

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTÉ DE TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

**MASTER**

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : ÉNERGÉTIQUE

PAR :

**BENMAMMAR LYDIA**

**BENYAHAI DAOUD**

---

**Etude numérique de l'écoulement de couche limite induit par  
un jet impactant sur une paroi verticale chauffée**

---

Soutenu le 27 /06/2018 devant le jury composé de:

Mr. Sahi. A

Président

Mr. Mendil. F

Rapporteur

Mr. Ali AGHA. H

Examineur

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018**

# Remerciements

*Tout d'abord,*

*J'aimerais remercier Dieu le tout-puissant, de m'avoir donné la force  
et la patience de pouvoir mener ce travail à  
terme.*

*Je tiens à remercier mon promoteur Mr F. Mendil de  
M'avoir encadré tout le long de ce travail et pour ses  
Conseils et ses orientations.*

*Je tiens à remercier Mr Sahi.A pour avoir  
Accepté de présider le jury. Qu'il trouve ici l'expression de  
Ma profonde gratitude.*

*Mes sincères remerciements vont également à Mr Aliagha.H pour me  
faire l'honneur  
D'examiner mon modeste travail.*

*Je tiens à remercier tous nos enseignants, ceux de la licence  
Ainsi que ceux du Master, spécialement Monsieur  
Benslimane Maître de*

*Conférences à l'Université A.MIRA-BEJAJA.*

SOMMAIRE

NOMENCLATURE

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE..... 1

## **Chapitre I : Généralités et revue bibliographique**

I. Introduction.....	3
I.1 Modes de transfert de la chaleur .....	3
I.1.1 Transfert de chaleur par conduction .....	3
I.1.2 Transfert de chaleur par convection .....	3
I.2 Différents type de couche limite .....	5
I.2.1 Couche limite dynamique .....	5
I.2.2 Couche limite thermique .....	6
I.2.3 Couche limite massique .....	7
I.3 Jet impactant .....	7
I.3.1 Jet unique en impact .....	7
I.3.1.1 Structure du jet libre .....	7
I.3.2.1 Structure du jet en impactant .....	8
I.4 Approximation de boussinesq.....	10
I.5 Les différentes applications des jets.....	10
I.6 Etat de l'art et revue bibliographique.....	11
I.6.1 Ecoulement de Hiemenz .....	11
I.6.2 Ecoulement sur une verticale chauffée .....	12

## **Chapitre II : Positionnement de problème et formulation mathématique**

II.1 Introduction .....	16
II.2 Description du problème.....	16
II.3 Hypothèses simplificatrice .....	17
II.4 Formulation de problème .....	17
II.4.1 Equation de continuité .....	17
II.4.2 Equation de conservation de quantité de mouvement .....	18

II.4.3 Equation d'énergie .....	18
II.5 Equation de conservation dimensionnelles régissent l'écoulement et le transfert thermique .....	18
II.5.1 Equation dimensionnelles.....	18
II.5.2 Equation de continuité.....	18
II.5.3 Equation de quantité de mouvement .....	18
II.5.4 Equation d'énergie .....	18
II.6 condition aux limites .....	19
II.7 Formulation adimensionnelle .....	19
II.8 Equation adimensionnelle et solution auto-similaire .....	19
II.9 condition aux limites .....	20
Conclusion .....	21

### **Chapitre III : Méthode de résolution**

III.1 Introduction .....	22
III.2 Méthode d'Euler .....	22
III.3 Méthode de Runge-kutta .....	23
III.3.1 Méthode de Runge –kutta d'ordre N.....	23
III.3.2 Méthode de Runge –kutta d'ordre 4 .....	24
III.4 Méthode de Tir .....	26
III.5 Algorithme de résolution .....	27
Conclusion.....	29

### **Chapitre IV : résultats et interprétation**

IV.1 Introduction .....	30
IV.2 Formulation des équations du problème posé .....	30
IV.3 Validation numérique .....	31
IV.4 Discisions des résultats .....	32
IV.4.1 Champ dynamique .....	32
IV.4.2 Champ thermique .....	34

IV.5 Coefficient de frottement et nombre du Nusselt .....	39
Conclusion .....	42
Conclusion générale .....	43
Reference bibliographique .....	45
Annexe .....	47

## Nomenclature

SYMBOLES	SIGNIFICATION	UNITE (SI)
$C_f$	Coefficient de frottement à la paroi	-
$C_p$	Capacité calorifique à pression constante	$(J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$
$g$	Accélération de la gravité	$(m \cdot s^{-2})$
$f$		-
$Gr$	Nombre de Grashof	-
$K$	Conductivité thermique	$(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$
$L$	Longueur caractéristique	(m)
$Nu$	Nombre de Nusselt	-
$Pr$	Nombre de Prandtl	-
$q$	Densité de flux thermique	$(W \cdot m^{-2})$
$Re$	Nombre de Reynolds	-
$Sc$	Nombre de Schmidt	-
$T$	Température	(K)

SYMBOLES GRECS	SIGNIFICATION	UNITE (SI)
$\theta$	Température adimensionnelle	-
$\alpha$	Diffusivité thermique	$(m^2 \cdot s^{-1})$
$\beta$	Coefficient de dilatation	$(K^{-1})$
$\lambda$	Conductivité thermique	$w/(m \cdot k)$
$\mu$	Viscosité dynamique	$(kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1})$
$\nu$	Viscosité cinématique	$(m^2 \cdot s^{-1})$
$\rho$	Masse volumique	$(kg \cdot m^{-3})$
$\tau$	Contrainte de cisaillement	$(kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1})$
$\Psi$	Fonction de courant	-
$\eta$	Variable de similitude	-

INDICES	SIGNIFICATION
$w$	Condition à la paroi
$c$	Valeur critique
$'$	Dérivation
$\infty$	Condition à l'infini



## Listes des figures

<b>Figure (I.1)</b> Schéma du transfert de chaleur par convection. [1] .....	3
<b>Figure (I.2)</b> Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane [3] .....	5
<b>Figure (I.3)</b> Développement d'une couche limite dynamique le long d'une plaque plane.....	6
<b>Figure (I.4)</b> Délimitation des zones de couche limite dynamique .....	6
<b>Figure (I.5)</b> Couche limite thermique sur une plaque plane [3].....	7
<b>Figure (I.6)</b> Développement d'une couche limite massique le long d'une plaque plane.....	7
<b>Figure (I.7)</b> Composantes du jet libre .....	8
<b>Figure (I.8)</b> Structure d'un jet impactant sur une paroi plane [5].....	9
<b>Figure (I.9)</b> Refroidissement par un jet d'eau [6] .....	11
<b>Figure (I.10)</b> Ecoulement de point de stagnation. (Solution de Hiemenz) [8].....	12
<b>Figure (I.11)</b> modèle physique étudié par [11] .....	14
<b>Figure (II.1)</b> Schématisation de modèle physique .....	16
<b>Figure (III.1)</b> Organigramme général de résolution (Méthode de Tir).....	29
<b>Figure(IV.1)</b> Effet de source de chaleur sur le profil de vitesse $f'$ en fonction de la variable adimensionnel( $\eta$ ).....	32
<b>Figure (IV.1.a)</b> Effet de $\lambda$ sur le profil de vitesse $f'$ en fonction de la variable adimensionnel( $\eta$ ).....	33
<b>Figure(IV.1.b)</b> Effet de $Pr$ sur le profil de vitesse $f'$ en fonction de la variable adimensionnel( $\eta$ ).....	34

<b>Figure(IV.2)</b> Influence du rapport de source de chaleur $\beta$ sur le profile de température .....	<b>35</b>
<b>Figure(IV.2.a)</b> Influence de rapport $\lambda$ sur le profil de température .....	<b>36</b>
<b>Figure(IV.2.b)</b> Influence de nombre de Prandtl sur le profil de température .....	<b>36</b>
<b>Figure(IV.3)</b> Influence de nombre de Prandtl sur le gradient de température $\theta'$ .....	<b>37</b>
<b>Figure(IV.3.a)</b> Influence de $\beta$ source de chaleur sur le gradient de température $\theta'$ .....	<b>38</b>
<b>Figure(IV.4)</b> Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de $\lambda$ pour déférentes valeur du nombre de Prandtl.....	<b>39</b>
<b>Figure (IV.4.a)</b> Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de $\lambda$ pour déférentes valeur du paramètre de source de chaleur (B) .....	<b>39</b>
<b>Figure (IV.5)</b> Profil du Nombre de Nusselt la paroi en fonction de $\lambda$ pour déférentes valeur du nombre de Prandtl .....	<b>40</b>
<b>Figure (IV.5.a)</b> Profil du Nombre de Nusseltà la paroi en fonction de $\lambda$ pour déférentes valeur du paramètre de source de chaleur (B) .....	<b>41</b>

## Liste des tableaux

**Tableau IV.1 :** Valeurs de  $f''(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Pr avec  $\lambda=1\dots\dots\dots 31$

**Tableau IV.2 :** Valeurs de  $-\theta(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Pr avec  $\lambda=1\dots\dots\dots 31$

# **Introduction générale**

### Introduction générale

Depuis plus d'un siècle, les scientifiques se penchent sur l'étude des écoulements avec transfert de chaleur, par différents modes de convection (naturelle, forcée et mixte). Ces écoulements sont étudiés à travers des géométries connues, en raison de leurs applications pratiques telles que les systèmes électroniques, les échangeurs de chaleur de haute performance, les équipements des procédés chimiques, les chambres de combustion, les systèmes de contrôle de l'environnement, etc....

La convection mixte qui s'applique considérablement dans divers phénomènes naturels et nombreux processus industriels comme exemple : le refroidissement des réacteurs nucléaires, et les aubages des turbines, ainsi que dans l'industrie alimentaire. L'objectif de ses application et d'augmenter les transfères thermique afin d'accroître la capacité de refroidissement avec des jets dans le but de Contrôler la température de surface d'un corps par convection forcée. Notons que L'épanouissement d'un jet laminaire impactant une plaque verticale chauffée.

Le manuscrit présenté est constitué de quatre chapitres. Après une introduction, une synthèse bibliographique et des travaux effectués des écoulements de couches limites au voisinage d'un point de stagnation aussi consacré aux généralistes et les notions de base que nous avons définies brièvement.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation du problème, aux hypothèses Simplificatrices et à l'établissement des équations et des conditions aux limites qui leurs sont associées. Enfin, nous définissons les principales grandeurs adimensionnelles caractérisant le modèle ainsi la présentation de modèle physique.

Le troisième chapitre expose il s'agit en particulier de la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre largement connue. Cette méthode numérique adoptée pour résoudre ce problème on utilise la méthode Rang- kutta d'ordre quatre associée a la méthode de Tir.

## **Introduction générale**

---

Et pour le dernier chapitre est réservé à l'ensemble des résultats obtenus et leur interprétation physique. Une validation des résultats antérieurs est également présentée.

Enfin, Le mémoire se termine par une conclusion générale qui résume les principaux résultats et pour ne pas alourdir la présentation du texte, nous donnons en annexes quelques compléments relatifs aux relations fondamentales ayant servies à l'étude (Annexe A)

# Chapitre I

## Introduction

Les transferts thermiques ont une énorme importance dans l'industrie. Dans la plupart des opérations unitaires, il est nécessaire de fournir ou d'enlever de la chaleur. A l'opposé, on cherche souvent à faire obstacle aux transferts pour éviter soit des déperditions thermiques, soit le réchauffement d'un produit.

Lorsque plusieurs corps en présence dans un système sont à des températures différentes, il se produit entre eux des échanges thermiques tendant à égaliser la température de tout le système. Ces échanges thermiques se font toujours du corps le plus chaud au corps le plus froid. Le transfert thermique à lieu sous trois formes : Conduction, Convection et Rayonnement.

### I.1. Modes de transfert de la chaleur

#### I.1.1. Transfert de chaleur par conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique. (Gradient de température dans un milieu).

#### I.1.2. Transfert de chaleur par convection

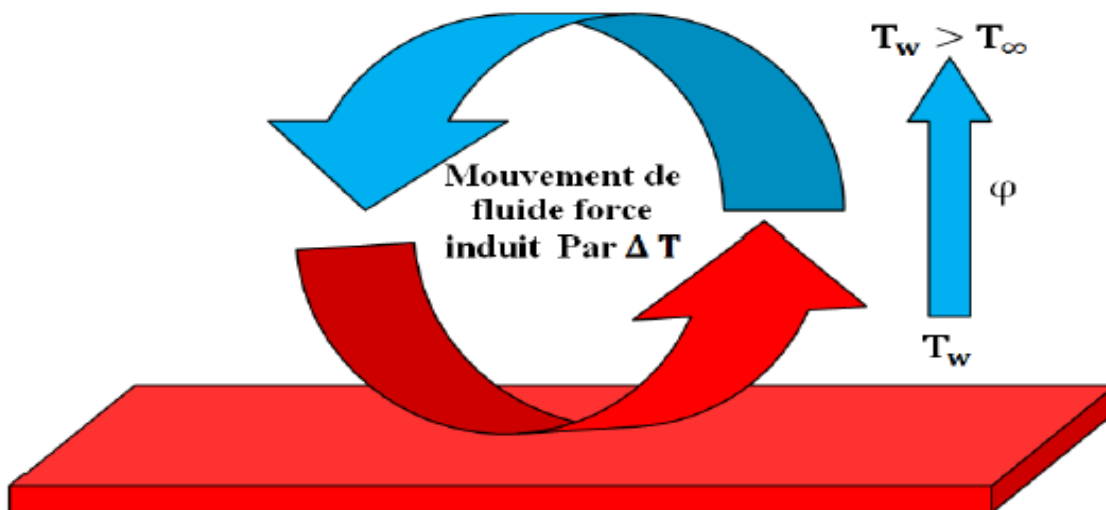


Figure (I.1) Schéma du transfert de chaleur par convection. [1]



C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton. [1]

Et la convection est le mécanisme le plus important de transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide. Trois types de convection sont généralement distingués :

#### **a. Convection naturelle**

La convection naturelle dans laquelle le mouvement du fluide est produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celles froides existant dans un fluide, situé dans un champ de forces massiques.

