_{S_{n-1}}\}, \qquad n \geq 1$$

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Le processus stochastique

$$Y(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \qquad t \geq 0$$

est alors appelé processus de risque markovien (cf. [36]).

1.2.4 Modèle semi-markovien

Le modèle du risque semi-markovien a été introduit par Miller (cf. [24]) et a été développé par Janssen (cf. [16,17,15]). L'idée d'un processus semi-markovien est de ne pas considérer directement un processus markovien mais un environnement markovien $\{J_n, n \geq 1\}$ qui conditionne les variations d'un autre processus $\{X_t, t \geq 0\}$. Le taux de variation de ce dernier change selon l'état où se trouve J_t. Une première idée était de présenter m types possibles de réclamations appartenant à l'ensemble $I = \{1, ..., m\}$. Plus tard, cet ensemble a été considéré comme un paramètre d'environnement. (cf. [14])

L'hypothèse de base pour obtenir un modèle du risque semi-markovien est

$$P(J_n = j, T_n \leq x, Z_n / (J_k, T_k, Z_k), k = 1, ..., n-1) = Q_{J_{n-1}j}(x, y)$$

où. $\{T_n\}_{n\geq 1}$: l'inter-arrivées des réclamations,$\{Z_n\}_{n\geq 1}$: montants des réclamations, $\{J_n, n \geq 1\}$: types successifs des réclamations ou des états de l'environnement, avec $J_0 = j_0, T_0 = Z_0 = 0$.

L'hypothèse précédente signifie que le processus tridimensionnel $\{(J_n, T_n, Z_n), n \geq 0\}$est ce qu'on appelle un processus (JX) bidimensionnel de noyau Q dont les propriétés et les caractéristiques sont introduites par Janssen dans [29].

1.3 Les outils mathématiques de l'analyse des risques

Ce premier paragraphe a pour objectif de résumer les outils mathématiques usuels de mesure et de comparaisons des risques. Une attention particulière est portée aux caractéristiques que l'on peut attendre des mesures de risque pour pouvoir être utilisées à des fins de solvabilité et d'estimation de capitaux économiques.

1.3.1 Les mesures de risque

Définition et propriétés

Nous reprenons ici la définition d'une mesure de risque telle qu'elle est formalisée dans Denuit et Charpentier en (2004). (cf. [19])

- Définition 1 : Mesure de risque

  On appelle mesure de risque toute application ρ associant un risque $\rho(X) \in \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$.

  En particulier, cette définition nous permet d'établir que lorsqu'ils existent, l'espérance, la variance ou l'écart-type sont des mesures de risque. Si un grand nombre d'applications répondent à la définition de mesure de risque, pour être jugée « satisfaisante » il est souvent exigé d'une mesure de risque d'avoir certaines propriétés dont les plus fréquentes sont appelées infra.(cf. [19])

  Le Chargement de sécurité

  La notion de chargement de sécurité est étroitement liée à celle de tarification. Autrement dite, un principe de prime contient un chargement de sécurité s'il conduit à exiger une prime supérieure à celle qui est exigée si la mutualisation des risques est parfaite.

- Définition 2 : Chargement de sécurité

  Une mesure de risque ρ contient un chargement de sécurité si pour tout risque X, on a $\rho(X) \geq E[X]$.

  Mesure de risque cohérente

  La définition d'une mesure de risque est très générale puisque toute fonctionnelle réelle positive d'une variable aléatoire peut être considérée comme étant une mesure de risque. Aussi,

en pratique, on exige de telles mesures qu'elles disposent de propriétés mathématiques dont la transcription conceptuelle permette de les jauger. En générale, une mesure de risque ρ possède une partie des caractéristiques suivantes :
- Invariance par translation : $\rho(X+c)=\rho(X)+c$ pour toute constante c.
- Sous-additivité $\rho(X+Y)\leq\rho(X)+\rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y.
- Homogénéité :$\rho(cX)=c\rho(X)$ pour toute constante positive c.
- Monotonie : $P[X<Y]=1 \quad \Rightarrow \quad \rho(X)<\rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y.

Ces caractéristiques trouvent une interprétation naturelle dans la situation où la mesure de risque doit permettre de définir un capital de solvabilité d'une société d'assurance. Ainsi, la sous-additivité représente l'effet de la diversification : une société qui couvre deux risques ne nécessite pas davantage de capitaux que la somme de ceux obtenus pour deux entités distinctes en partageant ces deux risques. La monotonie traduit quant à elle le fait que si le montant résultat d'un risque est systématiquement (au sens presque sûr) inférieur à celui résultant d'un autre risque, le capital nécessaire à couvrir le premier risque ne saurait être supérieur à celui nécessaire pour couvrir le second. L'association de ces quatre axiomes a donné naissance au concept de cohérence d'une mesure de risque dans Artzner et al. (1999).

Mesure de risque cohérente Une mesure de risque invariante par translation, sous-additive, homogène et monotone est dite cohérente. Cette notion de cohérence n'est toutefois pas ce que l'on attend a minima d'une mesure de risque. Ainsi certaines mesures de risque parmi les plus exploitées actuellement ne le sont pas. C'est notamment le cas de la Value-atRisk (VaR) ou encore de la variance

.

Définition . Mesure de risque comonotone

On appelle mesure de risque comonotone additive toute mesure de risque ρ telle que : $\rho(X+Y)=\rho(X)+\rho(Y)$ pour tout vecteur comonotone $(X_1;X_2)$

Remarque

Dans ce demain de gestion des risque, l'écart-type et la variance sont les premières mesures de risque étudiées. on les retrouve notamment dans le critère de Markowitz (moyenne-variance) qui sert de socle aux premières théories d'évaluation des actifs (MEDAF). Toutefois ce critère n'est pas bien adapté à l'activité d'assurance, notamment parce qu'il est symétrique et pénalise autant les « bonnes variations » que les « mauvaises ».

1.3.2 Théorie de la ruine

La théorie de la ruine, parfois désignée comme la théorie du risque collectif, est une branche de la science actuarielle qui étudie la vulnérabilité d'un assureur à l'insolvabilité, fondée sur la modélisation mathématique de la réserve d'une compagnie d'assurance. Le premier but de la théorie de la ruine a donc été de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique, d'évaluer sa probabilité de ruine, c'est-à-dire, la probabilité que le scénario introduisant un échec se réalise. La théorie permet aussi le calcul de nombreuses mesures et quantités liées à la ruine, y compris la probabilité de ruine, la répartition de l'excédent de l'assureur immédiatement avant la ruine, le déficit au moment de la ruine, etc (cf. [2])

Cette théorie de la ruine est basée sur l'application des probabilités. L'évaluation de la probabilité de ruine a été une source importante d'inspiration et du développement des techniques en mathématiques actuarielles.

Probabilité de ruine

Considérons le processus de réserve $\{X(t), t \geq 0\}$ d'une compagnie d'assurance définie par(cf. [33]) :

$$X(t) = u + P(t) - R(t)$$

et définissons la variable aléatoire

$$\tau = \inf\{X(t) < 0;\ t \geq 0\}.$$

τ représente l'instant où le processus de réserve devient négatif, ou de manière équivalente, le processus de risque $\{P(t) - R(t),\ \ t \geq 0\}$.

Autrement dit, τ est l'instant de la ruine du portefeuille.

On appelle probabilité de ruine à horizon fini T, la fonction

$$\psi(u,T) = P(\exists s \in [0,T]/X(s) < 0), \forall u \geq 0. \tag{1.5}$$

$$X(0) = u.$$

En temps infini, elle est définie par

$$\psi(u,\infty) = \psi(u) = P(\ni s \geq 0/X(s) < 0), \forall u \geq O \tag{1.6}$$

L'instant de la ruine τ dépend de l'ensemble des éléments aléatoire dans le processus de réserve $\{X(t), t \geq 0\}$ ainsi, que de la valeur déterministe u. En effet, l'instant de la ruine peut être défini par

$$\tau(u) = \inf\{X(t) < 0/X(0) = u; t \geq 0\}.$$

La probabilité de ruine à horizon fini peut alors s'exprimer par

$$\psi(u,T) = P(\inf\{X(t) < 0/X(0) = u; 0 \leq t\} \leq T) = P(\tau(u) \leq T)$$

et à horizon infini par

$$\psi(u,\infty) = \psi(u) = P(\inf\{X(t) < 0/X(0) = u; t \geq 0\} \leq \infty) = P(\tau(u) \leq \infty)$$

Il est parfois plus commode d'utiliser les probabilités de non ruine en temps fini et en temps infini définies respectivement par

$$\phi(u,T) = 1 - \psi(u,T) \qquad \text{et} \qquad \phi(u) = 1 - \psi(u).$$

Condition nécessaire de rentabilité

On appelle chargement ou coefficient de sécurité, la quantité définie par :

$\theta = c - \lambda\mu$. Le coefficient $\lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un taux de prime c supérieur à $\lambda\mu$ pour que, en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnisations payées par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons la propriété suivante :

- Si $\theta > 0$ cela garantit, d'après la loi forte des grands nombres, que le processus de réserve tend presque sûrement vers $+\infty$ et que $\psi(u) < 1$. L'activité est dite dans ce cas "rentable".
- Si $\theta < 0$ alors X(t) tend vers $-\infty$ presque sûrement quand t tend vers l'infini et par conséquent $\psi(u) = 1$. (Cf. [19])

  De façon évidente, la compagnie doit s'assurer que $\theta > 0$. Sous cette hypothèse, nous pouvons quantifier la probabilité de ruine, autrement, la ruine sera certaine. Généralement, nous ferons l'hypothèse que l'activité est rentable.

