

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Abderrahmane Mira -Béjaia-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : Ait Sadi Nassima

THÈME

**Liens entre le cadre topologique et le cadre ergodique des
systèmes dynamiques discrets**

Soutenu, le 30 / 09 / 2021 devant le jury composé de :

Présidente :

Mme K. Mebarki-Kheloufi Professeur Univ. A. Mira de Béjaïa

Encadreur :

Mr. R. Chemlal Maître de conférence A Univ. A. Mira de Béjaïa

Examinatrice :

Mme. F. Boulahia-Talbi Maître de conférence A Univ. A. Mira de Béjaïa

Année Universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENTS

Mes vifs remerciements sont d'abord adressés à monsieur **Chemlal Rezki** qui m'a fait l'honneur de travailler sur ce thème et que sans lui, ce modeste travail n'aurait pas vu le jour. Je le remercie infiniment pour son aide, pour la qualité de son encadrement exceptionnel et surtout pour sa disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.

Je remercie les membres de Jury qui m'ont fait le grand honneur d'évaluer ce travail.

A mes parents, à qui j'exprime ma haute considération pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et économique, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire. Je les remercie chaleureusement pour la digne éducation qui m'ont doté, leur présence a fait de moi la personne que je suis.

A la meilleure personne que les mathématiques m'ont fait l'honneur de rencontrer. Collègue tu étais et soeur tu es devenue. **Amzal Lydia**, merci ma chère pour ta présence et ton soutien durant toutes ces années passées ensemble. Jamais ton sourire ne quittera ma mémoire.

Finalement, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers **mes frères** et chères amies : **Massissilia**, **Zoubida** et **Souad** pour leurs encouragements tout au long de ma démarche.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
REMERCIEMENTS	1
TABLE DES FIGURES	3
 CHAPITRE	
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1. DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE	4
1.1 Généralités	4
1.1.1 Représentation graphique des systèmes dynamiques définis sur un intervalle	6
1.2 Exemples classiques de systèmes dynamiques discrets	7
1.2.1 Rotation sur le cercle	7
1.2.2 Endomorphisme du tore	9
1.2.3 Doublement de période	13
1.3 Transitivité et minimalité	14
1.3.1 Caractérisation de la transitivité et de la minimalité	14
1.4 Systèmes mélangeants	17
2. THÉORIE ERGODIQUE	21
2.1 Transformations préservant la mesure	21
2.2 Existence de mesure invariante	23
2.2.1 La topologie de $M(X)$	23
2.3 Exemples de mesures invariantes	27

2.3.1	Mesures invariantes portées par les points fixes et points périodiques	27
2.3.2	Rotations sur le cercle	28
2.3.3	Doublement de période	29
2.4	Récurrence	29
2.5	Ergodicité	31
2.5.1	Exemples : (Utilisation des séries de Fourier pour prouver l'ergodicité)	35
2.6	Existence de mesure ergodique	37
2.7	Théorèmes ergodiques	41
2.8	Unique ergodicité	43
2.9	Mélange mesurable	45
2.9.1	Mélange faible	45
2.9.1.1	Transformation ergodique mais pas faiblement mélangeante.	47
2.9.2	Mélange fort	48
2.9.2.1	Transformation de Chacon (Système faiblement mélangeant mais pas fortement)	50
2.9.2.2	Théorie spectrale	53
3.	INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE SYMBOLIQUE	58
3.1	Espaces symboliques	58
3.2	Décalage de Bernoulli	62
3.2.1	Points fixes et périodiques de $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$	63
3.2.2	Mesure de Bernoulli	65
3.3	Endomorphismes du shift	67
3.3.1	Exemples d'endomorphismes du shift	69
3.3.1.1	Règle produit	69
3.3.1.2	La règle majorité	70
3.3.2	Endomorphismes du shift surjectifs	71
3.3.3	Les points périodiques des endomorphismes du shift	74
3.3.4	Mesure uniforme sur les endomorphismes du shift surjectifs	78

4. LIENS ENTRE LE CADRE TOPOLOGIQUE ET LE CADRE ERGODIQUE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS	80
4.1 Résultat topologique obtenu par un outil mesurable	80
4.2 Transitivité et ergodicité.....	84
4.2.1 Transitivité et non ergodicité	84
4.2.1.1 Construction du contre exemple	86
4.2.2 Un système uniquement ergodique et non transitif	90
4.2.3 Un système transitif, ergodique et non uniquement ergodique	91
4.2.4 Système ergodique, non uniquement ergodique et non transitif	92
4.3 Minimalité et unique ergodicité.....	93
4.3.1 Les systèmes de Furstenberg	94
4.3.1.1 Construction de l'exemple de Furstenberg	95
4.3.2 Un système transitif, non mélangeant, non minimal et uniquement ergodique.	97
4.3.3 Un système minimal, mélangeant et uniquement ergodique	98
4.3.3.1 Construction de l'exemple	98
4.3.4 Un système mélangeant, minimal et non ergodique	100
CONCLUSION	101
ANNEXE: LES PROGRAMMES UTILISÉS POUR LES DIFFÉRENTES FIGURES	103
A.1 Tracer l'orbite d'un point de (I, f)	103
A.2 Règle majorité	104
A.3 Digramme espace temps du décalage	104
A.4 Règle produit	105
BIBLIOGRAPHIE	106

RÉSUMÉ..... 108

TABLE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Un point et ses itérés.	5
1.2 Orbite du point 0.2	6
1.3 Le système (S^1, R_α)	8
1.4 Chat d'Arnold.	11
1.5 Application du chat d'Arnold avant l'application du mod 1.....	12
1.6 Application du chat d'Arnold après l'application du mod 1.....	12
1.7 (S^1, B)	13
1.8 Le premier itéré d'un point du système (T^2, F)	19
2.1 L'image réciproque d'un intervalle par la fonction doublement de période.	29
2.2 Un point de $[0,1]$ et ses itérés.	31
2.3 Système ergodique mais pas faiblement mélangeant	48
2.4 Tour 1 de Rokhlin.....	51
2.5 Construction de la transformation de Chacon par découpage et empilage.	52
3.1 Diagramme espace-temps du décalage.....	62
3.2 La fonction locale f associée à un endomorphisme du shift.....	67
3.3 Tableau des valeurs de la règle locale associée au produit.	69
3.4 Diagramme espace-temps de la règle produit.	70

3.5	Les valeurs possibles de la fonction locale associée à la règle majorité.	70
3.6	Diagramme espace-temps de la règle majorité.	71
3.7	Diagramme espace-temps associé aux points 01^∞ et 10^∞ de la règle majorité.	71
3.8	Illustration 01 pour la preuve du théorème 115.	72
3.9	Illustration 02 pour la preuve du théorème 115.	73
4.1	Illustration 01 pour la preuve du théorème 123.	81
4.2	Illustration 02 pour la preuve du théorème 123.	82
4.3	Un point de $A^{\mathbb{Z}}$ sous les itérés de l'endomorphisme G	83
4.4	L'élément x à l'étape 0.	86
4.5	L'élément x à l'étape 1.	87
4.6	L'élément x à l'étape 2.	87
4.7	L'élément x à l'étape k	88
4.8	Le système $([0, 1], x^2)$	90
4.9	Schéma résumant les notions du chapitre 04.	100
A.1	Programme Maple permettant de tracer une orbite.	103
A.2	Programme Maple pour le règle majorité.	104
A.3	Programme Maple pour le décalage.	105
A.4	Programme Maple pour la règle produit.	105

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui décrit le comportement des systèmes qui évoluent au cours du temps. Cette théorie est apparue avec la mécanique de Newton qui à l'origine s'agit d'étudier le mouvement des planètes autour du soleil en résolvant un système d'équations différentielles.

Le problème avec la mécanique de Newton réside dans la recherche de cette solution en exprimant la position et le moment pour n -planètes. Dans le cas où $n = 2$, les deux planètes évoluent autour du soleil en suivant les lois de Kepler [10] mais dès que $n \geq 3$, aucune solution simple n'a été trouvée.

Henri Poincaré [14] s'est également intéressé au problème et l'avait abordé en procédant avec des moyens géométriques et topologiques. C'est ce qui est appelé de nos jours étude qualitative des équations différentielles.

Plusieurs mathématiciens sont ensuite sortis du cadre des équations différentielles afin de généraliser les phénomènes observés. C'est ainsi que de nombreuses branches ont vu le jour comme la dynamique topologique et la théorie ergodique.

L'étude topologique des systèmes dynamiques (X, f) repose sur l'étude du comportement des itérés d'un point donné dans l'espace sous les applications de la fonction continue f en se servant des propriétés topologiques de l'espace en question et de la fonction qui lui est associée.

La théorie ergodique est également un moyen bien efficace pour l'étude du comportement asymptotique d'un système. Cette branche des mathématiques est née de l'étude de l'hypothèse ergodique formulée par le physicien Ludwig Boltzmann [18] en 1871 pour sa théorie cinétique des gaz.

Les deux branches de la théorie des systèmes dynamiques : dynamique topologique et théorie ergodique décrivent différentes notions mais qui sont parallèles. Plusieurs résultats sont presque similaires.

Ce mémoire intitulé : "liens entre le cadre topologique et ergodique des systèmes dynamiques" a pour objectif la mise en évidence de ce parallélisme et également de décrire le désaccord qu'il y a entre le cadre topologique et ergodique des systèmes dynamiques discrets. Il est composé de quatre chapitres.

On dédie le premier chapitre à la dynamique topologique où on présente en premier lieu quelques notions basique sur l'orbite d'un point avec illustration de quelques exemples classiques de systèmes dynamiques discrets. Ensuite, nous allons nous intéresser aux systèmes dynamiques admettant des points qui approchent sous les itérés de f n'importe quel autre point du système. C'est la notion de transitivité et de minimalité. Finalement, on abordera le concept de mélange des systèmes dynamiques discrets qui est une notion plus forte que la transitivité.

Le second chapitre concerne la théorie ergodique qui consiste en étude mesurable des systèmes dynamiques munis d'une tribu et d'une mesure invariante sur cette tribu, on parle de systèmes dynamiques mesurés. On commence par décrire ce que signifie une transformation préservant la mesure. Ensuite, on introduit le théorème de récurrence de Poincaré ainsi que la notion d'ergodicité qui fait référence à l'impossibilité de partager l'espace métrique compact X en deux sous-ensembles de mesure positive qui soient fortement invariants. On termine ce chapitre avec la notion de mélange mesurable (fort et faible) et l'introduction d'une méthode particulière de construction de système dynamique appelée "découpage et empilage", qui nous permettra de définir un système faiblement mélangeant pas fortement.

Le troisième chapitre est une introduction à la dynamique symbolique où on présente les espaces symboliques $A^{\mathbb{Z}}$ qui sont des espaces métriques compacts. Tout en citant quelques propriétés d'un système symbolique classique qui est " décalage de

Bernoulli $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ ". Finalement, on passe à l'introduction d'une catégorie particulière des systèmes dynamiques symboliques ayant des dynamiques riches appelée endomorphismes du shift. Notre intérêt sera concentré principalement sur leur surjectivité et la relation entre les points périodiques des ses endomorphismes du shift avec les points σ -périodiques.

Le dernier chapitre du titre « liens entre le cadre topologique et ergodique des systèmes dynamique » fait l'objectif principal de ce mémoire dont on présente en premier un résultat topologique obtenu par un outil mesurable, concernant les points ultimement périodiques des endomorphismes du shift surjectifs. Ensuite, on passe à l'introduction de quelques liens qui existent entre transitivité, minimalité, ergodicité et unique ergodicité en s'appuyant sur certains systèmes dynamiques admettant diverses propriétés.

CHAPITRE 1

DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE

L'objectif de ce premier chapitre est de rappeler les notions basiques en systèmes dynamiques discrets. Pour cela, on présente en premier lieu quelques propriétés élémentaires des systèmes dynamiques discrets avec illustration de certains exemples classiques. Nous nous intéresserons ensuite à certains résultats de la dynamique topologique.

1.1 Généralités

La théorie des systèmes dynamiques repose sur l'étude du comportement des itérations des points d'un espace métrique compact X sous l'application d'une fonction continue f définie de X dans lui-même.

Définition 1

Un système dynamique discret est un couple (X, f) où X est un espace métrique compact et f est une application continue satisfaisant : $f(X) \subset X$.

Les itérés de f sont définis par $f^0 = Id_X$ et $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. On appelle itéré $n^{\text{ième}}$ du point x_0 : $f^n(x_0) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x_0)$.

Si de plus f est bijective alors on peut aussi déterminer la position du point x_0 dans le passé qui s'exprime par $f^{-n}(x_0)$ pour un $n \in \mathbb{N}$.

Comme le montre la figure suivante :

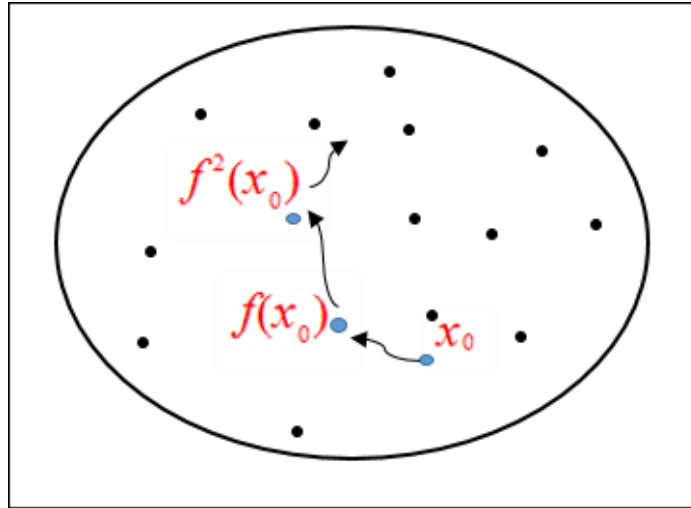


Fig. 1.1. Un point et ses itérés.

Définition 2 L'orbite d'un point x appartenant à X est l'ensemble $\theta(x)$ défini comme suit : $\theta(x) = \{f^i(x), i \in \mathbb{N}\}$.

Définition 3 Soit (X, f) un système dynamique discret.

1. Un point $r \in X$ est dit **point fixe** si $f(r) = r$.
2. Un point $x \in X$ est dit **p -périodique** si p est le plus petit entier tel que $f^p(x) = x$.
3. Un point $x \in X$ est **ultimement périodique** si l'un de ses itérés est périodique.
Autrement dit s'il existe un $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q(x)$ est périodique.

Définition 4 Soit r un point fixe du système dynamique (X, f) .

Le bassin d'attraction de r est l'ensemble $B(r)$ défini comme suit :

$$B(r) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = r\}.$$

Remarque 5 Le bassin d'attraction d'un point fixe r n'est jamais vide car il contient toujours le point fixe r .

Définition 6 Soient (X, f) un système dynamique et A un sous ensemble de X .

1. L'ensemble A est dit invariant si $f(A) \subset A$.
2. L'ensemble A est dit inversement invariant si $f^{-1}(A) \subset A$.
3. L'ensemble A est dit fortement invariant si $f(A) = A$.

1.1.1 Représentation graphique des systèmes dynamiques définis sur un intervalle

La représentation graphique est un moyen pour tracer l'orbite d'un point d'un système dynamique défini sur un intervalle et qui permet d'étudier sa dynamique.

Soit (I, f) un système dynamique défini sur un intervalle I et x_0 un point quelconque de I .

Méthode graphique ([16], p.36) : Pour trouver $f(x_0)$ dans l'axe des abscisses, il suffit de faire la projection verticale du point $(f(x_0), f(x_0))$ qui est à son tour obtenu par l'intersection de la droite $y = f(x_0)$ avec la première bissectrice. En répétant cette procédure, on obtient les itérés suivants du point x_0 .

Exemple 7 ([8], p.21) Soit $([0, 1], \sqrt{x})$ un système dynamique.

La figure suivante représente l'orbite du point $x_1 = 0.2$.

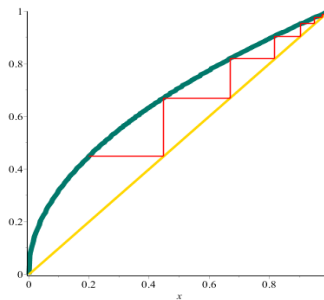


Fig. 1.2. Orbite du point 0.2

1.2 Exemples classiques de systèmes dynamiques discrets

On présente dans cette section quelques exemples de systèmes dynamiques discrets classiques qui seront d'usage plus tard pour illustrer différentes propriétés.

1.2.1 Rotation sur le cercle

On représente le cercle S^1 dans ces deux représentations l'additive et la multiplicative ce qui nous permet de bien écrire les différentes formules le concernant.

La notation multiplicative :

Dans cette notation S^1 est représenté comme un cercle unité dans le plan complexe.

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

La notation additive ([2], p.09) : Avec la notation additive, les éléments du cercle

S^1 sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence \sim définie sur \mathbb{R} par : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Donc, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim$, ses éléments s'écrivent comme suit :

$$[x] = \{x + y, y \in \mathbb{Z}\}.$$

On introduit les opérations suivantes :

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{et} \quad [x] - [y] = [x - y].$$

Remarque 8

Une autre façon pour dénoter S^1 est de le considérer avec une notation d'intervalle $[0, 1[$ dont le point 1 est superposé sur 0.

Définition 9 ([2], p.09)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les rotations d'angle α par $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ avec :

$$R_\alpha([x]) = [x + \alpha] = (x + \alpha) \bmod 1.$$

Qui est équivalent à :

$$R_\alpha = z_0 z, \text{ avec } z_0 = e^{2\pi i \alpha}.$$

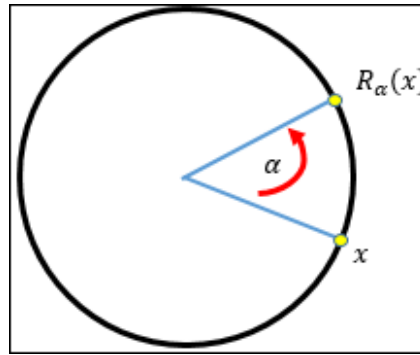


Fig. 1.3. Le système (S^1, R_α) .

Proposition 10 ([2], p.10)

Soit le système dynamique (S^1, R_α) .

1. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors le système (S^1, R_α) n'admet aucun point périodique.
2. Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p, q sont premiers entre eux, alors tous les points de (S^1, R_α) sont des points q -périodiques.

Preuve.

On constate qu'un point $[x] \in S^1$ est q -périodique ssi $R_\alpha^q([x]) = [x]$.

C.à.d : $[x + q\alpha] = [x]$. ■

1.2.2 Endomorphisme du tore

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le tore de dimension n comme suit :

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ fois}} = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n / \sim,$$

où \sim est la relation d'équivalence définie précédemment. Les éléments de T^n sont les classes d'équivalences associées. C.à.d. $[x] = \{x + y, y \in \mathbb{Z}^n\}$, avec $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 11 ([2], p.12) Soit A une matrice de dimension $n \times n$ à valeurs dans \mathbb{Z} .

On définit l'endomorphisme du tore $T_A : T^n \rightarrow T^n$ par :

$$T_A[x] = [Ax] \text{ avec } x \in T^n.$$

Qui peut être également écrit comme suit : $T_A[x] = Ax \bmod 1$.

où, la notation $Ax \bmod 1$ signifie que le mod 1 est appliqué à chaque élément du vecteur Ax .

T_A est bien définie en effet, on a pour $x, y \in T^n$.

Si $[x] = [y]$ alors $x = y + k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}^n$. Ce qui donne $Ax = Ay + Ak$.

D'où, $[Ax] = [Ay]$.

Remarque 12

T_A n'est généralement pas inversible même si la matrice A l'est. Dans le cas où T_A est inversible alors elle dite automorphisme.

Proposition 13 ([2], p.12)

Soit $T_A : T^n \rightarrow T^n$ un automorphisme du tore induit par la matrice A dont le module des valeurs propres de toutes les puissances positives de A est différent de 1. Alors les points périodiques de T_A sont les points avec des coordonnées rationnelles.

Preuve.

Soit $[x] \in T^n$ un point périodique pour T_A , alors il existe $q \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{Z}^n$ tel que :

$$A^q x = x + y \Leftrightarrow (A^q - I_d)x = y.$$

Etant donné que la matrice A n'admet pas de valeurs propres de module 1 alors la matrice $A^q - I_d$ est inversible. D'où : $x = (A^q - I_d)^{-1}y$.

Or, la matrice $A^q - I_d$ est seulement à valeurs entières, par conséquent $(A^q - I_d)^{-1}$ est à valeurs rationnelles.

Assumons maintenant que $[x] = [(x_1, x_2, \dots, x_n)] \in \mathbb{Q}^n / \mathbb{Z}^n$, c.à.d.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{p_1}{r}, \frac{p_2}{r}, \dots, \frac{p_n}{r}\right) \text{ avec } p_1, p_2, \dots, p_n \in \{0, \dots, r-1\}. \quad (1.1)$$

Comme la matrice A est à valeurs entières alors pour un certain q on a :

$$A^q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{p'_1}{r}, \frac{p'_2}{r}, \dots, \frac{p'_n}{r}\right) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Avec $p'_1, p'_2, \dots, p'_n \in \{0, \dots, r-1\}$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$. Or, le nombre de possibilités pour les points de la forme (1.1) est au plus r^n .

Par conséquent, il existe $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ avec $q_1 \neq q_2$ tel que :

$$A^{q_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) - A^{q_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $q_1 > q_2$, on obtient :

$$A^{q_1 - q_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) - (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n. \text{ D'où : } T_A^{q_1 - q_2}([x]) = [x]. \quad \blacksquare$$

Remarque 14 Par la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , on en déduit que l'ensemble de tous les points périodiques de T_A sont denses dans T^n si T_A est un automorphisme et que aucune des valeurs propres des puissances de A n'est de module égale à 1.

Exemple 15 ([2], p.13) Soit A une matrice 2×2 telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit $T_A : \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ l'automorphisme du tore induit par A .

C.à.d. $T_A(x, y) = (2x + y, x + y)(\text{mod } 1)$.

T_A est appelée : < Chat d'Arnold > en référence à Valdimir Arnold qui l'avait appliqué à une image d'un chat et a constaté que T_A possède une forme de périodicité.

C.à.d. à partir d'un certain nombre d'itérations on retrouve l'image de départ.

Cette application est bien utilisée dans le cryptage des images.

En effet, le principe du codage d'une image consiste à la diviser en un nombre fini de lignes et de colonnes, ce qui donne une grille vue sous forme d'une matrice superposée sur l'image. On a constaté une corrélation entre la dimension de la matrice codée et la période.

L'application du Chat d'Arnold est une application de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$ qui code en deux étape, la première transforme chaque sous carré de l'image en parallélogramme. La deuxième permet d'empiler grâce au mod 1 les triangles dans $[0, 1] \times [0, 1]$.

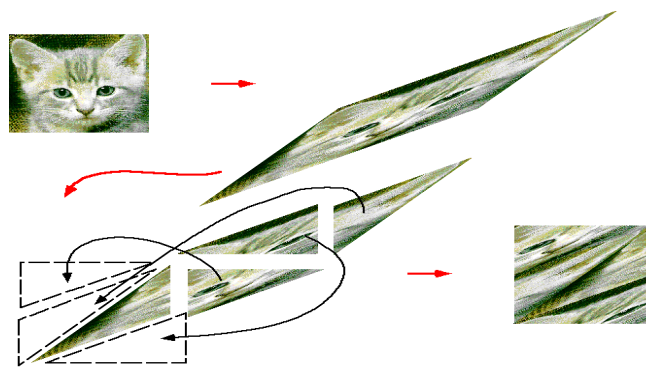


Fig. 1.4. Chat d'Arnold.

Image sous licence Créative Commons. <http://images.math.cnrs.fr>

Les deux figures suivantes illustrent bien le fonctionnement de l'application de Chat d'Arnold.

