

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université A.MIRA de Bejaïa Faculté des Sciences exactes

Département de Physique
Mémoire

Présenté par : ASSOUL Kenza et ADEL Amani

En vue de l'obtention du diplôme de Master 2 en physique

Spécialité : dynamique des fluides et énergétique

Thème

Etude des ballotements d'un fluide parfait dans un réservoir
Rectangulaire en présence d'un fond incliné

Soutenu le 29 Juin 2022

a huit clos devant le jury suivant :

Président : M^r Mohamed Meziani Abdelkader MCA.

Examinatrice : M^{me} Amatousse Nawel professeure.

Encadreur : M^r Meziani Bachir professeur.

Université A. MIRA de Bejaïa, Juin 2022

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été entièrement réalisé au sein du département de Physique de l'Université de Bejaia.

Nous remercions tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclairé le bon chemin.

Nous remercions vivement l'encadreur du mémoire, Professeur B. MEZIANI de notre Université, à qu'il nous exprimons également toute notre gratitude, pour avoir proposé ce sujet, mais surtout pour avoir encadrés et guides, pour son soutien et ses multiples coups de main.

Nos remerciements s'adressent également à Monsieur Mohamed Meziani Abdelkader d'avoir bien voulu présider le jury de soutenance.

Nous remercions Madame Amatousse Nawel pour son contribution à l'évaluation de cetravail. Nos remerciements vont également à tous nos proches amis de la Faculté de Physique pour leur amitié et disponibilité.

Finalement, nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à nos familles et à tous nos proches pour leur inestimable affection, leurs soutiens et leurs encouragements sans cesse renouvelés. A tous ces derniers, nous exprimons notre reconnaissance et notre profonde gratitude.

Résumé

Les fluides qui remplissent partiellement ou totalement des réservoirs, dans les processus industriels, sont soumis à des forces qui induisent un mouvement au sein des réservoirs, ce mouvement appelé ballonnement est caractérisé par des fréquences et des modes propres. Dans les installations industrielles, d'autres effets apparaissent et se superposent aux effets induits par le mouvement du fluide dans le réservoir.

Dans ce travail, l'objectif est de se familiariser avec les phénomènes du ballonnement des fluides dans des réservoirs quelconques et les réservoirs de géométrie rectangulaire avec un fond normal puis les réservoirs rectangulaires avec un fond faiblement incliné.

Nous commencerons par l'analyse des différents travaux réalisés sur le sujet. Puis nous allons exposer les équations qui régissent le mouvement du fluide à surface libre dans un réservoir quelconque, dans un réservoir rectangulaire avec un fond normal et dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné. Par la suite nous allons résoudre les équations analytiquement en utilisant la théorie linéaire et finalement nous allons exposer les résultats sous forme des graphes et les interpréter.

Abstract:

Fluids which partially or totally fill reservoirs, in industrial processes, are subjected to forces which induce a movement within the reservoirs; this movement called sloshing is characterized by eigenfrequencies and natural modes. In industrial installations, other effects appear and are superimposed on the effects induced by fluid movement in the reservoir.

In this work, aims is to familiarize with the phenomena of fluid sloshing in any tanks and in tanks of rectangular geometry with a normal bottom then in rectangular tanks with a slightly inclined bottom.

We will begin by analyzing various works carried out on the subject. We will, then, expose the equations which govern fluid movement with free surface in an unspecified tank and in a rectangular tank with a normal bottom then in a rectangular tank with a slightly tilted bottom. Subsequently we will solve these equations analytically using the linear theory and finally we will expose results in the form of graphs and interpret them.

Notations physique

$O - xyz$: Coordonnées cartésiens.

L : Longueur du réservoir rectangulaire.

P : Pression du fluide.

g : Accélération de gravite.

\vec{V} : Le champ de vitesse.

u : La composante de la vitesse suivant x .

v : La composante de la vitesse suivant z .