  L'évaluation de la probabilité de ruine est très compliquée. Cette dernière dépend fortement de la distribution des montants et celle de la fréquence des réclamations. Si cette distribution correspond au cas typique d'une distribution à queue légère, la probabilité de ruine se révélera être bornée. Cependant, lorsque la distribution des montants des réclamations a une queue lourde, alors une seule grande réclamation peut être responsable de la ruine de la compagnie d'assurance. (cf. [33])

1.3.3 Autres mesures de risque

En plus de la probabilité de ruine, il existe d'autres mesures de risque couramment utilisées dans la théorie de la ruine. Gerber [11], Dufresne et Gerber [8] et Picard [26] ont défini les mesures suivantes :
– l'instant de la ruine $\tau(u) = \inf\{X(t) < 0/X(0) = u; t \geq 0\}$.
Par convention $\tau = +\infty$ si $X(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$,
- la sévérité de la ruine $X(\tau(u)) = u + \sqcap(\tau(u)) - R(\tau(u))$,
– le temps passé en dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement

$$\tau'(u) - \tau(u) \qquad \text{où} \qquad \tau'(u) = \inf\{X(t) = 0; t > \tau(u)\},$$

– la sévérité maximale : $\inf\{X(t); t > 0\}$,
– la sévérité agrégée de la ruine jusqu'au rétablissement :

$$J(u) = \int_{\tau(u)}^{\tau'(u)} |X(t)| dt,$$

– et le temps total passé en-dessous de zéro

$$\tau(u) = \int_{0}^{+\infty} 1_{\{X(t)<0\}} dt.$$

Chapitre 2

Modèle du risque individuel et collectif

La charge globale de sinistres peut s'écrire comme la somme, sur le nombre de polices, du montant de sinistre total engendré par chaque police ou encore comme la somme, sur le nombre de sinistres, des montants de chaque sinistre. On appelle modèle individuel la première approche et modèle collectif la seconde.

2.1 Présentation de Modèle du risque individuel

Le modèle individuel vise à représenter le montant total des sinistres à payer par la compagnie d'assurances sur une période donnée (typiquement un an) en sommant assuré par assuré les montants des sinistres subis par chaque individu sur cette période.
Soit n le nombre d'assurés, aussi appelé l'effectif du portefeuille d'assurances, ou encore le nombre de polices.
Soit I_i la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si au moins un sinistre a touché la i-ème police et 0 sinon, et Y_i la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ représentant le montant total de ses éventuels sinistres.
La charge sinistre totale S sur la période considérée est alors donnée par la formule

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i Y_i. \tag{2.1}$$

En pratique, il est très difficile de mener les calculs dès que le nombre de polices est élevé, même sous des hypothèse restrictives. Le plus souvent, on supposera que les variables aléatoires I_i, $i = 1, \ldots, n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, avec $P(I_i = 1) = p$, que les Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes des I_i. Dans ce cas, la fonction de répartition de S est donnée par la formule classique des convolutions :(cf. [3])

$$F_S(y) = \sum_{k=1}^{n} c_n^k p^k (1-p)^{n-k} F_Y^{*k}(y), \tag{2.2}$$

où F_Y^{*k} est la fonction de répartition de $\sum_{i=1}^{k} Y_i$ qui vérifie la relation de récurrence suivante : (cf. [19])

$$F_Y^{*k+1}(y) = \int_i^y F_Y^{*k}(y-z) \mathrm{d}F_Y(z) \tag{2.3}$$

Remarquons que $c_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ représente ici la probabilité que "k" contrats parmi "n" aient subi au moins un sinistre sur la période considérée.
Dans ce cas,

$$E(S) = npE(Y_1)$$

et

$$Var(S) = np^2Var(Y_1) + np(1-p)[E(Y_1)]^2$$

Lorsque Y suit un certain type de lois, comme les lois Gamma, il est possible d'utiliser les propriétés d'additivité de ces lois pour obtenir directement les F_Y^{*k} pour $k \geq 1$. Par exemple, si $Y \sim G(\alpha, \lambda)$, dont la densité est donnée par l'équation

$$F_Y(y) = \frac{y^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}\exp^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{2.4}$$

alors F_Y^{*k} est la fonction de répartition d'une loi Gamma de paramètres $(k\alpha, \lambda)$.(cf. [29])
Ce résultat se généralise si l'indépendance est vérifiée, même si les $Y_i \sim G(\alpha_i, \lambda)$, avec des paramètres α_i différents, mais le même paramètre λ.

2.1.1 Moments et fonction génératrice des moments de Modèle individuel

Calcul des Moments

L'espérance mathématique du total des réclamations joue un rôle important dans la détermination de la prime pure, en plus de donner une mesure de la tendance centrale de sa distribution. Les moments centrés à la moyenne d'ordre 2, 3 et 4 sont les autres moments habituellement considérés, car ils donnent généralement une bonne indication de l'allure de la distribution, et ceux-ci nous donnent respectivement une mesure de la dispersion de la distribution autour de sa moyenne, une mesure de l'asymétrie et de l'aplatissement de la distribution considérée. Les moments, qu'ils soient simples, conjoints ou conditionnels, peuvent éventuellement nous servir à construire des prédicteurs, des courbes de régression ou des approximations de la distribution du montant des réclamations.(cf. [18])
Pour une variable aléatoire X et un entier $r \geq 1$, nous notons (lorsque ces quantités existent) :
- $M_r(Y) = E[Y^r]$ le moment d'ordre r,
- $\mu_r(Y) = E[(Y - E[Y])^r]$ le moment centré d'ordre r,
-$\sigma(Y) = \sqrt{E[(Y - E[Y])^2]}$ l'écart type,
-$\gamma_1(Y) = \frac{\mu_3(Y)}{\gamma^3(Y)}$ et $\gamma_2(Y) = \frac{\mu_4(Y)}{\gamma^4(Y)} - 3$ les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de Fisher.
Un premier résultat classique permet d'avoir une majoration des queues de variables aléatoire en fonction du premier moment
proposition 1 (Inégalité de Markov)(cf. [18]) .
Soit X une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre 1. Alors

$$P(Y > y) \leq \frac{E(Y)}{y},$$

pour tout y > 0.
proposition 2 (Premiers moments du modèle individuel)(cf.[18])
Dans le modèle individuel $S = Y_1 + ... + Y_K$,si les Y_k admettent un moment d'ordre2 (resp.3) alors S admet aussi un moment d'ordre 2 (resp. 3) et

$$\sigma^2(S) = K\sigma^2(Y_1),$$

$$(\text{resp. } \mu_3(S) = K\mu_3(Y_1)).$$

Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments de Y, si elle existe, permet de calculer tous les moments de Y et dans certains cas, après inversion, de trouver la fonction de répartition de Y. Ainsi, nous rappelons dans cette section, sans démonstrations, quelques théorèmes donnant des équations intégrales pour la fonction génératrice des moments de Y.

Définition :

La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Y, noté L_Y est la fonction définie par

$$L_Y(\theta) = E[\exp^{\theta Y}], \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Proposition. Soient Y_1et Y_2 deux variables aléatoires positives et indépendantes. Alors

$$L_{Y_1+Y_2} = L_{Y_1} L_{Y_2}.$$

Nous pouvons également définir la fonction génératrice d'un vecteur aléatoire :

Définition. Pour un vecteur aléatoire $Y = (Y_1, ..., Y_n)^T$ à valeurs dans $[0, +\infty[^n$, sa fonction génératrice des moments $L_Y$est définie par

$$L_Y(\theta) = E[\exp^{\theta^T Y}]$$

Cette fonction est finie sur $(]-\infty, 0])^n$.

Fonction génératrice d'une distribution sur N

Définition : Pour une variable aléatoire Y à valeurs dans N, sa fonction génératrice G_Y est définie par

$$G_Y(s) = \sum_{n \in N} s^n P(Y = n), \quad s \in [0, 1]$$

Corollaire. Si G_1 et G_2 sont deux fonctions génératrices égales sur un intervalle [c,1] avec $c \in]0, 1[$, alors $G_1 = G_2$.(cf. [18])

Fonction génératrice des moments du modèles individuel

Pour le modèle individuel $S_{ind} = \sum_{i=1}^{K} Y_i$, nous avons

$$L_s(\theta) = (L_Y(\theta))^K,$$

pour tout $\theta \in]-\infty, 0]$.