Cette différence de densité, qui est la plupart du temps provoquée par une différence de température, avec la force de gravité, crée une force de flottabilité, qui par conséquent crée une différence de quantité de mouvement. [2]

#### **b. Convection forcée**

La convection forcée dans laquelle le mouvement de fluide est provoqué par l'action des forces extérieures (par exemple pompe, ventilateur...etc.), qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement du fluide. [2]

#### **c. Convection mixte**

Elle correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcé) quand les vitesses d'écoulement fictives dues aux deux types de convection sont, considérées séparément, du même ordre de grandeur. Quel que soit le type de convection considéré, on distingue suivant la vitesse du fluide deux régimes d'écoulement : laminaire et turbulent. [2] et il existe deux modes de convection mixte se présentant selon l'origine du mouvement interne au fluide :

##### **c.1. Convection mixte thermique**

La présence au sein du fluide d'un gradient de température engendre un gradient de densité créant ainsi une force de poussée verticale qui provoque le mouvement des particules.

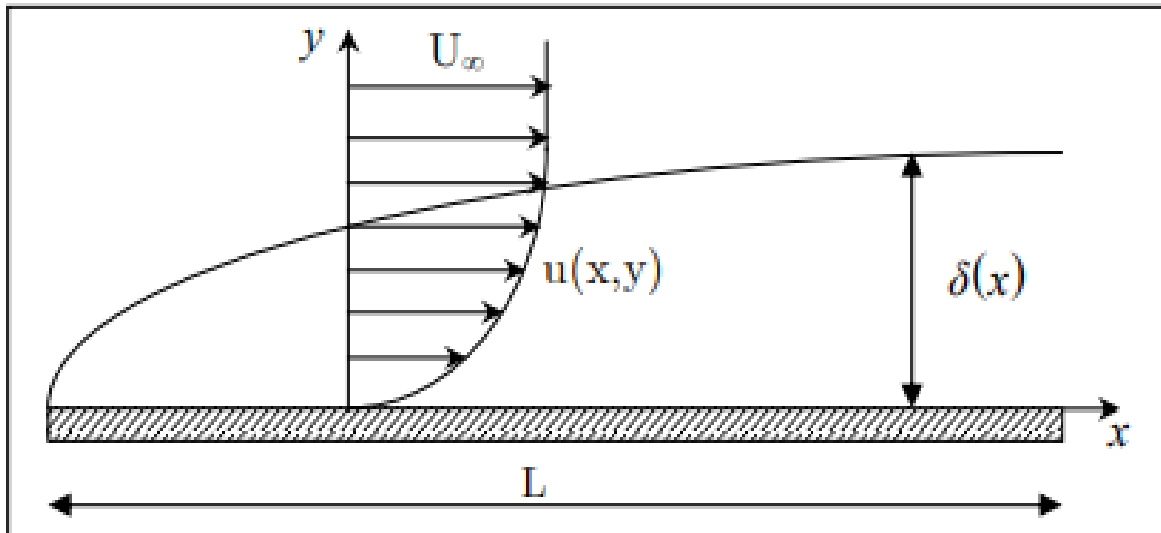
##### **c.2. Convection mixte massique**

Dans ce cas le mouvement des particules est engendré par un gradient de concentration présent dans le fluide dû à l'existence d'espèces différentes dans ce dernier.

## I.2 Différent type de couche limite

### I.2.1.Couche limite dynamique

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais. À la paroi, la vitesse du fluide est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci.



**Figure (I.2)** Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane [3].

On distingue deux types de couche limite dynamique:

#### a. Couche limite laminaire

La couche limite laminaire est caractérisée par le fait que toutes les vectrices vitesses sont parallèles à un même plan, l'écoulement se présente alors sous la forme de lames de fluide glissant les unes sur les autres. Ces lames restent rectilignes sur une certaine longueur, puis s'estompent. On observe une telle couche limite vers le bord d'attaque d'un profil. On appelle conventionnellement l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse  $U$  est telle que :  $U = 0.99 U_\infty$

En fait assez rapidement les lames disparaissent et la couche limite n'est plus dite laminaire mais turbulente.

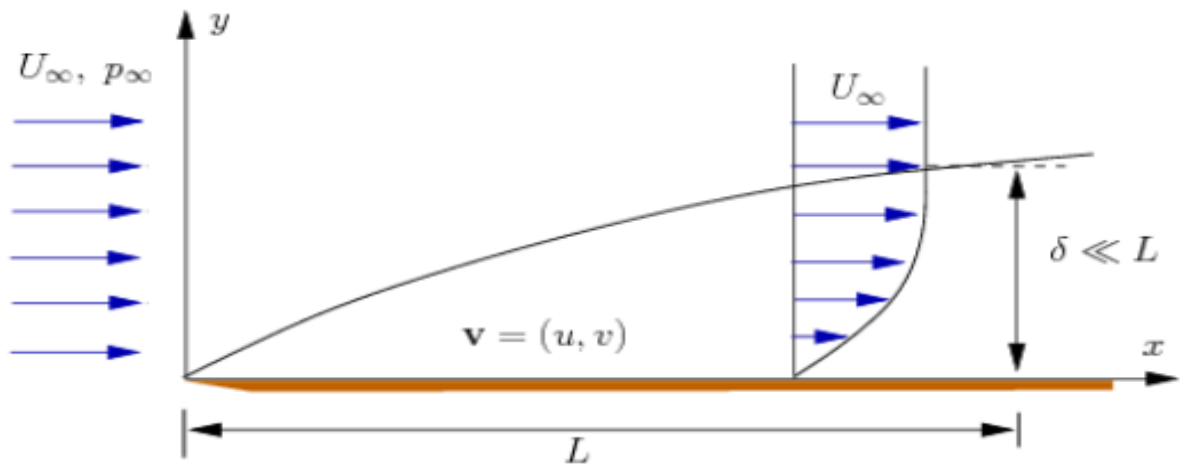


Figure (I.3) Développement d’une couche limite dynamique le long d’une plaque plane.

**b. Couche limite turbulente**

L’écoulement présente un caractère désordonné, due en partie aux aspérités qui existent toujours sur la paroi. La couche limite devient turbulente et les vecteurs de vitesses ne sont plus parallèles entre eux.

On remarque qu’il existe une délimitation entre les deux zones précédemment définies que l’on nomme zone de transition.

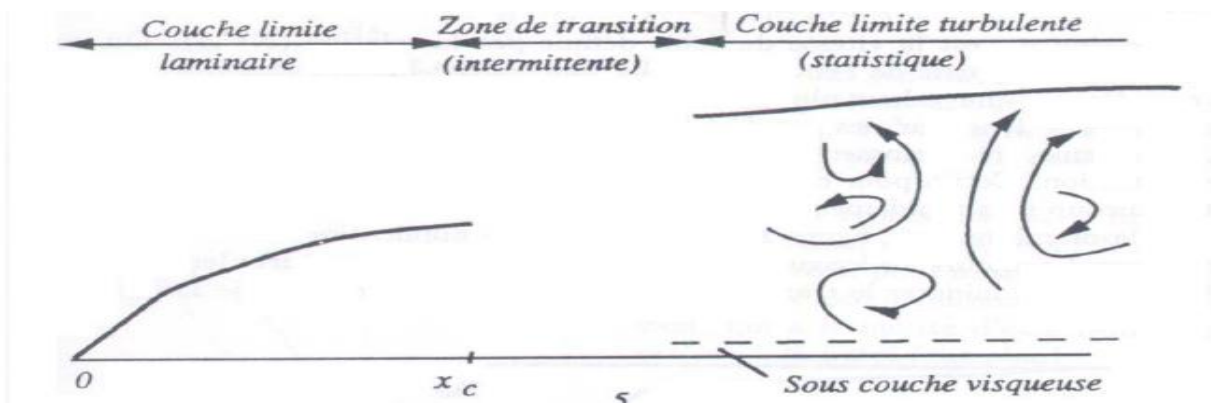


Figure (I.4) Délimitation des zones de couche limite dynamique

**I. 2.2. Couche limite thermique**

Lorsqu’un fluide, de température  $T_\infty$ , s’écoule sur une paroi à température  $T_p$ , des échanges thermiques s’établissent. Les particules du fluide s’échauffent ou se refroidissent au contact de la paroi. Ces particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme.

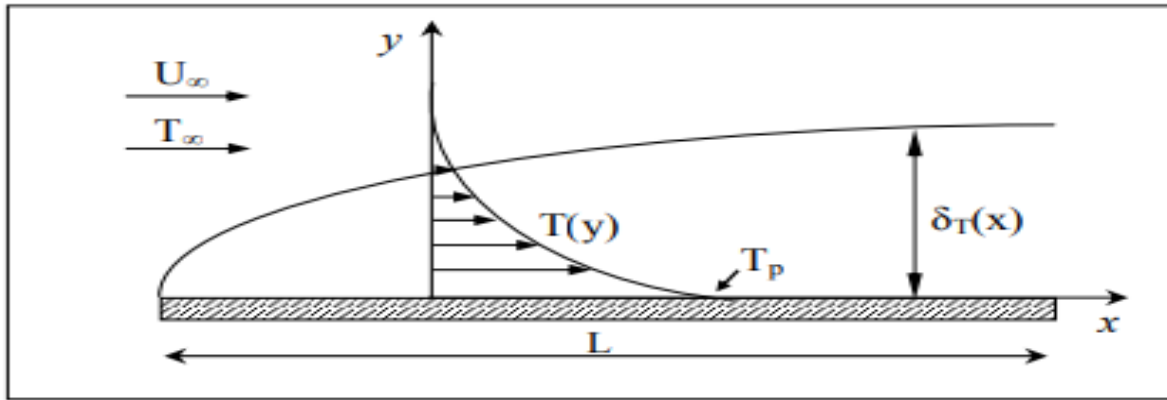


Figure (I.5) Couche limite thermique sur une plaque plane [3].

### I.2.3. Couche limite massique

À l'image de la couche limite thermique, la couche limite massique se développe au sein d'un écoulement de fluide en contact avec un corps lorsque les concentrations molaires de l'espèce considérée à la surface de ce corps et dans le courant libre sont différentes.

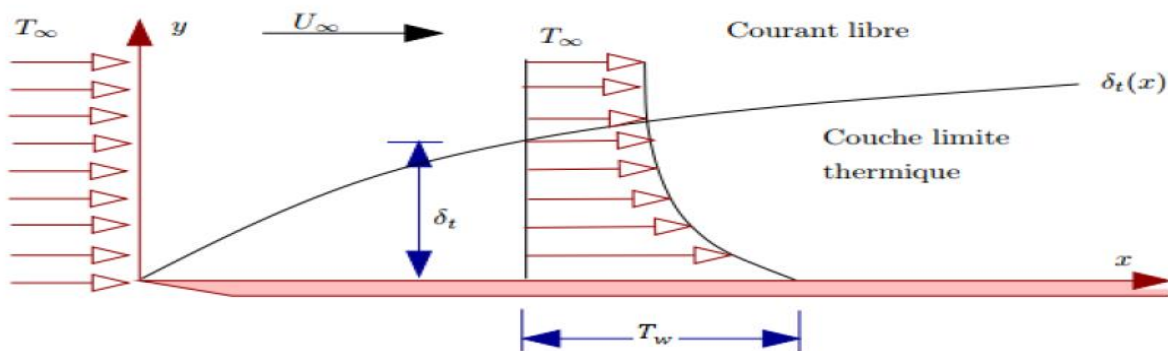


Figure (I.6) Développement d'une couche limite massique le long d'une plaque plane

## I.3. Jet impactant

### I.3.1. Jet unique en impact

Dans un premier temps nous allons présenter le cas du jet libre, qui est une partie intégrante du jet en impact, et cela pour mieux comprendre la structure propre à ce dernier.

#### I.3.1.1 Structure du jet libre

La décomposition classique du jet libre comporte trois régions :

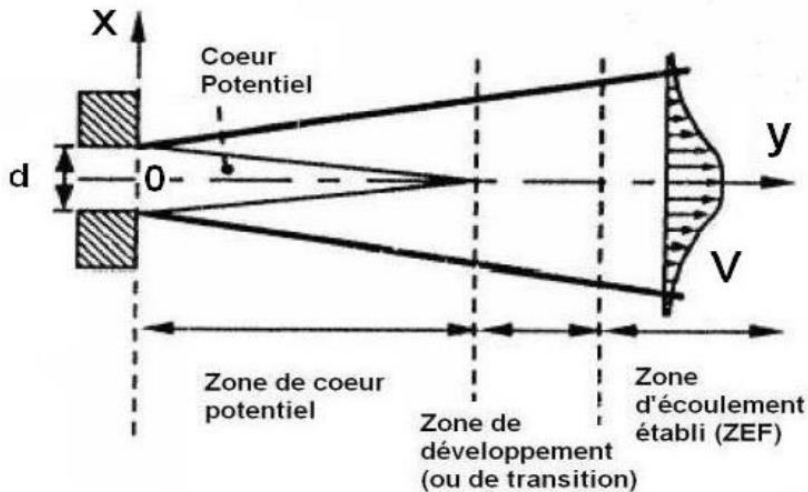


Figure (I.7) Composantes du jet libre.

#### a. Zone de corps potentiel

Elle se caractérise par une vitesse en sortie de buse conservée sur l'axe central du jet à l'intérieur de ce qui s'appelle alors le corps potentiel.

L'air environnant est entraîné par le jet et réduit ainsi progressivement la vitesse dans le jet jusqu'à atteindre la ligne centrale. L'entraînement de l'air environnant crée une région de mélange et de fort cisaillement. La longueur du corps potentiel est généralement évaluée entre 4 et 7 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur [6-7-8], mais ce résultat dépend fortement des profils de vitesse et des taux de turbulence en sortie d'injecteur. La géométrie de l'injecteur influence nécessairement ces deux paramètres.