η : L'élévation de la surface libre.

w_n : fréquence propre.

h : Le taux de remplissage.

P_a : Pression atmosphérique.

ρ : Masse volumique du fluide.

σ : Coefficient de tension superficielle.

α_n : Amplitude d'onde initiale.

φ : Potentiel des vitesses.

kn : Nombre d'onde dans le cas d'une géométrie rectangulaire bidimensionnelle.

C : La célérité de l'onde.

h_x : La variation de l'inclinaison par rapport a x

h'_x : La hauteur de taux de remplissage variante suivant x

h_0 : La hauteur de l'inclinaison

Table de matière

Introduction générale	1
Chapitre 1 : Etude bibliographique.....	4
Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire	
2.1 Introduction.....	12
2.2 Les équations générales de ballotement dans un réservoir quelconque.....	12
2.3 Hypothèses	13
2.4 Conditions aux limites.....	15
2.5 Equations dans le cas d'un réservoir rectangulaire	17
2.6 Expression de la courbure moyenne en coordonnées cartésiennes	18
2.7 Conditions cinématiques, dynamiques et les conditions aux limites dans le cas gravitaire et gravito-capillaire.....	19
2.8 Théorie linéaire	20
2.9 Résolution des équations du mouvement	21
2.10 Résultats et discussion.	25
2.11 Effet de la tension superficielle.....	36
2.13 Conclusion	37
Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné	
3.1 Introduction	38
3.2 Equations du mouvement	38
3.3 Hypothèses	38
3.4 Conditions cinématiques et dynamiques à l'interface $\Gamma(x,t)$	40
3.5 Expression de la courbure moyenne en coordonnées cartésiennes	41

Table de matière

3.6 Conditions cinématiques, dynamiques et les conditions aux limites dans le cas gravitaire et gravito- capillaire	42
3.7 Linéarisations des équations du mouvement	43
3.8 Expression de la courbure linéarisé	44
3.9 Résolution des équations du mouvement	44
3.10 Résultats et discussions	48
3.11 Effet de la profondeur	59
3.12 Conclusion	60
Conclusion générale	61

Table des figures

Figure 2.1 –Un réservoir de géométrie quelconque.

Figure 2.2 –Un réservoir de géométrie rectangulaire.

Figure2.3.1 -Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.001$.

Figure2.3.2 -Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$.

Figure2.3.3 -Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$.

Figure2.3.4 -Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 1$.

Figure2.4.1 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.001$.

Figure2.4.2 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$.

Figure2.4.3 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.1$.

Figure2.4.4 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 1$.

Figure2.5.1 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.001$.

Figure2.5.2 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$.

Figure2.5.3 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.1$.

Figure2.5.4 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 1$.

Table des figures

Figure2.6.1 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 0.001$.

Figure2.6.2 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 0.01$.

Figure2.6.3 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 0.1$.

Figure2.6.4 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 1$.

Figure 3.1 – Un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné.

Figure3.2.1-Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage hx . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma= 0.01$ et $x=0$.

Figure3.2.2-Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage hx . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma= 0.01$ et $x=3$.

Figure3.2.3-Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage hx . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma= 0.01$ et $x=6$.

Figure3.2.4-Variations des fréquences propres dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage hx . Pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma= 0.01$ et $x= 10$.

Figure3.3.1 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x=0$.

Figure3.3.2 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x =3$.

Figure3.3.3 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x=6$.

Figure3.3.4 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x=10$.

Figure3.4.1 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma= 0.01$ et $x=0$.

Table des figures

Figure3.4.2 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 3$.

Figure3.4.3 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 6$.

Figure3.4.4 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 10$.

Figure3.5.1 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 0$.

Figure3.5.2 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 3$.

Figure3.5.3 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 6$.

Figure3.5. : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 10$.

Introduction générale

Dans notre vie on est entouré par plusieurs phénomènes de vibrations naturels et industriels tels que : les navires, les ondes électromagnétiques, les ondes sonores et câble électrique.