2.2 Présentation du modèle collectif

Le modèle collectif consiste à modéliser l'activité assurance non plus en regardant si chaque police fait défaut ou pas, mais en comptabilisant un nombre aléatoires de montants des sinistres indépendantes et identiquement distribuées.
On définit ainsi la charge totale des pertes sur une période T dans le modèle collectif par la variable aléatoire positive suivante : (cf. [27])

$$S_{coll} = \sum_{i=1}^{N} X_i, \tag{2.5}$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ représentant le nombre de sinistres sur la période T, et pour $i \geq 1$, X_i est une variable aléatoire à valeurs dans R^+ représentant le coût du i-ème sinistre, avec la convention selon laquelle la somme est nulle si $N = 0$.
Les variables aléatoires $X_i,\ i \geq 1$ sont supposée, indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes de N.
La fonction de répartition de S en conditionnant par le nombre de sinistres N,est donnée par l'équation suivante :

$$F_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(N = n) F_X^{*n}(x), \tag{2.6}$$

ou F_X^{*n} est la fonction de répartition de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ qui vérifie la relation de récurrence suivante :

$$F_X^{*n+1}(x) = \int_0^x F_X^{*n}(x-y)\mathrm{d}F_X(y), \quad n \geq 0, \tag{2.7}$$

avec

$$F^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & six > 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Dans le cas où l'existence du premier moment de N et de X est vérifiée, nous avons :

$$E(S) = E(N)E(X).$$

De plus, en appliquant l'équation de décomposition de la variance on obtient : (cf. [27])

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X).$$

La fonction génératrice des moments dans un modèles du risque collectif

Pour le modèle collectif $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, nous avons

$$L_s(\theta) = G_N(L_X(\theta))$$

pour tout $\theta \in]-\infty, 0]$.
Où G_N est la fonction génératrice de S et L_X la fonction génératrice des moments de X

2.2.1 La distribution de nombre de sinistres

Dans cette partie, nous présenterons quelque loi de probabilité utilisée dans la modélisation du nombre de sinistres

La loi de Poisson

Définition : $(P_n)_{n\geq 0}$ est distribuée selon une loi de Poisson $P(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (cf.[27])

$$P_n = P(N = n) = \exp^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!},$$

avec $\lambda > 0$ comme unique paramètre. Cette loi de probabilité est facilement estimable; elle reste la loi fondamentale de l'assurance non-vie. Ses inconvénients sont une queue de distribution légère, et l'égalité moyenne-variance :

$$E(N) = \lambda \quad et \quad V(N) = \lambda.$$

Sa fonction génératrice est donnée par

$$G_N(s) = \exp^{-\lambda(1-s)}, \quad s \in [0,1].$$

La loi binomiale

$(p_n)_{n\geq 0}$ est distribuée selon une loi Binomiale B(a,p) de paramètres $a \in \mathbb{N}^*$et $p \in]0,1[$ si pour tout n entier avec $n \in \{0,...,a\}$, (cf. [18])

$$p_n = p(N = n) = C_a^n p^n q^{a-n},$$

avec q=1-p.
Sa fonction génératrice est donnée par

$$G_N(s) = (1 - p + ps)^a, s \in \mathbb{R}$$

Ses deux premiers moments sont données par les formules suivantes :

$$E[N] = ap, \ et \qquad \sigma^2(N) = ap(1-p).$$

2.2.2 Distributions de Coût des sinistre

La loi exponentielle

Définition : $(f_x)_{x\geq 0}$ est distribuée selon une loi de exponentielle $exp(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, si pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, on a (cf.[6])

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

Cette loi est aussi appelée loi de la durée de vie (sans vieillissement). Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \int_0^a \lambda \exp^{-\lambda x} \mathbf{d}x = 1 - \exp^{-\lambda a}$$

Ses deux premiers moments sont données par les formules suivantes :

$$E[N] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(N) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La loi exponentielle est qualifiée de loi « sans mémoire »(cf. [35]), elle permet la modélisation du comportement des matériels fonctionnant avec un taux de défaillance constant (ou pouvant être considéré comme constant).
La loi exponentielle est fréquemment utilisée pour décrire des événements aléatoires dans le temps (files d'attente, montant de réclamation en assurance , ect).

La loi normale

La loi normale de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$ est la loi de probabilité notée $N(m, \sigma^2)$ de densité $f_{N(m,\sigma^2)}$ définie par

$$f_{N(m,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De plus, une telle variable admet des moments à tous les ordres.(cf. [18])
La fonction génératrice de X est définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$ et elle est donnée par la formule suivante :

$$M_X(\theta) = \exp(m\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2), \quad \theta \in \mathbb{R}_+.$$

La loi Log Normale ln(μ ;σ^2)

Cette loi possède deux paramètres μ réel, et $\sigma > 0$. Cette loi est très utilisée en assurance non vie. C'est la transformée exponentielle de la loi $N(\mu;\sigma^2)$. En effet, X suit $\ln(\mu;\sigma^2)$ si et seulement si, $\ln(X)$ est distribuée selon N(μ ;σ^2). (cf. [27])
Les principales propriétés de cette loi sont les suivantes :
sa fonction de densité est : $f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x > 0,$

sa fonction de répartition est :$F(X) = \phi(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}), \quad x \in \mathbb{R},$

- $E(\ln(X)) = \mu \qquad ou \qquad E(X) = \exp^{\mu+\frac{2}{\sigma^2}},$

  et

- $Var(\ln(X)) = \sigma^2 \qquad ou \qquad Var(X) = \exp^{2\mu+\sigma^2(\exp^{\sigma^2-1})}.$

Loi de Pareto P(a,α)

Cette loi couramment utilisée en réassurance, dépend d'un paramètre
$\alpha > 0$, de forme et d'un paramètre a > 0 de position (le seuil de prise en compte des montants de sinistres). (cf. [27])
La fonction de répartition F de la loi de Pareto est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1-(\frac{a}{x})^{\alpha} \quad si \quad x > a, \\ \\ 0 \quad si \quad x \leq a. \end{cases}$$

Les deux premiers moments sont donnés par :

$$E(X) = \frac{\alpha t}{\alpha - 1}, avec \quad \alpha > 1,$$

et

$$Var(X) = \frac{\alpha t^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, avec \quad \alpha > 2.$$

la loi gamma

Pour deux réels a et b strictement positifs, la loi gamma $G(a,b)$ est la loi de densité $f_{\gamma(a,b)}$ donnée par la formule suivant :(cf. [18])

$$f_{G(a,b)}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp^{-bx}, \quad x > 0,$$

où $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} y^{a-1} \exp^{-y} \mathbf{d}y$.
Pour une variable aléatoire X qui suit une loi $G(a,b)$, nous avons

$$E[X] = a/b,$$

$$Var(X) = a/b^2.$$

La fonction génératrice de X est définie pour $\theta \in [0,b[$ et elle est donnée par la relation suivante :

$$M_X(\theta) = (\frac{b}{b-\theta})^a.$$

Distributions à queues fines : cas des petits risques

Définition : Soit X une variable aléatoire positive. On dit que la loi de X est à queue fine (ou légère), s'il existe $\delta > 0$ tel que(cf. [22])

$$\lim_{x \to +\infty} \sup \frac{P(X > x)}{\exp^{\delta x}} < \infty.$$

(décroissance exponentielle)
Proposition :
Soit X une variable aléatoire positive. La loi de X est à queue fine si et seulement si la fonction génératrice des moments de X est définie au voisinage de 0 ou de façon équivalente si

$$\exists \alpha > 0 : \mathbf{E}[\exp^{\alpha X}] < \infty$$

Distributions à queues épaisses : cas des grands risque

Définition. Soit X une variable aléatoire positive (cf. [22])

$$Si \qquad \lim_{x\to\infty} P(X > x)\exp^{\delta x} = \infty \quad pour\ tout \quad \delta > 0,$$

On dit que la loi de X est a queue épaisse (ou lourde). Dans ce cas, la fonction génératrice des moments de X n'est pas définie.

L'étude de la probabilité de ruine et notamment son comportement asymptotique vont dépendre significativement du type de la loi de X (queue fine ou lourde). Historiquement, Lundberg et Cramer ont fait leur étude pour les lois à queues fines, qui ont l'avantage d'être plus simples à manipuler. Cependant, des études statistiques ont montré que des événements comme les catastrophes naturelles, tremblements de terres, relativement rares mais d'un coût très élevé, ne peuvent être modélisés par des lois à queues fines. La théorie du risque s'est donc développée également pour des lois à queues lourdes.

2.3 Relation entre le modèle individuel et collectif

Dans cette partie, nous présenterons un aperçu sur la relation entre modèle individuel et collectif lorsque le nombre de contrats est important et que le portefeuille est homogène, on peut approximer le modèle individuel par un modèle collectif, (cf. [9])

$$S^{ind} \sim S^{col}$$

c'est à dire le modèle individuel peut s'écrire comme un modèle collectif.
Nous nous plaçons dans $\mathbb{L}^2$. Dans le modèle individuel, chaque sinistre individuel était (cf. [4])

$$S_i = I_i X_i$$

où $I_i \sim \mathbb{B}(p_i)$ indépendante de X_i. La sinistralité totale est :

$$S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} S_i^{ind}$$

On peut écrire

$$S_i^{ind} = \sum_{k=1}^{Z_i} X_k^i$$

Nous avons exactement la même variable aléatoire avec la même loi. Si les X_i sont indépendants et de même loi et si tous les p_i sont identiques égaux à p, nous avons l'égalité en loi

$$S^{col} = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

où en loi $N = \sum_i I_i$, c'est à dire $N \sim \mathbb{B}(n, p)$. Cela traduit des risques homogènes. Cependant, la richesse du modèle individuel était le caractère hétérogène des risques, que ce soit des p_i ou des X_k. On peut poser, pour chaque sinistre individuel

$$S_i^{col} = \sum_{k=1}^{N_i} X_k^i$$

où $N_i \sim P(p_i)$, alors en moyenne il y aura le même nombre de sinistres, mais chaque individu peut avoir plusieurs sinistres. Cela permet de rendre plus cohérent une sinistralité individuelle automobile par exemple, mais moins le cas d'une assurance en cas de décès, ce dernier ne peut être qu'unique. En définissant $S^{col} = \sum_{i=1}^{n} S_i^c$ nous avons l'égalité en loi

$$S^{col} = \sum_{k=1}^{M} Y_k$$

où M est la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et les Y_k sont les lois mélanges avec

$$\mathbb{P}_Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda} \mathbb{P}_{X_i}$$

preuve(cf. [30])
Il suffit de vérifier que S^{ind} et S^{col} ont même transformée de Laplace.