#### b. Zone de transition

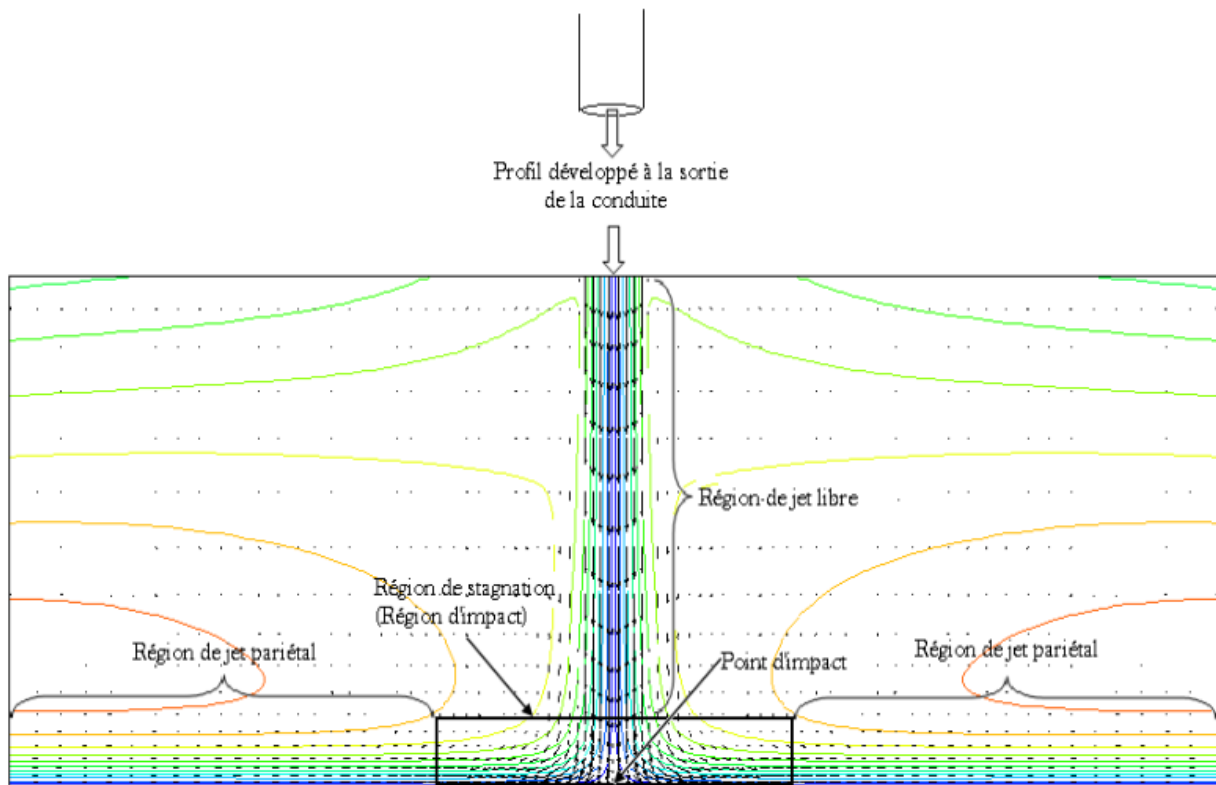
Cette zone commence lorsque les couches de mélange se rejoignent au centre du jet. On observe alors une baisse de la vitesse axiale due aux fortes contraintes de cisaillement dans cette zone.

#### c. Zone développée

Comme le suggère le nom l'écoulement est complètement établi, autrement dit les profils de vitesses sont désormais auto semblables et peuvent être déduits des profils amonts par similitude. Le début de cette zone commence à partir de 8 fois jusqu'à 20 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur. [4]

### I.3.2.1. Structure du jet en impactant

En général, le jet impactant sur une paroi plane peut se décomposer en trois régions Essentielles



**Figure (I.8)** Structure d'un jet impactant sur une paroi plane [5]

#### **a. Région de jet libre**

Cette région est caractérisée par l'écoulement d'un jet rond turbulent, axisymétrique en moyenne. Il est possible d'atteindre une zone d'écoulement établi ZEF (*Zone of Established Flow*) ; cette dernière ne peut apparaître que lorsque la distance d'impact est suffisamment grande.

#### **b. Région de stagnation (région d'impact)**

Cette région est caractérisée principalement par une forte diminution de la composante de vitesse axiale à l'amont du point de stagnation, une élévation importante de la pression au point d'arrêt, et une forte augmentation de la composante de vitesse radiale en aval du point d'impact.

#### **c. Région de jet pariétal**

Cette région est caractérisée par le développement et l'épaississement d'un jet pariétal, c'est-à-dire le long de la surface d'impact et dont la vitesse radiale maximale diminue.

#### I.4.Approximation de Boussinesq

Cette approximation s'énonce comme telle : "Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité  $g$ , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci" (Boussinesq 1903). Cette approximation suppose alors les hypothèses suivantes :

- la masse volumique du fluide est constante, exceptée dans le terme de la poussée d'Archimède et ne dépend que des variations de température (l'influence des variations de pression sur la masse volumique est négligée),
- les autres propriétés thermophysiques du fluide sont constantes,
- la dissipation de chaleur due à la viscosité du fluide est négligeable.

#### I.5 Différentes applications des jets

Les jets impactant sont utilisés dans plusieurs applications industrielles parmi lesquelles les processus de séchage, de refroidissement et de réchauffement. Par exemple, on peut citer :

- Découpe et refroidissement de nappes de verre en fusion.
- Evaporation de l'eau de la pâte à papier dans l'industrie papetière.
- Refroidissement de feuillets métalliques ou plastiques [6]
- . Refroidissement de moteurs thermiques, circuits hydrauliques, chambres de combustion, aubes de turbines et moteurs électriques de grande puissance destinés à une nouvelle génération de voitures électriques.
- Refroidissement de denrées alimentaires.
- Refroidissement de composants électronique



**Figure (I.9)** Refroidissement par un jet d'eau [6]

## **I.6 État de l'Art et revue bibliographique**

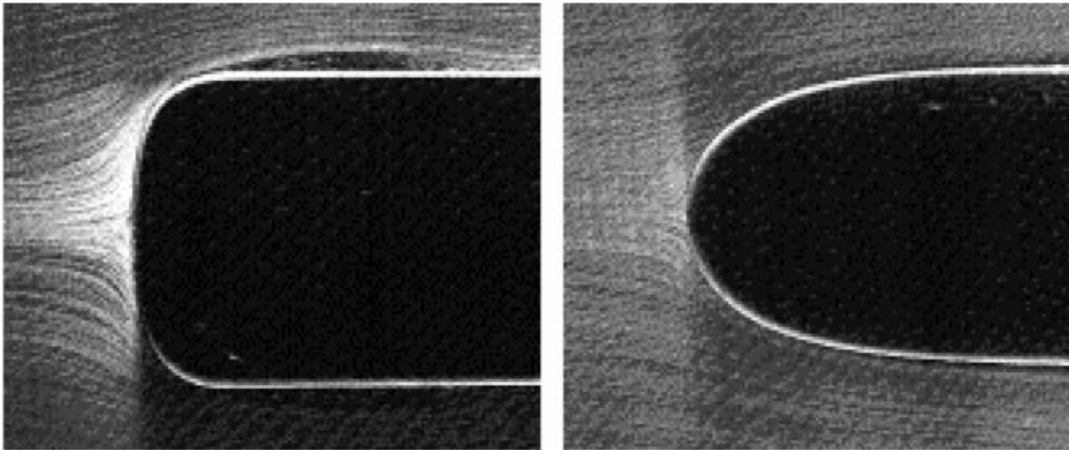
Le comportement de l'écoulement près d'un point de stagnation est fondamental sujet dans la dynamique des fluides, et il a attiré l'attention de nombreux chercheurs au cours des dernières décennies en raison de ses vastes applications industrielles et techniques, (dégivrage de bord d'attaque des ailes, refroidissement des réacteurs nucléaires en cas d'arrêt d'urgence, refroidissement des aubages des turbines et des composants électroniques...)

### **I.6.1 Écoulement de Hiemenz**

L'écoulement bidimensionnel d'un fluide près d'un point de stagnation est un problème classique en mécanique des fluides. Il a d'abord été examiné par Hiemenz[7] qui a démontré que les équations de Navier-Stokes régissant l'écoulement peuvent être réduites à une seule équation différentielle ordinaire de troisième ordre en utilisant la transformation de similarité. En raison des non-linéarités dans l'équation différentielle réduite, aucune solution analytique n'est disponible et l'équation non



linéaire est habituellement résolue numériquement sous réserve de conditions aux limites à deux points, dont l'une est prescrite à l'infini.



**Figure (I.10)** Ecoulement de point de stagnation. (Solution de Hiemenz) [8].

### I.6.2. Écoulement sur une plaque verticale chauffée

Dans cet article **Chen et al.**[9], ont effectué une étude des caractéristiques du transfert de chaleur et de masse en convection mixte le long de plaques planes verticales ou inclinées, sous l'influence des effets combinés de flottabilité thermique et massique. Ils ont supposé que les effets Soret et Dufour ainsi que les vitesses interfaciales sont négligeables. La plaque est maintenue soit à température et concentration uniforme ou encore à flux thermique et massique uniforme. Les résultats numériques sont présentés pour le nombre de Nusselt local et le nombre de Sherwood local pour la diffusion de masse dans l'air ainsi que l'eau.

Ils ont déduit que les flux surfaciques locaux augmentent lorsque les forces dues à la diffusion massique (poussée due à la différence de concentration) assistent celle de flottabilité thermique, et diminuent si ces deux dernières sont opposées. De plus, les effets combinés des deux forces sur le taux de transfert de masse et de chaleur ont tendance à diminuer avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale. Finalement, ils mettent en place une comparaison entre les deux cas étudiés (température/concentration uniforme et flux massique/de chaleur uniforme).

**Ton Hoang et al.** [10], ont étudié en régime transitoire, la couche limite laminaire sur une plaque verticale en convection mixte. Le système d'équations est résolu à l'aide de la méthode numérique de différences finies, avec un schéma implicite. Ils ont montré que la nature de la plaque influe sur les

épaisseurs des couches limites dynamique et thermique ainsi que sur la vitesse de l'écoulement. Ils ont observé qu'une faible perturbation de vitesse engendre une instabilité de l'écoulement.

**Ramachandran et al. [11]**, ont étudié un écoulement bidimensionnel laminaire en présence de convection mixte sur une paroi verticale au voisinage du point de stagnation, ils ont analysé les deux cas où cette dernière est soumise à une température et à un flux de chaleur arbitraires. Les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie gouvernant les champs dynamique et thermique ont été adimensionnalisés, en imposant un changement de variable approprié ainsi et le système d'équations différentielles ordinaires obtenu a été résolu dans les deux configurations où les forces de flottabilité assistent l'écoulement ou au contraire lui sont opposées.

Les résultats numériques sont obtenus pour certaines valeurs du paramètre de flottabilité pour lesquelles des solutions locales existent. Ils ont conclu que le taux de transfert de chaleur ainsi que le coefficient de frottement augmente avec l'accroissement de la valeur du paramètre de flottabilité dans la région où l'écoulement est assisté (par les forces de flottabilité), et qu'une zone de recirculation se développe dans la région où l'écoulement est ralenti, ils ont aussi constaté l'existence de solutions doubles dans cette zone pour un intervalle de valeurs du paramètre de flottabilité.

**Anuar Ishak et al [12]** en (2008) ont calculé les solutions duales en convection mixte à proximité d'un point de stagnation sur une plaque verticale poreuse. L'écoulement extérieur normal à la plaque chauffée, la température de surface et la vitesse d'écoulement varient linéairement avec la longueur à partir du point de stagnation. Le système qui régit les équations différentielles partielles est d'abord transformé en un système d'équations différentielles ordinaires, et les équations transformées sont solutionnées numériquement par un système de différences finies, à savoir la méthode Keller-box. Les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur pour différentes valeurs des paramètres qui régissent sont analysés et discutés. Les deux écoulements opposés sont pris en compte. Il est constaté qu'il existe des solutions duales pour le flux au sens de l'écoulement, outre que généralement rapporté dans la littérature pour l'écoulement opposé.

Ils ont étudié aussi l'effet du transfert de masse, c'est-à-dire d'aspiration ou d'injection, sur l'écoulement de couche limite en convection mixte près du point de stagnation sur une plaque plane verticale perméable.

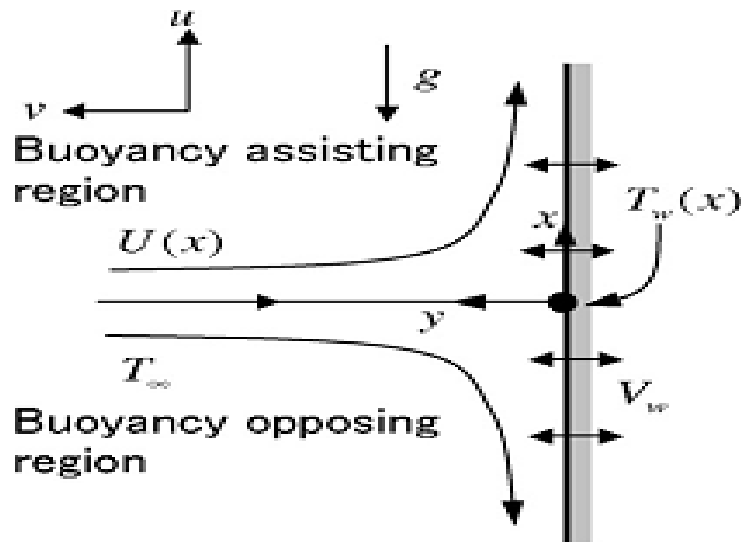


Figure (I.11) Modèle physique étudié par [12]

**Fazlina Aman, AnuarIshak** [13] en 2010 ont traité le problème de la convection mixte d'un écoulement de fluide visqueux et incompressible au point de stagnation d'une plaque qui s'étend verticalement avec présence d'un flux de chaleur sur la surface prescrite. Les équations différentielles partielles sont d'abord transformées en un système d'équations différentielles ordinaires, avant d'être résolues numériquement par un système de différences finies connu sous le nom la méthode de Keller-box.

Les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur pour différentes valeurs des paramètres qui régissent sont analysés et discutés. Les deux flux, au sens et opposé de l'écoulement sont pris en compte. Les résultats indiquent que des solutions duales existent pour le flux opposé à l'écoulement, alors que pour l'autre la solution est unique.

Dans d'autres études similaires **F. Amani et al** [14] en 2011 ont étudié la convection mixte d'un écoulement permanent de couche limite au point de stagnation d'une plaque verticale avec effet de glissement ; le fluide est considéré visqueux et incompressible. La température de la plaque et la vitesse de l'écoulement extérieur varient en fonction de la distance à partir de point de stagnation.

Les équations différentielles partielles régissantes sont d'abord transformées en un système d'équations différentielles ordinaires, qui sont ensuite résolues numériquement par la méthode de Tir ; pour obtenir le coefficient de frottement de la paroi et le nombre de Nusselt local ainsi que la vitesse et les profils de température pour différentes valeurs du : paramètre de vitesse de glissement, le paramètre de glissement thermique, et le paramètre de poussée ayant une valeur fixe du nombre de Prandtl « Pr ». Les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur pour des différentes

valeurs des paramètres qui régissent l'écoulement sont analysés et discutés. Deux écoulements opposés sont pris en compte.