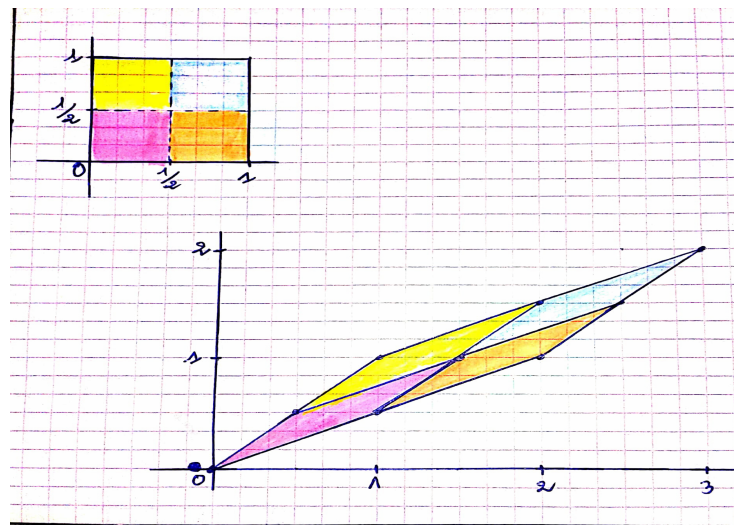


Fig. 1.5. Application du chat d'Arnold avant l'application du mod 1.

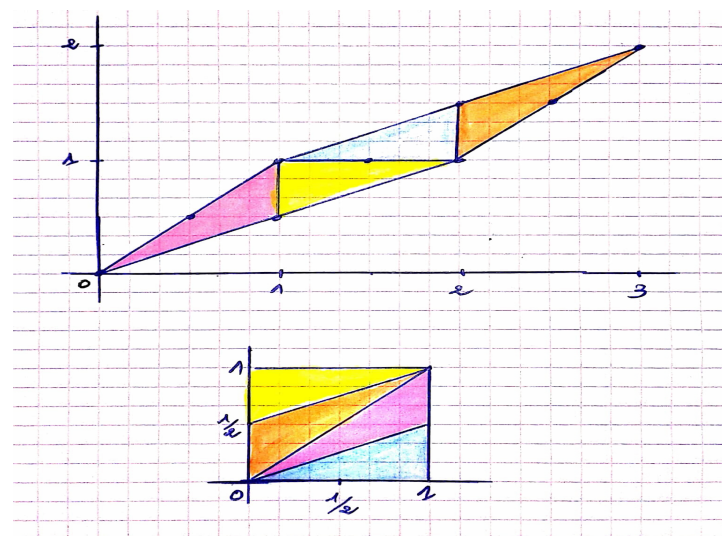


Fig. 1.6. Application du chat d'Arnold après l'application du mod 1.

1.2.3 Doublement de période

On définit le système doublement de période par (S^1, B) avec $B(x) = 2x \bmod 1$. Le système est appelé ainsi car il double la distance d'un point par rapport à l'origine à chaque itération, comme le présente la figure suivante :

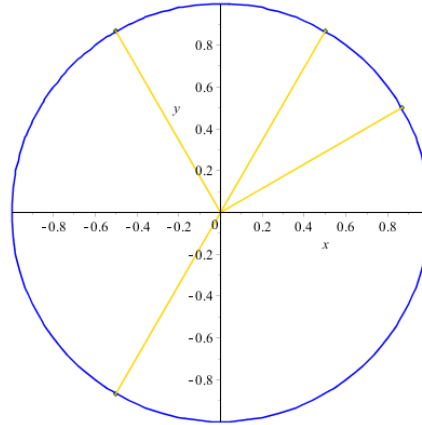


Fig. 1.7. (S^1, B) .

Remarque 16 *Il est pratique de représenter les points de ce système en notation binaire, ce qui permet de faciliter l'étude du système.*

En effet, soit $x \in [0, 1[$, x s'écrit en binaire sous la forme suivante :

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots |_{B_2} \text{ avec } x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Pour retrouver les points fixes et 2-périodiques pour ce système, il suffit de résoudre les deux équations suivantes respectivement.

$$(B(r) = r) \text{ et } (B^2(x) = x \text{ et } B(x) \neq x).$$

Avec

$$B(x) = 0, x_2 x_3 x_4 \dots |_{B_2} \text{ et } B^2(x) = 0, x_3 x_4 x_5 \dots |_{B_2}.$$

En comparant composante par composante, on déduit que le système admet un seul point fixe $r = 0$ et deux points 2-périodiques $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.

1.3 Transitivité et minimalité

Dans beaucoup de systèmes dynamiques (X, f) , on constate l'existence de points qui approchent sous les itérations de f n'importe quel autre point arbitraire du système. Ce qui signifie que ces points admettent des orbites denses. L'objectif de cette section est de donner plus de précision sur cette dernière notion.

Définition 17 ([17], p.50) *Soit (X, f) un système dynamique.*

1. *Le système (X, f) est dit transitif si tout sous ensemble E fermé invariant de X est soit égale à X ou d'intérieur vide.*

$$\forall E \subset X ; E \text{ fermé invariant} \Rightarrow E = X \text{ ou } \overset{\circ}{E} = \emptyset.$$

2. *Le système (X, f) est dit minimal si tout sous ensemble fermé invariant est trivial. C.à.d. $\forall E \underset{\text{fermé}}{\subset} X : f(E) \subset E \Rightarrow E = X \text{ ou } E = \emptyset.$*

Définition 18 *Un ensemble $A \subset X$ est dit G_δ dense si est une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

1.3.1 Caractérisation de la transitivité et de la minimalité

On présente ici deux propositions qui permettent de faciliter la vérification de la transitivité et la minimalité d'un système dynamique donné.

Proposition 19 ([22], p.04)

Soit (X, f) un système dynamique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *Le système (X, f) est transitif.*
2. $\forall U, V \underset{\text{ouverts}}{\subset} X, \exists n \in \mathbb{Z} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$
3. *L'ensemble des points transitifs est un G_δ dense.*
4. *Il existe un point $x \in X$ tel que : $\overline{\theta(x)} = X.$*

Preuve.

1 \Rightarrow 2. Soient U, V deux ouverts de X et posons $E = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} f^i(U)$.

E est invariant car $f(E) = f\left(\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} f^i(U)\right) = E$.

$\Rightarrow \bar{E}$ est donc un fermé invariant.

$\Rightarrow \bar{E} = X$ (par hypothèse) $\Rightarrow E \cap V \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{Z} : f^i(U) \cap V \neq \emptyset$.

2 \Rightarrow 3. L'espace X est un espace métrique compact, alors il admet une base dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit E un ouvert non vide, alors par "2" il existe $i > 0 : f^{-i}(U_n) \cap E \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$.

Considérons les ensembles $V_n = \bigcup_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$ qui sont des ouverts.

Alors, on a : $V_n \cap E \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}$.

D'où, les V_n sont des ouverts denses et donc $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est un G_σ dense.

Reste à montrer que les points de V sont des points dont l'orbite est dense.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} x \text{ appartient à } V &\Leftrightarrow x \in V_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : f^i(x) \in U_n, \forall n. \\ &\Leftrightarrow \theta(x) \cap U_n \neq \emptyset, \forall n \Leftrightarrow \overline{\theta(x)} = X. \end{aligned}$$

3 \Rightarrow 4. Par le Lemme de Baire, V est dense.

Lemme de Baire : Toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.

4 \Rightarrow 1. Soit E un ensemble fermé invariant et $x \in X : \overline{\theta(x)} = X$.

On suppose que $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$, alors on a : $\theta(x) \cap \overset{\circ}{E} \neq \emptyset$.

Donc, $\exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in \overset{\circ}{E} \Rightarrow \theta(f^n(x)) \subset E \Rightarrow \overline{\theta(f^n(x))} \subset E \Rightarrow X \subset E \Rightarrow X = E$.

■

Proposition 20 ([17], p.51) *Soit (X, f) un système dynamique.*

(X, f) est minimal si et seulement si tout point de X est d'orbite dense.

Preuve.

\Rightarrow Pour tout $x \in X$, on a $\overline{\theta(x)}$ est un fermé invariant et non vide. Donc $\overline{\theta(x)} = X$.

\Leftarrow Soit E un sous ensemble de X fermé, invariant et non vide.

Alors, pour $x \in E$ on a par l'invariance de E , $\theta(x) \in E$.

$\Rightarrow \overline{\theta(x)} \subset E$.

$\Rightarrow X \subset E$ (car (X, f) est minimal) $\Rightarrow E = X$.

■

Proposition 21 ([22], p.06) *Soit le système $([0, 1[, R_\alpha)$ des rotations sur le cercle.*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors le système est minimal.*

2. *Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors le système n'est pas transitif.*

Preuve.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in [0, 1[$. Et considérons l'ensemble suivant :

$$\Omega = \{x, R_\alpha(x), R_\alpha^2(x), \dots, R_\alpha^{n-1}(x)\} .$$

Avec $\frac{1}{n} < \varepsilon$ pour un certain ε . En étant dans un cercle de longueur 1 alors il existe $0 \leq i < j \leq n - 1$ tel que $d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) < \frac{1}{n}$.

Et en tenant compte du fait que R_α est une isométrie alors on aura :

$$d(R_\alpha^{i-j}(x), x) < \frac{1}{n}.$$

Or, R_α^{i-j} est également une rotation d'angle $\beta = \alpha(i - j)$.

On conclut donc que les points $x, R_\beta(x), R_\beta^2(x), \dots, R_\beta^{n-1}(x)$ forment une partition de $[0, 1[$ et le système (S^1, R_α) est minimal.

2. Supposons que α est un nombre rationnel, alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$.

Dans ce cas, tout point du système $([0, 1[, R_\alpha)$ est un point q -périodique.

Ce qui implique que $\forall x \in X : \overline{\theta(x)} \neq [0, 1[$.

■

1.4 Systèmes mélangeants

On présente dans cette section la notion de mélange pour un système dynamique discret, qui est un concept plus fort que la transitivité.

Définition 22 ([17], p.65) *Soit (X, f) un système dynamique.*

On dit que (X, f) est mélangeant si pour tout U, V deux ouverts non vides de X il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Proposition 23 *Le système dynamique $([0, 1[, B(x) = 2x \bmod 1)$ est mélangeant.*

Preuve.

Soient I, J deux intervalles de $[0, 1[$ tel que pour $x, y \in [0, 1[$ on a pour un $k \in \mathbb{N}$:

$$x \in I \Rightarrow x = 0.x_1x_2\dots x_k\dots |_{B_2} .$$

$$y \in J \Rightarrow y = 0.y_1y_2\dots y_k\dots |_{B_2} .$$

On va prouver que : $\forall n \geq k : f^n(I) \cap J \neq \emptyset$.

Alors, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on considère le point v suivant :

$$v = 0.x_1x_2\dots x_ky_0y_1y_2\dots y_k\dots |_{B_2} \in I .$$

$$\Rightarrow f^k(v) = 0.y_0y_1y_2\dots y_k\dots |_{B_2} \in J .$$

$$\Rightarrow f^k(I) \cap J \neq \emptyset .$$

Pour $n > k$, on considère un nouveau élément v de la manière suivante :

$$\begin{aligned} v &= 0.x_1x_2\dots x_k \underbrace{v_1v_2\dots v_{n-k}}_{n-k \text{ éléments}} y_0y_1y_2\dots y_k \dots \Big|_{B_2} . \\ \Rightarrow f^n(v) &= 0.y_0y_1y_2\dots y_k \dots \Big|_{B_2} \in J \\ \Rightarrow f^n(I) \cap J &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\exists n_0 = k : \forall n > n_0 \Rightarrow f^n(I) \cap J \neq \emptyset$. ■

Proposition 24 ([2], p.39)

Le système des rotations sur le cercle n'est pas mélangeant.

Preuve.

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors le système (S^1, R_α) n'est pas transitif.

Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\varepsilon < \frac{1}{4}$ et considérons l'intervalle ouvert $I =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset S^1$.

On remarque que les pré-images de I sont des intervalles ouverts de longueur $2\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Comme l'orbite de x est dense, il existe donc une suite croissante $n_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$R_\alpha^{-n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x + \frac{1}{2}.$$

D'où, $R_\alpha^{-n_k}(I) \cap I = \emptyset$ pour tout k assez grand. ■

Définition 25 (Produit de deux systèmes dynamiques) .

Soient (X, d_1, f) et (Y, d_2, g) deux systèmes dynamiques discrets.

Le produit des deux systèmes (X, f) et (Y, g) est également un système dynamique discret défini sur l'espace $Z = X \times Y$ qui est bien compact comme c'est produit de deux espaces compacts et est métrique de métrique $d = d_1 + d_2$.

Associé de la fonction continue $F = (f, g)$.

Remarque 26 *Tout système mélangeant est transitif mais l'inverse est généralement pas valable comme le montre l'exemple suivant :*

Exemple 27 Soit $(T^2, F = (B, R_\alpha))$ un système dynamique défini sur le tore T^2 , où, B est la fonction doublement de période et R_α est la rotation irrationnelle.

La figure suivante représente le tore T^2 (figure à droite) ainsi que le premier itéré d'un point du système (T^2, F) (figure à gauche).

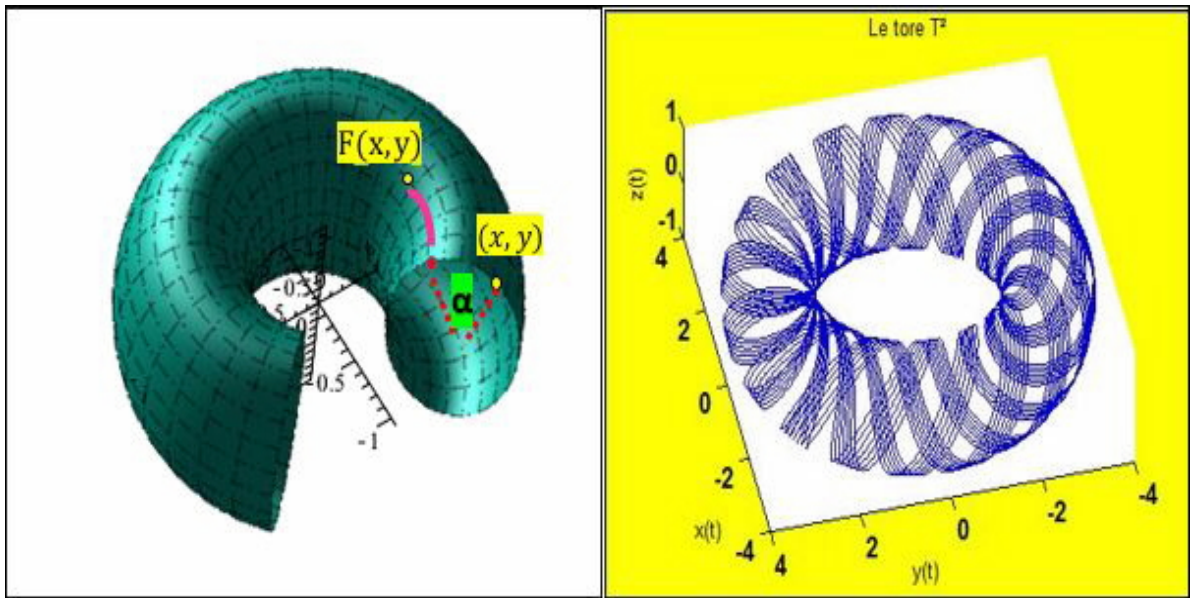


Fig. 1.8. Le premier itéré d'un point du système (T^2, F) .

Soit β un point de $[0, 1[$ écrit en base 2 dont la partie décimale est obtenue par la concaténation de toutes les composantes finies possible de l'ensemble $\{0, 1\}$.

C.à.d. en premier lieu on pose 0, 1 de longueur 1. Ensuite, on rajoute 00, 01, 10, 11 de longueur 2 ...etc. Ce qui donne :

$$\beta = 0,0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 100\ 110\ 011\ 101\ 111\ \dots|_{B_2}.$$

Alors le point $(\beta, 0)$ est d'orbite dense dans T^2 ce qui fait du système (T^2, F) un système transitif.

Non mélange : *Considérons l'ouvert $U = I \times J$ de T^2 tel que :*

$$J =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\text{ avec } \varepsilon < \frac{1}{4}.$$

Comme x est d'orbite dense dans (S^1, R_α) alors il existe une suite croissante n_k dans \mathbb{N} tel que :

$$R_\alpha^{-n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x + \frac{1}{2}.$$

D'où, pour tout k assez grand $R_\alpha^{-n_k}(J) \cap J = \emptyset$.

Par conséquent, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n_0$:

$$F^{-n_k}(U) \cap U = \emptyset.$$

Remarque 28 *Le mélange topologique est une notion indépendante par rapport à la minimalité d'un système dynamique discret. Cependant, il existe bien des systèmes dynamiques admettant les deux propriétés à la fois ou bien l'une des propriétés et pas l'autre ou bien aucune n'est valable.*

Exemple 29

1. *Le système de doublement de période est mélangeant non minimal.*
2. *Le système des rotations irrationnelles sur le cercle est un système minimal non mélangeant.*
3. *Le système $(\{0\}, f(x) = x)$ est mélangeant et minimal.*
4. *Soit $(\{0, 1, 2\}, h)$ un système dynamique tel que h est définie comme suit :*

$$h(0) = 1, h(1) = 0 \text{ et } h(2) = 2.$$

Ce système n'est minimal car il admet un point fixe. Non mélangeant car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 > n : h^{n_0}(\{0\}) \cap \{1\} = \emptyset.$$

CHAPITRE 2

THÉORIE ERGODIQUE

La théorie ergodique est une branche des mathématiques née de l'étude de l'hypothèse ergodique formulée par le physicien Ludwig Boltzmann en 1871 pour sa théorie cinétique des gaz. On introduit dans ce chapitre quelques propriétés et résultats concernant cette théorie qui repose sur l'étude du comportement des systèmes dynamiques (X, f) par rapport à des mesures qui restent invariantes sous les itérations de f . On présente en premier lieu la notion de fonctions préservant la mesure avec illustration de quelques exemples de mesures invariantes. Nous aborderons ensuite le théorème de récurrence de Poincaré ainsi que les concepts d'ergodicité et de mélange mesurable.

2.1 Transformations préservant la mesure

Définition 30 Une fonction $f : (X, \mathbb{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathbb{B}, \mu)$ est dite mesurable si l'image réciproque de tout ensemble mesurable est également un ensemble mesurable.

Définition 31 L'application f préserve la mesure μ si elle est mesurable et pour tout ensemble mesurable $A \in \mathbb{B}$ avec \mathbb{B} est une tribu sur X , on a :

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A). \tag{2.1}$$

La mesure μ est dite mesure invariante par f ou simplement f -invariante.

Remarque 32

Si f est mesurable et est bijective alors (2.1) est équivalente à $\mu(f(A)) = \mu(A)$.

Définition 33 Soient f une fonction mesurable et μ une mesure sur X .

Définissons $f_{\star}\mu : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ par :

$$f_{\star}\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)), A \in \mathbb{B}.$$

Remarque 34

1. L'application $f_{\star}\mu$ est une mesure sur \mathbb{B} appelée " mesure à densité".
2. La mesure μ est f -invariante ssi $f_{\star}\mu = \mu$.

En général, ce n'est pas toujours évident de vérifier l'invariance sur toute la tribu \mathbb{B} . La proposition suivante nous permet de réduire l'étude.

Proposition 35 ([28]) Soit (X, \mathbb{B}, μ) un espace mesurable avec \mathbb{B} la tribu engendrée par une algèbre \mathcal{F} . Alors l'application mesurable f préserve μ ssi :

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{F}.$$

Ce qui signifie qu'il suffit de vérifier l'invariance sur \mathcal{F} pour en déduire l'invariance sur toute la tribu \mathbb{B} .

La preuve de la proposition 35 est une conséquence directe du théorème de l'extension de Kolmogorov suivant.

Théorème 36 (Extension de Kolmogorov[3])

Etant donné ν une mesure définie sur une algèbre \mathcal{F} alors il existe une unique mesure μ sur $\sigma(\mathcal{F})$ qui coïncide avec ν sur \mathcal{F} .

Définition 37 Un système dynamique (X, f) est dit mesurable s'il est muni d'une mesure f -invariante μ définie sur une tribu de X .

2.2 Existence de mesure invariante

Etant donné $f : X \rightarrow X$ une fonction continue d'un espace métrique compact dans lui même. Il est naturel de se demander si tout système dynamique (X, f) peut admettre une mesure qui est f -invariante. L'objectif de cette section est de démontrer qu'une telle mesure existe toujours.

Définition 38

On dit que la mesure μ est une mesure de probabilité sur l'espace X si $\mu(X) = 1$.

Remarque 39 Pour toute mesure ν sur X , la mesure $\mu(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(X)}$ pour $B \in \mathbb{B}$ est une mesure de probabilité.

Notation 40

1. L'espace $M(X)$ désigne l'espace des mesures probabilisés sur X .
2. L'ensemble M_f représente l'ensemble des mesures μ invariantes par f . C.à.d.

$$M_f = \{\mu \in M(X) : \mu \text{ est } f\text{-invariante}\}.$$

2.2.1 La topologie de $M(X)$

L'objectif de cette partie est de définir la topologie de l'espace des mesures de probabilités sur X qui est appelée la topologie faible \star .

Définition 41 ([29], p.148)

La topologie faible \star sur $M(X)$ est la topologie la plus fine qui rend les applications

$$\mu \rightarrow \int_X f d\mu, \forall f \in C(X)$$

continues, où $C(X)$ désigne l'espace des fonctions continues sur X .

Définition 42 ([27], p.36) *La collection de tous les ensembles de la forme*

$$V_\mu(f_1, f_2, \dots, f_k; \varepsilon) = \left\{ \nu \in M(X) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i d\mu \right| < \varepsilon, 1 \leq i \leq k \right\},$$

où, $\mu \in M(X)$, $k \geq 1$, $f_i \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$ définissent une base de voisinage pour la topologie faible \star .

Théorème 43 ([29], p.148) *Si X est un espace métrique compact alors $M(X)$ est un espace métrisable.*

Théorème 44 ([27], p.41) *Si X est un espace métrique compact alors $M(X)$ est compact par rapport à la topologie faible \star .*

Remarque 45 *Dans la topologie faible \star , une suite de mesure μ_n converge vers $\mu \in M(X)$ ssi*

$$\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu, \forall f \text{ continue.}$$

Après avoir défini une topologie sur $M(X)$, on s'intéresse à l'objectif principal de cette section dont on prouvera l'existence de mesures invariantes sur tout système dynamique discret. On a les résultats suivants :

Lemme 46 ([28]) *Soit $\varphi(X, \mathbb{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathbb{B}, \mu)$ une fonction mesurable. Alors, on a :*

$$\int \varphi d(f_\star \mu) = \int (\varphi \circ f) d\mu. \quad (2.2)$$

Preuve. Vérifions (2.2) en premier pour $\varphi = 1_A$ avec $A \subset X$ un ensemble mesurable.

En effet, on a :

$$\int 1_A d(f_\star \mu) = f_\star \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int 1_{f^{-1}(A)} d\mu = \int 1_A \circ f d\mu.$$

Par conséquent, (2.2) est également valable pour toute fonction étagée.

Reste à prouver le résultat pour une fonction mesurable positive quelconque.

Soit donc φ une fonction mesurable positive alors d'après le Théorème d'approximation φ est limite simple d'une suite de fonctions étagées croissante et positives $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Donc, la suite $\{\varphi_n \circ f\}_{n \in \mathbb{N}}$ est également une suite de fonctions étagées qui convergent vers $\varphi \circ f$. D'où grâce au Théorème de la convergence monotone :

$$\int \varphi d(f_{\star}\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d(f_{\star}\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\varphi_n \circ f) d\mu = \int (\varphi \circ f) d\mu.$$

Finalemment (2.2) est vérifiée pour toute fonction mesurable φ de signe quelconque vu que dans ce cas $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ avec $\varphi^+ = \sup(0, \varphi)$ et $\varphi^- = \sup(0, -\varphi)$ sont mesurables positives. ■

Lemme 47 ([28]) *L'application $f_{\star} : M(X) \rightarrow M(X)$ est continue.*

Preuve. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures qui converge vers μ .

Montrons que $f_{\star}\mu_n \rightarrow f_{\star}\mu$. Par le Lemme 46, on a pour φ continue :

$$\int \varphi d(f_{\star}\mu_n) = \int (\varphi \circ f) d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int (\varphi \circ f) d\mu = \int \varphi d(f_{\star}\mu).$$

D'où, $f_{\star}\mu_n \rightarrow f_{\star}\mu$.

■

Proposition 48 ([22], p.65) *Une mesure μ est f -invariante si et seulement si*

$$\int (\varphi \circ f) d\mu = \int \varphi d\mu, \forall \varphi \text{ continue.}$$

Preuve.