$$\begin{aligned}
L_S(t) &= \prod_{i=1}^{n} L_{S_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i (L_{Y_i}(t) - 1)) \\
&= \exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (L_{Y_i}(t) - 1)) \\
&= \exp(\lambda (\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} L_{Y_i}(t) - 1))
\end{aligned}$$

On remarque alors que la transformée de Laplace de la loi de f.d.r. F est $L = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_{y_i}$, d'où

$$\forall t \geq 0, \quad L_S^{ind}(t) = \exp(\lambda (L(t) - 1)) = L_S^{col}(t)$$

Nous pouvons calculer les deux premiers moments de S^{ind} et de S^{col}. Pour le modèle individuel ^{ind}, nous avons

$$\mathbb{E}(S^{ind}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}(X_i),$$

et

$$Var(S^{ind}) = \sum_{i=1}^{n} p_i Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i (1 - p_i) \mathbb{E}(X_i)^2.$$

Pour le modèle collectif

$$\mathbb{E}(S^{col}) = \lambda \mathbb{E}(Y)$$

$$Var(S^{col}) = \lambda Var(Y) + \lambda \mathbb{E}(Y)^2 = \lambda \mathbb{E}(Y^2)$$

De plus, nous avons

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda} \mathbb{E} X_i$$

et

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda} \mathbb{E} X_i^2$$

En remplaçant dans $\mathbb{E}(S^{col})$ et $Var(S^{col})$, on obtient

$$\mathbb{E}(S^c) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}(X_i)$$

et

$$Var(S^c) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}(X_i^2)$$

On remarque que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(S^c)$. Pour la variance, on peut réécrire

$$\begin{aligned} Var(S) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2) + \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)\mathbb{E}(X_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbb{E}(X_i^2) - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \mathbb{E}(X_i)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $Var(S^c) > Var(S)$ si X_i n'est pas centré. La version collective est dite «plus prudente».

Chapitre 3

Approximation du modèle individuel par le modèle collectif .

Le but de l'approximation du modèle individuel par le modèle collectif, consiste à ajuster les distributions de fréquence et de sévérité des sinistres du modèle collectif en fonction du portefeuille du modèle individuel

3.1 Approximations fondées sur les moments du modèle du risque individuel

On considéré le modèle du risque individuel suivant :

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i Y_i.$$

On suppose que les variables aléatoires I_i $i = 1, \ldots, n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, avec $P(I_i = 1) = p$, que les Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées et indépendants des $I_i, \quad \forall i$.

3.1.1 Approximation fondée sur la distribution normale

L'approximation normale est sans doute l'une des approximations les plus simples à utiliser. Cette dernière exige toutefois un grand portefeuille de risque, ce qui signifie un nombre de risques très élevé pour le modèle individuel.
On rappelle que la fonction de densité de probabilité de la loi normale de paramètres μ et σ^2 notée $\phi(x)$ est donnée par

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour un grand portefeuille de risque, la fonction de répartition du montant total des réclamations s'estime à l'aide du théorème central limite.
Les valeurs de E[s] et Var(s) sont supposées connues. On approxime la variable aléatoire S par la variable aléatoire $T \sim N(E[T], Var(T))$, où E [T] = E [S] et Var (T) = Var (S).

Soit

$$F_S(x) \simeq F_T(x) = \Phi(\frac{x - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}),$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition d'une loi normale avec

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i], \qquad n \in \mathbb{N},$$

et

$$Var[S] = \sum_{i=1}^{n} Var[Y_i].$$

Cependant, même pour un portefeuille très grand, l'approximation normale peut donner des résultats insatisfaisants. On peut remarquer que la distribution du montant total des sinistres est généralement asymétrique. Comme la distribution d'une loi normale est symétrique, alors elle peut ne pas convenir adéquatement pour estimer la variable aléatoire S.

3.1.2 Approximation fondée sur la distribution gamma translatée

La loi gamma est une autre loi de probabilité souvent utilisée pour estimer la distribution du montant total des réclamations.
On rappelle que la densité de probabilité de la loi gamma de paramètres a et b, notée G(x ; a, b) est donnée par

$$G(x;a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp^{-bx},$$

où $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $b > 0$
Le moment d'ordre k d'une variable aléatoire X de loi gamma est donné par

$$E[X^k] = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(a+i)}{b^n}.$$

En particulier,

$$E[X] = a/b$$

et

$$Var(X) = a/b^2.$$

Pour ajuster les paramètres adéquatement, il suffit d'isoler a et b dans le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E[S] = a/b, \\ \\ Var[S] = a/b^2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ainsi, on estime la loi de la variable aléatoire S par une loi gamma de paramètres $a = \frac{E^2[S]}{vAR[S]}$ et $b = \frac{E[S]}{Var[S]}$.
L'approximation gamma n'offre aucune flexibilité pour le coefficient d'asymétrie puisque ce dernier est fixé indirectement en résolvant le système d'équation (3.1). Il est toutefois

possible d'ajuster ce paramètre en utilisant une généralisation de la loi gamma appelée loi gamma translatée définie comme suit :

Définition. Si une variable aléatoire X suit une loi gamma translatée de paramètres a, b et x_0, alors

$$f_X(x) = G(x - x_0; a, b)$$

où $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Les premiers moments de la loi gamma translatée sont :

$$E[X] = \frac{a}{b} + x_0,$$

$$Var[X] = \frac{a}{b}$$

et

$$E[(X - E[X])^3] = \frac{2a}{b^3}.$$

A l'aide de ceux-ci, on forme le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E[S] = \frac{a}{b} + x_0, \\ Var[S] = \frac{a}{b}, \\ E[(S - E[S])^3] = \frac{2a}{b^3}. \end{cases}$$

Une fois résolu, on obtient les paramètres de la loi gamma translatée à utiliser, soit

$$a = \frac{4Var^3[S]}{E^2[(S - E[S])^3]},$$

$$b = \frac{2Var[S]}{E^2[(S - E[S])^3]}$$

et

$$x_0 = E[S] - \frac{2Var^2[S]}{E^2[(S - E[S])^3]}.$$

Ainsi, la fonction de répartition s'estime par

$$F_S(x) \simeq G(x - x_0; a, b),$$

où G(x ; a, b) est la fonction de répartition d'une loi gamma de paramètres a et b. Cette dernière approximation a comme principal intérêt d'offrir la possibilité d'ajuster les coefficients d'asymétrie.

Lorsque $a \to \infty$, $b \to \infty$ et $x_0 \to -\infty$, alors G (x-xo ; a, b) converge vers une loi normale de paramètres $\mu = x_0 + \frac{a}{b}$ et $\sigma^2 = \frac{a}{b^2}$. En ce sens, l'approximation gamma translatée est plus générale que l'approximation normale.

3.1.3 Approximation fondée sur la distribution lognormale

La loi lognormale permet d'estimer la distribution du montant total des réclamations avec plus de précision. Cette dernière possède un avantage par rapport à la loi normale puisqu'elle est asymétrique. Le niveau d'asymétrie d'une distribution se mesure à l'aide du coefficient d'asymétrie dont voici la définition.

Définition Le coefficient d'asymétrie d'une variable aléatoire X, noté $\gamma_3[X]$, est défini par

$$\gamma_3[X] = \frac{E[(X - E[X])^3]}{\sqrt{(Var[X]^3)}}.$$

Pour la loi lognormale, ce coefficient est toujours positif, ce qui le rapproche de celui des distributions du montant total des réclamations que l'on retrouve en pratique.

La fonction de répartition $F_X(.)$ d'une variable aléatoire X qui suit une loi lognormale de paramètres μ et σ^2 est donnée Par

$$F_X(y) = \Phi(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}),$$

où $y \in]0, \infty[$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Les premiers moments de la loi lognormale sont

$$E[X] = \exp^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2},$$

$$Var[X] = \exp^{2\mu + 2\sigma^2} - \exp^{2\mu + 1\sigma^2}$$

et

$$\gamma_3[X] + \frac{\exp^{3\sigma^2} - \exp^{\sigma^2} + 2}{\exp^{\frac{3}{2}\sigma^2} - 1}.$$

Pour évaluer la fonction de répartition approximative, on ajuste les paramètres μ et σ^2 selon le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E[S] = \exp^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \\ \\ Var[S] = \exp^{2\mu + 2\sigma^2} - \exp^{2\mu + 1\sigma^2}. \\ \end{cases}$$

où les termes de gauche sont calculés en fonction du modèle de risque considéré, tandis que ceux de droite correspondent aux formules d'espérance et de variance pour une variable aléatoire lognormale.