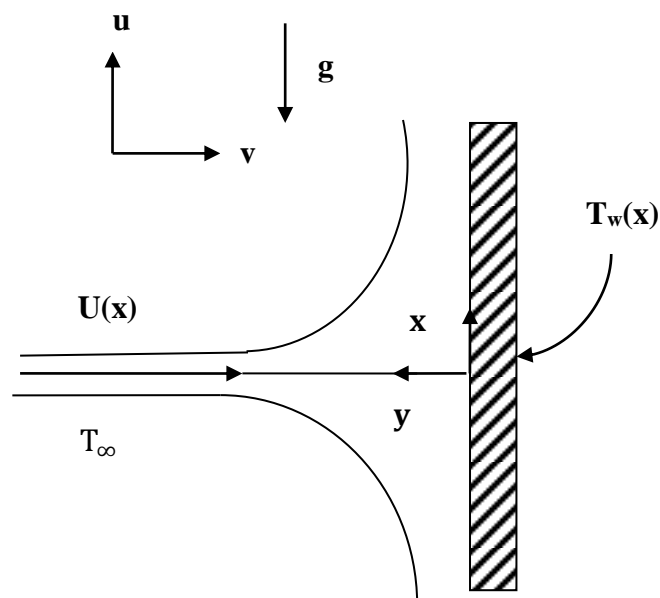
# Chapitre II

## II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons le modèle physique et les hypothèses simplificatrices. nous établissons les équations régissant la convection mixte double diffusive le long d'une plaque verticale. Ensuite nous posons les conditions aux limites sous forme adimensionnelle et nous introduisons les principales grandeurs dynamiques et thermiques.

## II.2 Description du problème

Dans cette étude nous étudions l'écoulement de couche limite impactant de vitesse  $U_\infty$  sur une plaque verticale chauffée imperméable à une température uniforme  $T_w$  qui est différente de celle de fluide, avec la température et la vitesse varie linéairement avec la distance  $X$  du point de stagnation, comme suit  $U_\infty(X) = ax, T_w(x) = T_\infty + bx$  Ou  $a$  et  $b$  sont des constantes et  $T_\infty$  est la température du fluide au sien de l'écoulement laminaire.



**Figure (II.1)** Schématisation de modèle physique

### II.3 Hypothèse simplificatrice :

Pour la modélisation du problème, nous adoptons les hypothèses suivantes :

- ✓ L'écoulement de fluide et transfert de chaleur sont permanent et le régime est laminaire
- ✓ Le fluide est newtonien et incompressible
- ✓ La plaque est imperméable
- ✓ Les propriétés thermophysiques du fluide ( $\mu$ ,  $C_p$ ,  $K$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ ) sont constantes.
- ✓ L'écoulement est bidimensionnel ( $X$ ,  $Y$ ).
- ✓ L'approximation de Boussinesq est valide, elle consiste à considérer que les variations de la masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantité de mouvement ( $\rho = \rho_\infty$ ), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de la température est donnée comme suit  $\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$

$T_0$  : Température de référence.

$\beta$  : Le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

$\rho_0$  : Masse volumique du fluide à  $T_0$ .

### II.4 Formulation de problème:

L'étude numérique du phénomène de la convection se base sur les équations liant le paramètre de la pression, la température et la vitesse. Ces équations découlent des lois suivantes :

- ✓ La loi de la conservation de la masse (équation de continuité)
- ✓ La loi de la conservation de la quantité de mouvement (Newtonien, Navier -stokes)
- ✓ La loi de la conservation de l'énergie (équation d'énergie)

#### II.4.1 Equation de continuité

Cette équation est déduite du principe de conservation de masse. Elle s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{II. 1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{II. 1. a}$$

Si fluide est incompressible :

$$\rho = cst$$

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{II. 1. b}$$

**II.4.2 Equations de conservation de quantité de mouvement**

Cette équation est déduite de la deuxième loi de la dynamique, qui stipule que la Variation de la quantité de mouvement d’une particule fluide est la somme des forces Extérieures sur cette particule. Elle s’écrit comme suit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = (-\nabla \rho + \mu \nabla^2 \vec{V} - \vec{g}(\rho\beta)(T - T_\infty)) \quad \text{II. 2}$$

**II.4.3 Equation d’énergie**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{V})T = \alpha \nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho C_p} (T - T_\infty) \quad \text{II. 3}$$

**II.5 Equations de conservation dimensionnelles régissant l’écoulement et le Transfert thermique**

**II.5.1 Equations dimensionnelles**

En tenu compte des hypothèses simplificatrices précédemment, les équations régissant de l’écoulement en coordonnée cartésienne s’écrite comme suit :

**II.5.2 Equation de continuité**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad \text{II. 4}$$

**II.5.3 Equation de quantité de mouvement**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \pm g\beta(T - T_\infty) \quad \text{II. 5}$$

**II.5.4 Equation d’énergie**

L’équation de l’énergie est obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un fluide Newtonien incompressible, elle s’écrit comme suit :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\phi}{\rho C_p} (T - T_\infty) \quad \text{II. 6}$$

**II.6 Condition aux limites**

$$\begin{aligned} u=0 & \quad v=0 & \quad T=T_w(x)=T_\infty+bx \\ y=0 & \quad u \rightarrow U(x)=ax & \quad T \rightarrow T_\infty \text{ à } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$



**II.7 Formulation adimensionnelle**

Le dimensionnement consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimension, cela permet d'exprimer la réalité des phénomènes physique indépendamment des systèmes de mesure, et de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètre de façon à rendre la solution plus générale.

**II.8 Équation adimensionnelles et solution auto-similaire :**

Pour résoudre les systèmes d'équation de quantité mouvement et continuité, on cherche une solution de type auto-similaire étant donné qu'il s'agit d'un écoulement de couche limite. Ainsi on introduit les expressions suivantes :

$$\eta = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} y = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} y, \quad \Psi = (U\nu x)^{\frac{1}{2}} f(\eta) = (\nu a)^{\frac{1}{2}} x f(\eta)$$

$$\theta(\eta) = \frac{(T - T_{\infty})}{(T_w - T_{\infty})}$$

Où,  $\Psi$  est la fonction de courant définie comme suit :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

On développant u et v, on trouve :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = ax f'(\eta) \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (-\nu a)^{\frac{1}{2}} f'(\eta)$$

Après introduction de (condition) dans les équations, on obtient les équations différentielles suivantes :

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 + \lambda \theta = 0 \qquad \text{II.7}$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' - f'\theta + B\theta = 0 \qquad \text{II.8}$$

Où le signe (') représente une différentielle par rapport à  $\eta$

Tel que

$$\lambda = Gr_x / Re_x^2 = \frac{\rho\beta(T - T_\infty)l}{\nu^2}$$

$$Gr = \frac{\rho g \beta \Delta T l^3}{\nu^2} \qquad Re = \frac{vl}{\nu}$$

**II.9 Conditions aux limites :**

Les conditions aux limites peuvent se réécrire comme suit :

Pour :  $\eta = 0, f(0) = 0, f'(0) = 0, \theta(0) = 1$

Pour :  $\eta \longrightarrow \infty, f(\eta) \longrightarrow 1, \theta(\eta) \longrightarrow 0$

Les quantités physiques qui nous intéressent sont le coefficient de frottement

$C_f$  Et le nombre Nusselt local  $Nu_x$ , qui sont définis par

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u^2 / 2} \qquad Nu_x = \frac{xq_w}{k(T_w - T_\infty)} \qquad II.9$$

Comme  $\tau_w$  représente la contrainte de cisaillement a la paroi et  $q_w$  représente le flux de chaleur transmis par la paroi au fluide.

$$\tau_f = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \qquad \tau_f = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \qquad II.10$$

Avec  $\mu$  et  $k$  représente la viscosité dynamique et la conductivité thermique respectivement. En utilisant les variables de similarité en obtient :

$$\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2} = f''(0) \qquad Nu_x / Re_x^{1/2} = -\theta'(0) \qquad II.11$$

### **Conclusion**

Dans ce chapitre en a posé le problème sous forme d'équation mathématique (dynamique et thermique) et le modéliser, en suit en exposerons la méthode de résolution des équations avec la méthode de Runge-Kutta et de Tir.

# Chapitre III

### III.1 Introduction

Le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses est celui de la résolution des équations différentielles. Cela vient du fait que toute modélisation mathématique d'un, ou de plusieurs phénomènes physiques, est décrite par une, ou un système d'équations différentielles. Vu que la majorité, pour ne pas dire la totalité des phénomènes physiques ne sont pas linéaires, il n'existe pas de solutions analytiques pour ces problèmes. Nous sommes obligés de chercher des solutions approchées de la solution exacte (analytique). La, où les solutions de ces équations sont déduites par une approche numérique adéquate.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, la méthode de tir utilisé pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires modélisant le problème physique étudié.

### III.2 Méthode d'Euler

C'est une procédure numérique qui permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du premier degré, c'est la plus simple des méthodes. L'inconvénient est néanmoins qu'elle est peu précise et l'erreur introduite à la première itération a des répercussions sur les calculs de la deuxième itération donc l'erreur se propage d'une itération à l'autre.

Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives, Une équation différentielle est dite linéaire, si elle est écrite sous forme d'une combinaison linéaire (coefficients constants) de dérivées successives des inconnues.

Elle s'écrit de la façon suivante :

$$f' = F(x, f) \quad \text{III. 1}$$

Le passage au domaine discret se fait par un développement en série de Taylor de la solution  $f(x_{i+1})$  au voisinage de  $x = x_i$ , généralement on arrête le développement à un ordre qui dépend de la précision voulue. Si on fait un développement d'ordre deux, on écrit :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} \quad \text{III. 2}$$

On pose  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  alors :

$$f_{i+1} = f_i + \left(\frac{df}{dx}\right)_i \Delta x + \varepsilon(\Delta x^2) \quad \text{III. 3}$$

$\varepsilon(\Delta x^2)$  Est appelée erreur de troncature, et elle est bornée, ce qui est équivalent à écrire :

$$f_{i+1} = f_i + \left(\frac{df}{dx}\right)_i \Delta x \quad \text{III. 4}$$

On obtient alors le schéma d'Euler, qui s'écrit sous la forme :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x F(f_i, x_i) \quad \text{III. 5}$$

Le but est d'appliquer la méthode de Runge-Kutta, qui est très recommandée pour ce genre de problème. Elle nous permet d'aboutir à des solutions approximatives avec une grande précision.

### III.3 Méthode de Runge-Kutta

#### III.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre N

Les méthodes de Runge-Kutta (ou RK), sont très couramment utilisées pour la résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO). Ce sont des méthodes à pas unique, directement dérivées de la méthode d'Euler.

- **Avantage :**

- elles sont faciles à programmer.
- elles sont en général stables, en tout cas pour les fonctions usuelles.
- la largeur du pas peut être modifiée sans difficulté.
- on peut adapter le pas pour obtenir une précision souhaitée.

- **Inconvénients :**

- elles demandent plus de temps de calcul que d'autres méthodes de précision comparables.
- elles sont mal adaptées à la résolution des équations instables.

Cette famille de méthodes explicites plus efficaces et plus pratiques que les méthodes d'Euler est basée sur le schéma numérique suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \quad \text{III. 6}$$

$$\text{Avec } k_j = (Y_j, x_i + h\xi_j), \quad 0 \leq \xi_j \leq 1 \quad Y_j = f_i + \sum_{k=1}^N x_{jk} Y_k \quad \text{III. 7}$$

En d'autres termes, on estime la pente de la fonction  $f$  en  $N$  points de l'intervalle  $[x_i, x_i + \Delta x]$ , puis l'on calcule une pente moyenne (c'est le terme  $\sum_{j=1}^N \bar{\omega}_j K_j$ ) qui sert alors à calculer l'incrément par la méthode d'Euler. Les coefficients  $\xi_j, x_{jk}$  et les poids  $\bar{\omega}_j$  sont déterminés en imposant que le schéma (III.7) soit équivalent à celui qui est associé à la méthode des séries entières d'ordre  $N$ .

### III.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$f' = F(x, f) \quad f(x_0) = f_0 \quad \text{III. 8}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de  $f_{i+1}$  à partir de la valeur de  $f_i$ :

On considère un point intermédiaire A d'abscisse  $x_i + \Delta x/2$  dont la valeur de l'ordonnée est donnée par :

$$f_{iA} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i \quad \text{III. 9}$$

Puis un point B d'ordonnée :

$$f_{iB} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iA} \quad \text{III. 10}$$

On calcule alors l'ordonnée d'un point C d'abscisse  $x_i + h$  à l'aide de la relation :

$$f_{iC} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iB} \quad \text{III. 11}$$

On pose

$$k_1 = \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i \quad k_2 = \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iA} \quad k_3 = \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{iB} \quad k_4 = \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_{iC} \quad \text{III. 12}$$

Puisque  $f' = F(x, f)$  on aura donc

$$\begin{aligned}
 k_1 &= F(x_i, f_i) & k_2 &= F\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= F\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_2}{2}\right) & k_4 &= F(x_i + \Delta x, f_i + k_3)
 \end{aligned}$$

L'ordonnée définitive  $f_{i+1}$  du point d'abscisse  $x_i + \Delta x$  est donnée par la relation :

$$f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{III. 13}$$

- $k_1$  est la pente au début de l'intervalle ;
- $k_2$  est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente  $k_1$  pour calculer la valeur de  $f$  au point  $x_i + \Delta x/2$  ;
- $k_3$  est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente  $k_2$  pour calculer  $f$  ;
- $k_4$  est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de  $f$  calculée en utilisant  $k_3$ .

### III.4 Méthode de Tirs

À ce point du raisonnement, nous avons seulement considéré les solutions des équations différentielles pour lesquelles les conditions initiales sont connues. Cependant, beaucoup d'applications dans les sciences physiques n'ont pas des conditions initiales, mais plutôt des conditions aux limites. En effet, la méthode de Tir consiste à transformer le problème aux limites en un problème aux valeurs initiales. Elle est basée sur les quatre étapes itératives suivantes :

- ❖ On choisit une condition initiale  $X_0$ , qui peut être la vitesse initiale par exemple.
- ❖ On résout alors le problème aux conditions initiales par l'une des méthodes précédemment exposées, telle que la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre.
- ❖ On calcule la valeur de la condition aux limites.
- ❖ Si la valeur finale n'est pas atteinte, on modifie la valeur initiale, et on recommence les étapes précédentes jusqu'à l'obtention de la valeur finale souhaitée.