Soit φ une fonction continue et supposons que $\int (\varphi \circ f) d\mu = \int \varphi d\mu$ alors :

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu &= \int (\varphi \circ f) d\mu = \int \varphi d(f_{\star}\mu), \forall \varphi \in \text{continue} \\ \Rightarrow \mu &= f_{\star}\mu. \end{aligned}$$

D'où μ est invariante. L'inverse découle directement du lemme 46. ■

Théorème 49 (Krylov-Bogoliobuv[9], p.98) Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue d'un espace métrique compact dans lui même. Alors il existe au moins une mesure de probabilité μ qui est f invariante.

Preuve.

Soit $\nu \in M(X)$ une mesure de probabilité sur X (on peut prendre par exemple la mesure de Dirac). Définissons la suite $(\mu_n)_n \in M(X)$ par :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_{\star}^i \nu.$$

Alors, $\forall A \in \mathbb{B}$:

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} (\nu(A) + \nu(f^{-1}(A)) + \dots + \nu(f^{-n+1}(A))).$$

Comme $M(X)$ est faible \star compact alors on peut extraire de $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers une certaine mesure $\mu \in M(X)$.

Il reste à prouver que μ est f -invariante. Ce qui revient à prouver que :

$$\int (\varphi \circ f) d\mu = \int \varphi d\mu, \forall \varphi \text{ continue.}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int (\varphi \circ f) d\mu - \int \varphi d\mu \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int (\varphi \circ f) d\mu_{n_k} - \int \varphi d\mu_{n_k} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n_k} \int \sum_{i=0}^{n_k-1} (\varphi \circ f^{i+1} - \varphi \circ f^i) d\nu \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n_k} \int (\varphi \circ f^{n_k} - \varphi) d\nu \right| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \|\varphi\|_{\infty}}{n_k} = 0. \end{aligned}$$

D'où μ est f -invariante. ■

Remarque 50

L'ensemble M_f est compact et convexe. En effet, il suffit de vérifier que M_f est fermé pour en déduire la compacité. Soit $\mu_n \in M_f$ telle que $\mu_n \rightarrow \mu$, montrons que $\mu \in M_f$.

On a : $\forall \varphi$ fonction continue,

$$\int (\varphi \circ f) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\varphi \circ f) d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi df_{\star} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu.$$

2.3 Exemples de mesures invariantes

On donne dans cette section quelques exemples de mesures invariantes qui seront définies sur les différents systèmes dynamiques vus au chapitre 1.

2.3.1 Mesures invariantes portées par les points fixes et points périodiques**Par les points fixes :**

Soit (X, f) un système dynamique et r un point fixe.

La mesure de Dirac portée par r est f -invariante. En effet, on a :

$$\delta_r(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in A. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et pour tout ensemble mesurable A , on a :

Si $r \in A$ donc $\delta_r(A) = 1$ et $\delta_r(f^{-1}(A)) = 1$ car $r \in f^{-1}(A)$.

Sinon si $r \notin A$ alors $\delta_r(A) = 0$ et également $\delta_r(f^{-1}(A)) = 0$ car si $r \in f^{-1}(A)$

alors il va appartenir aussi à A en étant un point fixe.

Ce qui prouve que δ_r est f -invariante.

Par les points périodiques :

On s'intéresse à la relation entre les points périodiques et mesures invariantes. Le résultat suivant assume que les points périodiques d'un système dynamique (X, f) permettent de créer des mesures invariantes sur M_f .

Théorème 51 ([29], p.157)

Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue sur un espace métrique compact X dans lui-même. Soient $n \geq 1$ et $x \in X$ alors :

$$f^n(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \in M_f.$$

Preuve.

Une mesure μ est f -invariante ssi

$$\int (\varphi \circ f) d\mu = \int \varphi d\mu, \forall \varphi \text{ continue.}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \in M_f &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^{i+1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i(x), \forall \varphi \text{ continue.} \\ &\Leftrightarrow \varphi(f^n(x)) = \varphi(x), \forall \varphi \text{ continue.} \\ &\Leftrightarrow f^n(x) = x. \end{aligned}$$

■

2.3.2 Rotations sur le cercle

La mesure de Lebesgue λ est R_α -invariante. En effet, soit $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ une rotation d'angle α sur le cercle et λ la mesure de Lebesgue définie sur le cercle qui coïncide exactement avec la mesure de Lebesgue sur les intervalles sous l'identification de S^1 par $[0, 1[\simeq \sim$. Remarquons que pour $[a, b] \subset [0, 1[$ on a :

$$\lambda(R_\alpha^{-1}([a, b])) = \lambda(R_{-\alpha}([a, b])) = \lambda([a - \alpha, b - \alpha]) = b - a.$$

Ce qui signifie que la rotation ne change pas de longueur d'un intervalle.

2.3.3 Doublement de période

Soit $B : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ la fonction doublement de période définie par $B(x) = 2x \bmod 1$. La mesure de Lebesgue est invariante pour le système $([0, 1[, B)$. En effet, soit $[a, b]$ un sous intervalle de $[0, 1[$ alors on a :

$$B^{-1}([a, b]) = \{x \mid B(x) \in [a, b]\} = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right].$$

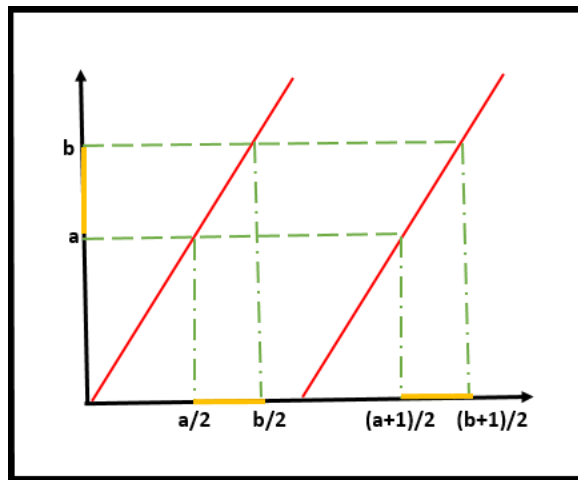


Fig. 2.1. L'image réciproque d'un intervalle par la fonction doublement de période.

$$\text{D'où : } \mu(B^{-1}([a, b])) = \mu([a, b]) = b - a.$$

2.4 Récurrence

On présente le théorème de récurrence de Poincaré qui permet d'affirmer que presque tout point de l'espace des phases revient dans son voisinage.

Théorème 52 (Récurrence de Poincaré [20], p.65) *Soit (X, \mathbb{B}, μ, f) un système dynamique probabilisé. Et soit $A \in \mathbb{B}$ un ensemble mesurable de mesure strictement positive. Alors presque tout point de A revient dans A en un temps fini. C.à.d.*

$$\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{N}^* : f^n(x) \in A.$$

Preuve.

Considérons l'ensemble A_0 suivant :

$$A_0 = \{x \in A : f^n(x) \notin A, \forall n \geq 1\} = C_A f^{-n}(A), \forall n \geq 1.$$

Qui représente l'ensemble des points de A qui ne reviennent jamais dans A sous les itérés de f . L'ensemble A_0 est bien mesurable comme c'est le complémentaire des images réciproques d'un ensemble mesurable par une fonction continue.

Pour déduire le résultat il suffit de prouver que $\mu(A_0) = 0$. Soit

$$A_n = f^{-n}(A_0), n \in \mathbb{N}.$$

On a $A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n, m \geq 0$ avec $n \neq m$.

En effet, supposons qu'il existe un $x \in X : x \in A_n \cap A_m$ pour certains $n, m \in \mathbb{N}$.

Alors : $f^m(x) \in A_0$ et $f^n(x) \in A_0$.

Supposons que $n > m$ alors : $f^{n-m}(f^m(x)) = f^n(x) \in A_0$.

Ce qui est en contradiction avec la définition de A_0 . D'où les $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. Alors, on a :

$$1 \geq \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(f^{-n}(A_0)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_0).$$

D'où $\mu(A_0) = 0$. ■

Remarque 53

1. En réalité le théorème de récurrence de Poincaré permet d'affirmer que presque tout point de A reviendra une infinité de fois dans A sous les itérés positifs de f . Et cela grâce au fait que tout point retournant vers A est également un point de A .

2. Le résultat du théorème de récurrence de Poincaré n'est pas valable dans le cas où la mesure associée à l'espace X est infinie. Comme c'est le cas du système $(X = [0, +\infty[, T(x) = x + 1)$ auquel on associe la mesure de Lebesgue qui est bien une mesure T -invariante mais les points ne sont pas récurrents.

En effet, considérons l'ensemble $A = [0, 1]$, on a $\lambda([0, 1]) = 1 > 0$ mais en revanche aucun point de A ne retourne vers A .

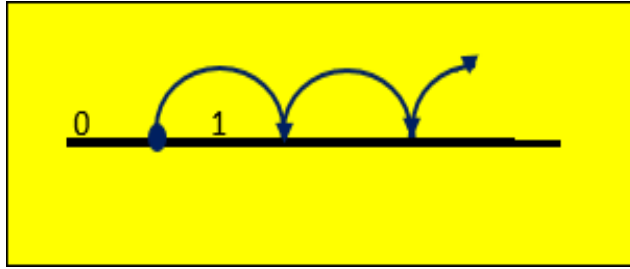


Fig. 2.2. Un point de $[0, 1]$ et ses itérés.

2.5 Ergodicité

La définition de la notion d'ergodicité d'un système dynamique mesuré (X, \mathbb{B}, μ, f) fait référence à l'impossibilité de pouvoir décomposer l'espace X en deux sous-ensembles de mesure positive fortement invariants.

Définition 54

Soit (X, \mathbb{B}, μ) un espace mesurable et $f : X \rightarrow X$ une transformation préservant la mesure. On dit que f est ergodique si pour tout ensemble mesurable $A \in \mathbb{B}$ fortement invariant on a soit $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Dans ce cas μ est dite mesure ergodique.

Caractérisation de l'ergodicité :

Il est bien utile d'avoir plusieurs caractérisations pour l'ergodicité d'un système dynamique mesuré et c'est l'objectif des deux propositions qui vont suivre.

Proposition 55 ([9], p.23) Soient (X, \mathbb{B}, μ) un espace mesuré et $f : X \rightarrow X$ une fonction préservant la mesure μ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est ergodique.
2. Pour tout ensemble mesurable $B \in \mathbb{B}$ avec $\mu(f^{-1}(B) \Delta B) = 0$ alors soit $\mu(B) = 0$ ou bien $\mu(B) = 1$, où Δ désigne la différence symétrique.
3. Pour tout ensemble mesurable $A \in \mathbb{B}$ avec $\mu(A) > 0$ on a $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(A)\right) = 1$.
4. Pour $A, B \in \mathbb{B}$ avec $\mu(A)\mu(B) > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.

Preuve.

1 \Rightarrow 2

Supposons que f est ergodique et soit $B \in \mathbb{B}$ avec $\mu(f^{-1}(B) \Delta B) = 0$ et montrons que $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.

Remarquons que le fait que $\mu(f^{-1}(B) \Delta B) = 0$ signifie que $f^{-1}(B) = B$ μ -p.p.

Alors on va construire en premier lieu un ensemble mesurable qui soit fortement invariant et de même mesure que B . Soit $C \in \mathbb{B}$ défini par :

$$C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{j=n}^{+\infty} f^{-j}(B).$$

On a $\forall n \geq 0$:

$$B \Delta \bigcup_{j=n}^{+\infty} f^{-j}(B) \subset \bigcup_{j=n}^{+\infty} B \Delta f^{-j}(B).$$

Tel que $\forall j \geq 0$ on a :

$$B \Delta f^{-j}(B) \subset \bigcup_{i=0}^{j-1} f^{-i}(f^{-1}(B) \Delta B) \text{ et } \mu\left(\bigcup_{i=0}^{j-1} f^{-i}(f^{-1}(B) \Delta B)\right) \leq j\mu(f^{-1}(B) \Delta B) = 0.$$

D'où :

$$\mu(B \Delta f^{-j}(B)) = 0, \forall j \geq 0.$$

D'un autre côté, les ensembles $C_n = \bigcup_{j=n}^{+\infty} f^{-j}(B)$ sont croissants quand n décroît.

C.à.d. $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots$ avec $\mu(C_n \Delta B) = 0, \forall n$.

D'où on déduit que $\mu(B \Delta C) = 0$ (c.à.d. $\mu(B) = \mu(C)$) avec $f^{-1}(C) = C$.

Par l'ergodicité de f on aura soit $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.

2 \Rightarrow 3

Soit $A \in \mathbb{B}$ de mesure positive. Considérons l'ensemble :

$$B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(A).$$

On a $f^{-1}(B) \subset B$ d'un côté et d'un autre côté comme μ est f -invariante alors $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ ce qui fait que $\mu(f^{-1}(B) \Delta B) = 0$. Par hypothèse on déduit que $\mu(B) = 1$ vu que $\mu(B)$ ne peut pas être nulle car A est inclut dans B .

3 \Rightarrow 4

Soient A, B deux ensembles mesurables de mesure positive alors par hypothèse on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(A)\right) = 1.$$

Alors,

$$0 < \mu(B) = \mu\left(B \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(A)\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B \cap f^{-n}(A))$$

D'où l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.

4 \Rightarrow 1

Soit B un mesurable fortement invariant et soit $A = B^c$. Alors on a :

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c = B^c = A.$$

D'où,

$$\mu(f^{-n}(A) \cap B) = 0, \forall n \geq 0.$$

Ce qui implique soit $\mu(B) = 1$ ou $\mu(B) = 0$.

■

Proposition 56 ([9], p.25)

Soit (X, \mathbb{B}, μ, f) un système dynamique mesuré. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est ergodique.
2. Toute fonction mesurable $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\varphi \circ f = \varphi$ μ -p.p est une fonction constante μ -p.p sur X .

Preuve.

2 \Rightarrow 1

Soit $B \in \mathbb{B}$ avec $f^{-1}(B) = B$ et considérons χ_B la fonction indicatrice sur B .

On a $\chi_B \circ f = \chi_B$ alors par hypothèse χ_B est constante presque partout.

C.à.d. soit $\chi_B = 0$ p.p ou bien $\chi_B = 1$ p.p.

D'où : $\mu(B) = \int_X \chi_B d\mu = 0$ ou 1.

1 \Rightarrow 2

Supposons que f est ergodique et que pour toute fonction mesurable φ on a :

$\varphi \circ f = \varphi$ μ -p.p . Considérons l'ensemble mesurable suivant pour $n, k \in \mathbb{N}$:

$$X(n, k) = \left\{ x \in X : \varphi(x) \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \right\}.$$

On a : $f^{-1}(X(n, k)) \Delta X(n, k) \subset \{x \in X : \varphi \circ f \neq \varphi\}$ qui est de mesure nulle.

Alors : $\mu(f^{-1}(X(n, k)) \Delta X(n, k)) = 0$ et donc par hypothèse,

$$\mu(X(n, k)) \in \{0, 1\}.$$

D'un autre côté, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X est union disjointe des $X(n, k)$.

Donc, il existe exactement un seul $k(n)$ tel que $\mu(X(n, k(n))) = 1$.

D'où : φ est une constante sur l'ensemble $Y = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X(n, k(n))$ et $\mu(Y) = 1$.

Alors, φ est constante presque partout.

■

2.5.1 Exemples : (Utilisation des séries de Fourier pour prouver l'ergodicité)

Dans cette partie, on prouve grâce aux séries de Fourier l'ergodicité de quelques transformations préservant la mesure de Lebesgue.

Proposition 57 ([28]) *Les rotations sur le cercle $R_\alpha(x) = [x + \alpha]$ est ergodique ssi α est irrationnel.*

Preuve.

Cas 1 : Supposons que $\alpha \in \mathbb{Q}$ donc, $\exists p, q \in \mathbb{Z}^* : \alpha = \frac{p}{q}$. D'après la proposition 10, tous les points sont des points q -périodiques.

Considérons l'ensemble suivant :

$$B = \bigcup_{i=0}^{q-1} R_\alpha^{-i}(A) \text{ avec } \lambda(A) = b - a < \varepsilon.$$

On a : $R_\alpha^{-1}(B) = B$ et $\lambda(B) = \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{q-1} R_\alpha^{-i}(A)\right) = q(b - a) < 1$.

Ce qui prouve la non ergodicité de R_α pour un α rationnel.

Cas 2 : Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$\varphi \circ R_\alpha = \varphi$ presque partout. Supposons que φ admet comme série de Fourier :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}.$$

$$\text{Alors, } \varphi \circ R_\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n (x+\alpha) \bmod 1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x} e^{2\pi i n \alpha}.$$

Par comparaison des coefficients on obtient : $c_n e^{2\pi i n \alpha} = c_n$.

Or, En étant α est irrationnel alors $e^{2\pi i n \alpha} \neq 1$ pour $n \neq 0$.

D'où, $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = 0$. C.à.d. φ est une constante.

■

Proposition 58 ([28]) *Soit T_A un automorphisme du tore avec A est une matrice entière de dimension $k \times k$. Alors T_A est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue λ si et seulement si aucune valeur propre de A n'est une racine de l'unité.*

Preuve.

\Rightarrow

Supposons que T_A est ergodique et par l'absurde on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la matrice A^p admet 1 comme valeur propre. Alors il existe un vecteur $n = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $n(A^p - I) = 0$. Or comme A^p est une matrice entière et que de même pour la matrice $A^p - I$, alors on peut prendre $n = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$.

Définissons $f \in L^2(S^k, \mathbb{B}, \lambda,)$ par :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i \langle n, A^j x \rangle}.$$

On a :

$$f \circ T_A = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i \langle n, A^{j+1} x \rangle} = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i \langle n, A^j x \rangle} = f(x).$$

$$\text{Car : } e^{2\pi i \langle n, A^p x \rangle} = e^{2\pi i \langle n A^p, x \rangle} = e^{2\pi i \langle n, x \rangle}.$$

Donc par l'ergodicité de T_A , la fonction f doit être une constante et ce n'est pas le cas sauf quand $n = 0$. Par conséquent, une contradiction est obtenue.

\Leftarrow

Soit f une fonction continue qui admet $\sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle n, x \rangle}$ comme série de Fourier et supposons qu'elle est T_A -invariante. On va montrer qu'elle est constante λ -p.p.

On a $f \circ T_A^p = f$ presque partout pour tout $p > 0$, donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle n, A^p x \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle n A^p, x \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i \langle n, x \rangle}$$

En comparant les coefficients un par un, on voit que :

$$c_n = c_{An} = c_{A^2n} = \dots c_{A^pn} = \dots, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Si $c_n \neq 0$ alors il y aura un nombre fini de possibilités vérifiant (2.3) et pour lesquelles $c_n \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$ (lemme de Lebesgue-Reimann).

Il existe donc $q_1 > q_2 > 0$ avec $nA^{q_1} = nA^{q_2}$.

Posons $p = q_1 - q_2$, on a donc : $nA^p = n$ et dans ce cas soit $n = 0$ ou bien n est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 pour la matrice A^p .

Par hypothèse, on déduit que $n = 0$ et que $f = c_0$ presque partout.

■

2.6 Existence de mesure ergodique

On s'intéresse dans cette section à l'existence de mesures ergodiques pour un système dynamique mesuré (X, \mathbb{B}, μ, f) .

On note l'espace des mesures f -invariantes et ergodiques par $C(f)$. C.à.d.

$$C(f) = \{\mu \in M_f : \mu \text{ est ergodique}\}.$$

Définition 59

Une mesure μ est dite un extrémum de M_f si elle ne peut pas être écrite comme combinaison linéaire d'autres mesures de M_f .

Théorème 60 ([22], p.93-94, [28])

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction $f : X \rightarrow X$ préservant la mesure μ est ergodique.
2. La mesure μ est un extrémum de M_f .

La preuve de ce théorème fait appel au théorème de Radon-Nikodym dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 61 (Radon-Nikodym [25])

Soit (X, \mathbb{B}, μ) un espace probabilisé, et soit ν une autre mesure définie sur \mathbb{B} qui est absolument continue par rapport à μ . Alors il existe une fonction mesurable positive h_1 tel que pour tout ensemble mesurable $A \in \mathbb{B}$, on a :

$$\nu(A) = \int_A h_1 d\mu.$$

Remarque 62

On dit qu'une mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure μ qu'on écrit $\nu \ll \mu$ si $\nu(A) = 0$ quand $\mu(A) = 0$ pour tout ensemble mesurable A .

Preuve.

2 \Rightarrow 1 Par un raisonnement par contraposé, on suppose que $\mu \notin C(f)$ alors

$$\exists A \subset X : f^{-1}(A) = A \text{ avec } \mu(A) \in]0, 1[.$$

Définissons les deux mesures de probabilité suivantes :

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \text{ et } \mu_2(B) = \frac{\mu(B \cap A^c)}{\mu(A^c)} \text{ pour } B \in \mathbb{B}.$$

On a $\mu = t\mu_1 + (1 - t)\mu_2$ avec $t = \mu(A) \in]0, 1[$. Donc il reste à prouver que μ_1, μ_2 sont dans M_f , soit $B \in \mathbb{B}$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_1(f^{-1}(B)) &= \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A))}{\mu(A)} \\ &= \frac{\mu(f^{-1}(B \cap A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \mu_1(B). \end{aligned}$$

D'où $\mu_1 \in M_f$. D'une façon similaire on démontre que $\mu_2 \in M_f$.

1 \Rightarrow 2 Supposons que μ est ergodique et par l'absurde on suppose qu'il existe

$\mu_1, \mu_2 \in M_f$ tel que $\mu = t \mu_1 + (1 - t)\mu_2$ pour un certain $t \in]0, 1[$.

On va montrer que $\mu = \mu_1 = \mu_2$. On prouve que $\mu = \mu_1$ et avec le même raisonnement on prouvera aussi que $\mu = \mu_2$.

Notons que pour un mesurable $A \in \mathbb{B}$ si $\mu(A) = 0$ alors $\mu_1(A) = 0$. Alors par le théorème de Roden-Nykodym, μ_1 a une densité h_1 tel que :

$$\forall A \text{ ensemble mesurable, } \mu_1(A) = \int_A h_1 d\mu.$$

Alors $\mu = \mu_1$ ssi $h_1 = 1$ $\mu.p.p.$ Considérons les ensembles suivants :

$$B = \{x : h_1(x) < 1\}.$$

$$C = \{x : h_1(x) > 1\}.$$

Et montrons que $\mu(B) = \mu(C) = 0$. On a :

$$\mu_1(B) = \int_B h_1 d\mu = \int_{B \cap f^{-1}(B)} h_1 d\mu + \int_{B \setminus f^{-1}(B)} h_1 d\mu.$$

Et

$$\mu_1(f^{-1}(B)) = \int_{f^{-1}(B)} h_1 d\mu = \int_{f^{-1}(B) \cap B} h_1 d\mu + \int_{f^{-1}(B) \setminus B} h_1 d\mu.$$

Or, μ_1 est f -invariante donc on aura : $\int_{B \setminus f^{-1}(B)} h_1 d\mu = \int_{f^{-1}(B) \setminus B} h_1 d\mu$.

Notons également que :

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(B) \setminus B) &= \mu(f^{-1}(B)) - \mu(f^{-1}(B) \cap B) \\ &= \mu(B) - \mu(f^{-1}(B) \cap B) = \mu(B \setminus f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Alors par définition de l'ensemble B :

$$\int_{f^{-1}(B) \setminus B} h_1 d\mu > \mu(f^{-1}(B) \setminus B)$$

$$\int_{B \setminus f^{-1}(B)} h_1 d\mu < \mu(B \setminus f^{-1}(B))$$

Donc, on a : $\mu(B \setminus f^{-1}(B)) = \mu(f^{-1}(B) \setminus B) = 0$ et par conséquent,
 $\mu(f^{-1}(B) \Delta B) = 0$. L'ergodicité de μ implique soit $\mu(B) = 1$ ou $\mu(B) = 0$.

Assumons par l'absurde que $\mu(B) = 1$ alors :

$$1 = \mu_1(X) = \int_X h_1 d\mu = \int_B h_1 d\mu < \mu(B) = 1 \text{ (Contradiction).}$$

D'où $\mu(B) = 0$ et de même on trouve que $\mu(C) = 0$.

■

Théorème 63

Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue sur un espace métrique compact X . Alors il existe au moins une mesure ergodique dans M_f .