La résolution du système précédent, nous donne :

$$\mu = \ln(E^2[S]) - \frac{1}{2}\ln(E^2[S] + Var[S])$$

et

$$\sigma^2 = \ln(E^2[S] + Var[S]) - \ln(E^2[S]).$$

Il ne reste plus qu'à remplacer ceux-ci dans la fonction de répartition de la loi lognormale pour obtenir I'approximation suivante :

$$F_S(x) \simeq \Phi\left(\frac{\ln x - [\ln E^2[S] - \frac{1}{2}\ln(E^2[S] + Var[S])]}{\sqrt{\ln(E^2[S] + Var[S]) - \ln(E^2[S])}}\right).$$

3.2 Approximation Poisson composée du modèle individuel

L'approximation du modèle individuel par le modèle collectif (poisson composée) est la plus courante, elle consiste à modéliser S comme une variable aléatoire de Poisson composée. La littérature de la théorie du risque présente habituellement que le cas particulier où les paramètres de l'approximation sont choisis de telle sorte que l'espérance du montant total des réclamations soit exacte.

3.2.1 Le concept de l'approximation

On rappelle tout d'abord la définition de la distribution de Poisson composée. (cf. [25])

Définition soit $\{X_i|i = 1,2,...\}$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes dont la fonction de répartition, notée $F_x(.)$, est commune. De plus, soit N une variable aléatoire indépendante de X_i pour tout i, qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Si S est la variable aléatoire de la perte totale associée à un modèle collectif de risque définie précédemment dans la formule 2.5.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

alors S correspond à une variable aléatoire de Poisson composée de paramètre λ et de distribution de sévérité $F_x(.)$.

Nous avons

$$F_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} F_X^{*k}(x), \tag{3.2}$$

$$E[S] = \lambda E[X],$$

$$Var[S] = \lambda Var[X] + \lambda E^2[X] = \lambda E[X^2],$$

et

$$L_s(z) = \exp^{\lambda [L_x(z)-1]}, \tag{3.3}$$

où L_X la transformée de Laplace d'une variable aléatoire X est définie par :

$$L_X(z) = E[\exp^{-zX}], \qquad \forall z \geq 0.$$

Soit F le portefeuille du modèle individuel.noté $S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

L'approximation du modèle individuel par le modèle collectif, consiste à estimer la variable aléatoire du montant total des sinistres du portefeuille S, par une variable variable aléatoire de Poisson composée de paramètre

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \tag{3.4}$$

et la fonction de répartition du montant des réclamations est donnée par la relation suivante :

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_{Y_i}(x). \tag{3.5}$$

preuve
l'expression de la fonction génératrice des moments de $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ est

$$\begin{aligned} M_s(x) &= E[\exp^{xs}] = E[\exp^{x\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}] = \prod_{1}^{n} M_{X_i}(x) = \prod_{1}^{n} \exp^{\lambda_i(M_{Y_i}(x)-1)} \\ &= \exp^{\lambda(M_X(x)-1)}. \end{aligned}$$

En posant $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ et

$$M_X(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}M_{Y_i}(x) \tag{3.6}$$

On déduit de (3.6) que la distribution de X est un mélange des distributions de $Y_1,\ldots,Y_n$. D'après (3.6), cela implique que F_X est une combinaison convexe de $F_{Y_i},\ldots,F_{Y_n}$, soit

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}F_{Y_i}(x)$$

Comme

$$M_s(x)=\exp^{\lambda(M_X(x)-1)} \tag{3.7}$$

est la fonction génératrice des moments d'une loi Poisson composée, on déduit de (3.7) que

$$S=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N}X_k, & N>0 \\ 0, & N=0 \end{cases}$$

Considérons à présent q_i la probabilité que la police i produise au moins un sinistre sur la période t et p_i celle qu'elle n'en produise aucun. pour cette approximation λ_i peut être défini par trois manières suivantes :

1.$\lambda_i=q_i$
2.$\lambda_i=-\ln p_i$
3.$\lambda_i=\frac{q_i}{p_i}$

Voici une justification pour chacune des possibilités.
1^{re} **cas :** $\lambda_i=qi$: Pour le portefeuille F, on a

$$L_s(z)=\prod_{i=1}^{n}[p_i+q_iL_{Y_i}(z)],$$

ou de façon équivalente, on a

$$\begin{aligned} L_s(z) &= \prod_{i=1}^{n}[1-q_i+q_iL_{Y_i}(z)] \\ &= \prod_{i=1}^{n}(1-q_i[L_{Y_i}(z)-1]). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du logarithme, on obtient

$$\ln L_s(z) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - q_i[L_{Y_i}(z) - 1]).$$

En développant en série, on a

$$\ln L_s(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (q_i[L_{Y_i}(z) - 1])^k.$$

En ne considérant que k = 1, on obtient l'approximation suivante :

$$\ln L_s(z) \simeq \sum_{i=1}^{n} q_i[L_{Y_i}(z) - 1].$$

En factorisant $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ et puisque $\lambda_i = q_i$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln L_s(z) &\simeq (\sum_{i=1}^{n} q_i)[\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i L_{Y_i}(z)}{\sum_{i=1}^{n} q_i} - 1] \\ &= \lambda[L_X(z) - 1], \end{aligned}$$

où de façon équivalente

$$L_s(z) \simeq \exp^{\lambda[L_X(z)-1])}.$$

De (3.3), on conclut que S est une variable aléatoire de loi Poisson composée.

2^{me} **cas :** $\lambda_i = -\ln p_i$: Cette approximation consiste simplement à ajuster le paramètre λ_i de telle sorte que la fonction de probabilité de l'approximation de Poisson composée, notée $p_s^{coll}(x)$, soit exacte pour x = 0.

La fonction de probabilité de la variable aléatoire du montant total des sinistres évaluée à zéro, est

$$p_s(0) = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

$p_s^{coll}(0)$ est égale à la probabilité d'avoir aucune réclamation lorsque le support de la distribution de sévérité est non-négatif.

Pour la loi de Poisson composée, on a

$$p_s^{coll}(0) = \exp^{-\lambda}.$$

On a donc que

$$\exp^{-\lambda} = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

En isolant λ, on obtient

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} -\ln p_i.$$

En posant $\lambda_i = -\ln p_i$, on retrouve

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

3^{me} **Cas :** $\lambda_i = \frac{q_i}{p_i}$
on a

$$L_s(z) = \prod_{i=1}^{n} [1 + \frac{q_i}{p_i} L_{Y_i}(z)],$$

ou de façon équivalent

$$L_s(z) = \prod_{i=1}^{n} [\frac{1 + \frac{q_i}{p_i} L_{Y_i}(z)}{1 + \frac{q_i}{p_i}}].$$

Par les propriétés du logarithme, on a

$$\ln L_s(z) = \sum_{i=1}^{n} [\ln(1 + \frac{q_i}{p_i} L_{Y_i}(z)) - \ln(1 + \frac{q_i}{p_i})].$$

En développant en série, on a

$$\ln L_s(z) = \sum_{i=1}^{n} [\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\frac{q_i}{p_i} (L_{Y_i}(z)))^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\frac{q_i}{p_i})^k].$$

Tout comme pour le 1^{re} cas, on ne considère que $k = 1$ pour obtenir l'approximation suivante

$$\ln L_s(z) \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{p_i} L_{Y_i}(z) - \frac{q_i}{p_i}.$$

En factorisant $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{q_i}{p_i}$, on a

$$\ln L_s(z) \simeq (\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{p_i}) [\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{p_i} L_{Y_i}(z)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{p_i}} - 1].$$

En posant $\lambda_i = \frac{q_i}{p_i}$, on obtient

$$L_s(z) \simeq \exp^{\lambda [L_X(z) - 1])}.$$

De la relation (3.3), on conclut que S est une variable aléatoire de loi Poisson composée.

3.2.2 Borne d'erreur de De Pril et Dhaene

Toute méthode approximative n'est intéressante que si les valeurs qu'elle procure se rapprochent des valeurs exactes. Afin d'évaluer la qualité de l'approximation du modèle individuel par la loi de Poisson composée, on présente dans cette section des bornes d'erreurs développées par De Pril et Dhaene associées. (cf. [32])
Voici deux lemmes qui seront utilisés pour démontrer le théorème de De Pril et Dhaene.
Lemme : Soit F(.), G(.) et H(.), des fonctions de répartition.
S'il existe des constantes a et b telles que

$$a \leq F(x) - G(x) \leq b, \quad \forall x,$$

alors

$$a \leq F * H(x) - G * H(x) \leq b, \quad \forall x.$$

Lemme : Soit $F_l(.), F_2(.), ..., F_n(x) \quad et \quad G_1(.), G_2(.), ..., G_n(.)$, des fonctions de répartition. S'il existe des constantes a_i et b_i telles que pour tout x

$$a_i \leq F_i(x) - G_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq F_i^*(x) - G_i^*(x) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \forall x$$

Le théorème suivant présenté par De Pril et Dhaene, fournit des bornes d'approximation du modèle individuel par une variable aléatoire de Poisson composée

Théorème : Soit $F_s^{ind}(.)$ la fonction de répartition du montant total des réclamations du portefeuille F et soit $F_s^{coll}(.)$ l'approximation par une variable aléatoire de Poisson composée de $F_s^{ind}(.)$.