Pour donner au lecteur une idée, nous présentons l'exemple suivant. Soit l'équation Différentielle ordinaire du second ordre aux conditions aux limites suivantes :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = F\left(x, f, \frac{df}{dx}\right) \quad x \in [a, b] \tag{III. 14}$$

Ayant les conditions aux limites suivantes:

$$f(a) = (c_1) \qquad f(b) = (c_2) \tag{III. 15}$$



Nous pouvons encore approcher ce problème par le choix des conditions initiales suivantes :

$$f(a) = c_1 \quad \frac{df(a)}{dx} = e_n \quad \text{III. 16}$$

La constante  $e_n$  doit être déterminée de telle sorte que  $f(b)$  soit égale à  $c_2$ . Elle est généralement arbitraire qui toutefois vérifie le test de convergence :

$$|f(b, e_n) - c_2| \leq \varepsilon \quad \text{III. 17}$$

Avec  $\varepsilon$  nombre réel infiniment petit.

Si le test de convergence n'est pas vérifié il va falloir corriger la valeur de  $e_n$  par le moyen d'une correction de type Newton ; le processus itératif est ainsi poursuivi jusqu'à satisfaction du test de convergence. On présente dans ce qui suit le principe de la correction de Newton :

À partir du développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $e_n$ :

$$f(b, e_{n+1}) = f(b, e_n) + (e_{n+1} - e_n) \frac{df(b, e_n)}{de_n} = c_2 \quad \text{III. 18}$$

On déduit la formule de correction de Newton suivante :

$$e_{n+1} = e_n + \frac{c_2 - f(b, e_n)}{\frac{d}{de_n} f(b, e_n)} \quad \text{III. 19}$$

L'utilisation de la formule de correction (III.19) nécessite la connaissance préalable de G.

On résout alors le problème aux variations relatives à :

$$\frac{d}{de_n} f(b, e_n) \quad \text{III. 20}$$

Associée à l'équation (III.14) munie des conditions aux limites (III.16).

Le problème se présente comme suit :

$$\frac{d}{de_n} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right) = \frac{d}{de_n} \left( F \left( x, f, \frac{df}{dx} \right) \right) \quad x \in [a, b] \quad \text{III. 21}$$

Avec

$$\frac{d}{de_n} f(a) = 0 \quad \frac{d}{de_n} f'(a) = 1 \quad \text{III. 22}$$

L'équation (III.21) munie des conditions aux limites (III.22) est résolue par la méthode de Range-Kutta d'ordre quatre.

### IV.5 Algorithme de résolution

L'exemple cité précédemment montre bien que le problème consiste à chercher la valeur appropriée de  $e_n$ , qui satisfait le problème original, l'algorithme est comme suit :

- ❖ On résout l'équation différentielle pour des conditions initiales quelconques
- ❖  $y(a) = c_1$  et  $y'(a) = e_n$
- ❖ On évalue pour  $x = b$ , la valeur de  $f(b)$ , puis on compare cette valeur à la valeur recherchée.
- ❖ On ajuste la valeur de  $e_n$  jusqu'au niveau de précision désiré.
- ❖ Une fois que l'on obtient par itérations successives, la valeur cible voulue avec la précision désirée, on affiche les conditions initiales trouvées.

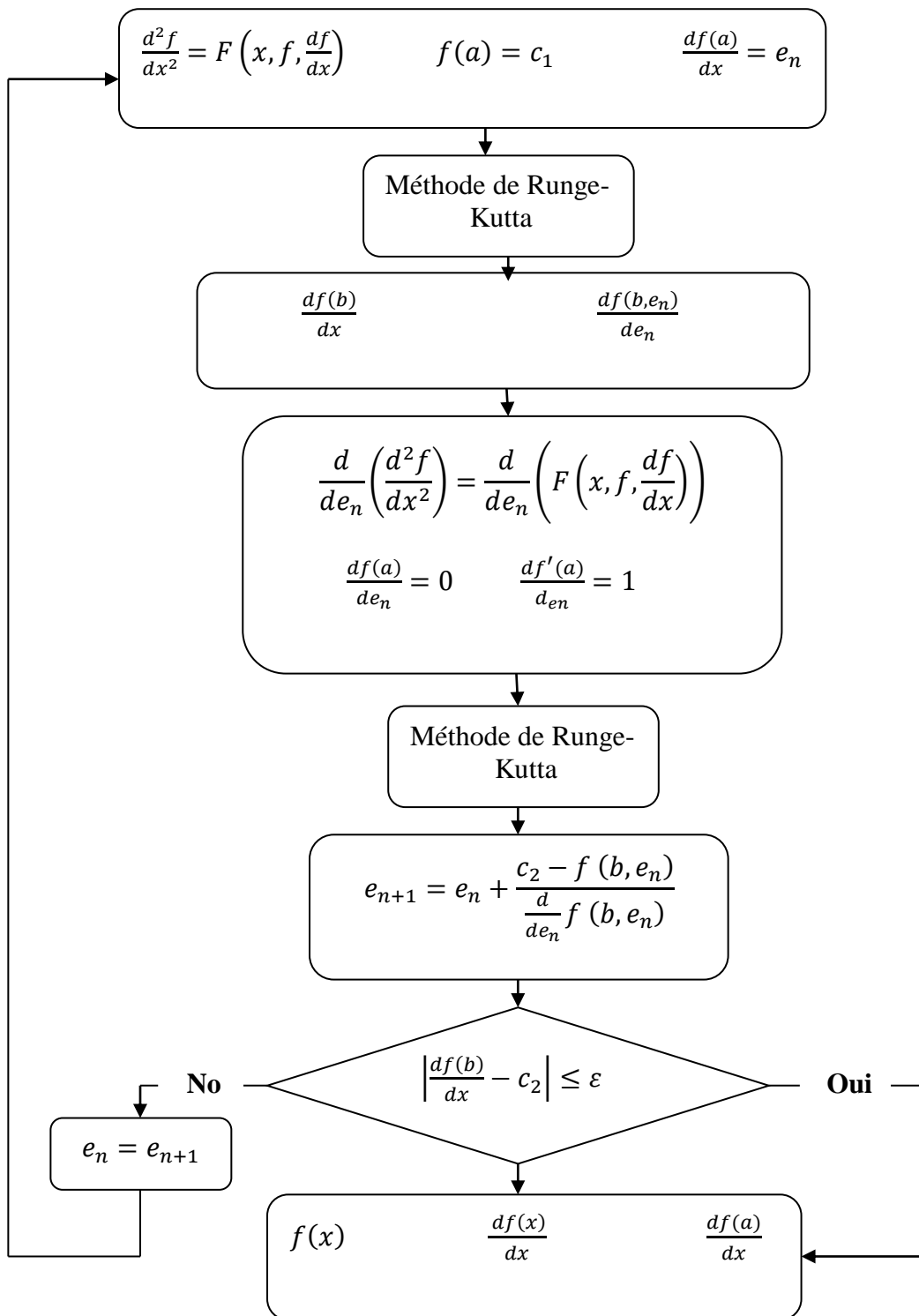


Figure (III.1) Organigramme général de résolution (Méthode de Tir).

**Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté brièvement les méthodes de résolutions des équations utilisées dans notre étude. Nous avons aussi présenté l'algorithme de la méthode de Tir et de Runge Kutta. Dans le chapitre suivant nous allons présenter les résultats issus de la simulation sur Matlab

# Chapitre IV

## IV.1 Introduction

Les résultats obtenus dans le cadre de ce travail ainsi que la démarche suivie font l'objet de ce chapitre. Nous rappelons que notre étude concerne un écoulement de couche limite qui se développe autour d'une plaque vertical chauffé. Du fait de l'existence d'un transfert thermique, il y a un couplage entre l'aspect dynamique et thermique du problème. L'étude est axée, d'une part, sur l'influence de la variation du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) et la source de chaleur ( $B$ ) sur l'aspect dynamique et thermique de l'écoulement le long de la paroi. Pour cette étude nous avons utilisé les équations de Navier-Stokes et de l'énergie simplifiées au voisinage de la paroi pour mettre en évidence le développement de la couche limite.

Le domaine de variation du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) est compris entre (0.5 et 6).

Les champs de vitesses de températures est des grandeurs physiques qui sont le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement seront présentés en détail sous forme de courbes.

## IV.2 Formulation des équations du problème posé

Les équations gouvernantes sont connues, et ont été présentées dans le chapitres précédant, le système d'équation différentielles ordinaire obtenu est :

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 + \lambda\theta = 0 \quad IV.1$$

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' - f'\theta = 0 \quad IV.2$$

La fonction dynamique ( $f$ ) et ses dérivées ainsi que la fonction thermique ( $\theta$ ), dépendent de la variable adimensionnelle ( $\eta$ ).

Les conditions aux limites pour  $f$  et  $\theta$  sont:

$$\text{Pour : } \eta = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \theta(0) = 1$$

$$\text{Pour : } \eta \longrightarrow \infty, \quad f'(\eta) \longrightarrow 1, \quad \theta(\eta) \longrightarrow 0$$

### IV.3 Validation numérique

Pour valider nos résultats numériques et vérifier la véracité et la précision de la méthode de calcul utilisée, nous les avons confrontés, à ceux de Hassanien et Gorla [15], Ramachandran et al [14] ainsi qu'à ceux de Lok et al. [16].

Pr	Ramachandran et al [14]	Hassanien et Gorla [15]	Lok et al [16]	Nos résultats	
				Première solution	Deuxième solution
0.7	1.7063	1.7063	1.7064	1.7063	1.2387
1	-	-	-	1.6754	1.1332
7	1.5179	-	1.5180	1.5179	0.5824
10	-	1.4928	-	1.4928	0.4958
20	1.4485	-	1.4486	1.4485	0.3436
40	1.4101	-	1.4102	1.4101	0.2111
50	-	14068	-	1.3989	0.1720
60	1.3903	-	1.3903	1.3903	0.1413
80	1.3774	-	1.3773	1.3774	0.0947
100	1.3680	1.3847	1.3677	1.3680	0.0601

**Tableau IV.1:** Valeurs de  $f''(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand  $\lambda=1$

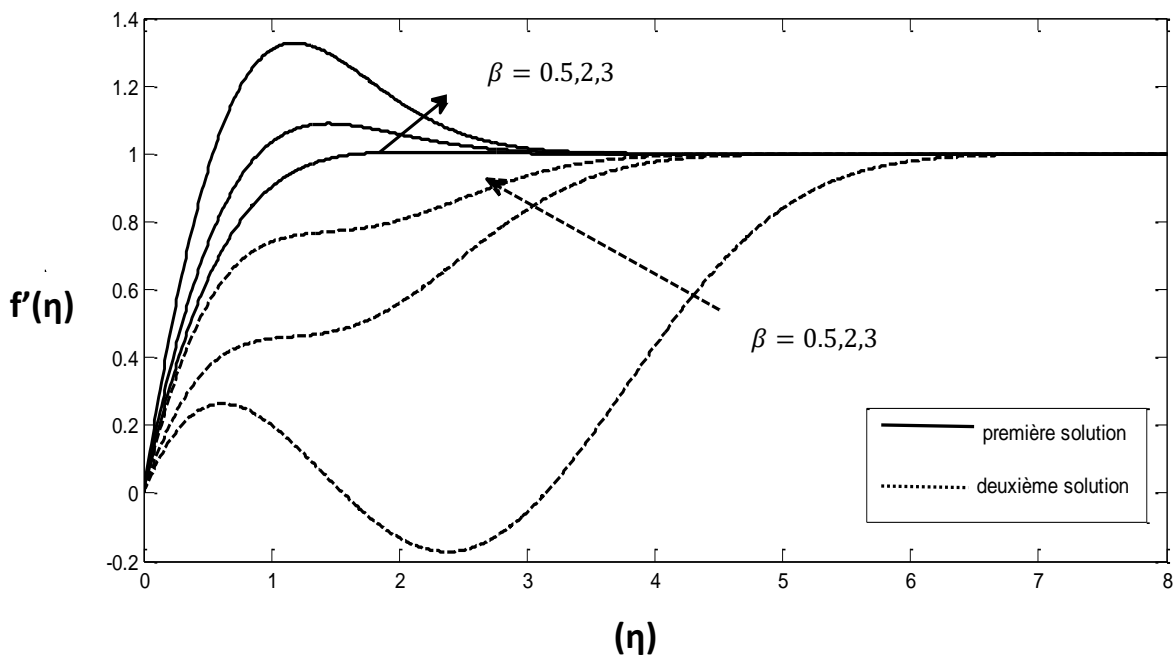
Pr	Ramachandran et al [14]	Hassanien et Gorla [15]	Lok et al [16]	Nos résultats	
				Première solution	Deuxième solution
0.7	1.7641	0.76406	0.7641	0.7641	1.0226
1	-	-	-	0.8708	1.1691
7	1.7224	-	1.7226	1.7224	2.2192
10	-	0.94461	-	1.9446	2.4940
20	2.4576	-	2.4577	2.4576	3.1646
40	3.1011	-	3.1023	3.1011	4.1080
50	-	3.34882	-	3.3415	4.4976
60	3.5514	-	3.5560	3.5514	4.8572
80	3.9095	-	3.9095	3.9095	5.5166
100	4.2116	4.23372	4.2116	4.2116	6.1230

**Tableau IV.2 :** Valeurs de  $-\theta'(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand  $\lambda=1$

On remarque une certaine homogénéité ainsi qu'une concordance avec les résultats obtenus par les auteurs cités précédemment, ce qui nous permet de prouver la justesse de notre code de calcul.