Pour prouver ce théorème, on énonce en premier le théorème de Krein-Milman qu'on utilisera.

Théorème 64 (Krein-Milman [24])

Tout ensemble convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Preuve.

L'espace M_f est un convexe compact alors d'après le théorème de Krein-Milman, M_f est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. D'où l'existence d'une mesure ergodique vu que $M_f \neq \emptyset$. ■

2.7 Théorèmes ergodiques

On donne l'un des résultats classiques de la théorie ergodique prouvé par G. D. Birkhoff en 1931 dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 65 (Théorème ergodique de Birkhoff [22], p.102)

Soit f une fonction ergodique dans l'espace mesuré (X, \mathbb{B}, μ) et soit φ une fonction mesurable. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x) = \int \varphi d\mu, \forall x \in X \text{ } \mu.p.p$$

Définition 66 ([13], p.07) Soit μ une mesure f -invariante sur X .

On désigne par :

$$G_\mu = \left\{ x \in X : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \right\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu \text{ dans la topologie faible}^\star.$$

L'ensemble des points génériques de la mesure μ .

Corollaire 67 ([28])

Pour tout ensemble mesurable A dans (X, \mathbb{B}, μ, f) avec f ergodique on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \text{card}\{0 \leq j \leq n-1 : f^j(x) \in A\} = \mu(A)$$

Preuve.

Soit $\varphi = \chi_A$ alors par le théorème ergodique de Birkhoff on a pour μ p.p :

$$\frac{1}{n} \text{card}\{0 \leq j \leq n-1 : f^j(x) \in A\} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ f^j(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int \chi_A d\mu = \mu(A).$$

■

Remarque 68 *Toute mesure ergodique admet un point générique. Ce qui est une conséquence directe du théorème de Birkhoff.*

Corollaire 69 ([20], p.76)

Soit f une transformation préservant la mesure sur (X, \mathbb{B}, μ) .

Alors f est ergodique si et seulement si $\forall A, B \in \mathbb{B}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Preuve. Supposons que f est ergodique alors par le théorème de Birkhoff on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x) = \int \varphi d\mu, \forall x \in X \text{ } \mu.p.p, \text{ pour toute fonction mesurable } \varphi. \quad (2.4)$$

En particulier, en prenant $\varphi = \chi_A$ et on multipliant (2.4) par χ_B on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ f^j(x) \cdot \chi_B = \mu(A) \cdot \chi_B$$

Or,

$$\chi_A \circ f^j(x) \cdot \chi_B = \chi_{f^{-j}(A) \cap B}$$

Par une intégration on obtient le résultat.

Inversement supposons que pour $A, B \in \mathbb{B}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Supposons de plus que $f^{-1}(B) = B$ et prenons $A = B$. On aura grâce à l'hypothèse

$$\mu(B)(\mu(B) - 1) = 0.$$

D'où, $\mu(B) = 0$ ou 1 . ■

2.8 Unique ergodicité

On s'intéresse dans cette section aux systèmes dynamiques (X, f) admettant une mesure ergodique unique.

Définition 70 *Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue d'un espace métrique compact dans lui-même. S'il existe une unique mesure μ qui est f -invariante alors f est dite *uniquement ergodique*.*

Remarque 71

*On peut se demander pourquoi une telle mesure μ est dite *uniquement ergodique* tandis que l'unicité est considérée par rapport à l'invariance. En effet, cela vient du fait que toute mesure ergodique est un extrémum sur M_f et par conséquent si M_f contient *uniquement* une seule mesure μ alors automatiquement μ sera ergodique.*

Théorème 72 (Théorème ergodique d'Oxtoby[27], p.158)

Soit X un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une fonction continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La fonction f est *uniquement ergodique*.*
2. *Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue il existe une constante $c(\varphi)$:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \xrightarrow{\text{uniformément}} c(\varphi). \quad (2.5)$$

Preuve.

2 \Rightarrow 1 Supposons que $\forall \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, \exists une constante $c(\varphi)$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \xrightarrow{\text{uniformément}} c(\varphi).$$

Soient μ, ν deux mesures ergodiques. Alors par le théorème de Birkhoff on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i = \int \varphi d\mu.$$

Donc $c(\varphi) = \int \varphi d\mu$. Avec le même argument on aura $c(\varphi) = \int \varphi d\nu$ pour toute fonction continue φ . D'où, on déduit que $\mu = \nu$.

1 \Rightarrow 2 Supposons que f est uniquement ergodique et soit φ une fonction continue.

Par le théorème de Birkhoff, on a : $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \xrightarrow{\mu-p.p} \int \varphi d\mu$, alors si (2.5) a lieu donc automatiquement $c(\varphi) = \int \varphi d\mu$.

Par l'absurde supposons que (2.5) n'est pas vérifiée alors on peut trouver une fonction φ continue et une suite $x_k \in X$ et $n_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \varphi \circ f^i(x_k) \neq \int \varphi d\mu.$$

Définissons la mesure ν_k :

$$\begin{aligned} \nu_k &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f^i_{\star} \delta_{x_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{f^i(x_k)} \\ &\Rightarrow \int \varphi d\nu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \varphi(f^i(x_k)) \end{aligned}$$

Comme $M(X)$ est compact alors la suite ν_k est faible \star convergente vers une mesure $\nu \in M_f$. Donc :

$$\int \varphi d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi d\nu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \varphi(f^i(x_k)) \neq \int \varphi d\mu$$

Par conséquent $\mu \neq \nu$ ce qui est en contradiction avec l'unique ergodicité.

■

Exemple 73 (Une rotation irrationnelle sur le cercle est uniquement ergodique [28])

Il est suffisant de prouver l'existence d'une famille dense Φ de fonctions continues

$$\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ R_\alpha^j(x) \text{ converge uniformément vers une constante } \bar{\varphi}.$$

Considérons pour $m \geq 1$:

$$\varphi_m(x) = e^{2\pi imx} = \cos(2\pi mx) + i \sin(2\pi mx)$$

L'ensemble Φ de toutes les combinaisons linéaires des φ_m est dense dans l'espace des fonctions continues sur S^1 .

Notons que :

$$\varphi_m \circ R_\alpha^j(x) = e^{2\pi im(x+j\alpha)} = e^{2\pi imx} e^{2\pi imj\alpha} = \varphi_m \cdot e^{2\pi imj\alpha}$$

Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_m \circ R_\alpha^j(x)| = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |e^{2\pi imj\alpha}| = \frac{1}{n} \frac{|1 - e^{2\pi im\alpha n}|}{|1 - e^{2\pi im\alpha}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et donc $e^{2\pi im\alpha n} \neq 1$.

2.9 Mélange mesurable

On introduit dans cette section la notion de mélange mesurable dans ses deux versions : le mélange fort et faible, qui est une propriété plus forte que l'ergodicité.

2.9.1 Mélange faible

Définition 74

Soit f une transformation préservant la mesure sur l'espace (X, \mathbb{B}, μ) .

On dit que f est faiblement mélangeante si $\forall A, B \in \mathbb{B}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(f^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Proposition 75 ([22], p.113) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. La fonction f est faiblement mélangeante.
2. Pour g, h deux fonctions mesurables, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int (g \circ f^i) h d\mu - \int g d\mu \int h d\mu \right| = 0. \quad (2.6)$$

Preuve.

2 \Rightarrow 1 Supposons que pour toutes fonctions g, h mesurables (2.6) est vérifiée alors en particulier en prenant $g = \chi_A$ et $h = \chi_B$ on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(f^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

1 \Rightarrow 2 Supposons que f est faiblement mélangeante et montrons (2.6) en premier pour des fonctions indicatrices χ_A, χ_B avec A, B des ensembles mesurables dans \mathbb{B} . Alors, on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int (\chi_A \circ f^i) \chi_B d\mu - \int \chi_A d\mu \int \chi_B d\mu \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(f^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que (2.6) est vérifiée pour toute fonction étagée. Par l'approximation de toute fonction mesurable positive par une suite croissante de fonctions étagées positives et le fait que toute fonction f mesurable de signe quelconque s'écrit comme : $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \sup\{f, 0\}$ et $f^- = \sup\{-f, 0\}$ alors on déduit que (2.6) est vérifiée $\forall f, g$ fonctions mesurables.

■

Proposition 76 ([29], p.40)

Une transformation $f : X \rightarrow X$ dans l'espace mesurable (X, \mathbb{B}, μ) est faiblement mélangeante alors est nécessairement ergodique.

Preuve.

Si f est faiblement mélangeante alors par définition on a : $\forall A, B \in \mathbb{B}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(f^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Par l'inégalité triangulaire on aura :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(f^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(f^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

D'où f est ergodique. ■

Remarque 77

L'inverse est faux car en effet, il existe des transformations qui sont ergodiques mais pas faiblement mélangeantes.

2.9.1.1 Transformation ergodique mais pas faiblement mélangeante.

Le système dynamique (S^1, R_α) avec α irrationnel est ergodique mais pas faiblement mélangeant. En effet, Considérons deux ensembles mesurables $A, B \in (S^1, \mathbb{B}, \lambda, \mathbb{R}_\alpha)$ de sorte que la mesure de Lebesgue portée sur A et B soit tellement petite. Alors on remarque bien que presque la majorité des images réciproques de l'ensemble A par \mathbb{R}_α sont d'intersection vide avec l'ensemble B . ce qui fait que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda(f^{-i}(A) \cap B) - \lambda(A)\lambda(B)| > \frac{1}{2} \lambda(A)\lambda(B) > 0.$$

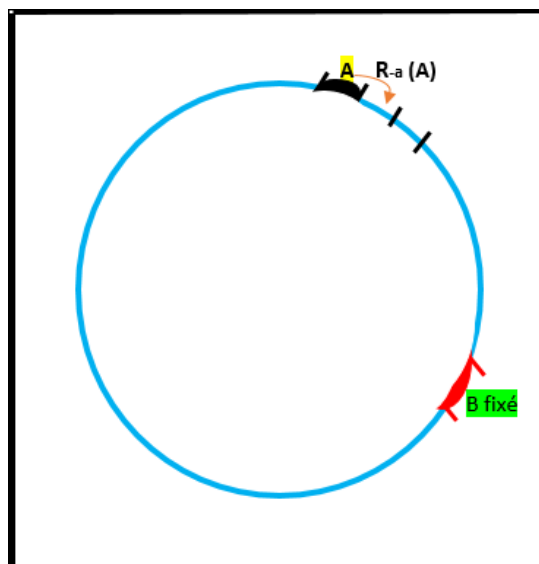


Fig. 2.3. Système ergodique mais pas faiblement mélangeant

2.9.2 Mélange fort

Définition 78 Soit f une transformation préservant la mesure sur l'espace (X, \mathbb{B}, μ) .

La fonction f est dite *fortement mélangeante* si $\forall A, B$ ensembles mesurables on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Proposition 79 ([22], p.122) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est fortement mélangeante.
2. Pour g, h deux fonctions mesurables, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (g \circ f^n) h d\mu = \int g d\mu \int h d\mu.$$

Preuve.

Se prouve avec les mêmes arguments que la caractérisation du mélange faible. ■

Exemple 80 (Doublement de période [6], p.27)

On considère la transformation de $[0, 1[$ dans $[0, 1[$ donnée par :

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[. \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[. \end{cases}$$

On avait déjà démontré que le système du doublement de période préserve la mesure de Lebesgue. Montrons maintenant qu'il est fortement mélangeant.

Comme les intervalles de la forme $A = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$ engendrent la tribu des boréliens alors on peut restreindre l'étude aux intervalles de la même forme que A .

L'ensemble $B^{-N}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)$ est composé des 2^N intervalles suivants :

$$[\frac{k + i2^n}{2^{n+N}}, \frac{k + 1 + i2^n}{2^{n+N}}[, i \in \{0, \dots, N\}.$$

Si $n + N > n'$ alors l'intersection de ces intervalles avec $C = [\frac{k'}{2^{n'}}, \frac{k'+1}{2^{n'}}[$ est constituée de 2^{N-n} intervalles de longueur 2^{-n-N} , ce qui donne la relation recherchée :

$$\mu(C \cap B^{-n}(A)) = \mu(A)\mu(C).$$

Proposition 81 ([29])

Toute transformation f fortement mélangeante est faiblement mélangeante.

Preuve. Posons

$$a_n = \mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B).$$

Alors si on suppose que f est fortement mélangeante alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n_0-1} |a_i| + \frac{1}{n} \sum_{i=n_0}^{n-1} |a_i|.$$

Comme les $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont bornés alors $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1$ on a : $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n_0-1} |a_i| < \frac{\epsilon}{2}$.

Pour $N = \max\{n_0, n_1\}$ on a : $\forall n \geq N$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n_0-1} |a_i| + \frac{1}{n} \sum_{i=n_0}^{n-1} |a_i| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n} (n - n_0) \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

D'où, f est faiblement mélangeante. ■

Remarque 82 *L'inverse est également faux vu qu'il existe des transformations qui sont faiblement mélangeantes non fortement.*

2.9.2.1 Transformation de Chacon (Système faiblement mélangeant mais pas fortement)

Le but de cette partie est de donner un exemple explicite de système dynamique qui soit faiblement mélangeant mais pas fortement. Ce sera aussi l'occasion d'introduire une méthode de construction géométrique de systèmes dynamiques, appelée découpage et empilage par laquelle la transformation est définie en construisant des tours de Rokhlin successives. La transformation de Chacon ([4]) que nous allons définir répondra à notre objectif.

2.9.2.1.1 Construction par découpage et empilage ([26], p.218).

Soit $I_0 = [0, \frac{2}{3}[$ un intervalle. La première itération de découpage consiste à partager I_0 en trois sous intervalles de même longueur $I_1 = [0, \frac{2}{9}[$, $I'_1 = [\frac{2}{9}, \frac{4}{9}[$ et $I''_1 = [\frac{4}{9}, \frac{2}{3}[$. Dont on aura également besoin d'un quatrième intervalle $E_1 = [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}[$ appelé espaceur

aussi de longueur $\frac{2}{9}$.

L'empilage consiste ensuite à représenter ces quatre intervalles les uns au-dessus des autres dans l'ordre de bas en haut I_1, I'_1, E_1, I''_1 .

On définit alors la transformation T sur $I_1 \cup I'_1 \cup E_1$ en associant chaque point de ces trois intervalles au point immédiatement au-dessus de lui dans le diagramme. A cette étape, nous avons donc une tour de Rokhlin (I_1, TI_1, T^2I_1) mais la transformation T n'est pas encore définie sur l'étage le plus élevé de cette tour I''_1 .

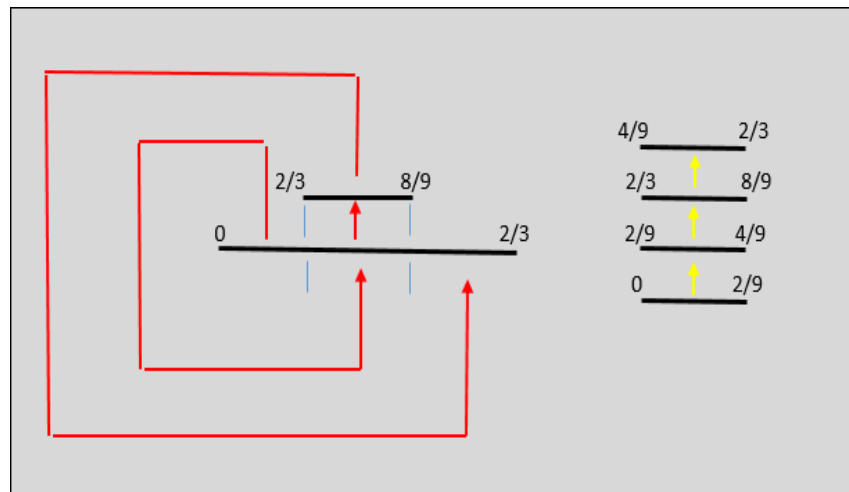


Fig. 2.4. Tour 1 de Rokhlin.

La construction se poursuit par induction : après l'étape n on a la tour de Rokhlin

$$(I_n, TI_n, \dots, T^{h_n} I_n)$$

Ses étages $T^j I_n$ sont des intervalles de longueur $\frac{2}{3^{n+1}}$ dont la réunion est $[0, \frac{2\theta_n}{3} [$ pour un certain $\theta_n \geq 1$. La transformation T est également définie sur tous les étages sauf le dernier en envoyant chaque point sur le point immédiatement au-dessus de lui dans le dessin de la tour.

On découpe ensuite la tour de Rokhlin en trois sous-colonnes et on considère également un espaceur $E_{n+1} = [\frac{2\theta_n}{3}, \frac{2\theta_n}{3} + \frac{2}{3^{n+1}}[$. On empile ensuite les trois sous-colonnes et l'espaceur dans l'ordre cité précédemment.

On obtient ainsi une nouvelle tour de Rokhlin, de hauteur $h_{n+1} = 3h_n + 1$ dont les niveaux sont des intervalles de même longueur partitionnant $[0, \frac{2\theta_{n+1}}{3}[$ avec

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

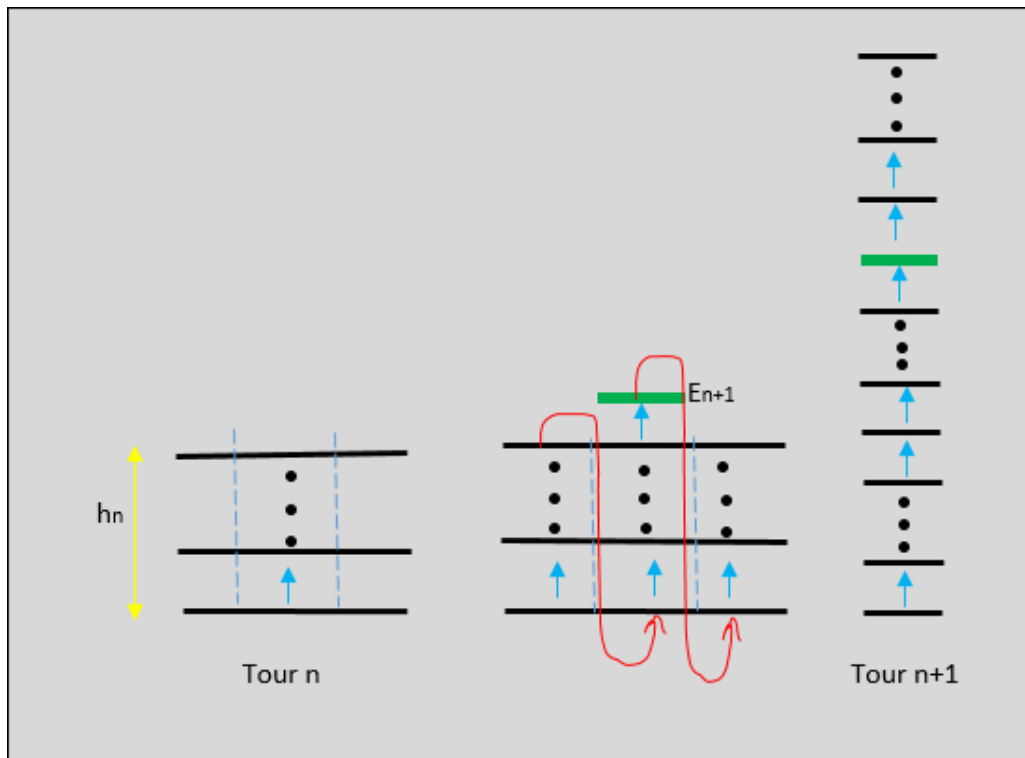


Fig. 2.5. Construction de la transformation de Chacon par découpage et empilage.

On a $\theta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{3}{2}$, on obtient donc $\frac{2\theta_\infty}{3} = 1$.

En poursuivant la construction inductivement pour tout $n \geq 1$, on obtient finalement une transformation inversible T de $[0, 1[$ dans lui-même qui préserve la mesure de Lebesgue, appelée transformation de Chacon.

Proposition 83 ([5], p.18) *La transformation de Chacon n'est pas fortement mélangeante.*

Preuve.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et A un étage de la tour de Rokhlin de hauteur h_n .

On remarque que $\lambda(A) < \frac{1}{3}$ et que :

$$\lambda(A \cap T^{h_n}(A)) \geq \frac{\lambda(A)}{3} > (\lambda(A))^2$$

Vu que la partie de A contenue dans la première sous-colonne de la tour n revient complètement dans A après h_n itérations. D'où la convergence de $\lambda(A \cap T^{h_n}(A))$ vers $(\lambda(A))^2$ pour n assez grand ne peut avoir lieu. ■

2.9.2.2 Théorie spectrale

On définit dans cette partie quelques notions de la théorie spectrale que nous utiliserons par la suite pour prouver l'ergodicité et le mélange faible de la transformation de Chacon.

Définition 84

On définit l'opérateur $U_f : L_\mu^2 \rightarrow L_\mu^2$ qui est associé à une transformation f préservant la mesure μ , par :

$$U_f(g) = g \circ f$$

Avec L_μ^2 est l'espace de Hilbert des fonctions mesurables à carré intégrables.

Lemme 85 ([7], p.04)

Si α est une valeur propre pour U_f alors $|\alpha| = 1$. Si de plus $\alpha \neq 1$ alors la fonction propre qui lui associée est d'intégrale nulle.

Enfin, si f est ergodique alors toute fonction propre est de module constant.

Preuve.

Soit g la fonction propre associée à la valeur propre $\alpha : g \circ f = \alpha g$.

Comme f préserve la mesure μ alors on a :

$$\int |g| d\mu = \int |g \circ f| d\mu = |\alpha| \int |g| d\mu.$$

Or, $g \neq 0$ donc $|\alpha| = 1$. On peut aussi écrire

$$\int g d\mu = \int g \circ f d\mu = \alpha \int g d\mu.$$

Si $\alpha \neq 1$ alors $\int g d\mu = 0$.

Enfin, puisque $|g| \circ f = \alpha |g| = |g|$ alors par ergodicité de f on aura $|g| = \text{constante}$. ■

Lemme 86 ([7], p.11) *Pour tout ensemble borélien $A \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \geq 1$ assez grand, il existe un ensemble A_n réunion d'étages de la tour n tel que :*

$$\mu(A \Delta A_n) < \varepsilon.$$

De plus, pour toute fonction $g \in L^1_\mu$ il existe une fonction étagée g_n constante sur les étages de la tour n telle que :

$$\|g - g_n\| < \varepsilon.$$

Argument de preuve : Tout ensemble borélien dans $[0, 1[$ peut être arbitrairement bien approché par une union finie d'intervalles, et chaque intervalle peut-être approché arbitrairement par une union d'étage de la tour n pour n assez grand (Les étages de la tour n sont des intervalles dont la taille tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, et qui recouvrent une proportion arbitrairement grande de $[0, 1)$). Enfin, toute fonction g dans L^1_μ peut être arbitrairement bien approchée par une fonction étagée.

Définition 87 ([7], p.05) *On dit que f est à spectre continu si f est ergodique et U_f admet uniquement une seule valeur propre qui vaut 1.*

Théorème 88 ([7], p.05) *La transformée f est faiblement mélangeante ssi est à spectre continu.*

Proposition 89 ([7], p.12) *La transformation de Chacon est ergodique.*

Preuve. Soit A un ensemble fortement invariant par T et $n \geq 1$. Posons :

$$\alpha_n = \frac{\mu(A \cap I_n)}{\mu(I_n)}.$$

Où, I_n est l'intervalle de base de la tour n . Puisque A est invariant alors on a aussi pour tout $j \in \{0, \dots, h_n - 1\}$

$$\alpha_n = \frac{\mu(A \cap T^j(I_n))}{\mu(T^j(I_n))}.$$

Notons $\delta_n = \min(\alpha_n, 1 - \alpha_n)$. Par le lemme 86, L'ensemble A peut être approché par une réunion d'étages A_n de la tour n tel que $\mu(A \Delta A_n) < \varepsilon$.

D'un autre côté, on a :

$$\varepsilon > \mu(A \Delta A_n) \geq h_n \mu(I_n) \delta_n.$$

Comme $h_n \mu(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ alors, on aura $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où, $\mu(A) = 0$ ou 1. ■

Proposition 90 ([7], p.12) *La transformation de Chacon est faiblement mélangeante.*

Preuve. Puisque l'on sait déjà que f est ergodique, il suffit de montrer que la seule valeur propre pour U_f est 1.