Pour tout x, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (p_i - \exp^{-\lambda_i})^- &\leq F_s^{ind}(x) - F_s^{coll}(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} [p_i - \exp^{-\lambda_i} + (q_i - \lambda_i \exp^{-\lambda_i})^+], \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $(c)^- = \min(c, 0)$ et $(c)^+ = \max(c, 0)$

Voici deux corollaires découlant du théorème .

Corollaire 1 :. Pour le cas particulier où $q_i \geq \lambda_i \exp^{-\lambda_i}$, pour i = 1,2,..., n, la borne supérieure de (3.8) peut être simplifiée par

$$F_s^{ind}(x) - F_s^{coll}(x) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{2}.$$

Corollaire 2 :. Pour le cas particulier où $\lambda_i \geq -\ln p_i$, pour i = 1,2,..., n, alors

$$F_s^{coll}(x) \leq F_s^{ind}(x).$$

Examinons maintenant les bornes d'erreurs de l'approximation du modèle individuel par une variable aléatoire de Poisson composée pour chacun des cas présentés.

1^{re} **cas :** $\lambda_i = q_i$

Puisque $q_i \geq q_i \exp^{-q_i}$, du corollaire 1, on obtient les bornes d'erreur suivantes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i^2 < \sum_{i=1}^{n} (p_i - \exp^{-\lambda_i}) &\leq F_s^{ind}(s) - F_s^{coll}(s) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} [1 - (1 + q_i) \exp^{-q_i}] < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

2^{me} **cas :** $\lambda_i = -\ln p_i$:

Dans ce cas particulier, q_i satisfait aux exigences des corolaires 1 et2 ce qui permet d'obtenir les bornes d'erreur suivantes :

$$0 \leq F_s^{ind}(s) - F_s^{coll}(s) \leq \sum_{i=1}^{n}(q_i + p_i \ln p_i) < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\ln p_i)^2. \tag{3.10}$$

3^{me} **cas :** $\lambda_i = \frac{q_i}{p_i}$:

Tout comme pour le cas précédent, $\lambda_i = q_i$ et $\lambda_i = -\ln p_i$ ainsi des corollaires 1 et 2, on obtient

$$0 \leq F_s^{ind}(s) - F_s^{coll}(s) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i - \exp^{-\frac{q_i}{p_i}}}{p_i} < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{q_i}{p_i})^2. \tag{3.11}$$

3.2.3 Autres bornes d'erreurs

plusieurs autres travaux ont été réalisé, offrant des bornes d'erreur de l'approximation du modèle individuel par la variable aléatoire de Poisson composée.

Bornes d'erreur de Gerbe

Gerber dans [10] a présenté des bornes d'erreur pour le cas bien précis de l'approximation du modèle individuel par la variable aléatoire de Poisson composée de paramètre $\lambda_i = q_i$ et de distribution $F_X(.)$. (cf. [32])

Bornes d'erreur de Michel

Michel a présenté un raffinement de la borne d'erreur de Gerber dans le cas particulier d'un portefeuille ayant la même distribution de sévérité pour tous les assurés, appelé portefeuille presque homogène. De plus, il a développé un moyen d'appliquer ses résultats à un portefeuille plus général en divisant ce dernier en sous-portefeuilles presque homogènes. (cf. [23])

3.2.4 Comparaison numérique

Afin de comparer numériquement entre l'approximation poisson composée et celle basée sur les moments, on utilise un portefeuille d'assurance vie, qui satisfait aux hypothèses du modèle individuel du risque. Ce portefeuille, est divisé en plusieurs groupes d'assurés classés selon "a" montants d'indemnité différents et "b" probabilités de réclamation. Chaque groupe est composé d'un nombre fixe d'assurés, noté n_{ij}. De plus, tous les assurés du groupe ij possèdent une probabilité q_i de faire une réclamation d'un montant m_j

	m_1	m_j	m_a
q_1			
q_i		n_{ij}	
q_b			

Ce portefeuille, tel qu'il est illustré au tableau 3.1, est divisé en plusieurs groupes d'assurés classés selon "a" montants d'indemnité différents et "b" probabilités de réclamation. Chaque groupe est composé d'un nombre fixe d'assurés, noté n_{ij}. De plus, tous les assurés du groupe ij possèdent une probabilité q_i de faire une réclamation d'un montant m_j Cette

probabilités de réclamation	montants de réclamation									
q_j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,00095	18	11	5	9	1	12	1	4	19	6
0,00532	12	2	7	20	13	23	29	3	32	14
0,04029	6	16	8	3	17	2	6	13	24	36

TABLE 3.1 – portefeuille d'un modèle individuel.

exemple a été présenté dans [32] où des résultats d'approximation de ce modèle individuel par un modèle collectif ont été obtenus avec une estimation de l'erreur d'approximation.

L'objectif de ce chapitre est de comparer les résultats de poisson composée de (Louis Thibaul) (cf. [32]) avec d'autres méthodes d'approximation basée sur moments à savoir l'approximation normale et lognormale

Approximation par la loi poisson composé

En considérant l'exemple numérique d'un modèle individuel donné dans le tableau (3.1) a obtenu suivant :

cas 1 : $\lambda_i = q_i$ de (3.4) et de (3.5) il a obtenu en utilisant l'approximation Poisson composé une variable aléatoire de paramètre

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{10} n_{ij}q_i = 86 \times 0,00095 + 155 \times 0,00532 + 131 \times 0,04029 = 6.18429$$

et de distribution de sévérité commune

x	$f_X(x)$	x	$f_X(x)$
1	0,052177372	6	0,034658789
2	0,107648574	7	0,064190069
3	0,058908945	8	0,087888828
4	0,038132106	9	0,186803982
5	0,122090005	10	0,247501330

TABLE 3.2 – distribution de sévérité commune.

par l'utilisation de la formule récursive de Panjer présentée dans [25], il a obtenu une approximation de la distribution du montant total des réclamations de ce portefeuille.

Pour cette approximation, il a obtenu de (3.9) les bornes d'erreur suivantes :

$$-0,108557352 \leq -0,107139777 \leq F_s^{ind}(s) - F_I^{coll}(s)$$

$$\leq 0,105736360 < 0,108557352$$

Voici quelques valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S.

S	$F_I^{coll}(s)$	s	$F_I^{coll}(s)$	s	$F_I^{coll}(s)$
0	0,00162603	55	0,78459938	110	0,99908790
5	0,00767181	60	0,84778635	115	0,99952497
10	0,02454558	65	0,89590495	120	0,99975820
15	0,05643914	70	0,93113171	125	0,99987927
20	0,11151527	75	0,95582899	130	0,99994097
25	0,18640309	80	0,97249135	135	0,99997172
30	0,28365057	85	0,98336575	140	0,99998668
35	0,39096635	90	0,99021106	145	0,99999385
40	0,49421709	95	0,99438448	150	0,99999720
45	0,61195477	100	0,99686651	155	0,99999875
50	0,70612728	105	0,99828924	160	0,99999945

TABLE 3.3 – les valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S..

Cas 2 : $\lambda_i = -\ln p_i$ de (3.4) et de (3.5) il s'agit d'une variable aléatoire de Poisson composée de paramètre

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{10} n_{ij} - \ln p_i = 86 \times (-\ln(1-0,00095)) + 155 \times (-\ln(1-0,00532))$$

$$+131 \times (-\ln(1-0,04029)) = 6.29580026$$

et de distribution de sévérité commune

x	$f_X(x)$	x	$f_X(x)$
1	0,052076507	6	0,034362638
2	0,107867041	7	0,063913565
3	0,058941619	8	0,088061564
4	0,037899942	9	0,186748618
5	0,122209273	10	0,247919234

TABLE 3.4 – distribution de sévérité commune.

par l'utilisation de la formule récursive de Panjer présentée dans [25], il a obtenu une approximation de la distribution du montant total des réclamations de ce portefeuille.
Pour cette approximation, de la formule (3.10) les bornes d'erreur sont les suivantes :

$$0 \leq F_s^{ind}(s) - F_I I^{coll}(s) \leq 0,110018691 < 0,113017183$$

Voici quelques valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S.

S	$F_{II}^{coll}(s)$	s	$F_{II}^{coll}(s)$	s	$F_{II}^{coll}(s)$
0	0,00184403	55	0,77177938	110	0,99892590
5	0,00827491	60	0,83728635	115	0,99943497
10	0,02592458	65	0,88768495	120	0,99970910
15	0,05813914	70	0,92499171	125	0,99985337
20	0,11294527	75	0,95141899	130	0,99992757
25	0,18599309	80	0,96946135	135	0,99996492
30	0,28016057	85	0,98134575	140	0,99998333
35	0,38324635	90	0,98891106	145	0,99999222
40	0,49261709	95	0,99358148	150	0,99999644
45	0,59637377	100	0,99637651	155	0,99999840
50	0,69136728	105	0,99800424	160	0,99999929

TABLE 3.5 – les valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S.

Cas 3 : $\lambda_i = \frac{q_i}{p_i}$ de (3.4) et de (3.5) il s'agit d'une variable aléatoire de Poisson composée de paramètre

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{10}\frac{q_i}{p_i}n_{ij} = 86 \times \frac{0,00095}{1-0,00095} + 155 \times \frac{0,00532}{1-0,00532}$$

$$+131 \times \frac{0,04029}{1-0,04029} = 6.41035560$$

et de distribution de sévérité commune

x	$f_X(x)$	x	$f_X(x)$
1	0,051976258	6	0,034068023
2	0,108084449	7	0,063683813
3	0,058974131	8	0,088233419
4	0,037668971	9	0,186693551
5	0,122327870	10	0,248334947

TABLE 3.6 – distribution de sévérité commune.

par l'utilisation de la formule récursive de Panjer présentée dans [25], il a obtenu une approximation de la distribution du montant total des réclamations de ce portefeuille..