## VI.4 Discussion des résultats

### VI.4.1. Champ dynamique :

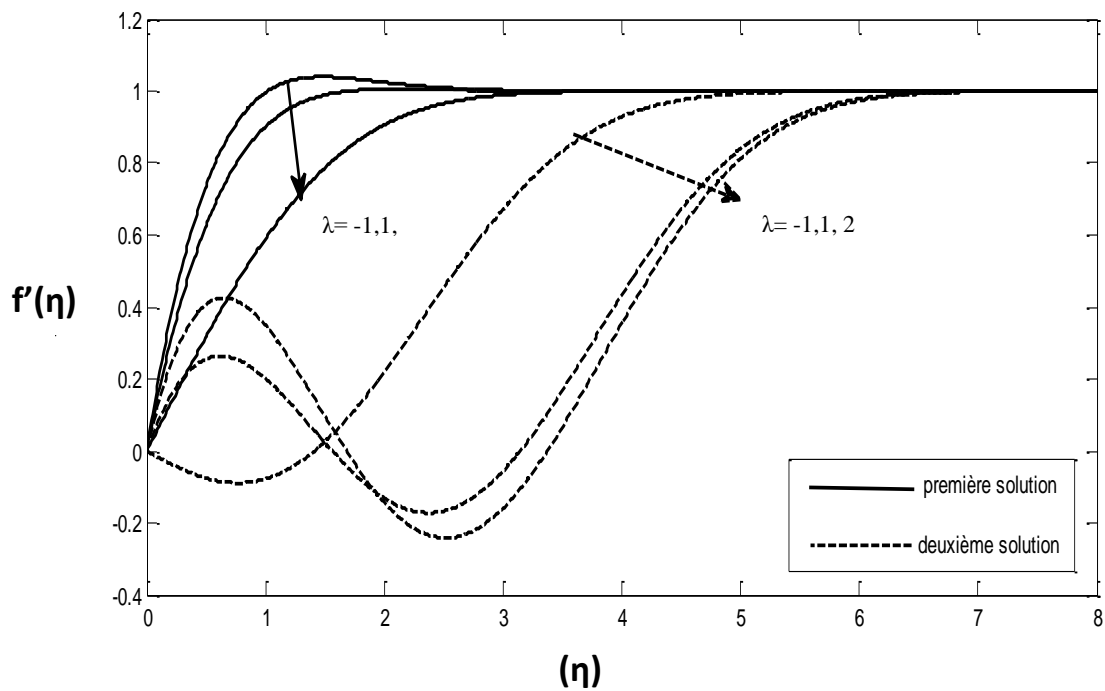


**Figure(IV.1)** Effet de  $\beta$  sur le profil de vitesse  $f'$  en fonction de la variable adimensionnelle  $(\eta)$

La figure (IV.1) représente la variation du profil de vitesse en fonction de coordonnée adimensionnelle  $(\eta)$  pour différentes valeurs de  $\beta$  (source de chaleur) dans le cas de deux solutions, on remarque que un rétrécissement l'épaisseur de la couche limite pour la deuxième solution y'a un rétrécissement de avec l'augmentation de  $\beta$  et pour la premier solution y'a un étirement de l'épaisseur de la couche limite dynamique avec l'augmentation  $\beta$ .

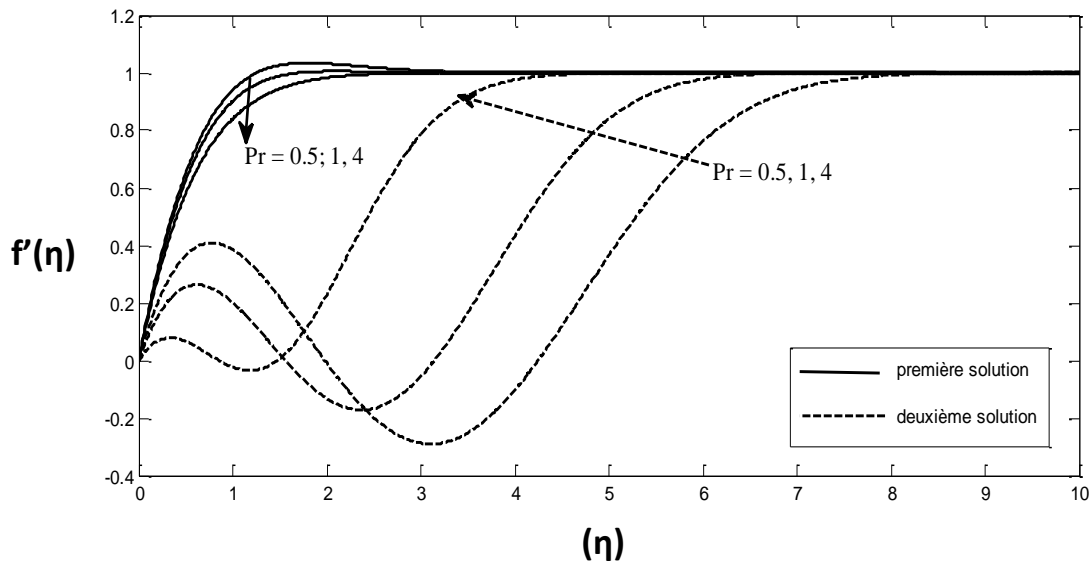
D'autre part la vitesse de fluide augmente avec l'augmentation de  $\beta$  pour la première solution.





**Figure (IV .1.a)** Effet de  $\lambda$  sur le profil de vitesse  $f'$  en fonction de la variable adimensionnel( $\eta$ )

La figure (IV.1.a) montre la variation du profil de vitesse  $f'(\eta)$  en fonction de ( $\eta$ ) pour différentes valeurs de  $\lambda$  (-1, 1, 2) dans le cas de deux solution. Pour la premier solution on remarque que l'épaisseur de la couche limite dynamique augmente avec l'augmentation de  $\lambda$  et c'est le même cas pour la deuxième solution y'a un étirement de l'épaisseur de la couche limite dynamique avec l'augmentation

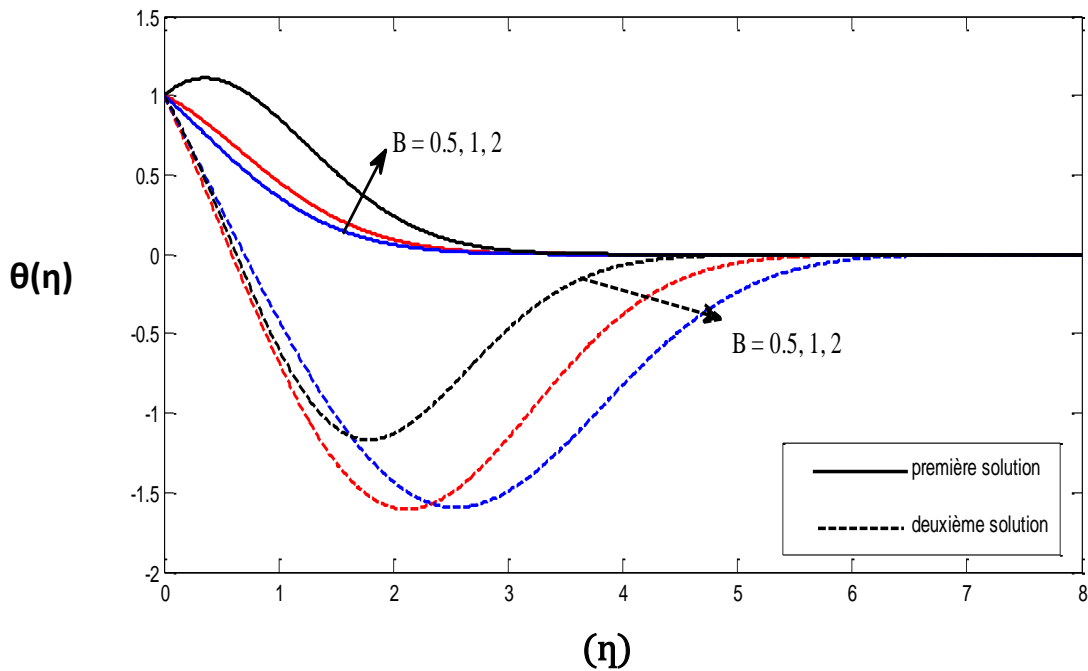


**Figure(IV.1.b)** Effet de Pr sur le profil de vitesse  $f'$  en fonction de la variable adimensionnel( $\eta$ )

La figure (IV.1.b) présente l'évolution du profil de vitesse adimensionnelle pour un écoulement laminaire, pour un nombre de Prandtl (0.5, 1, 4), Nous remarquons un rétrécissement de l'épaisseur de la couche limite dynamique avec l'augmentation de nombre de Pr et pour les deux solutions (stables et instable)

**VI.4.2.Champ thermique :**

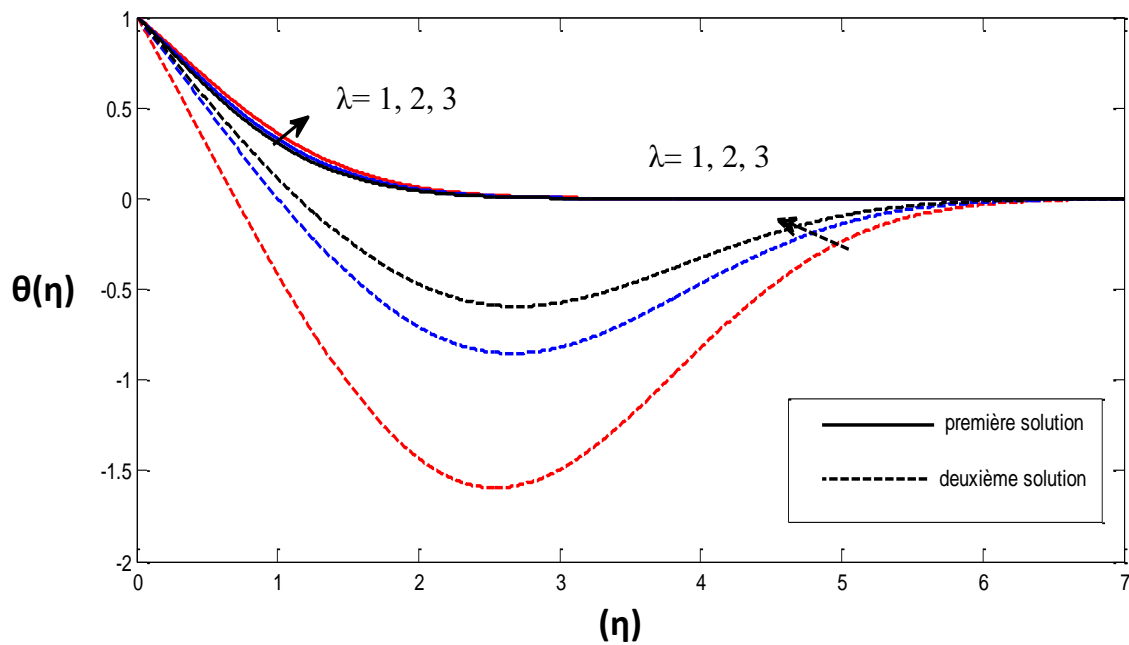
Les profils de température pour différentes valeurs de nombre de Pr (2, 4, 6) et B source de chaleur B (0.5, 1, 2) et  $\lambda$  sont représenté sur les figure (IV.2, IV.2.a, IV .2.b)



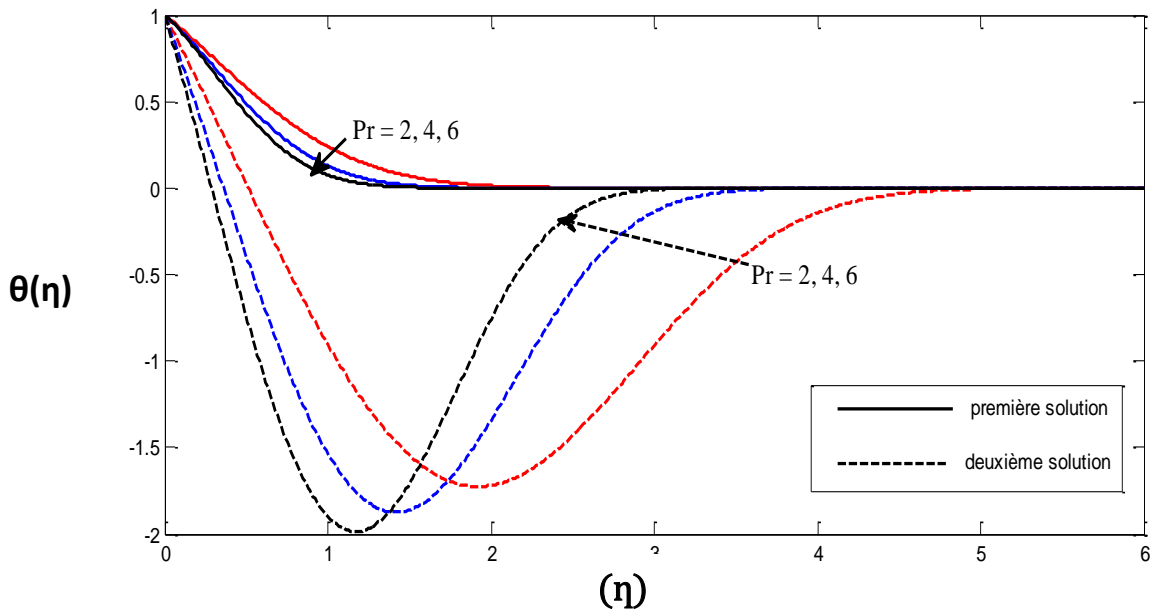
**Figure(IV.2)** Influence du rapport de source de chaleur B sur le profile de température

La variation de la température adimensionnelle en fonction de la variable auxiliaire ( $\eta$ ) pour les différents valeurs de B (0.5, 1, 2) sont illustrées dans la figure(IV.2), pour la première solution on remarque une diminution de profile de température  $\eta=0 \theta=1$  jusqu'a  $\eta=\infty \theta=0$  pour les différentes valeurs de B et comme l'épaisseur de couche limite diminue avec

Et de même pour la deuxième solution l'épaisseur de couche limite thermique augmente avec l'augmentation de B