Soit donc α une valeur propre pour U_f , et soit g la fonction propre associée.

Puisque f est ergodique, alors $|g|$ est constant et on peut supposer que $|g| = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Grâce au lemme 86 on a pour tout n assez grand on peut trouver une fonction simple g_n constante sur les étages de la tour n telle que :

$$\|g - g_n\|_1 < \varepsilon.$$

Comme g est de module 1, on peut supposer aussi que les valeurs prises par g_n sont de module 1. Notons aussi que par invariance de la mesure, on a pour tout entier k :

$$\|g \circ f^k - g_n \circ f^k\|_1 < \varepsilon$$

On peut alors écrire, par l'inégalité triangulaire, pour tout entier k :

$$\|g_n \circ f^k - \alpha^k g_n\|_1 \leq \|g_n \circ f^k - g \circ f^k\|_1 + \|g \circ f^k - \alpha^k g\|_1 + \|\alpha^k g - \alpha^k g_n\|_1 < 2\varepsilon. \quad (2.7)$$

Appelons C_n^1 (respectivement C_n^2) la première (respectivement la seconde) sous-colonne de la tour n définies dans la construction de la transformation de Chacon par découpage et empilage. On a :

$$\mu(C_n^1) = \mu(C_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

Par ailleurs, puisque g_n est constante sur les étages de la tour n , on a : $g_n \circ f^{h_n} = g_n$ sur C_n^1 et $g_n \circ f^{h_n} = g_n$ sur C_n^2 . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \|g_n \circ f^{h_n} - \alpha^{h_n} g_n\|_1 &\geq \int_{C_n^1} |g_n| |1 - \alpha^{h_n}| d\mu + \int_{C_n^2} |g_n| |1 - \alpha^{h_n+1}| d\mu \\ &= \mu(C_n^1) (|1 - \alpha^{h_n}| + |1 - \alpha^{h_n+1}|). \end{aligned}$$

En utilisant (2.7) et le fait que ε peut être choisi arbitrairement petit, on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{h_n+1} = 1 \Rightarrow \alpha = 1.$$

■

Définition 91 (Produit de deux systèmes dynamiques mesurables.)

Soient (X, \mathbb{B}, μ, f) et (Y, \mathbb{B}', ν, g) deux systèmes dynamiques mesurés.

Le produit des deux systèmes (X, \mathbb{B}, μ, f) et (Y, \mathbb{B}', ν, g) est également un système dynamique mesuré défini sur l'espace $Z = X \times Y$ associé de la fonction continue $F = (f, g)$ et de la mesure produit $\alpha = \mu \times \nu$.

Noté par : $(Z, \mathbb{B} \times \mathbb{B}', \alpha, F)$.

Définition 92 ([27], p.214) Soient μ, ν deux mesures de probabilités qui sont invariante sous les applications $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ respectivement.

On dit que les deux systèmes (X, f, μ) et (Y, g, ν) sont ergodiquement équivalents s'il existe une fonction mesurable bijective $\varphi : X \rightarrow Y$ telle que :

$$\varphi_{\mu}^{\star} = \nu \text{ et } \varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

Remarque 93

Si on suppose que (X, f, μ) et (Y, g, ν) sont ergodiquement équivalentes alors un ensemble mesurable A est fortement invariant par rapport au système (X, f, μ) ssi $\varphi(A)$ est également fortement invariant par rapport au système (Y, g, ν) . Or, comme $\nu(\varphi(A)) = \mu(A)$ alors le système (X, f, μ) est ergodique ssi le système (Y, g, ν) l'est.

CHAPITRE 3

INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE SYMBOLIQUE

Ce chapitre a pour objectif l'introduction de quelques notions basiques en systèmes dynamiques symboliques (X, f) où X est un espace symbolique. L'importance de cette branche des systèmes dynamiques réside dans le fait que tout système dynamique admet une extension symbolique. Ce qui signifie que les points du système peuvent être représentés par une suite de symboles, ce qui permet de réduire des systèmes difficiles à analyser en des systèmes plus simples.

3.1 Espaces symboliques

On présente dans cette section quelques généralités sur les espaces symboliques qui seront d'usage par la suite.

Définition 94 ([17], p.104) *Soit A un alphabet (ensemble fini).*

L'espace symbolique $A^{\mathbb{Z}}$ est un espace constitué de toutes les suites bi-infinies construites à partir de l'alphabet A .

Qui également peut être vu comme produit infini de l'alphabet A .

C.à.d.

$$A^{\mathbb{Z}} = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} A.$$

Exemple 95 (Espace binaire [8], p.79)

L'espace binaire $2^{\mathbb{Z}}$ est constitué de toutes les suites bi-infinies formées de "0" et "1" comme ...11011001... et ...101010...qui sont des éléments de $2^{\mathbb{Z}}$.

Notation 96

Dans la suite, on aura besoin de connaître la position de chaque élément d'une suite de $A^{\mathbb{Z}}$ et pour se faire, on indiquera l'élément se trouvant à droite de '.' comme étant l'élément en position zéro. Comme par exemple : la suite ...000.100.. de $2^{\mathbb{Z}}$ admet 1 à la position zéro. C.à.d. $x_0 = 1$.

Définition 97

1. Les éléments de l'ensemble A^n avec $n \in \mathbb{N}$ sont appelés blocs ou mots.
2. Soit ν un élément de A^n , on dit que ν est de longueur n et on note $|\nu| = n$.

Définition 98

La concaténation de deux blocs $u \in A^n$ et $v \in A^m$ avec $n, m \in \mathbb{N}$ donne le nouveau bloc

$$uv \in A^{n+m}.$$

- u^∞ désigne la concaténation infinie du bloc $u \in A^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Le résultat suivant a pour objectif la définition de la notion de distance sur un espace symbolique $A^{\mathbb{Z}}$ quelconque.

Proposition 99 ([16], p.79)

Soit $A^{\mathbb{Z}}$ un espace symbolique, les applications d_1, d_2 suivantes :

$$d_1 : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{avec } n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i \text{ ou } x_{-i} \neq y_{-i}\}$$

$$(x, y) \mapsto d_1(x, y) = \frac{1}{2^n}$$

$$d_2 : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad d : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d_2(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} \quad (x_i, y_i) \mapsto d(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \neq y_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissent deux distances sur $A^{\mathbb{Z}}$ et elles sont équivalentes.

Preuve.

Montrons que d_1, d_2 sont bien des distances sur $A^{\mathbb{Z}}$.

a.

Soient $x, y, z \in A^{\mathbb{Z}}$, l'application d_1 vérifie :

1. $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i \text{ ou } x_{-i} \neq y_{-i}\} = \infty \Leftrightarrow x = y.$
2. $d_1(x, x) = \frac{1}{2^n}$ avec $n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq x_i \text{ ou } x_{-i} \neq x_{-i}\} = \infty \Leftrightarrow d_1(x, x) = 0.$
3. $d_1(x, y) = d_1(y, x).$
4. Posons $n_0 = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq z_i\}, n_1 = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}$ et $n_2 = \min\{i \in \mathbb{Z} : y_i \neq z_i\}.$

On note que si $n_1 > n_0$ et $n_2 > n_0$ alors $x_{n_0} = y_{n_0} = z_{n_0}$ (Contradiction).

Par conséquent, on a soit $n_1 > n_0$ ou bien $n_2 > n_0$, ce qui donne l'inégalité triangulaire :

$$d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z).$$

D'où, d_1 est une distance sur $A^{\mathbb{Z}}$.

b.

L'application d_2 est également une distance car en effet, $\forall x, y, z \in A^{\mathbb{Z}}$ on a :

- i. $d_2(x, x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, x_i)}{2^i} = 0.$
- ii. $d_2(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} = 0 \iff d(x_i, y_i) = 0, \forall i \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \Leftrightarrow x = y.$
- iii. $d_2(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(y_i, x_i)}{2^i} = d_2(y, x).$
- iv. $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$ (distance discrète).
 $\Rightarrow \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, z_i)}{2^i} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(z_i, y_i)}{2^i}.$
 $\Rightarrow d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y).$

Reste à montrer qu'elles sont équivalentes.

Soit $n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i \text{ ou } x_{-i} \neq y_{-i}\}$, on a :

$$d_1(x, y) = \frac{1}{2^n} \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} = d_2(x, y).$$

$$d_2(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} = \frac{1}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} \leq \frac{1}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 2d_1(x, y).$$

D'où, d_1 et d_2 sont équivalentes.

■

Notation 100

1. On note par $x_{[i,j]} = x_i \dots x_j$ la partie de x qui est entre la position i et j .
2. Un cylindre $[u]$ est l'ensemble des éléments de $A^{\mathbb{Z}}$ qui contiennent le bloc $u \in A^n$ dans leur partie centrale. C.à.d.

$$[u] = [u_{-n} \dots u_0 \dots u_n] = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_j = u_j, j = -n, \dots, n\}.$$

Proposition 101 ([17], p.105)

Les cylindres représentent des ensembles de $A^{\mathbb{Z}}$ qui sont à la fois ouverts et fermés.

Preuve. Soit $[u] = [u_{-n} \dots u_0 \dots u_n] = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_j = u_j, j = -n, \dots, n\}$ un cylindre.

On a pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$x \in [u] \Rightarrow [u] = B_{2^{-|u|+1}}(x).$$

Alors $[u]$ est un ouvert et son complément est une union de cylindres. En effet,

$$x \notin [u] \Rightarrow x \in \bigcup_{\exists i \in \{-n, \dots, n\} : x_i \neq u_i} [u_{-n} \dots u_0 \dots u_n].$$

Qui est un ouvert à son tour. Ce qui donne le résultat. ■

Proposition 102 *L'espace $(A^{\mathbb{Z}}, d)$ est un espace métrique compact.*

Preuve. Résultat direct du théorème de Tychonoff. ■

3.2 Décalage de Bernoulli

Définition 103 ([16], p.83)

L'application décalage $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est une application qui admet comme valeur à la position i la valeur de $x \in A^{\mathbb{Z}}$ à la position $i + 1$. Ce qui s'exprime avec la formule suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : A^{\mathbb{Z}} &\rightarrow A^{\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto (\sigma(x))_i = x_{i+1} \end{aligned}$$

C.à.d. pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$ on a :

$$\begin{array}{cccccccccccc} x & & \dots & x_{-4} & x_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & \cdot & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ \sigma(x) & & \dots & x_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & \cdot & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \end{array}$$

Le diagramme espace-temps du décalage illustré dans la figure suivante donne une idée sur le comportement du système $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ dont on observe le décalage à gauche des carrés blancs et noirs qui représentent des zéros et des uns respectivement.



Fig. 3.1. Diagramme espace-temps du décalage.

Proposition 104 *Le décalage de Bernoulli est transitif.*

Preuve. On considère un point $\alpha \in A^{\mathbb{Z}}$ obtenu par une concaténation de tous les blocs possibles de l'alphabet A .

C.à.d. Si on suppose que $A = \{a, b, c\}$ (le raisonnement est similaire dans le cas où $\text{card}(A) \neq 3$) alors :

$$\alpha = \dots \quad a \quad b \quad c \quad aa \quad ab \quad ac \quad ba \quad bb \quad bc \quad ca \quad cb \quad cc \quad aaa \quad aab \quad aac \dots$$

\uparrow
 Position 0.

Ce qui fait que : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \exists n \in \mathbb{N} : d_1(\sigma^n(\alpha), x) < \varepsilon$. ■

3.2.1 Points fixes et périodiques de $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$

Points fixes :

Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que : $x = \dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2x_3\dots$ avec $x_i \in A, \forall i \in \mathbb{Z}$.

Le point x est un point fixe pour $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ ssi $\sigma(x) = x$. C.à.d.

$$\begin{array}{cccccccccccc} x & & \dots & x_{-4} & x_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & . & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \sigma(x) = x \Leftrightarrow & \parallel & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ \sigma(x) & & \dots & x_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & . & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \end{array}$$

Par identification, on obtient : $\forall i \in \mathbb{Z} : x_i = x_{i+1}$.

Ce qui signifie que les points fixes de $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ sont toutes les suites obtenues par une concaténation infinie d'un élément de A .

Exemple 105 Les points fixes du système $(2^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ sont $r_1 = 0^\infty$ et $r_2 = 1^\infty$.

Points périodiques :

Un point x est un point q -périodique pour le système $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ ssi :

$$\sigma^q(x) = x \text{ et } \sigma^k(x) \neq x, \forall k < q.$$

Or, on a pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{array}{ll}
 x & \dots x_{-q} \dots x_{-2} x_{-1} . x_0 x_1 \dots x_q \\
 \sigma(x) & \dots x_{-q+1} \dots x_{-1} x_0 . x_1 x_2 \dots x_{q+1} \\
 \sigma^2(x) & \dots x_{-q+2} \dots x_0 x_1 . x_2 x_3 \dots x_{q+2} \\
 \dots & \dots \\
 \sigma^q(x) & \dots x_0 \dots x_{q-2} x_{q-1} . x_q x_{q+1} \dots x_{2q}
 \end{array}$$

Par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^q(x) = x. \\ \text{et} \\ \sigma^k(x) \neq x, \forall k < q. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{-q+i} = x_i = x_{q+i} \forall i. \\ \text{et} \\ \exists j : x_{-k+j} \neq x_j \text{ or } x_j \neq x_{k+j}, \forall k < q. \end{array} \right.$$

D'où, on déduit que les points q -périodiques de $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ sont les éléments formés par une concaténation infinie de q éléments de A . C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Remarque 106

Un point périodique x de période q ne peut pas être une concaténation de p éléments de A avec p un diviseur de q car dans ce cas on aura $\sigma^p(x) = x$. Ce qui est en contradiction avec le fait que x est un point q -périodique.

Exemple 107

L'élément $x = 1212^\infty$ n'est pas un point de période 4 mais plutôt de période 2.

Proposition 108

Le décalage de Bernoulli est un système dynamique mélangeant.

Preuve. Soient $U = [u_{-n}, \dots, u_n], V = [v_{-m}, \dots, v_m]$ deux cylindres dans $A^{\mathbb{Z}}$ avec $n, m \in \mathbb{N}$. Supposons sans perte de généralités que $n \geq m$. Alors, on a pour $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$x \in U \Leftrightarrow x_i = u_i, i = -n \dots n.$$

$$y \in V \Leftrightarrow y_i = v_i, i = -m \dots m.$$

On va montrer que $\forall k \geq n + m$ on a : $\sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Considérons le point $z \in A^{\mathbb{Z}}$ suivant :

$$z = \dots u_{-n} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position 0.}}}{u_0} \dots u_n v_{-m} \dots v_0 \dots v_m \dots \in U.$$

$$\text{On a : } \sigma^{n+m}(z) = \dots v_{-m} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position 0.}}}{v_0} \dots v_m \dots \in V.$$

$$\Rightarrow \sigma^{n+m}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Pour $k > n + m$, on considère un nouveau élément z de $A^{\mathbb{Z}}$ de la manière suivante :

$$z = \dots u_{-n} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position 0.}}}{u_0} \dots u_n \underbrace{z_1 \dots z_{k-n-m}}_{k-n-m \text{ éléments}} v_{-m} \dots v_m \dots \in U, z_i \in A, i = \overline{1, k-n-m}.$$

$$\text{Ca donne que : } \sigma^k(z) = \dots v_{-m} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position 0.}}}{v_0} \dots v_m \dots \in V.$$

$$\Rightarrow \sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Par conséquent, il existe un $n_0 = n + m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n_0 : \sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset$. ■

3.2.2 Mesure de Bernoulli

Soit $A = \{1, \dots, q\}$ un alphabet de cardinal q et soit $P = (p(1), p(2), \dots, p(q))$ un vecteur de probabilité où chaque $p(i)$ détermine la probabilité d'apparition d'un élément i dans A , avec $\sum_{i=1}^q p(i) = 1$. ([29], p.05)

On définit la mesure de Bernoulli μ_p sur un cylindre $[u_1, u_2, \dots, u_n]$ comme suit :

$$\mu_p([u_1, u_2, \dots, u_n]) = p(u_1)p(u_2)\dots p(u_n).$$

Proposition 109 ([28]) *La mesure de Bernoulli μ_p définie sur $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est σ -invariante.*

Preuve.

Soit $[u_1, u_2, \dots, u_n]$ un cylindre. On a :

$$\sigma^{-1}([u_1, u_2, \dots, u_n]) = [1, u_1, u_2, \dots, u_n] \cup [2, u_1, u_2, \dots, u_n] \cup \dots \cup [q, u_1, u_2, \dots, u_n].$$

Ce qui fait que :

$$\begin{aligned} \mu_p(\sigma^{-1}([u_1, u_2, \dots, u_n])) &= (p(1) + p(2) + \dots + p(q))(p(u_1)p(u_2)\dots p(u_n)) \\ &= p(u_1)p(u_2)\dots p(u_n) \\ &= \mu_p([u_1, u_2, \dots, u_n]). \end{aligned}$$

■

Proposition 110 ([23], p.232)

Le décalage de Bernoulli sur $A^{\mathbb{Z}}$ est fortement mélangeant.

Preuve.

Soient $U = [u_{-m}, \dots, u_m]$, $V = [v_{-m'}, \dots, v_{m'}]$ deux cylindres de $A^{\mathbb{Z}}$ avec $m, m' \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a les deux cylindres $\sigma^{-n}(V)$ et U dépendent de coordonnées différentes. C.à.d.

$$U \cap \sigma^{-n}(V) = \bigcup_{\substack{a_i \in A \\ i=m+1, \dots, -m'-m+n-1}} [u_{-m}, \dots, u_m, a_{m+1}, \dots, a_{-m'-m+n-1}, v_{-m'}, \dots, v_{m'}]$$

En calculant la mesure de $U \cap \sigma^{-n}(V)$ pour n assez grand, on aura :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_p(U \cap \sigma^{-n}(V)) = \mu_p(U)\mu_p(V).$$

Ce qui prouve que le décalage de Bernoulli est un système fortement mélangeant. ■

3.3 Endomorphismes du shift

On introduit à présent une catégorie particulière de systèmes dynamiques symboliques connue sous le nom des endomorphismes du shift.

Définition 111 ([17], p.204)

Une application $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est dite endomorphisme du shift s'il existe deux entiers $m, a : m \leq a$ et une règle locale $f : A^{a-m+1} \rightarrow A$ tel que :

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z} : F(x)_i = f(x_{[i+m, i+a]}).$$

Autrement dit : L'image par F d'un élément x de $A^{\mathbb{Z}}$ en position i est retrouvée en fonction des lettres de x apparaissantes entre la position $i + m$ et $i + a$. Comme le montre la figure suivante :

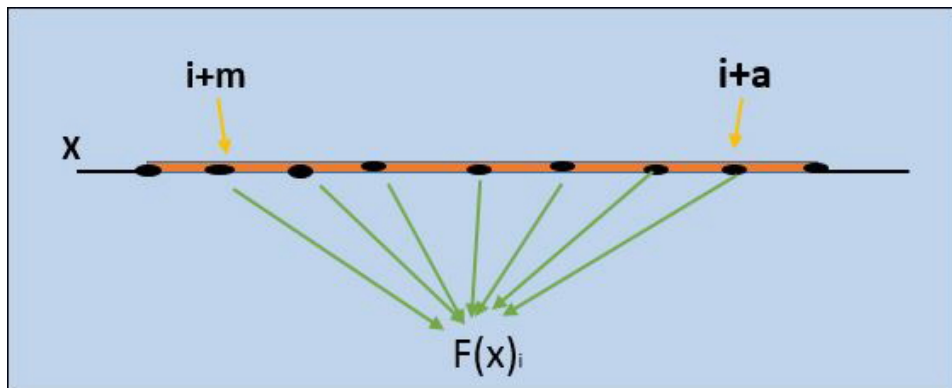


Fig. 3.2. La fonction locale f associée à un endomorphisme du shift.

Notation 112

1. Les entiers a et m sont nommés l'anticipation et la mémoire de f respectivement.
2. Le point $r = \max\{-m, a\}$ dénote le rayon de f et $d = a - m$ son diamètre.

Théorème 113 (Hedlund [15])

L'application $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un endomorphisme du shift ssi elle est continue et commute avec le shift.

$$\begin{array}{ccc} F : A^{\mathbb{Z}} & \rightarrow & A^{\mathbb{Z}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ F : A^{\mathbb{Z}} & \rightarrow & A^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Preuve.

\Rightarrow Soit F un endomorphisme du shift de rayon $r = \max\{-m, a\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ on a :

$$\begin{aligned} d_1(x, y) < \frac{1}{2^{n+r}} &\Rightarrow x_{[-n-r, n+r]} = y_{[-n-r, n+r]}. \\ &\Rightarrow x_{[-n+m, n+a]} = y_{[-n+m, n+a]} \text{ car } -r \leq m \leq a \leq r. \\ &\Rightarrow F(x)_{[-n, n]} = F(y)_{[-n, n]}. \\ &\Rightarrow d_1(F(x), F(y)) = \frac{1}{2^n}. \\ &\Rightarrow F \text{ est continue.} \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$(F(\sigma(x)))_i = f((\sigma(x))_{[i+m, i+a]}) = f(x_{[i+m+1, i+a+1]}) = (F(x))_{i+1} = \sigma(F(x))_i.$$

\Leftarrow On suppose que F est continue (qui est aussi uniformément continue par le théorème de Heine) et commute avec le shift.

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $r > 0$ tel que pour $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) < \frac{1}{2^r} &\Rightarrow d_1(F(x), F(y)) < 1. \\ x_{[-r, r]} = y_{[-r, r]} &\Rightarrow F(x)_0 = F(y)_0. \end{aligned}$$

Donc il existe $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ tel que $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$F(x)_0 = f(x_{[-r,r]}).$$

Comme F commute avec le shift alors on aura :

$$F(x)_i = \sigma^i(F(x))_0 = F(\sigma^i(x))_0 = f(\sigma^i(x)_{[-r,r]}) = f(x_{[i-r, i+r]}).$$

Par conséquent, on a une règle locale de mémoire $m = -r$ et d'anticipation $a = r$.

■

3.3.1 Exemples d'endomorphismes du shift

3.3.1.1 Règle produit

Soit $(\mathbb{2}^{\mathbb{Z}}, P)$ un endomorphisme du shift de rayon 1 défini comme suit :

$$(P(x))_i = x_{i-1}x_i x_{i+1}.$$

Tel que les possibles valeurs de sa règle locale associée sont représentées dans le tableau suivant :

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 3.3. Tableau des valeurs de la règle locale associée au produit.

On remarque que toutes les possibilités sont attirées par ‘0’ sauf le bloc 111 qui en donne un ‘1’. Avec le diagramme espace-temps représenté dans la figure suivante on voit bien sa dynamique.

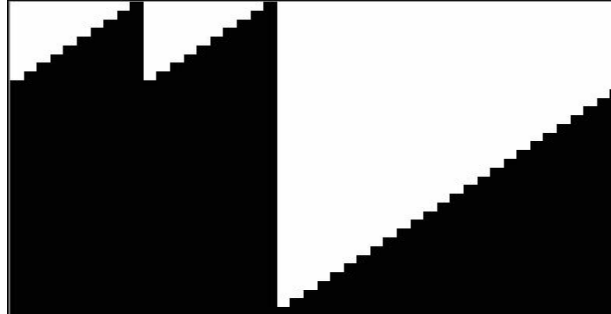


Fig. 3.4. Diagramme espace-temps de la règle produit.

3.3.1.2 La règle majorité

La règle de la majorité est un système qui représente l’impact du voisinage sur les choix des individus. On suppose que le choix d’un individu dépend du choix de ses deux voisins immédiats.

On peut traduire cette idée par l’endomorphisme du shift M défini comme suit :

$$(M(x))_i = \left\lfloor \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{2} \right\rfloor$$

Les valeurs possibles de sa fonction locale $f : 2^3 \rightarrow 2$ sont représentées dans le tableau suivant ainsi que son diagramme espace-temps associé donné ci-dessous :

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	1	0	1	1	1

Fig. 3.5. Les valeurs possibles de la fonction locale associée à la règle majorité.