Pour cette approximation, on trouve dans [32] les bornes d'erreur suivantes à partir de (3.11) :

$$0 \leq F_s^{ind}(s) - F_I II^{coll}(s) \leq 0,114507203 < 0,117695704$$

S	$F_{III}^{coll}(s)$	s	$F_{III}^{coll}(s)$	s	$F_{III}^{coll}(s)$
0	0,00164444	55	0,75836653	110	0,99873401
5	0,00752308	60	0,82615379	115	0,99932721
10	0,02378376	65	0,87888516	120	0,99965007
15	0,05393910	70	0,91834489	125	0,99982180
20	0,10572187	75	0,94660266	130	0,99991106
25	0,17568310	80	0,96610521	135	0,99995648
30	0,26677828	85	0,97909053	140	0,99997910
35	0,36774767	90	0,98744653	145	0,99999015
40	0,47599609	95	0,99266065	150	0,99999544
45	0,57990006	100	0,99581483	155	0,99999792
50	0,67605043	105	0,99767143	160	0,99999907

TABLE 3.7 – les valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S.

Approximation par la loi normale

En utilisent une fonction prédéfinie en MATLAB, nous avons obtenu une approximation de la distribution du montant total des réclamations de l'exemple considéré, par la fonction suivant :

function [m]=fnormal()

m=cdf('normal',0 :372,μ,σ^2) ;

end

Où $\mu = E[S_{ind}]$

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{a} n_{i,j} Y_{i,j}$$

soit

$$S_i = \sum_{j=1}^{a} n_{i,j} Y_{i,j}$$

$$E(S_i) = \sum_{j=1}^{a} n_{i,j} E(Y_{i,j}) = \sum_{j=1}^{a} n_{i,j} m_j q_i = q_i \sum_{j=1}^{a} n_{i,j} m_j$$

$$E[S_{ind}] = \sum_{i=1}^{b} E(S_i) = \sum_{i=1}^{b} q_i \sum_{j=1}^{a} n_{ij} m_j = 41.58207$$

et

$\sigma^2 = Var[S]$

$$Var[Y_{i,j}] = q_i m_i (m_i - 1)$$

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{a} n_{i,j} Y_{i,j}$$

$$Var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{a} n_{i,j}^2 Var(Y_{i,j}) = \sum_{i=1}^{b} q_i \sum_{j=1}^{a} n_{ij}^2 m_j (m_j - 1) = 7931.10227$$

Pour cette approximation, nous avons obtenu les résultats suivante qui approxime la fonction de répartition du modèle individuel par une loi normale de paramètre $\mu = E[S_{ind}]$, et $\sigma^2 = Var[S_{ind}]$.

$$F_S(x) \simeq \Phi(\frac{x - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}).$$

S	$F_{norm}(s)$	s	$F_{norm}(s)$	s	$F_{norm}(s)$
0	0.4979	55	0.5007	110	0.5034
5	0.4982	60	0.5009	115	0.5037
10	0.4984	65	0.5012	120	0.5039
15	0.4987	70	0.5014	125	0.5042
20	0.4989	75	0.5017	130	0.5044
25	0.4992	80	0.5019	135	0.5047
30	0.4994	85	0.5022	140	0.5050
35	0.4997	90	0.5024	145	0.5052
40	0.4999	95	0.5027	150	0.5055
45	0.5002	100	0.5029	155	0.5057
50	0.5004	105	0.5032	160	0.5060

TABLE 3.8 – les valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S.

Approximation par la loi lognormale

En utilisent une fonction prédéfinie en MATLAB, nous avons obtenu une autre approximation de la distribution du montant total des réclamations de ce portefeuille considéré, par la fonction suivant :

function [m]=flognormal()

m=cdf('lognormal',0 :372,μ,σ) ;

end

avec $E(S)$ et $Var(S)$ calculés, nous avons obtenu les paramètres μ et σ de la loi lognormale.Par conséquent

$$F_S(x) = \Phi(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}),$$

où

$$\mu = \ln(E^2[S]) - \frac{1}{2}\ln(E^2[S] + Var[S]) = 2.867454825$$

$$\sigma = \sqrt{\ln(E^2[S] + Var[S]) - \ln(E^2[S])} = 1.311651051$$

Pour cette approximation, nous avons obtenu les résultats suivante

S	$F_{lognorm}(s)$	s	$F_{lognorm}(s)$	s	$F_{lognorm}(s)$
0	0	55	0.8076	110	0.9189
5	0.1688	60	0.8252	115	0.9238
10	0.3334	65	0.8405	120	0.9284
15	0.4516	70	0.8538	125	0.9325
20	0.5390	75	0.8655	130	0.9364
25	0.6056	80	0.8759	135	0.9399
30	0.6580	85	0.8851	140	0.9431
35	0.7000	90	0.8933	145	0.9461
40	0.7344	95	0.9007	150	0.9489
45	0.7630	100	0.9074	155	0.9509
50	0.7871	105	0.9134	160	0.9538

TABLE 3.9 – les valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S.

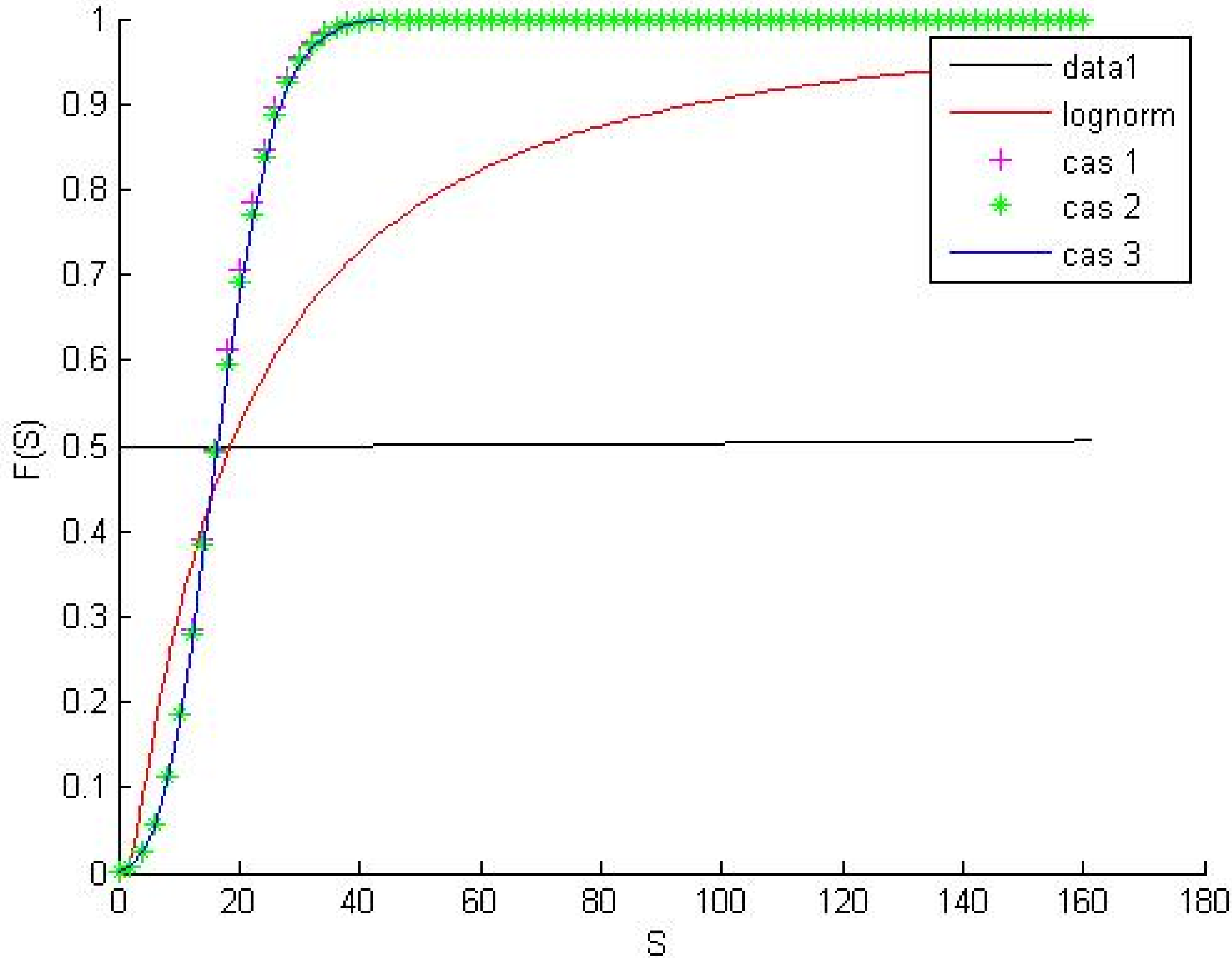

FIGURE 3.1 – comparaison entre les méthodes approximations

Interprétation des resultats obtenues

A partir de ces résultats et leurs représentations graphique, il est clair que l'approximation normale donne des résultats insatisfaisants. par rapport à la loi lognormale, ses résultats sont plus significatifs et plus proches des résultats obtenus par l'approximation Poisson composée. Car la distribution du montant total des réclamations est généralement asymétrique.