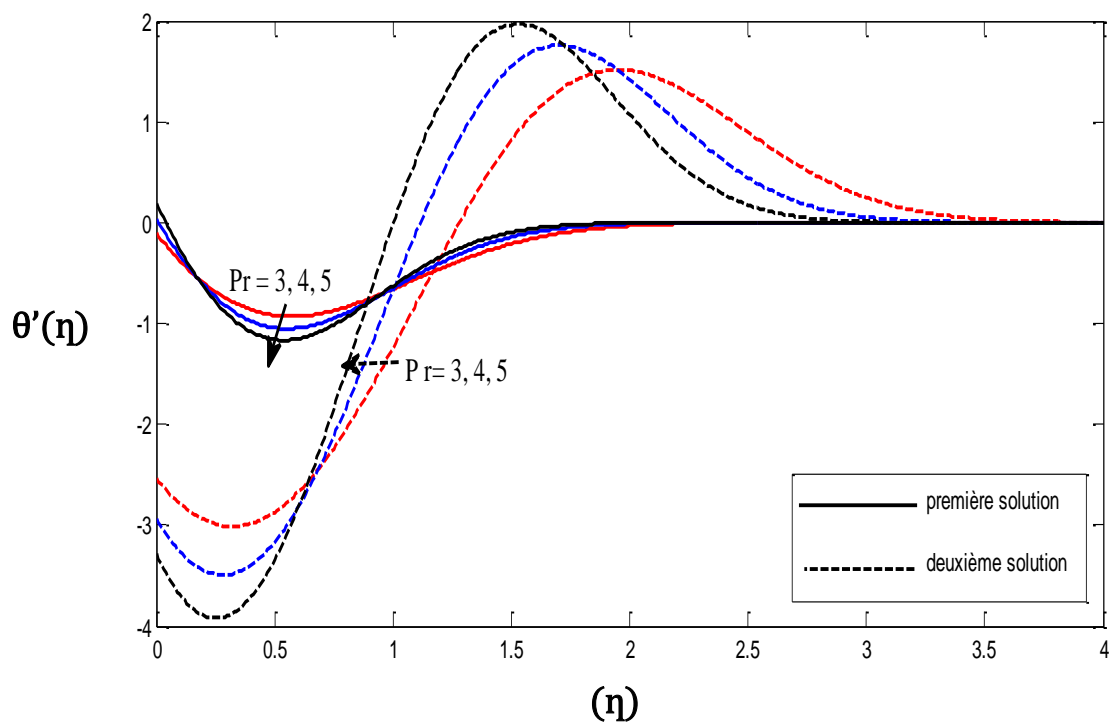
Figure(IV.2.a) Influence de rapport  $\lambda$  sur le profil de température



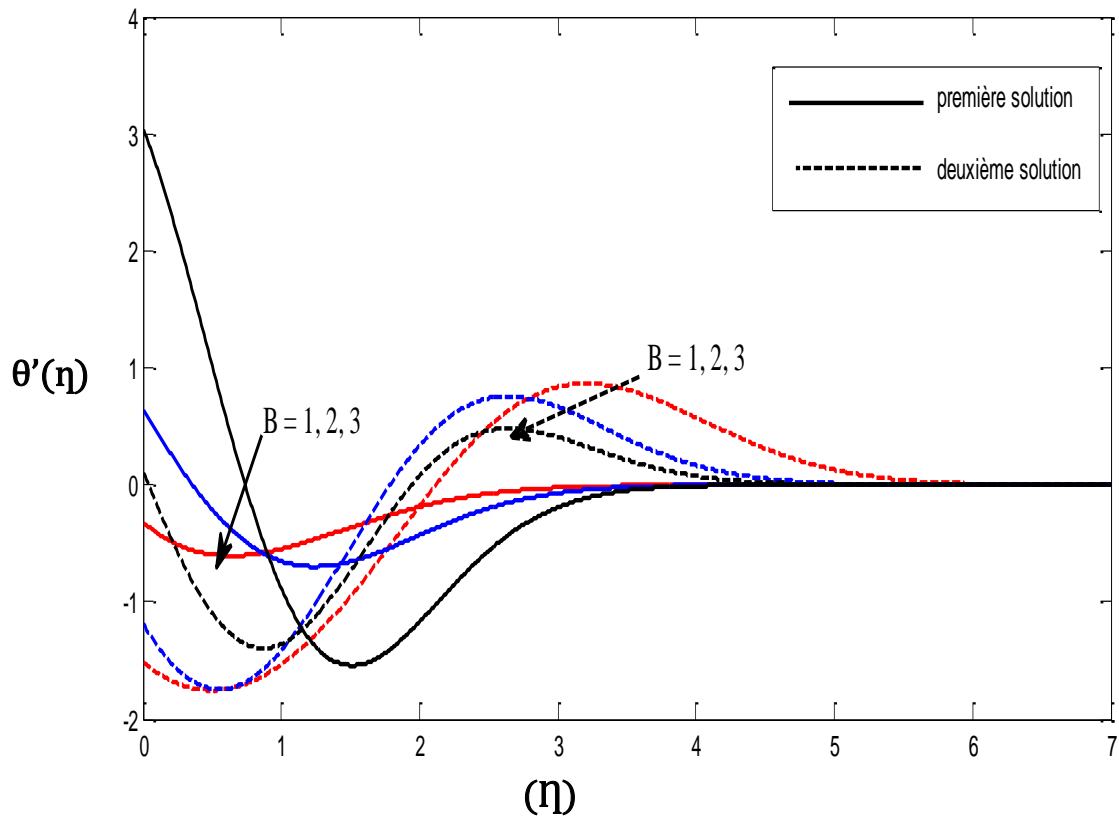
Figure(IV.2.b) Influence de nombre de Prandtl sur le profil de température

La figure (IV.2.a) montre l'influence de paramètre  $\lambda$  sur le profil de température  $\theta$  en fonction de  $\eta$  on remarque que l'épaisseur de la couche limite thermique diminue pour la deuxième solution environ de 6,5 jusqu'à 5,5 et contrairement pour la première solution comme la valeur de  $\lambda$  est importante l'épaisseur de la couche limite thermique augmente

Et de même pour la figure (IV.2.b) qui représente le profil de température en fonction de  $\eta$  avec différents nombres de Prandtl (2, 4, 6) ce qui permet d'aboutir à la variation de l'épaisseur de la couche limite, pour la deuxième solution y'a un rétrécissement de l'épaisseur de couche limite thermique avec augmentation de nombre de Prandtl et de même pour la première solution



Figure(IV.3) Influence de nombre de Prandtl sur le gradient de température  $\theta'$



**Figure(IV.3.a)** Influence de B source de chaleur sur le gradient de température  $\theta'$

Les figure (IV.3) et (IV.3.a) qui représentant l'influence de paramètre B et nombre de Prandtl sur le gradient de température  $\theta'$ .

on remarque pour la(IV.3) la deuxième solution varie entre les valeurs positive et négative ( -2,5 , -3 , -3,5) et[1,2]avec différente valeur de nombre de Prandtl(3, 4, 5).

Et de même pour La figure (IV.3.a) la deuxième solution de  $\theta'$ varie entre [-1,5 ; 0, 3] et [0,5 ; 1] avec augmentation de B (1, 2, 3)

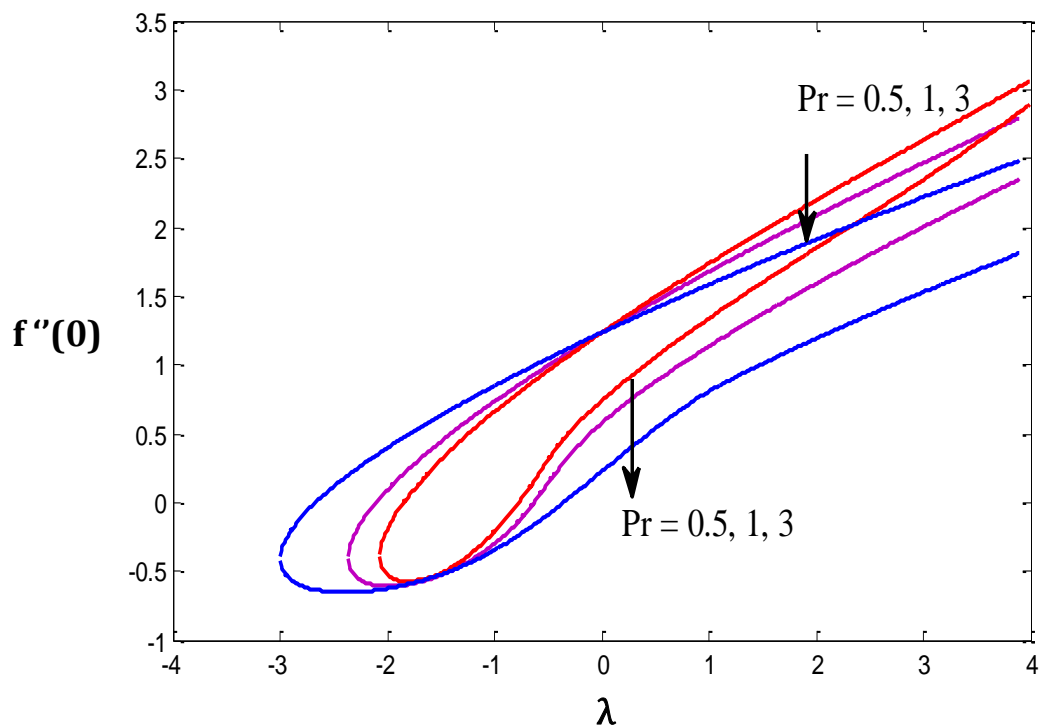
On constate que y'a une instabilité dans les deux figures pour la deuxième solution

La première solution : pour la figure (IV.3) on remarque quelle varie entre et [0,1] et dans ce cas l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

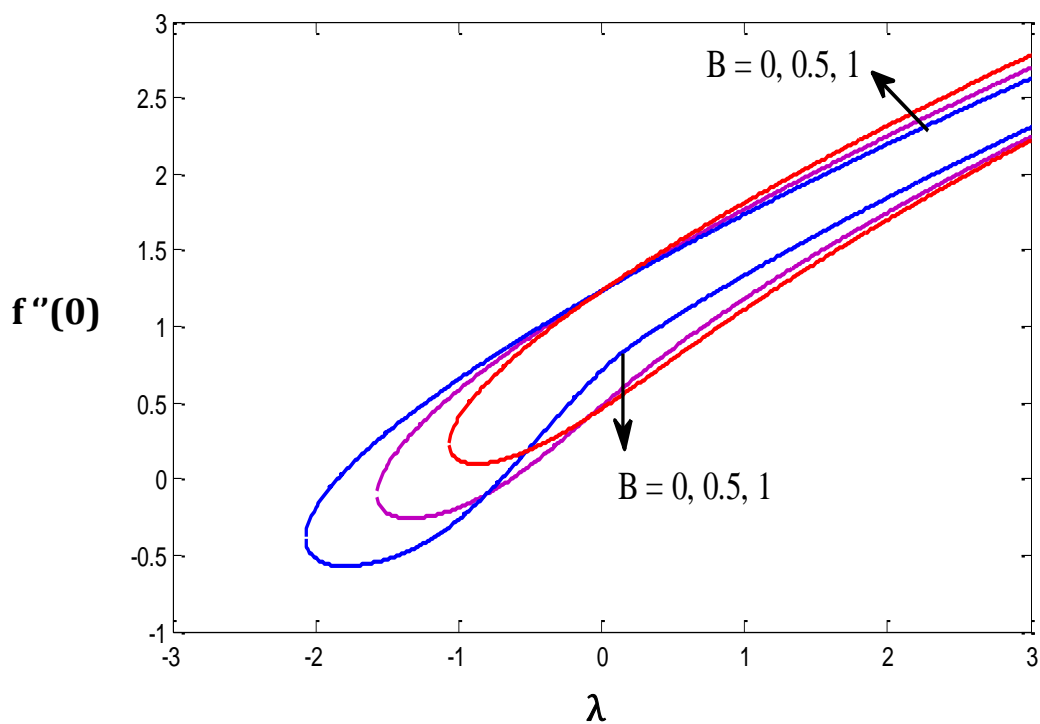
Pour la figure (IV.3.a) a solution stable varie entre 3 et -0, 5 a  $\eta=0$   $\theta' = [3, -0, 5]$  diminue jusqu'à  $\theta' [-0,5 ; -1,5]$  à  $\eta [1, 2]$  et à  $\eta= 3,5$   $\theta'=0$  et la qu'on remarque un Étirement de l'épaisseur de la couche limite thermique avec l'augmentation de

B (1, 2, 3).

**IV.5 Coefficient de frottement et nombre du Nusselt**



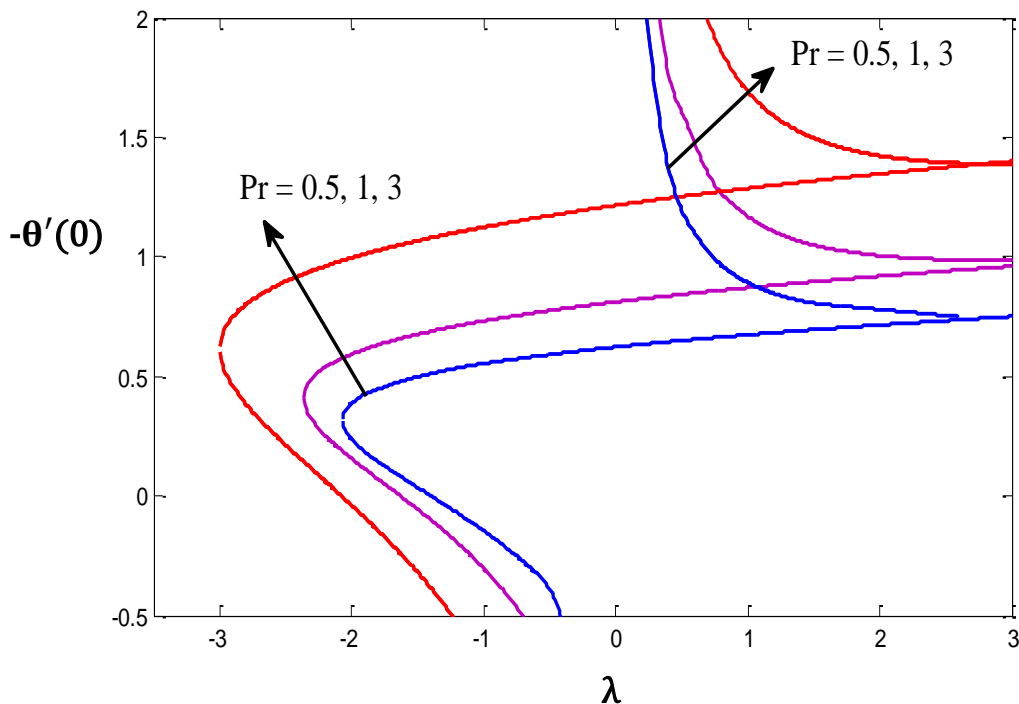
**Figure(IV.4).** Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de  $\lambda$  pour différentes valeur du nombre de Prandtl



**Figure (IV.4.a).** Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de  $\lambda$  pour différentes valeur du paramètre de source de chaleur (B)