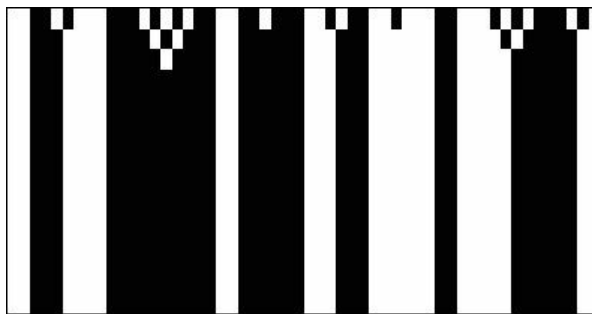


Fig. 3.6. Diagramme espace-temps de la règle majorité.

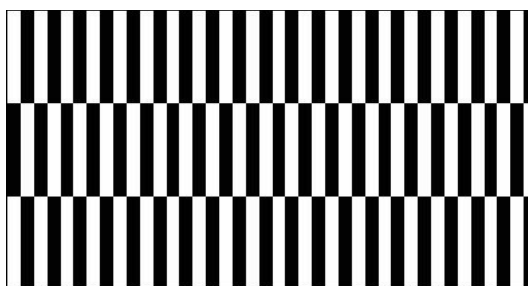


Fig. 3.7. Diagramme espace-temps associé aux points 01^∞ et 10^∞ de la règle majorité.

Remarque 114 *Les carrés noirs dans les diagrammes représentent des “0” tandis que les blancs représentent des “1”.*

3.3.2 Endomorphismes du shift surjectifs

Le théorème qui va suivre donne une caractérisation des endomorphismes du shift surjectifs.

Théorème 115 ([17], p.214)

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift de règle locale $f : A^{d+1} \rightarrow A$.

Alors F est dit surjectif si et seulement si

$$\forall u \in A^n, n \in \mathbb{N} \text{ on a : } \text{card}((f^{-1}(u))) = (\text{card}(A))^d. \quad (3.1)$$

Preuve.

Supposons que pour tout bloc $u \in A^n, n \in \mathbb{N}$ on a : $\text{card}(f^{-1}(u)) = (\text{card}(A))^d$.

Soit m, a la mémoire et l'anticipation de la règle locale f , c.à.d. $d = a - m$.

Soit $y \in A^{\mathbb{Z}}$ et $n \geq 0$, on considère les ensembles X_n suivants :

$$X_n = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : f(x_{[-n+m, n+a]}) = y_{[-n, n]}\}.$$

Par construction les X_n sont non vides (dû à l'hypothèse), fermés et emboîtés alors par compacité il existe $x \in A^{\mathbb{Z}} : x \in \bigcap_{n>0} X_n$. D'où, $F(x) = y$.

Inversement, supposons que F est surjectif et montrons (3.1).

Soit $u \in A^n, n \in \mathbb{N}$ et soit $p = \min\{\text{card}((f^{-1}(u)))\}$.

On a si un élément $y \in A^{\mathbb{Z}}$ contient u alors toute image réciproque de y contient une image réciproque de u par surjectivité de F . Donc chaque bloc $u \in A^n, n \in \mathbb{N}$ contient au moins une image réciproque, c.à.d. $p > 0$.

Pour la suite de la preuve on a besoin de démontrer les deux résultats suivants :

1. Montrons que si $\text{card}((f^{-1}(u)) = p$ alors pour tout $a \in A$ on a : $\text{card}((f^{-1}(ua)) = p$.

Par hypothèse on a : $\text{card}(f^{-1}(ua)) \geq p, \forall a \in A$.

Supposons par l'absurde que $\text{card}(f^{-1}(ua)) > p$. Donc comme le montre la figure suivante :

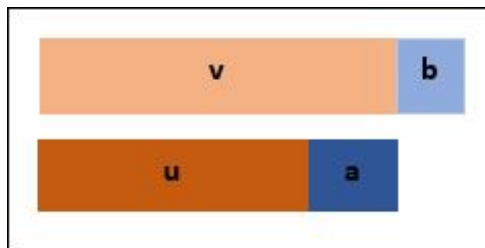


Fig. 3.8. Illustration 01 pour la preuve du théorème 115.

Il existe des unions disjointes telles que :

$$\bigcup_{b \in A} \{vb : v \in f^{-1}(u)\} = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(ua).$$

$$p \cdot \text{card}(A) = \text{card}\left(\bigcup_{b \in A} \{vb : v \in f^{-1}(u)\}\right) = \text{card}\left(\bigcup_{a \in A} f^{-1}(ua)\right) > p \cdot \text{card}(A).$$

Ce qui conduit à une contradiction.

2. Montrons que $p = (\text{card}(A))^d$:

Soit $u \in A^n, n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{card}(f^{-1}(u)) = p$ alors d'après le résultat 1 démontré dessus on aura pour tout bloc u' : $\text{card}(f^{-1}(uu')) = p$.

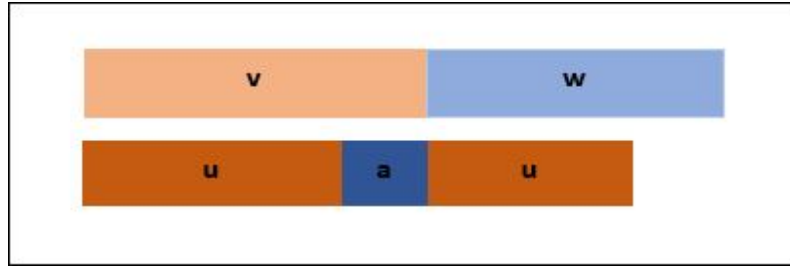


Fig. 3.9. Illustration 02 pour la preuve du théorème 115.

D'où, il existe une union disjointe (figure 3.9) tq : $\{vw : v, w \in f^{-1}(u)\} = \bigcup_{a \in A^d} f^{-1}(uau)$.

$$\Rightarrow p^2 = \text{card}(\{vw : v, w \in f^{-1}(u)\}) = \text{card}\left(\bigcup_{a \in A^d} f^{-1}(uau)\right) = p \cdot (\text{card}(A))^d.$$

$$\Rightarrow p = (\text{card}(A))^d.$$

Revenons maintenant à la preuve du théorème, et supposons que pour un certain

$n \in \mathbb{N}$ et $v \in A^n$ on a $\text{card}(f^{-1}(v)) > (\text{card}(A))^d$. Alors,

$$(\text{card}(A))^{n+d} = \text{card}\left(\bigcup_{v \in A^n} f^{-1}(v)\right) > (\text{card}(A))^n \cdot (\text{card}(A))^d \text{ (Contradiction).}$$

■

Remarque 116 *La propriété (3.1) peut être réalisée pour un bloc d'une longueur n et ne pas l'être pour une autre longueur m comme c'est le cas de la règle de majorité. En effet, pour un bloc u tel que $|u| = 1$ la propriété est vérifiée car on a :*

$$\begin{aligned} \text{card}(f^{-1}(1)) &= \text{card}(\{110, 101, 011, 111\}) = 4. \\ \text{card}(f^{-1}(0)) &= \text{card}(\{001, 010, 100, 000\}) = 4. \end{aligned}$$

Mais ce n'est pas le cas pour le bloc 00 , où on a :

$$\text{card}(f^{-1}(00)) = \text{card}(\{0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1001\}) = 6 \neq 4.$$

Remarque 117 *La mesure de Bernoulli μ_p n'est pas toujours invariante dans le cas des endomorphismes du shift. Comme c'est le cas de la règle produit sur $2^{\mathbb{Z}}$.*

En effet, on a :

$$\mu_p(P^{-1}([10])) = \mu_p([1110]) = p(1)^3 p(0) \neq \mu_p([10]) = p(1)p(0).$$

3.3.3 Les points périodiques des endomorphismes du shift

On s'intéresse aux points périodiques d'un endomorphisme du shift et leur relation avec les points σ -périodiques.

On note par $P(F)$ l'ensemble des points périodiques pour un endomorphisme du shift $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ admettant $f : A^{r+1} \rightarrow A$ comme règle locale et par $E(F)$ l'ensemble de ses points ultimement périodiques. On a les résultats suivants :

Proposition 118 ([17], p.205) *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift.*

Tout point périodique pour le shift est un point ultimement périodique pour $(A^{\mathbb{Z}}, F)$.

Preuve. Soit x un point périodique pour $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned}\sigma^n(x) &= x \\ \Rightarrow F^m(\sigma^n(x)) &= F^m(x), \forall m \in \mathbb{N}. \\ \Rightarrow \sigma^n(F^m(x)) &= F^m(x) \text{ par commutation.}\end{aligned}$$

Or, le nombre de points n -périodiques pour le décalage est fini, vu qu'ils sont la concaténation infinie des blocs de $A^{\mathbb{Z}}$ de longueur n .

D'où, l'existence d'un $p \in \mathbb{N} : F^{m+p}(x) = F^m(x)$. ■

Définition 119

Un ensemble est dit ensemble de première catégorie s'il peut s'écrire sous forme d'une union dénombrable d'ensembles d'intérieur vides.

Proposition 120 ([19], p.41)

L'ensemble $P(F)$ ne peut prendre que l'une des formes suivantes :

1. *Tout l'espace $A^{\mathbb{Z}}$, dans ce cas $\exists n : F^n = \text{identité}$.*
2. *Un ensemble de première catégorie.*
3. *Un ensemble d'intérieur vide.*

Preuve.

Soit les ensembles $P_n(F)$ définis comme suit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(F) = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : F^n(x) = x\}$$

On a les $P_n(F)$ sont des ensembles fermés et σ -invariants. En effet,

Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $P_n(F)$ qui converge vers $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et montrons que

$x \in P_n(F)$. On a :

$$x_m \in P_n(F) \Rightarrow x_m \in A^{\mathbb{Z}} : F^n(x_m) = x_m$$

Par passage à la limite et vu que F est continue alors on aura :

$$x = \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} F^n(x_m) = F^n(\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m) = F^n(x)$$

D'où, les $P_n(F)$ sont fermés. Pour la σ -invariance, on a pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} x \text{ appartient à } \sigma(P_n(F)) &\Rightarrow \exists y \in P_n(F) : \sigma(y) = x \\ &\Rightarrow \exists y \in A^{\mathbb{Z}} : F^n(y) = y \text{ et } \sigma(y) = x \\ &\Rightarrow \exists y \in A^{\mathbb{Z}} : \sigma(F^n(y)) = \sigma(y) = x \\ &\Rightarrow \exists y \in A^{\mathbb{Z}} : F^n(\sigma(y)) = \sigma(y) = x \\ &\Rightarrow F^n(x) = x \Rightarrow x \in P_n(F). \end{aligned}$$

Or, comme le système $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est transitif alors soit $P_n(F) = A^{\mathbb{Z}}$ ou bien $P_n(F) = \emptyset$.

1. Si $P_n(F) = A^{\mathbb{Z}}$ pour un certain n alors $F^n = I_d$ et dans ce cas $P(F) = A^{\mathbb{Z}}$.
2. Si $P_n(F) = \emptyset, \forall n$ alors $P(F) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(F)$ est de première catégorie.

Par le lemme de Baire $P(F)$ est d'intérieur vide.

■

Proposition 121 ([19], p.42) *Soit r le rayon de la règle locale f associée à l'endomorphisme du shift F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} : \text{card}(P_n(F)) \leq \text{card}(A)^{2nr}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N} : \text{card}(P_n(F)) < \infty$.
3. $P(F) \subseteq P(\sigma)$.

Si de plus F est surjectif alors les propriétés 1, 2 et 3 sont équivalentes à la propriété suivante :

4. $E(F) = P(\sigma)$.

Preuve.

1 \Rightarrow 2 C'est trivial.

2 \Rightarrow 3 Soit $x \in P(F)$ alors :

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{N} : F^n(x) &= x. \\ \Rightarrow \sigma^k(F^n(x)) &= \sigma^k(x), \forall k \in \mathbb{N}. \\ \Rightarrow F^n(\sigma^k(x)) &= \sigma^k(x), \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Or comme par hypothèse $\text{card}(P_n(F)) < \infty$, cela implique l'existence d'un $m \in \mathbb{N}$ tel que : $\sigma^{k+m}(x) = \sigma^k(x), \forall k \in \mathbb{N}$. D'où : $\sigma^m(x) = x$.

3 \Rightarrow 1

Assumons que $P(F) \subseteq P(\sigma)$ et soit r le rayon de la règle locale f de F .

On a : $P_1(F^n) = P_n(F)$ et le rayon de la fonction locale de F^n est nr . Alors, on peut remplacer F^n par F et par conséquent il suffit de montrer que $\text{card}(P_1(F)) \leq \text{card}(A)^{2r}$.

Par l'absurde, supposons que $\text{card}(P_1(F)) > \text{card}(A)^{2r}$.

Alors il existe $x, y \in P_1(F) : x \neq y$ avec $x_{[1,2r]} = y_{[1,2r]}$.

Définissons l'élément $z \in A^{\mathbb{Z}}$ comme suit :

$$\begin{cases} z_i = x_i, i \leq 2r. \\ z_i = y_i, i > 2r. \end{cases}$$

On remarque que $z \notin P(\sigma)$ et $F(z) = z$. Ce qui est une contradiction.

Si on suppose que F est surjectif alors 4 \Rightarrow 3.

2 \Rightarrow 4

D'après la proposition 118, on sait que $P(\sigma) \subset E(F)$.

Donc reste qu'à prouver l'inclusion inverse.

Soit $x \in E(F)$ alors pour certains $n, k \in \mathbb{N}$, on a :

$$F^{n+k}(x) = F^k(x)$$

Posons $y = F^k(x)$, alors on aura :

$$\begin{aligned} F^n(y) &= y \\ \Rightarrow \sigma^i(F^n(y)) &= \sigma^i(y), \forall i \in \mathbb{N}. \\ \Rightarrow F^n(\sigma^i(y)) &= \sigma^i(y), \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $\text{card}(P_n(F)) < \infty$ alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^i(y) = y$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$F^k(\sigma^{mi}(x)) = \sigma^{mi}(F^k(x)) = \sigma^{mi}(y) = y.$$

Or, comme F^k est surjectif alors l'élément $y \in A^{\mathbb{Z}}$ admet un nombre fini d'images réciproques, ce qui fait que pour un certain $m \in \mathbb{N}$: $\sigma^{mi}(x) = x$.

D'où, $E(F) \subset P(\sigma)$.

■

3.3.4 Mesure uniforme sur les endomorphismes du shift surjectifs

On définit la mesure uniforme sur l'alphabet A par la mesure μ_{unif} qui associe la même probabilité d'apparition pour chaque symbole de A .

C.à.d. si le $\text{card}(A) = p$ alors la probabilité d'apparition de chaque symbole de A est $\frac{1}{p}$. Ce qui signifie que pour tout cylindre $[u]$ de $A^{\mathbb{Z}}$ on a :

$$\mu_{unif}([u]) = p^{-|u|}.$$

Proposition 122 ([17], p.216)

La mesure uniforme est invariante ssi l'endomorphisme du shift est surjectif.

Preuve.

Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un endomorphisme du shift de règle locale $f : A^{d+1} \rightarrow A$.

Supposons que $\text{card}(A) = p$ alors on a :

$$|F^{-1}(u)| = |u| + d, \forall u \in A^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

L'endomorphisme F est surjectif ssi $\text{card}(f^{-1}(u)) = p^d$.

Ce qui est équivalent à :

$$\mu_{unif}(F^{-1}([u])) = \frac{1}{p^{|u|+d}} \cdot p^d = \frac{1}{p^{|u|}} = \mu_{unif}([u]).$$

■

CHAPITRE 4

LIENS ENTRE LE CADRE TOPOLOGIQUE ET LE CADRE ERGODIQUE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

Vu que les deux aspects ergodique et dynamique topologique ont été souvent traités et étudiés à part. On se demande si on peut faire passer des résultats d'un cadre ergodique au topologique des systèmes dynamiques discrets et vice versa. Ce chapitre est consacré à cet objectif. On présente en premier lieu un résultat topologique obtenu par un outil mesurable. En effet on peut démontrer que tout endomorphisme du shift ultimement périodique et surjectif est périodique où la preuve repose sur l'application du théorème de récurrence de Poincaré. Nous nous intéresserons ensuite aux quelques liens particuliers entre transitivité, ergodicité, minimalité et unique ergodicité tout en donnant des contre-exemples de systèmes dynamiques qui servent à montrer que certaines implications ne sont pas vérifiées.

4.1 Résultat topologique obtenu par un outil mesurable

Proposition 123

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, \mu_{unif}, F)$ un endomorphisme du shift muni de la mesure uniforme définie sur sa tribu \mathbb{B} engendrée par les cylindres de $A^{\mathbb{Z}}$.

Si F est ultimement périodique et surjectif alors il est périodique.

Preuve.

Comme F est ultimement périodique alors :

$$\exists m, k > 0 : F^{m+k}(x) = F^m(x), \forall x \in A^{\mathbb{Z}}.$$

Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$ de partie centrale $x_{[-n,n]}$. Considérons le cylindre $[u]$ défini comme suit :

$$[u] = x_{[-n,n]}.$$

Puisque $\mu_{unif}([u]) > 0$ alors par le théorème de récurrence de Poincaré presque tout point de $[u]$ va revenir dans $[u]$. C.à.d.

$$\exists i_n \in \mathbb{N} : F^{i_n}(x)_{[-n,n]} = x_{[-n,n]}.$$

On suppose que i_n est supérieur à m , ce qui est possible vu que par le théorème de récurrence de Poincaré le cylindre $[u]$ va revenir une infinité de fois dans $[u]$.

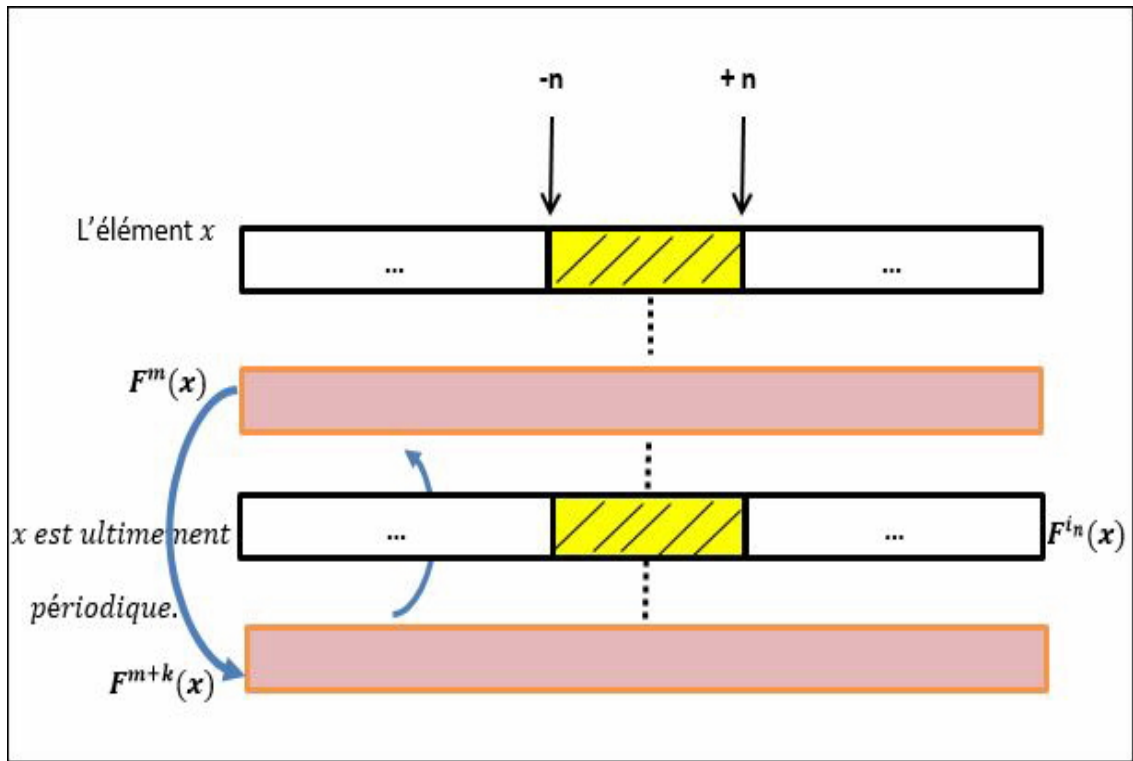


Fig. 4.1. Illustration 01 pour la preuve du théorème 123.

Pour la suite de la preuve on a besoin de démontrer le résultat suivant :

- **Les points périodiques pour le shift sont périodiques pour F :**

Soit y un point périodique pour le shift. Alors y est une concaténation infinie d'un bloc ν de $A^{\mathbb{Z}}$. On suppose que : $\nu = y_{[-n+m,n+a]}$.

Où, m et a sont la mémoire et l'anticipation associés à la règle locale de F .

Alors, grâce à ce qui était fait au début de cet preuve on aura :

$$F^{in}((y_{[-n+m, n+a]})^\infty)_{[-n, n]} = F^{in}(y)_{[-n, n]} = y_{[-n, n]}.$$

Comme le montre la figure suivante :

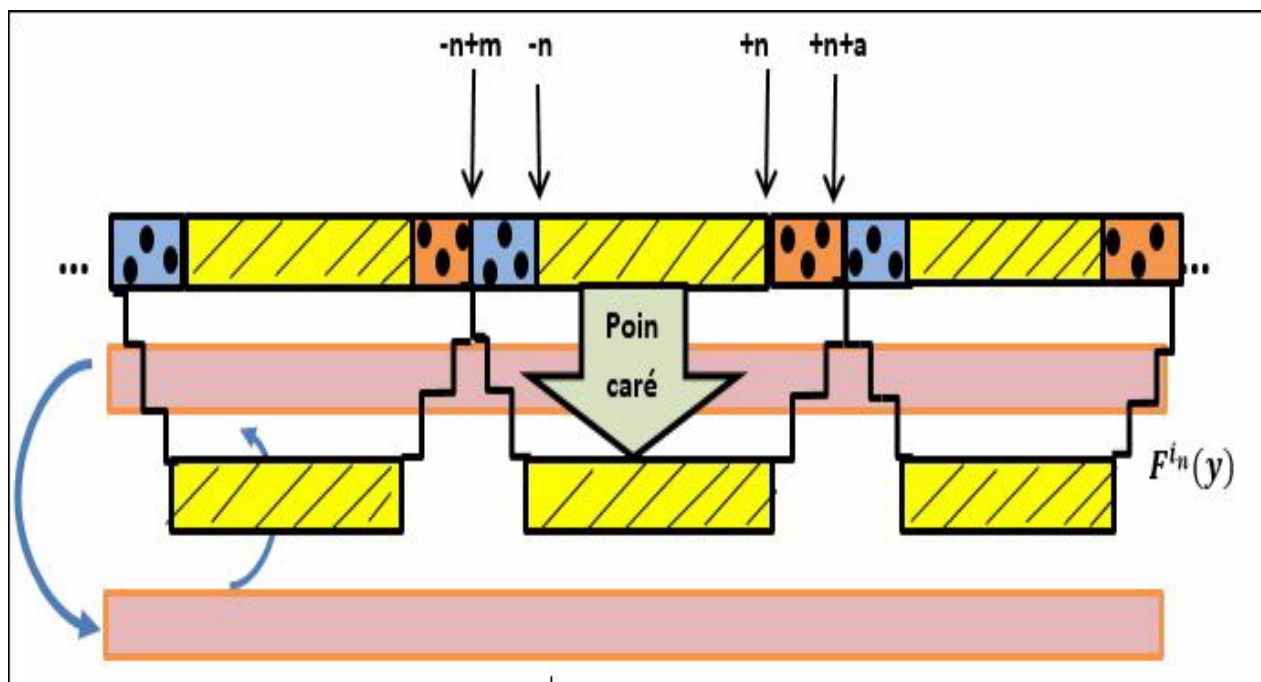


Fig. 4.2. Illustration 02 pour la preuve du théorème 123.

En faisant tendre n vers l'infini, On déduit que y est un point périodique pour l'endomorphisme du shift F .

Revenons à la preuve du théorème :

Grâce à la proposition 118, les points périodiques pour le shift sont ultimement périodiques pour F et qui sont denses dans $A^{\mathbb{Z}}$. Par densité on déduit que F est périodique.

■

Remarque 124

Le résultat de cette proposition n'est pas valable sans la surjectivité de F .