S	$F_I^{coll}(s)$	$F_{II}^{coll}(s)$	$F_{III}^{coll}(s)$	$F_{norm}(s)$	$F_{lognorm}(s)$
0	0,00162603	0,00184403	0,00164444	0.4979	0
5	0,00767181	0,00827491	0,00752308	0.4982	0.1688
10	0,02454558	0,02592458	0,02378376	0.4984	0.3334
15	0,05643914	0,05813914	0,05393910	0.4987	0.4516
20	0,11151527	0,11294527	0,10572187	0.4989	0.5390
25	018640309	0,18599309	0,17568310	0.4992	0.6056
30	0,28365057	0,28016057	0,26677828	0.4994	0.6580
35	0,39096635	0,38324635	0,36774767	0.4997	0.7000
40	0,49421709	0,49261709	0,47599609	0.4999	0.7344
45	0,61195477	0,59637377	0,57990006	0.5002	0.7630
50	0,70612728	0,69136728	0,67605043	0.5004	0.7871
55	0,78459938	0,77177938	0,75836653	0.5007	0.8076
60	0,84778635	0,83728635	0,82615379	0.5009	0.8252
65	0,89590495	0,88768495	0,87888516	0.5012	0.8405
70	0,93113171	0,92499171	0,91834489	0.5014	0.8538
75	0,95582899	0,95141899	0,94660266	0.5017	0.8655
80	0,97249135	0,96946135	0,96610521	0.5019	0.8759
85	0,98336575	0,98134575	0,97909053	0.5022	0.8851
90	0,99021106	0,98891106	0,98744653	0.5024	0.8933
95	0,99438448	0,99358148	0,99266065	0.5027	0.9007
100	0,99686651	0,99637651	0,99581483	0.5029	0.9074
105	0,99828924	0,99800424	0,99767143	0.5032	0.9134
110	0,99908790	0,99892590	0,99873401	0.5034	0.9189
115	0,99952497	0,99943497	0,99932721	0.5037	0.9238
120	0,99975820	0,99970910	0,99965007	0.5039	0.9284
125	0,99987927	0,99985337	0,99982180	0.5042	0.9325
130	0,99994097	0,99992757	0,99991106	0.5044	0.9364
135	0,99997172	0,99996492	0,99995648	0.5047	0.9399
140	0,99998668	0,99998333	0,99997910	0.5050	0.9431
145	0,99999385	0,99999222	0,99999015	0.5052	0.9461
150	0,99999720	0,99999644	0,99999544	0.5055	0.9489
155	0,99999875	0,99999840	0,99999792	0.5057	0.9514
160	0,99999945	0,99999929	0,99999907	0.5060	0.9538

TABLE 3.10 – les valeurs de l'approximation de la fonction de répartition de S.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié quelques méthodes approximation d'un modèle du risque individuel à savoir l'approximation par un modèle collectif (Poisson composée) et les approximations basée sur les moments.

Pour cela, nous avons présenté en détails la méthode Poisson composée qui est très utilisée et donne des résultats meilleurs par rapport aux autres approches.

Afin de comparer entre ces méthodes, nous avons proposé une illustration numérique sur un exemple d'un modèle individuel. Nous avons donc obtenu des estimations de la fonction de répartition de la charge total des réclamations par l'approximation normale et lognormale.

En comparant aux résultats de (Louis thibault dans [32]) obtenu par l'approximation Poisson composée, il est clair que l'approximation normale donne des résultats insatisfaisants car la distribution du montant total des sinistres est généralement asymétrique.Puisque la loi lognormale est asymétrique donc ses résultats sont plus significatifs et plus proche des résultats obtenu par l'approximation Poisson composée.

Il serait intéressant de compléterce travail, en traitant les points suivant :

- Étude d'un cas réel (modèle individuel et son approximation par un modèle collectif).
- Étude statistique d'un modèle individuel et choix de méthode d'approximation qui lui convient.

Bibliographie

[1] E. S. Andersen. On the collective theory of risk in case of contagion between the claims. Transactions X Vth International Congress of Actuaries, New York, II, 219-229, 1957.

[2] S. Asmussen. Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. 2000.

[3] M. Augé, Le temps en ruines. Editions Galilée, 2003.

[4] N. Baradel.Théorie du risque.cours. institut ENSAE de paris. 28 septembre 2018.

[5] Z. Benouaret, Stabilité forte dans les modèles de risque. Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, Janvier 2012.

[6] Y. Dodge and G. Melfi. Premiers pas en simulation. Springer Science Business Media, Sept. 2008.

[7] P. Dumont, Assurances et gestion des risques, Université MSc finance, HEC Montréal,vol. 79(1-2), avril-juillet 2011, 43-81.

[8] F. Dufresne and H. U. Gerber. The surplus immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. Insurance : Mathematics and Economics 7 (3), pages 193–199, 1988.

[9] J. François. Notes de cours de processus aléatoires. Université paris. 2006.

[10] H. U. Gerber, Error bounds for the compound Poisson approximation. Insurance : Mathematics and Economics, 3, pages 191-194. 1984.

[11] H. U. Gerber. Mathematical fun with ruin theory. Insurance : Mathematics and Economics 7 (1), pages 15–23, 1988.

[12] S. Hocine, Application des Processus Régénératifs dans les Modèles de Risque, Mémoire de Magister, Université de Tizi Ouzou, Janvier 2012.

[13] R. Sadaoui et N. Idir. Étude comparative des système assurantiel algérien et marocain. université Bejaia. 2014

[14] J. Janssen and J. M. Reinhard. Some duality results for a class of multivariate semi Markov processes. Journal of applied probability, 1982.

[15] J. Janssen and R. Manca. Semi-Markov risk models for nance, insurance and reliability. Springer, 2007.

[16] J. Janssen. Les processus (JX). Cahiers du CERO 11, 181-214, 1969.

[17] J. Janssen. The semi-Markov model in risk theory. Advances in Operations Research, pages 613-621, 1977.

[18] I. Kharroubi, Note de cours actuariat, Université de Paris Dauphine.

[19] S. Loisel, Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine.Université de lyon. 2010.

[20] E. Marceau. Note de cours modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat. Université de Laval. 2013.

[21] F. Masrouri et A. Pantet, Classification des risques, Ingénierie des Risques en Génie Civil, Février 2009.

[22] G. Massimiliano, Processus de Poisson. actuariels, Poly 4 - v.4 2012.

[23] R. Michel, An improved error bound for the compound Poisson approximation of a nearfy homogeneous porifolio. Astin Bulletin, pages 17, 2, 165-169. 1987.

[24] H. D. Miller. Absorption probabilities for sums of random variables dened on a nite Markov chain. Proc. Cambridge Philos. pages 286-298. 1962.

[25] H. Panjer and G.Willmot. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, Université Schaumburg. 1992.

[26] P. Picard, On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model. Mathematics and Economics 14 (2), pages 107–115, 1994.

[27] F. Planchet, Le modèle collectif, Support de cours 2003-2004, ISFA.

[28] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels, Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley, New York.1999.

[29] T. Saxén, Sur les mouvements aléatoires et le problème de ruine de la théorie de risque collective. PhD thesis, Societas scientiarum Fennica, 1951.

[30] M. Seba et N. Sadi. Les secteurs des assurance en Algérie et sa contribution à l'économie nationale.Université de Bejaia. 2017

[31] C. Suquet. Assurances et probabilités. U. S. T. L. Lille 1 et CNRS UMR 8524.12 avril 2007. http ://math.univ-lille1.fr/ suquet.

[32] L.Thibault. Méthodes d'évaluation de la distribution du montant total des réclamations. Mémoire (M. Sc.). Université de Laval Québec. septembre 1997.

[33] L. Tlilane et H. Allaoua, Calcul de la probabilité de ruine : Cas de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa, Mémoire d'ingéniorat en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira de Béjaïa, 2010.

[34] A. Touazi, Méthodes d'Estimation non paramétrique dans l'étude de stabilité des modèles de risque Thèse de Doctorat LMD, Spécialité : Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, Mai 2017.

[35] R.Veysseyre, Aide-mémoire, Statistique et probabilités pour l'ingénieur, 2e édition. Dunod, Paris. 2006.

[36] H. X. Wang, D. F. Fang and M. N. Tang. Ruin probabilities under a Markovian risk model. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, Vol. 19, No. 4 page 621-630, 2003.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier quelques méthodes approximations de la distribution du montant total des réclamations du modèle du risque individuel.

Dans un premier temps, nous réalisons une étude détaillée de l'approximation du modèle du risque individuel par le modèle collectif (Poisson composée). de plus, nous avons proposé d'autre méthodes basée sur les moments.

Nous avons notamment réalisé une comparaison numérique entre les méthodes proposées afin de statuer sur la qualité des estimation fournie par chaque approche d'approximation du modèle du risque individuel.

Abstract

The main objective of this paper is to study some approxitions méthods of the distribution of the total claims amount in the individual risk model.

firstly, we have realised a detailed study of the individual risk model with the collective one. further more, we have preposed others méthods based on the moments.

In particular, we have realised a numerical comparaison between the proposed approches in order to make statement about the estimates obtained by each approximation methods of the individual risk model.