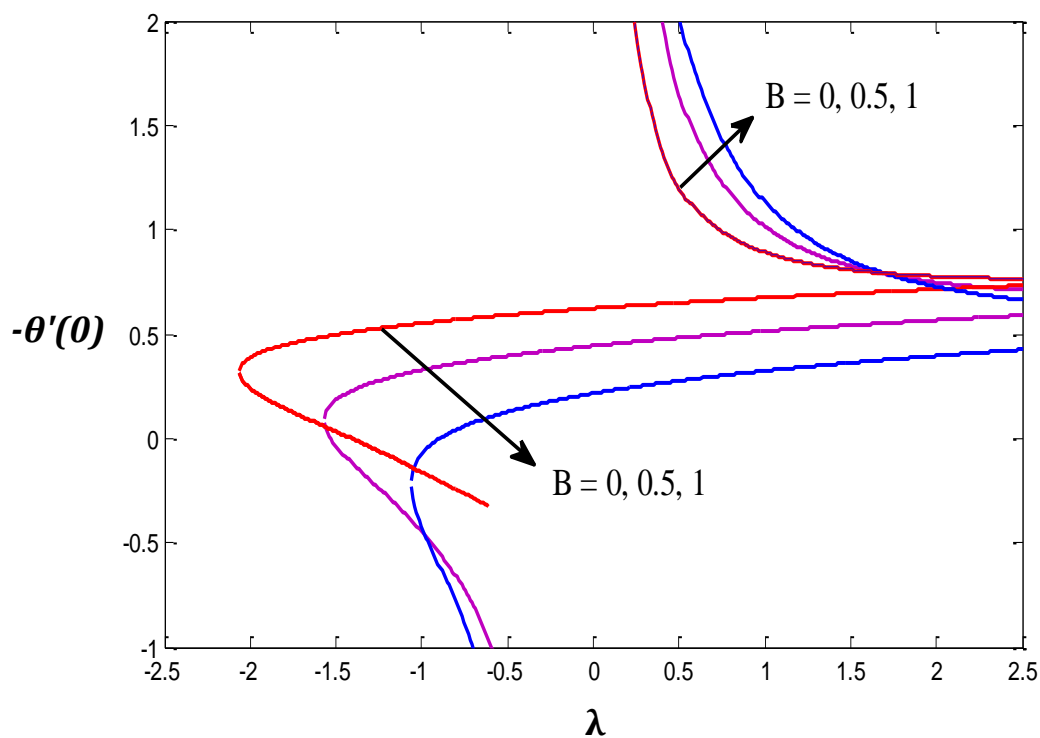
Les figure (IV.4-IV.4.a) représentent le coefficient de frottement  $f''(0)$  en fonction de  $\lambda$  pour différentes valeurs de nombre de Prandtl (Pr) et le paramètre de source de chaleur (B).

On remarque des solutions doubles pour des valeurs positif et négatif de  $\lambda$  pour les deux intervalles  $[\lambda_c = -2.996 ; 4]$  et  $[\lambda_c = -2.0693 ; 4]$  respectivement non existence de solution pour des valeurs inférieure à une valeur critique, On constat pour la première solution qu'avec l'augmentation de nombre de Prandtl (Pr) le coefficient frottement diminue ce raisonnement s'applique aussi pour la deuxième solution, et pour le paramètre (B) on remarque que pour la première solution quand (B) est grand le frottement augment et dans la deuxième solution le frottement diminue avec la diminution de paramètre (B).



**Figure (IV.5)** Profil du Nombre de Nusselt a la paroi en fonction de  $\lambda$  pour différentes valeur du nombre de Prandtl





**Figure (IV.5.a).** Profil du nombre de Nusselt à la paroi en fonction de  $\lambda$  pour différentes valeurs du paramètre de source de chaleur ( $B$ )

Les figures (IV.5, IV.5.a) représentent les variations du Nusselt locale  $-\theta'(0)$  en fonction de  $\lambda$  pour différentes valeurs de Prandtl ( $Pr$ ) et le paramètre de source de chaleur ( $B$ ) respectivement.

Nous ne constatons que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl dans les deux solutions et à propos de source de chaleur ( $B$ ).

Il est intéressant de noter que l'augmentation de ce terme induit un accroissement du nombre de Nusselt pour la première solution contrairement à celle de la deuxième.

**Conclusion**

Dans cette étude, on a analysé le comportement de l'écoulement de couche limite qui se développe autour d'une plaque vertical chauffé à savoir l'influence de nombre de Prandtl et le paramètre de source de chaleur sur le développement de la couche limite thermique et dynamique d'où on a tracé les profile de vitesse de température et de coefficient de frottement et de Nusselt, les résultats issus de cette étude sont vérifié et discutés. Il est vérifié que l'épaisseur d'une couche limite varie avec la variation des paramètres ( $Pr$ ) et ( $B$ ).

# **Conclusion Générale**

### Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail est l'analyse du comportement de la couche limite sous l'influence de plusieurs paramètres. L'étude fait partie d'un axe de recherche très important.

On a étudié l'écoulement de couche limite qui se développe autour d'une plaque vertical chauffé, on le retrouve dans différents processus industrielle comme le dégivrage de bord d'attaque des ailes d'avions, refroidissement des aubes des turbines et des composants électroniques.

L'écoulement de base est obtenu en résolvant les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Les équations de mouvement sont réduites à un système d'équation ordinaire qui se présente sous forme d'un problème aux valeurs aux limites, ces équations sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre associée à la méthode de Tiré.

Pour cette étude on varie deux paramètres, le nombre de Prandtl et le paramètre de source de chaleur pour tracer des profils de température, de vitesse, le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt.

L'analyse des résultats auxquelles nous avons abouti conduit à ces conclusions :

- La vitesse de l'écoulement augmente quand le paramètre de source de chaleur ( $B$ ) augmente sur la première solution.
- L'épaisseur de la couche limite dynamique augmente avec l'augmentation de  $\lambda$ .
- Nous remarquons un rétrécissement de l'épaisseur de la couche limite dynamique avec l'augmentation de nombre de ( $Pr$ ).
- Plus ( $B$ ) et ( $\lambda$ ) sont grands, plus la température est importante plus la couche limite thermique augmente, et chaque fois ( $Pr$ ) augmente on a une diminution de température et un rétrécissement de l'épaisseur de couche limite thermique.
- Nous constatons que l'augmentation de nombre de Prandtl augmente le nombre de Nusselt et réduit le coefficient de frottement pour les deux solutions, cela peut s'expliquer par le fait que les fluides avec un nombre de Prandtl important possèdent une diffusivité thermique faible et ainsi le transfert de chaleur est plus important.
- Le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) améliore le transfert thermique
- La valeur critique  $\lambda_c$  augmente en tant que paramètre de source de chaleur ( $B$ ) ainsi que le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) est augmenté et pour un  $\lambda < \lambda_c$  y'a pas de solution et pour un  $\lambda = \lambda_c$  y'a une seule solution et la séparation de la couche limite se produit et pour un  $\lambda > \lambda_c$  il

## Conclusion générale

---

existe deux solution et pour ce qui concerne le nombre de Nusselt on a obtenu des solutions doubles pour un  $\lambda > 0$  et pour un  $\lambda < 0$

Référence bibliographique

- [1] : Yves Jannot, Transferts thermiques, Cours 2eme année, Ecole des Mines Nancy, 2011.
- [2] : Trabelsi Amel, Etude de l'échange thermique dans une cavité rectangulaire avec deux côtés partiellement actifs, Mémoire de Magister, Université Kasdi Merbah Ouargla, 2011.
- [3] P. H. MARTY. "Transferts Thermiques Convectifs". ILP Génie, 2001.
- [4] D. Thibault, Etude du refroidissement par impact de jet à travers une paroi mince et avec un écoulement cisailant amont: application aux aubes de turbines, thèse de doctorat, ENSMA- Poitiers, (2009).
- [5] A. Derdouri, Etude par la programmation d'un jet rond turbulent impactant une plaque plane circulaire, mémoire de magistère, Université Constantine 1, (2014).
- [6] GRADECK Miche. 29 juin 2005. PR 2.3 Refroidissement diphasique, Rapport d'activité, Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée 2 avenue de la forêt de Haye BP 160 54504 Vandoeuvre Cedex, France.
- [7] K. Hiemenz, Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder, Dinglers Polytech. Journal 32 (1911) 321-410.
- [8] T. S. Chen, C. F. Yuh, Combined heat and mass transfer in mixed convection vertical and inclined plates, Int. J. Heat Mass Transfer, (1979), 23, 527-537.
- [9] Mai Ton Hoang, R. Zebiri, T. Lorenzo, Convection mixte en régime transitoire de couche limite laminaire sur une plaque verticale, C.R. Acad. Sci. Paris, t.329. Série II b, p. 627-631, (2001).
- [10] N. Ramachandran, T.S. Chen, B.F. Armaly, Mixed convection in stagnation flows adjacent to vertical surfaces,

- [11] A.Ishak , R.Nazar , M.Arifin and I.Pop « Dual solutions in mixed convection flow near a stagnation point on a vertical porous plate » *International Journal of Thermal Sciences* 47 417–422. (2008)
- [12] F. Aman and A.Ishak « Mixed Convection Flows Toward a Stagnation-point on a Stretching Sheet » *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 4(9): 4453-4460.(2010).
- [13] F.Amani , A.Ishak and I.POP « Mixed convection boundary layer flow near stagnation-point on vertical surface with slip » *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 32(12), 1599–1606 (2011).
- [14] N. Ramachandran, T.S. Chen, B.F. Armaly, Mixed convection in stagnation flows adjacent to a vertical surfaces, *ASME J. Heat Transfer* 110 (1988) 373–377.
- [15] I.A. Hassanien, R.S.R. Gorla, Combined forced and free convection in stagnation flows of micropolar fluids over vertical non-isothermal surfaces, *Int. J. Engng. Sci.* 28 (1990) 783–792.
- [16] Y.Y. Lok, N. Amin, I. Pop, Unsteady mixed convection flow of a micropolar fluid near the stagnation point on a vertical surface, *Int. J. Thermal Sci.* 45 (2006) 1149–1157.

# **Annexes**



### A. Groupements sans dimension

Dans le cadre de notre étude nous allons être amenés à utiliser plusieurs nombres adimensionnels, que nous nous proposons de définir ci-dessous.

#### Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes et très utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise différents régimes d'écoulement. Pour  $Re < 1$ , l'écoulement est un écoulement de Stokes. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement va passer successivement par trois régimes d'écoulement : le régime laminaire, le régime de transition et le régime turbulent

On le définit de la manière suivante :

$$Re = \frac{VL}{\vartheta}$$

Avec :

- ✓  $V$ , vitesse caractéristique du fluide [m/s]
- ✓  $L$ , dimension caractéristique [m]
- ✓  $\nu$ , viscosité cinématique du fluide [ $m^2/s$ ]

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$$

- ✓  $\rho$ , masse volumique du fluide [ $kg/m^3$ ]
- ✓  $\mu$ , viscosité dynamique du fluide [ $Pa \cdot s$  ou  $kg/(m \cdot s)$ ] d'où la formulation classique :

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

## Annexe

---

### Le nombre de Grashof (Gr)

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection libre dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. Pour des valeurs élevées du nombre de Grashof, le transfert thermique est essentiellement dû à la convection au sein du fluide tandis que pour des valeurs faibles le transfert thermique est essentiellement dû à la conduction dans le fluide.

Il est défini par :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T L_c^3 \rho^2}{\mu^2}$$

Avec :

- ✓  $g$  accélération de la pesanteur
- ✓  $\beta$  coefficient de dilatation en fonction de la concentration
- ✓  $\Delta T$  différence de température
- ✓  $L_c$  longueur caractéristique
- ✓  $\mu$  viscosité dynamique
- ✓  $\rho$  Masse volumique de fluide

### Nombre de Nusselt

est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser les transferts thermiques entre un fluide et une paroi, appelé transfert convectif.

On le définit de la manière suivante :  $Nu = \frac{h_t L}{k}$

### Nombre de Prandtl

(Pr) est un nombre sans dimension, ainsi nommé en hommage au physicien allemand Ludwig Prandtl. C'est le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique) et celle de la chaleur (diffusivité thermique) :

## Annexe

---

$$Pr = \frac{\vartheta}{k}$$

Avec :

- ✓  $\vartheta$  la viscosité cinématique,
- ✓  $k$  la diffusivité thermique,

qui s'expriment toutes les deux en  $\text{m}^2/\text{s}$ .

$$\text{Comme } \vartheta = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad k = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

Une définition équivalente est :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

Avec :

- ✓  $\mu$  la viscosité dynamique (exprimée en  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ),
- ✓  $\rho$  la masse volumique (en  $\text{kg m}^{-3}$ ),
- ✓  $\lambda$  la conductivité thermique, (en  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ),
- ✓  $C_p$  la capacité thermique massique à pression constante (en  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ).

## Résumé

Ce travail concerne l'étude numérique de l'écoulement de la couche limite induit par un jet impactant sur une paroi verticale chauffée imperméable. On a discuté et analysé l'effet de certains paramètres dont les conditions aux limites. L'étude est basée sur l'influence de la variation du nombre de Prandtl et la source de chaleur sur l'aspect dynamique et thermique de l'écoulement de la couche limite qui se développe autour d'une plaque verticale chauffée dans le cadre des hypothèses simplificatrices avec des équations gouvernantes (Navier-Stokes et d'énergie) simplifiées au voisinage de la paroi pour mettre en évidence le développement de la couche limite. En effet, les résultats de la résolution d'équation avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, associée avec la méthode de Tir utilisée pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires et modélisant le problème physique étudié.

**Mots clés :** couche limite, thermique, étirement/rétrécissement, point de stagnation, solution auto-similaire, conductivité

## Abstract

This work concerns the numerical study of the flow of the boundary layer induced by a jet impacting on an impermeable heated vertical wall. The effect of some parameter whose boundary conditions were discussed and analyzed was based on the influence of variation in the number of Prandtl and the heat source on the dynamic and thermal appearance of the flow of heat. Boundary layer that develops around a heated vertical plate under simplifying assumptions with governing equations (Navier-Stokes and energy) simplified in the vicinity of the wall to highlight the development of the boundary layer. Indeed, the results of the equation solving with the Fourth-order Runge-Kutta method, associated with the Tir method used to solve the system of ordinary differential equations and modeling the studied physical problem.

**Key words :** boundary layer, thermal, stretching/shrinking, stagnation point, similar auto solution, conductivity