Par exemple, soit $F : \mathbf{3}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{3}^{\mathbb{Z}}$ un endomorphisme du shift non surjectif de règle locale $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ définie comme suit :

$$f(0) = 1, f(1) = 0 \text{ et } f(2) = 1.$$

Soit $x = (012)^{\infty}$ un élément de $A^{\mathbb{Z}}$, on a :

$$F(x) = F(012^{\infty}) = (101)^{\infty}$$

tel que

$$F(101^{\infty}) = 010^{\infty} \text{ et } F(010^{\infty}) = (101)^{\infty}$$

D'où, x est un point ultimement périodique pour F mais pas périodique.

Exemple 125 Soit G un endomorphisme du shift défini sur $\mathbf{3}^{\mathbb{Z}}$ de règle locale $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ définie comme suit :

$$f(0) = 1, f(1) = 2 \text{ et } f(2) = 0.$$

L'endomorphisme G est 2-périodique.

...	0	1	0	2	...
...	1	2	1	0	...
...	2	0	2	1	...
...	0	1	0	2	...

Fig. 4.3. Un point de $A^{\mathbb{Z}}$ sous les itérés de l'endomorphisme G .

4.2 Transitivité et ergodicité

On s'intéresse dans cette section au lien possible entre la transitivité d'un système dynamique discret (X, f) et l'existence d'une mesure ergodique μ sur ce système.

Théorème 126 ([29], théorème 5.16, p. 132)

Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue sur un espace métrique compact X dans lui-même. Soit μ une mesure sur la tribu de X qui associe à tout ouvert non vide de X une mesure strictement positive. Si f est ergodique par rapport à la mesure μ alors $\mu(\{x \in X : \{f^n(x)\}_{n=0}^\infty \text{ est dense dans } X\}) = 1$. En particulier, f est transitive.

Preuve.

Comme X est un espace métrique compact alors il admet une base dénombrable d'ouverts $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Donc,

$$\{x \in X : \{f^n(x)\}_{n=0}^\infty \text{ est dense dans } X\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f^{-1}(\bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U_n)) \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U_n)$.

Par ergodicité, la mesure de $\bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U_n)$ est soit 0 ou soit 1. Mais, vu que l'ouvert U_n est contenu dans $\bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U_n)$ et que $\mu(U_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(\bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(U_n)) = 1$.

D'où le résultat. ■

4.2.1 Transitivité et non ergodicité

L'objectif de cette partie est de démontrer que la réciproque du théorème précédent est fausse. Pour cela, on introduit un contre exemple dû à Benjamin Weiss dont on présente la construction de l'exemple tandis que les preuves sont citées dans son article [30].

Définition 127 *Une mesure μ est dite atomique si elle associe une mesure strictement positive pour les singletons $\{x\}$ de X .*

Soit (X, f) un système dynamique, considérons les propriétés suivantes :

- (A) Le système dynamique associé à f est ergodique par rapport à une mesure μ_0 qui associe à tout ouvert non vide de X , une mesure strictement positive.
- (B) (X, f) est transitif.
- (C) Il existe une mesure f – invariante μ qui associe à tout ouvert non vide de X , une mesure strictement positive.

Benjamin Weiss a démontré que les propriétés (B) et (C) n'impliquent pas la propriété (A) en construisant un exemple de système dynamique symbolique (X, f) qui satisfait (B) et (C) mais pas (A).

L'idée principale repose sur le fait qu'un système dynamique est transitif s'il existe un point $x_0 \in X$ dont l'orbite est dense. Ce qui fait que (B) est garantie en prenant X égale à l'adhérence de l'orbite d'un certain point fixé. La condition (C) est obtenue en assurant que les points périodiques de X forment un sous ensemble dense dans X . Ce qui permet de trouver une mesure atomique qui est positive sur tout ouvert de X . La non validité de la condition (A) sera une conséquence de la dynamique du système (X, f) , tel que il y aura une suite d'ouverts de X , $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possédant la propriété suivante :

Si un point $y \in X$ visite $V_n, n \in \mathbb{N}$ alors sa fréquence de séjourner en V_0 est inférieure à ε_n avec $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors, si un point visite infiniment V_n , il visitera V_0 avec une fréquence zéro. Ce qui fait que n'importe quelle mesure ergodique qui est positive sur V_n va disparaître sur V_0 . Donc, la condition (A) sera pas vérifiée.

4.2.1.1 Construction du contre exemple

Définissons les fonctions $r_k(n)$ à valeurs de \mathbb{N} dans \mathbb{N} par :

$$\begin{aligned} r_0(n) &= n. \\ r_{k+1}(n) &= 10^{r_k(n)}, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nous allons construire par étapes un élément particulier $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ de la manière suivante : où la notation a^b avec a est un bloc de $\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ et $b \in \mathbb{N}$ désigne la concaténation b -fois du bloc a . Au début, fixons au long des étapes $x_i = 0$ pour $i \leq 0$ et $x_1 = 1$. Soit a_1 le bloc suivant :

$$a_1 = x_{-1}x_0x_1 = 001.$$

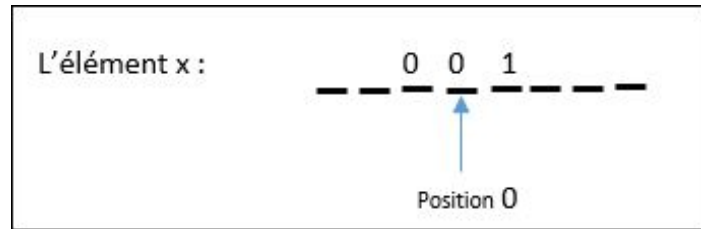


Fig. 4.4. L'élément x à l'étape 0.

Etape 1 :

Insérons a_1^p à la place $r_1(p)$. Puis complétons les espaces avec des zéros jusqu'à la position $r_1(p+1)$, si p n'est pas une puissance de 10. C.à.d.

$$\begin{aligned} x_{r_1(p)} &= 0, & x_{r_1(p)+1} &= 0, & x_{r_1(p)+2} &= 1, \\ x_{r_1(p)+3} &= 0, & \dots & & x_{r_1(p)+3p-1} &= 1. \end{aligned}$$

Avec, $x_j = 0$ pour $r_1(p) + 3p \leq j < r_1(p+1)$ si $p \neq 10^l, l \in \mathbb{N}$.

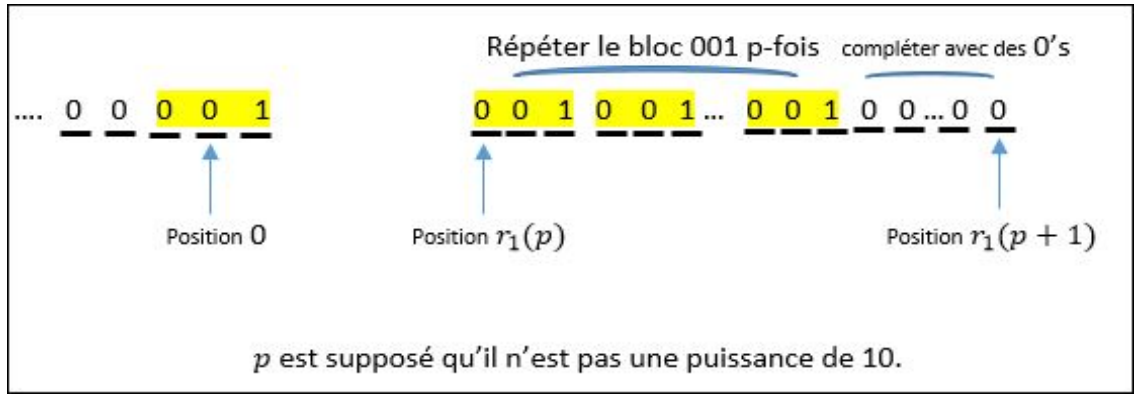


Fig. 4.5. L'élément x à l'étape 1.

Etape 2 : Soit $a_2 = x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2$ comme c'est défini dans l'étape 1. Insérons a_2^l à la position $r_2(l) + 3r_1(l)$.

$$x_{r_2(l)+3r_1(l)} = x_{-2}, \quad x_{r_2(l)+3r_1(l)+1} = x_{-1}, \quad \dots, \quad x_{r_2(l)+3r_1(l)+5l-1} = x_2.$$

Complétons ensuite les espaces avec des zéros jusqu'à la position $r_1(r_1(l) + 1)$ si l n'est pas une puissance de 10.

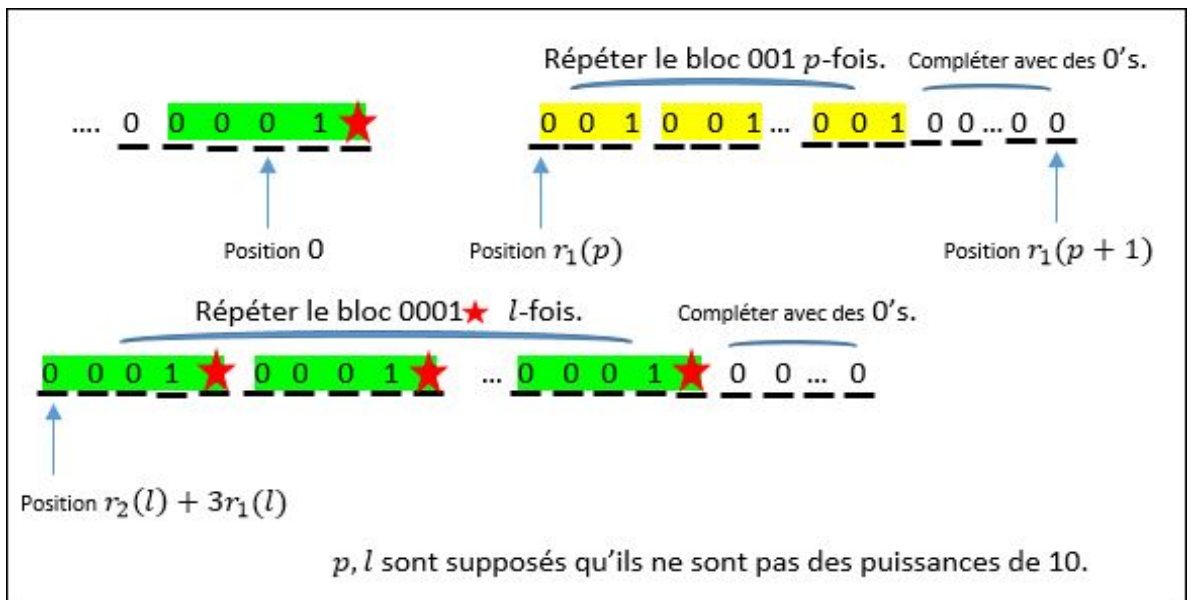


Fig. 4.6. L'élément x à l'étape 2.

Etape k :

Posons $a_k = x_{-k}x_{-k+1}\dots x_k$ qui est bien défini à l'étape $k - 1$ et insérons a_k^n à la position

$$\sum_{j=0}^{k-1} (2j + 1)r_{k-j}(n).$$

Si n n'est pas une puissance de 10 alors complétons les espaces avec des zéros à partir de la position $\sum_{j=0}^{k-1} (2j + 1)r_{k-j}(n)$ jusqu'à $r_1(r_{k-n}(n) + 1)$.

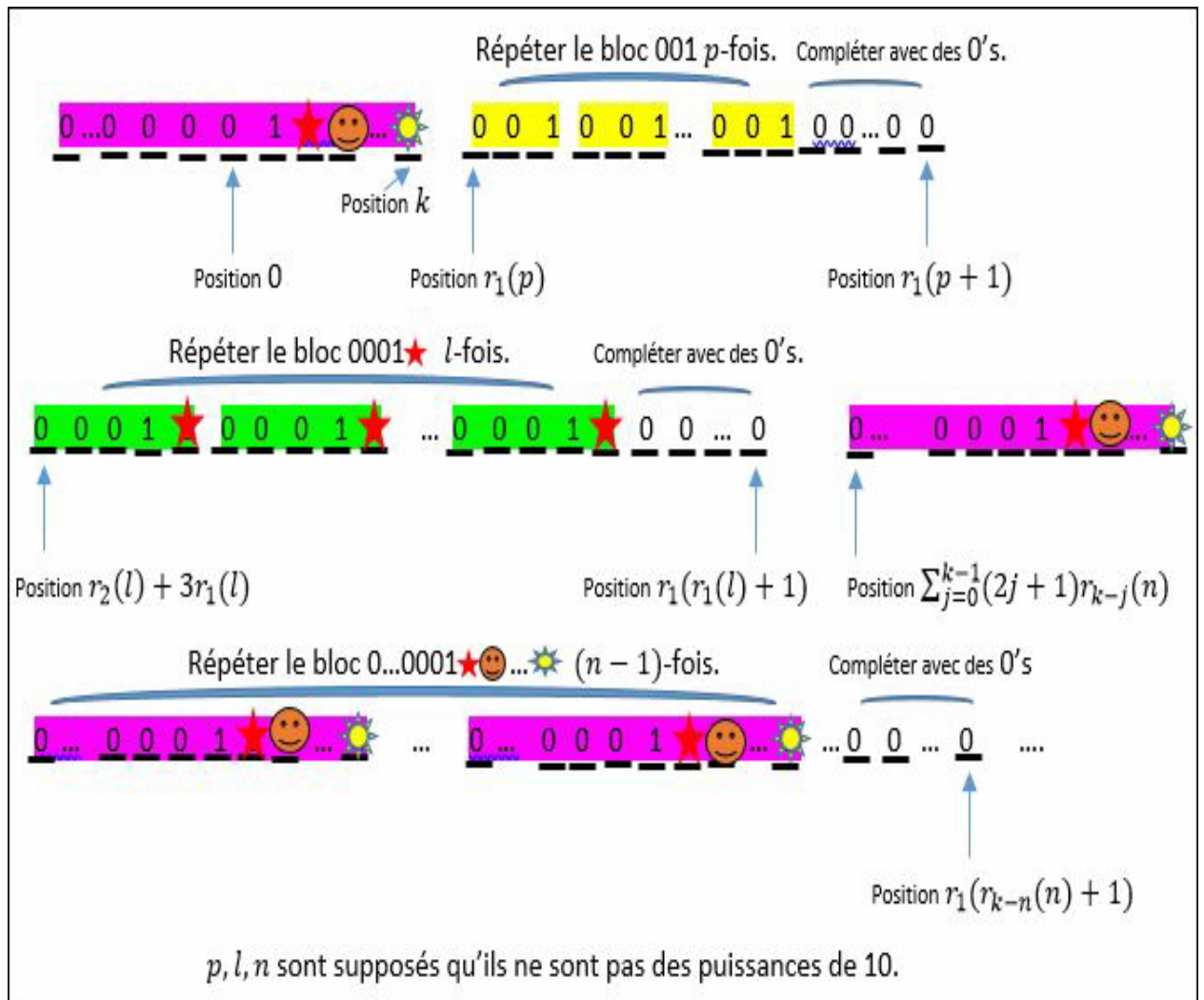


Fig. 4.7. L'élément x à l'étape k .

On considère :

$$X = \overline{\theta(x)} \subset \mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$$

Avec x est le point construit précédemment auquel on associe le décalage de Bernoulli.

Par construction, X contient les points périodiques $a_i^\infty, \forall i$.

En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la répétition infinie du bloc a_i donne également un élément de $\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ vérifiant toutes les étapes de construction citées. Comme ses points périodiques sont denses dans X alors pour tout ouvert $U \subset X$ il existe $n \in \mathbb{N} : \sigma^n(a_i^\infty) \in U$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$. Ce qui fait qu'il existe une mesure atomique portée par l'un des points périodiques qui donne une mesure strictement positive sur tout ouvert de X . Donc, les conditions (B) et (C) sont vérifiées. Tandis que la condition (A) ne sera pas vérifiée en considérant les ouverts $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$V_i = [a_i], i \in \mathbb{N}.$$

En effet, en considérant $y \in X$ un point générique associé à une mesure ergodique μ , alors y visite infiniment les ouverts V_i . Or, on remarque que la fréquence de l'apparition des 1's dans n'importe quel bloc de x est au plus ε_i et que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \varepsilon_i = 0$.

De plus, les sous-blocs finis de y sont inclus dans ceux de x alors ça donne que la fréquence des 1's dans y est nulle. Ce qui implique que la fréquence d'apparition de tous les blocs a_i en y est nulle. D'où, y n'est pas un point générique. C.à.d. Il n'existe pas de mesure ergodique sur (X, σ) qui soit positive sur tout ouvert de X .

Théorème 128 ([30], p. 74)

Soient $X, \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ l'espace et les ouverts définis respectivement en dessus. Alors, il n'existe pas de mesure ergodique μ sur X qui est σ -invariante et qui associe une mesure strictement positive aux ouverts $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

4.2.2 Un système uniquement ergodique et non transitif

Soit $([0, 1], f(x) = x^2)$ un système dynamique dont la dynamique de ses points est représentée dans la figure suivante. On observe que le système admet deux points fixes $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$ avec $B(0) = [0, 1[$.

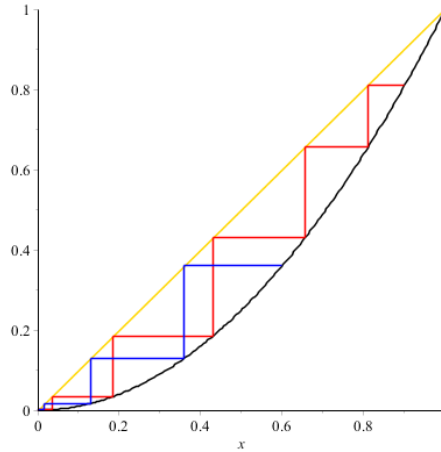


Fig. 4.8. Le système $([0, 1], x^2)$.

Ce système n'est pas transitif car pour tout $x \in [0, 1]$ on a :

$$\overline{\theta(x)} = \begin{cases} [0, x] & \text{si } x \neq 1. \\ \{1\} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Par contre, il est uniquement ergodique. En effet, Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Par le théorème de Heine elle est bornée et atteint ses bornes.

Soit donc, $M = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$. On a pour $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \right| &= \frac{1}{n} \sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \right| \leq M \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) - M \right| &= 0. \end{aligned}$$

4.2.3 Un système transitif, ergodique et non uniquement ergodique

On considère le système dynamique suivant $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}, F = (\sigma, f))$ qui est produit des deux systèmes : $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ et $(\{0, 1\}, f(x) = (x + 1) \bmod 2)$.

Soient U, V deux ouverts de $\mathbf{2}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}$. C.à.d. U, V s'écrivent sous la forme suivante :

$$U = [u] \times \{x\}.$$

$$V = [v] \times \{x\}.$$

Où, on désigne par $[u], [v]$ deux cylindres de $\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ et par $\{x\}$ un singleton dans $\{0, 1\}$ qui est égale soit à $\{0\}$ ou soit à $\{1\}$.

Le système $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ étant mélangeant alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a :

$$\sigma^{-n}([u]) \cap [v] \neq \emptyset.$$

Les points du système $(\{0, 1\}, f(x) = (x + 1) \bmod 2)$ sont des points 2-périodiques.

C.à.d. $\forall \{x\} \in \{0, 1\}$ on a : $f^2(\{x\}) = \{x\}$.

Soit alors n_1 le plus petit nombre pair qui est supérieur à n_0 . Donc, on aura :

$$F^{n_1}(U) \cap V = (\sigma^{n_1}([u]) \cap [v]) \times (f^{n_1}\{x\} \cap \{x\}) \neq \emptyset.$$

D'où, le système $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}, F = (\sigma, f))$ est transitif.

Par contre, il n'est pas uniquement ergodique vu que les deux mesures suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_p \times \sum_{i=0}^1 \delta_{f^i(x)} \\ \mu_2 &= \mu_q \times \sum_{i=0}^1 \delta_{f^i(x)} \end{aligned}$$

tel que $\sum_{i=0}^1 \delta_{f^i(x)}$ est la mesure f - invariante portée par un point x de $(\{0, 1\}, f)$ qui est un point 2 - *périodique* par construction.

Les mesures μ_p et μ_q sont deux mesures de Bernoulli définies sur l'espace binaire, de vecteurs de probabilités associés sont respectivement :

$$P = (p(0) = \frac{1}{3}, p(1) = \frac{2}{3}), Q = (q(0) = \frac{1}{6}, q(1) = \frac{5}{6}).$$

Alors μ_1, μ_2 représentent deux mesures invariantes sur $(2^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}, F = (\sigma, f))$ qui sont ergodiques. Dû au fait que le système $(2^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est fortement mélangeant donc est ergodique. De même pour le système $(\{0, 1\}, f)$ qui bien ergodique par rapport à $\sum_{i=0}^1 \delta_{f^i(x)}$.

4.2.4 Système ergodique, non uniquement ergodique et non transitif

On considère le système dynamique suivant $(2^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}, G = (\sigma, h))$ qui est produit des deux systèmes : $(2^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ et $(\{0, 1\}, h)$ avec :

$$\begin{aligned} h & : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}. \\ h(0) & = 0 \text{ et } h(1) = 1. \end{aligned}$$

- Ce système n'est pas transitif en raison du fait que le système $(\{0, 1\}, h)$ n'admet aucun point d'orbite dense.
- L'ergodicité est obtenue en associant à G la mesure suivante :

$$\mu = \mu_{unif} \times \delta_0$$

Tel que : μ_{unif} est la mesure uniforme définie sur l'espace binaire. C.à.d. est une mesure de Bernoulli de vecteur de probabilité $V = (v(0) = \frac{1}{2}, v(1) = \frac{1}{2})$.

- Il n'est pas uniquement ergodique comme c'est déjà cité dans le système $(2^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}, F = (\sigma, f))$ défini précédemment..

4.3 Minimalité et unique ergodicité

L'unique ergodicité est liée à la minimalité par le théorème suivant :

Théorème 129 ([29], p. 159)

Soit $T : X \rightarrow X$ un homoemorphisme d'un espace métrique compact dans lui même.

Supposons que T est uniquement ergodique, c.à.d. $C(f) = \{\mu\}$.

Alors T est minimale ssi $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U .

Preuve.

Supposons que T est minimale et soit U un ouvert non vide de X . Alors on a :

$$X = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(U).$$

Donc si $\mu(U) = 0$ alors on aura $\mu(X) = 0$ ce qui donne une contradiction.

Inversement, supposons que $\mu(U) > 0$ pour n'importe quel ouvert non vide $U \subset X$.

Par l'absurde on suppose que T n'est pas minimale, alors il existe un fermé K tel que $TK = K$ avec $K \neq \emptyset$ et $K \neq X$. Par le théorème de Krylov Boguliobuv, l'homoemorphisme $T|_K$ admet une mesure μ_K qui est T -invariante.

Définissons la mesure $\tilde{\mu}$ sur X par $\tilde{\mu}(B) = \mu_K(B \cap K)$ pour tout mesurable $B \in \mathbb{B}$.

Alors la mesure $\tilde{\mu}$ est T -invariante, de plus $\tilde{\mu} \neq \mu$ comme on a : $\tilde{\mu}(K^c) = 0$ et $\mu(K^c) > 0$. Contradiction avec l'unique ergodicité. ■

Exemple 130

Une rotation irrationnelle sur le cercle est un système minimal et uniquement ergodique.

Nous inétreçons à présent au lien possible entre la minimalité et l'unique ergodicité dans le cas des systèmes dynamiques discrets. C.à.d. où la fonction f vérifie simplement $f(X) \subset X$. On a le résultat suivant :

Proposition 131 ([27], p.159)

Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction continue sur un espace métrique compact X dans lui-même. Si f est uniquement ergodique par rapport à une mesure μ qui associe à tout ouvert non vide de X une mesure strictement positive alors (X, f) est minimal.

Preuve.

Par l'absurde on suppose qu'il existe un $x \in X : \overline{\theta(x)} \neq X$. C.à.d. Il existe un ouvert U de X de mesure strictement positive tel que : $f^j(x) \notin U, \forall j \geq 0$.

Considérons la mesure $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}.$$

Par le théorème de Krylov Bogoliobuv, $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet par rapport à la topologie faible[★] une sous suite convergente ν qui est invariante.

De plus, on a : $\nu(U) = 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n(U) = 0$.

Or, par unique ergodicité on a : $\nu = \mu$. Ce qui donne une contradiction. ■

Remarque 132

Dans le cas d'un système dynamique (X, f) , la minimalité du système n'implique pas l'unique ergodicité par rapport à une mesure μ strictement positive sur tous les ouverts de X . Car il existe bien des exemples dûs à Furstenberg de systèmes définis sur le tore qui sont minimaux et non uniquement ergodiques.

4.3.1 Les systèmes de Furstenberg

On donne dans cette partie l'idée principale de la construction des systèmes dynamiques dûs à Furstenberg construits sur le tore T^2 qui sont minimaux et préservent la mesure de Lebesgue λ mais qui ne sont pas ergodiques. En particulier, ils ne sont pas uniquement ergodiques. Pour plus de détails voir son article [12].

4.3.1.1 Construction de l'exemple de Furstenberg

Soit $f : T^2 \rightarrow T^2$ une transformation de la forme :

$$f(x, y) = ((x + \alpha) \bmod 1, y + \varphi(x)).$$

Où, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et φ est une fonction réelle-analytique sur S^1 avec $\int \varphi(x) dx = 0$.

- Considérons l'application $f_0 : T^2 \rightarrow T^2$ définie par : $f_0(x, y) = ((x + \alpha) \bmod 1, y)$.

Comme aucune orbite de f_0 n'est dense alors (f_0, λ) n'est pas ergodique.

- Considérons l'équation cohomologique suivante :

$$u(x + \alpha) - u(x) = \varphi(x). \tag{4.1}$$

Non ergodicité : Si l'équation (4.1) admet une solution mesurable u pour un certain α et une certaine fonction φ alors les deux systèmes (T^2, f_0, λ) et (T^2, f, λ) sont ergodiquement équivalents. En effet, si u est une solution de (4.1) alors l'application :

$$h : T^2 \rightarrow T^2$$

$$h(x, y) = (x, y + u(x))$$

est un équivalent ergodique entre les deux systèmes (T^2, f_0, λ) et (T^2, f, λ) .

Par conséquent le système (T^2, f, λ) n'est pas ergodique.

Minimalité : on a le résultat suivant :

Si u est une solution continue pour l'équation (4.1) alors l'application

$h(x, y) = (x, y + u(x))$ est un conjugué topologique entre (T^2, f_0) et (T^2, f) .

En particulier, (T^2, f) ne peut pas être transitif.

Par conséquent, Pour montrer que (T^2, f) est minimal il est suffisant de prouver que l'équation (4.1) admet une solution mesurable u non continue pour un certain $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et une certaine fonction φ .

- Commencant en premier lieu par exprimer les fonctions φ et u par leur série de Fourier. Posons $\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$ et $u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{2\pi i n x}$.
Où u est la solution de (4.1). Alors u est déterminé d'une façon unique par :

$$b_n = \frac{c_n}{e^{2\pi i n \alpha} - 1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus, pour que u appartienne à l'espace des fonctions à carrés intégrables $L^2(\lambda)$ il faut et il suffit que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty. \quad (4.2)$$

- Afin d'assurer que φ est analytique il est suffisant d'assurer l'existence d'un $\rho < 1$:

$$|c_n| < \rho^n \text{ pour tout } n \text{ suffisamment large.} \quad (4.3)$$

En effet, dans ce cas la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ converge uniformément sur tout ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ avec $r < \rho$. En particulier sa somme sur le cercle unité coïncide avec φ et est bien analytique.

Comme on désire que φ soit réelle et d'une moyenne nulle alors posons pour cela :

$$c_0 = 0 \text{ et } c_{-n} = \overline{c_n}. \quad (4.4)$$

- Finalement, par le théorème de Fejér si u est continue alors la suite des moyennes de cesaro de la suite des sommes partielles de la série de Fourier de u converge uniformément vers u . C.à.d.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=-k}^k b_j e^{2\pi i j x} \right) \xrightarrow{\text{converge uniformément}} u(x).$$

Alors pour assurer que u est non continue il est suffisant de prendre des $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\left(\sum_{j=-k}^k b_j \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ne sera pas convergente au sens de Césaro.} \quad (4.5)$$

Par conséquent le problème est réduit à la recherche d'un $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et d'une fonction φ satisfaisant (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5).

4.3.2 Un système transitif, non mélangeant, non minimal et uniquement ergodique.

Soit $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ un espace admettant p éléments. Définissons la fonction f sur X par :

$$f(x_i) = x_{i+1}, \forall i \in \{1, \dots, p-1\}. \text{ Avec } f(x_p) = x_1.$$

- Le système dynamique (X, f) n'est pas minimal vu qu'il possède un point fixe.
- Il est transitif et non mélangeant car :

$$\theta(x_1) = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : \{f^n(x_p)\} \cap \{x_1\} = \emptyset.$$

- Il est également uniquement ergodique.

En effet, soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On a pour un point quelconque $x_j \in X$ il existe un $n_0 \in \mathbb{N} : f^{n_0}(x_j) = x_p$. Alors,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i(x_j) \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{i=0}^{n_0-1} \varphi \circ f^i(x_j) \right| + \frac{1}{n} \left| \sum_{i=n_0}^{n-1} \varphi(x_p) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\varphi(x_p)|.$$

4.3.3 Un système minimal, mélangeant et uniquement ergodique

K. E. Petersen a construit dans son article [21] un système dynamique minimal, mélangeant et uniquement ergodique. L'objectif de cette partie est de donner l'idée principale de la construction de l'exemple.

4.3.3.1 Construction de l'exemple

On définit le cycle permuté d'un bloc $A = a_1a_2\dots a_p$ par :

$$A[i] = a_i a_{i+1} \dots a_p a_1 a_2 \dots a_{p-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq p.$$

On construit une suite de blocs $A_k \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ de la manière suivante :

Soit A_i pour $i \leq k$ des blocs de $\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$, le bloc A_{k+1} est obtenu à partir de A_k en écrivant successivement les cycles permutés de A_k qui sont permis en alternance avec le bloc A_k . Sachant que les cycles permutés permis sont ceux qui ne représentent aucune apparence du bloc A_i dans A_k pour $i < k$.

Par la suite, on désigne avec :

A_k : un bloc de $\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$.

$U(k)$: l'ensemble des positions de A_k comptées de la gauche qui sont permis comme point initial pour les cercles permutés de A_k .

$m_k = \text{card}(U(k))$.

$L_k =$ Longueur de A_k

E_k : Un bloc de longueur L_k dont les composantes sont des 0's sauf la première qui vaut 1.

Définissons $A_0 = 101$ et $B_0 = 111$. On a $U(0) = \{1, 2, 3\}$, $m_0 = 3$.

Assumons que $A_k, U(k) = \{i_1, i_2, \dots, i_{m_k}\}$ avec $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{m_k}$ sont bien définis

et définissons A_{k+1} par :

$$A_{k+1} = A_k A_k [i_{m_k}] A_k \dots A_k A_k [i_2] A_k A_k [i_2] A_k \dots A_k A_k [i_{m_k}] A_k.$$

et

$$B_{k+1} = E_k B_k [i_{m_k}] E_k \dots E_k B_k [i_2] E_k B_k [i_2] E_k \dots E_k B_k [i_{m_k}] E_k.$$

Si $B_{k+1} = b_1 b_2 \dots b_{L_{k+1}}$ alors on définit $U(k+1)$ par

$$U(k+1) = \{j : 1 \leq j \leq L_{k+1} \text{ avec } b_j = 1\}.$$

On remarque que B_{k+1} est la fonction désignant les positions de A_{k+1} qui sont permis comme point initial pour les cercles permutés de A_{k+1} . C.à.d. Si 1 apparait à la $j^{\text{ième}}$ position de B_{k+1} alors $j \in U(k+1)$ et $A_{k+1}[j]$ va apparaitre dans A_{k+2} .

On aura donc :

$$A_1 = 101\ 110\ 101\ 011\ 101\ 011\ 101\ 110\ 101.$$

$$B_1 = 100\ 111\ 100\ 111\ 100\ 111\ 100\ 111\ 100.$$

$$U(1) = \{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25\}.$$

Par conséquent, $A_k, B_k, U(k)$ seront définis par induction pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Soit w_k un élément de $\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ admettant le bloc A_k comme partie centrale et 0 pour toutes les autres composantes.

Comme $L_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et que le sous bloc central de A_{k+1} est A_k donc $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w$ existe. On considère $W = \overline{\theta(w)}$.

Théorème 133 ([21], p.606) *Le système (W, σ) est mélangeant, minimal et uniquement ergodique.*

4.3.4 Un système mélangeant, minimal et non ergodique

Dans un article paru en 2000 Bassam Fayad [11] a construit un exemple d'un système dynamique sur le tore T^5 qui est mélangeant minimal et non ergodique.

L'exemple construit est basé sur le principe de construction qui est dû à Furstenberg et qui consiste à varier les paramètres d'une rotation irrationnelle sur un tore de dimension supérieur à 3.

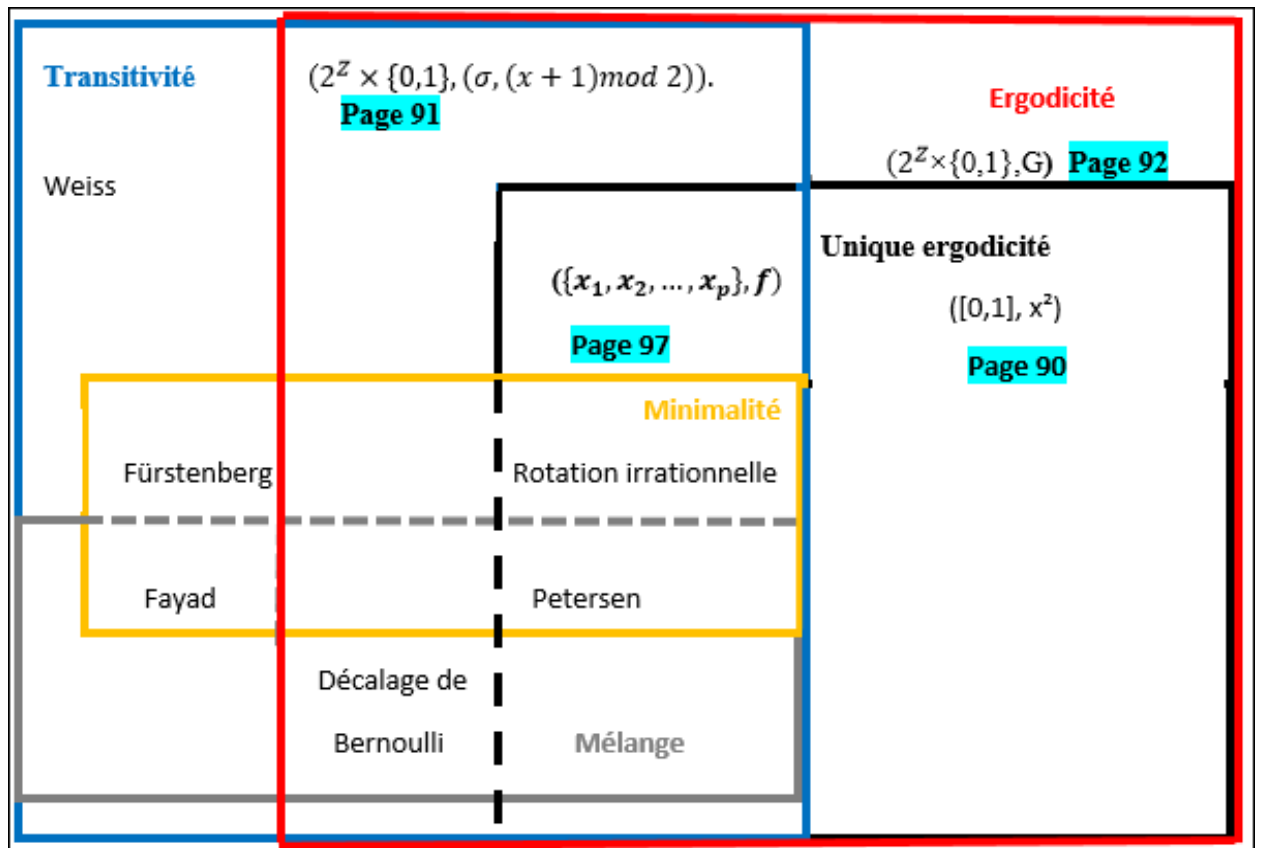


Fig. 4.9. Schéma résumant les notions du chapitre 04.

CONCLUSION

On s'intéresse dans ce mémoire à deux branches de systèmes dynamiques « dynamique topologique » et « la théorie ergodique ». Notre intérêt repose sur le parallélisme existant entre les deux théories en se questionnant sur les situations où un résultat peut passer du cadre ergodique au topologique et vice versa.

On a présenté dans ce travail les éléments de base fondant chaque théorie. En commençant par la transitivité et la minimalité arrivant à l'ergodicité et unique ergodicité qui sont des concepts qui font référence chacun dans son cadre approprié à l'impossibilité de partager l'espace en deux sous-ensembles invariants non triviaux. En abordant les notions de mélange topologique et mesurable nous avons introduit une méthode particulière de construction de systèmes dynamiques appelée 'découpage et empilage'. Cette technique permet de construire la transformation de Chacon qui est faiblement mélangeante mais pas fortement.

On a introduit ensuite une autre branche des systèmes dynamiques qui est la dynamique symbolique où notre attention était surtout concentrée sur les endomorphismes du shift surjectifs et leurs points périodiques. On a fini par établir que les points périodiques pour le shift sont ultimement périodiques pour l'endomorphisme du shift.

On a démontré ensuite un résultat topologique obtenu par un outil mesurable, en effet grâce au théorème de récurrence de Poincaré on a prouvé que si un endomorphisme du shift est surjectif et ultimement périodique alors il est périodique.

La dernière partie du mémoire est consacrée à l'étude des liens possibles entre le cadre topologique et ergodique des systèmes dynamiques discrets. On a démontré que

si le système dynamique (X, f) est muni d'une mesure qui associée à tout ouvert de X une mesure strictement positive alors dans cette situation l'ergodicité du système implique sa transitivité, de même son unique ergodicité implique sa minimalité.

En s'appuyant sur des exemples de systèmes dynamiques discrets avec des riches constructions comme ceux introduit par les mathématiciens : Weiss [30], Furstenberg [12] et Petersen [21]. On a réalisé que l'inverse n'est pas valable sauf si on rajoute au système dynamique (X, f) une autre condition de plus qu'il soit muni d'une mesure qui associe à tout ouvert de X une mesure strictement positive, que f soit un homomorphisme. Alors ces deux conditions réunies donnent l'équivalence entre l'unique ergodicité et la minimalité.

Bien que plusieurs notions ergodiques ont des duales topologiques, cette dualité se traduit difficilement en équivalence.

ANNEXE

LES PROGRAMMES UTILISÉS POUR LES DIFFÉRENTES FIGURES

On présente dans cet annexe quelques programmes que on avait utilisé pour obtenir certaines figures de ce mémoire.

A.1 Tracer l'orbite d'un point de (I, f)

```
orbite := proc(n, X0)
with(plots) :
f := x → -x :
A := plot(f, -1 ..1, discont = true) :
B := plot(x, x = -1 ..1) :
G := {A, B} :
T := X0 :
for i from 1 to n do
G1 := plot([T, f(T)], [f(T), f(T)], color = red) :
G2 := plot([f(T), f(T)], [f(T), f(f(T))], color = red) :
G := G union {G1, G2} :
T := f(T) :
od :
display(G);
end proc;
```

Fig. A.1. Programme Maple permettant de tracer une orbite.

Remarque 134

À l'intérieur de ce programme la fonction f vaut $-x$, mais en changeant les données on pourra tracer l'orbite de n'importe quel point pour n'importe quelle fonction définie sur un intervalle.

A.2 Règle majorité

```

Majority := proc(L, n)
local M, i, j, k, S;
M := Matrix(n + 1, nops(L), L);
i := 2;
while (i ≤ n + 1) do
for j from 2 to (nops(L) - 1) do
S := 0;
for k from (j - 1) to (j + 1) do
if M[i - 1, k] = M[i - 1, j] then S := S + 1 : fi;
end;
if S ≥ 2 then M[i, j] := M[i - 1, j];
else M[i, j] := (M[i - 1, j] + 1) mod 2 : fi;
od;
if M[i - 1, 1] = M[i - 1, nops(L)] then S := 1; else S := 0 : fi;
for k from 1 to 2 do
if M[i - 1, k] = M[i - 1, 1] then S := S + 1 : fi; od;
if S ≥ 2 then M[i, 1] := M[i - 1, 1] else M[i, 1] := (M[i - 1, 1] + 1) mod 2 : fi;
if M[i - 1, nops(L)] = M[i - 1, 1] then S := 1; else S := 0 : fi;
for k from (nops(L) - 1) to nops(L) do
if M[i - 1, k] = M[i - 1, nops(L)] then S := S + 1 : fi; od;
if S ≥ 2 then M[i, nops(L)] := M[i - 1, nops(L)]; else M[i, nops(L)] := (5 M[i - 1, nops(L)] + 1) mod 2 : fi;
i := i + 1 : end;
M;
end;

```

Fig. A.2. Programme Maple pour le règle majorité.

A.3 Digramme espace temps du décalage


```

Decalage := proc(L, n)
local i, M, j;
M := Matrix(n + 1, nops(L), L, fill = 3) :
i := 2 :
while i ≤ ( n + 1 ) do
for j from 1 to ( nops(L) - 1 ) do
M[i, j] := M[i - 1, j + 1] :
end:
M[i, nops(L)] := M[i - 1, 1] :
i := i + 1 :
end; M;
end proc:

```

Fig. A.3. Programme Maple pour le décalage.

A.4 Règle produit

```

Produit := proc(L, n)
local j, i, M, G, r;
M := Matrix(2, nops(L), L, fill = 3) :
r := 1 : i := 2 :
while (( r = 1 ) and ( i ≤ n )) do
M := Matrix(i, nops(L), M, fill = 2) :
G := { } :
for j from 1 to ( nops(L) - 1 ) do
M[i, j] := M[i - 1, j] · M[i - 1, j] · M[i - 1, j + 1] :
G := G union { M[i, j] } :
end:
M[i, nops(L)] := M[i - 1, nops(L)] · M[i - 1, 1] :
G := G union { M[i, nops(L)] } :
if ( evalb( 1 in G ) = false ) then break:fi:
i := i + 1 :
end:
M;
end:

```

Fig. A.4. Programme Maple pour la règle produit.

Remarque 135

Toutes les figures du mémoire sont réalisées grâce aux logiciels Maple et Word. Sauf la figure 1.4 (Chat d'Arnold) qui est tirée du Web.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Akin, J. Auslander and K. Berg, *When is a transitive map chaotic? in : Convergence in ergodic theory and probability*, eds de Gruyter (1996), Berlin-New York, 25–40.
- [2] L. Barreira and C. Valls, *Dynamical systems : An introduction*, Universitext, 223, Springer-Verlag, London, 2013.
- [3] R. Bhattacharya and E. C. Waymire, *Kolmogorov's extension theorem and Brownian motion*, A basic course in Probability theory 178 (2016), 167-178.
- [4] R. V. Chacon, *Weakly mixing transformations which are not strongly mixing*, Proc, Amer, Mathematical Society 22 (1969), 559-562.
- [5] W. Chen, *The notion of mixing and rank one examples*, Math Uchicago edu (2015), Chicago, 1-26.
- [6] Y. Coudène, *Ergodic theory and dynamical systems*, Universitext, EDP-Sciences, Springer-Verlag, London, 2016.
- [7] T. De La Rue, *Mélange Fort et Mélange Faible*, [En ligne], Cours de master 2, MFA, Rouan, 2015-2016. Disponible sur : [http ://delarue.perso.math.cnrs.fr/te.html](http://delarue.perso.math.cnrs.fr/te.html). (01/07/2021).
- [8] R. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2^e éd. Addison-Wesley-Publishing-Company, New York, 1989.
- [9] M. Einsiedler and T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, 256, Graduate Texts in Mathematics, Springer, London, 2011.
- [10] F. Elie, *Des lois de Kepler sur le mouvement des planètes à la loi de gravitation de Newton*, French governmental institution, France, 1-5.
- [11] B. R. Fayad, *Topologically mixing and minimal but not ergodic : Analytic Transformation on T^5* , Mathematical society 31 (2000), 277-285.
- [12] H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformation of the torus*, American journal of Mathematics 83 (oct., 1961), n°4, 573-601.
- [13] K. Gelfert and D. Kwietniak, *On density of ergodic measures and generic points*, Cambridge university press 38 (2016), n°5,745-767.
- [14] C. Gilan, *La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles*, La france mathématique, Cahiers d'histoire et de Philosophie des sciences (1991), 215-242.
- [15] G. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems*, Mathematical systems theory 4 (1969), n°3, 320–375.

- [16] R. A. Holmgren, *A first course in discrete dynamical systems*, Universitext, Springer-Verlag, U.S.A, 1991.
- [17] P. Kurka, *Topological and Symbolic Dynamics*, Cours spécialisés, Société mathématiques De France, n°11, Institut Henri-Poincaré, Paris, 2003.
- [18] F. P. Miller and others, *Théorie ergodique : Hypothèse ergodique, Ludwig Boltzmann, Théorie cinétique des gaz, Système dynamique, Théorie du chaos, Système dynamique mesuré*, Alphascript Publishing 30 (2010), 1-68.
- [19] T. K. S. Moothathu, *Studies in topological dynamics with emphasis on cellular automata*, Departement of Mathematics and Statistics school of MCIS, University of HyderAbad, HyderAbad, 2006.
- [20] J. Moreira, *MA427 Ergodic Theory : Course notes*, [En ligne], Mathematics institute, University of Warwick, 2012-2013. Disponible sur : https://homepages.warwick.ac.uk/~maslav/Teaching/warwick_ergodic_notes.pdf. (01/07/2021).
- [21] K. E. Petersen, *A topological strongly mixing symbolic minimal set*, American Mathematical Society 148 (1970), 603-612.
- [22] M. Pollicot and M. Yuri, *Dynamical systems and ergodic theory*, London Mathematical Society Student Texts, 40, C.U.P, Cambridge, 1998.
- [23] A. Quas, *Ergodicity and mixing properties*, Encyclopedia of complexity and systems science 2918-2933 (2009), 225-240.
- [24] R. Robert and Phelps, *Theorems of Krein Milman type for certain convex sets of functions operators*, Annales de l'institut Fourier 20 (1970), n°2, 45-54.
- [25] S. M. Samuels, *The Radon-Nikodym theorem as a theorem in probability*, The american mathematical monthly 85 (1978), 155-165.
- [26] C. E. Silva, *Invitation to ergodic theory*, Student mathematical library, 42, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.
- [27] M. Viana and K. Oliveira, *Foundations of ergodic theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, 151, C.U.P., Cambridge, 2016.
- [28] C. Walkden, *MAGIC010 Ergodic Theory*, [En ligne (page personnelle)], University of Manchester, Oxford road. Disponible sur : <https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/charles.walkden/magic/default.htm>. (07/07/2021).
- [29] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, 79, Springer, Berlin, 1982.
- [30] B. Weiss, *Topological transitivity and ergodic measures*, Mathematical systems theory 5 (1970), n°1, 71-75.

RÉSUMÉ

"La dynamique topologique" et "La théorie ergodique" deux branches des systèmes dynamiques qui étudient leur évolution au fil du temps en se moyennant par des outils topologiques et mesurables respectivement. Elles décrivent des résultats différents mais qui sont presque similaires. Ce mémoire du titre "**Liens entre le cadre topologique et ergodique des systèmes dynamiques discret**" a pour objectif la mise en œuvre de ce parallélisme existant entre les différents concepts les concernant.

On a présenté dans ce travail une introduction aux différentes notions concernant chaque théorie où notre attention est surtout concentrée sur la transitivité, ergodicité, minimalité et unique ergodicité d'un système dynamique discret, tout en introduisant quelques notions basiques en dynamique symbolique.

On a prouvé un résultat topologique obtenu par un outil mesurable, en effet on a montré grâce au théorème de récurrence de Poincaré que les endomorphismes du shift ultimement périodiques et surjectifs sont périodiques.

On a cité ensuite quelques résultats liant les différents concepts abordés dans ce mémoire grâce à quoi on a fini par conclure que l'équivalence que ce soit entre la transitivité et ergodicité ou entre la minimalité et unique ergodicité ne peut pas avoir lieu malgré leur similarité. Par contre sous certaines conditions de plus vérifiées par le système dynamique certaines implications restent valables. Notre étude est appuyée par des exemples de systèmes dynamiques avec des riches structures comme ceux introduit par les mathématiciens : Wiess, Furstenberg et Petersen.