Dans notre étude on s'intéresse au mouvement du liquide à surface libre appelé le ballotement. Ces phénomènes sont étudiés dans beaucoup de problèmes de technologie tels que l'oscillation de l'eau dans un réservoir en raison de tremblement de terre, ces vibrations induisent des dommages pour les structures concernées. Dans d'autres situations, le fluide est à l'intérieur de la structure : tuyauterie mise en vibration par l'écoulement interne, réservoir subissant l'effet de mouvement de la surface libre du liquide contenu.

Le ballotement désigne les petits mouvements d'un liquide contenu dans un réservoir soumis à un mouvement accéléré et présentant une surface libre. Lorsque le réservoir est soumis à des vibrations extérieures, celles-ci donnent naissance à des vagues se propageant à la surface du liquide, hors cas particuliers (parois spécialement construites pour absorber les ondes) les vagues se réfléchissent sur les parois et forment des ondes stationnaires, ce qui distingue le ballotement du mouvement général des vagues en milieu ouvert. Lorsqu'on considère les mouvements du réservoir dans son ensemble (sa structure et le liquide qu'il contient), le ballotement du liquide conduit donc à l'apparition de résonances, appelées mode du ballotement.

Il y a en principe un nombre infini de tels modes marqués par la déformation de la surface libre. Cependant dans plusieurs applications le nombre de modes qui apparaissent est fini. La connaissance de ces modes et des fréquences propres jouent un rôle important dans les processus industriels ou les fréquences du contrôle sont fixées afin d'éviter les risques d'endommagements. C'est un problème mathématique difficile à résoudre analytiquement, car les conditions aux limites à la surface libre ne sont pas linéaires et la position de cette dernière varie avec le temps et a priori inconnue. En fait, les solutions analytiques sont limitées aux formes géométriques régulières du réservoir telles que cylindriques et rectangulaires. C'est pour quoi, les techniques analytiques pour prévoir le ballotement de grand-amplitude ne sont pas encore complètement développées. Le traitement analytique des oscillations d'une surface libre d'un liquide, confiné dans un réservoir partiellement rempli, donne les fréquences propres et les formes des modes correspondants. Les fréquences propres du liquide apparaissent dans la condition de surface libre combiné (cinématique et dynamique) plutôt que dans l'équation de continuité (Laplace).

Introduction générale

Le problème du ballonnement des liquides dans les réservoirs fixes ou mobiles a suscité beaucoup de préoccupations aux physiciens, aux mathématiciens, aux ingénieurs aérospatiaux, civils, nucléaires, et aux concepteurs des camions citernes des véhicules et navires. Les ingénieurs de génie civils et les sismologues avaient étudié les effets du ballonnement de liquide sur les grands barrages et réservoirs d'huile soumis aux excitations sismique.

Depuis le début des années soixante, le problème du ballonnement des liquides a été la préoccupation principale des ingénieurs aérospatiaux. Leurs études portent sur le ballonnement des ergols dans les réservoirs qui peuvent induire une instabilité du pilotage (efforts exercés sur les parois du réservoir par les ondes excitées) et une augmentation ou une chute de pression, échauffement des ergols. Ainsi, de nouveaux domaines de recherche ont émergé

Dans les années 70 et le début des années 80, le problème du ballonnement est devenu une question importante dans la conception des porteurs de gaz naturel liquéfiés (G N L). Quelques méthodes numériques ont été mises en œuvre pendant ce temps. Beaucoup de résultats intéressants ont été introduits pour le problème du ballonnement bidimensionnel et tridimensionnel. Récemment, quelques résultats de calcul, en utilisant les programmes de simulation d'écoulement universel, sont enregistrés pour l'analyse de ce phénomène. Cependant, La stabilité dynamique des navires citernes, des porteurs de gaz naturel liquéfié (G N L) sont des problèmes d'intérêt courant aux concepteurs de tels systèmes.

Le premier objectif de ce manuscrit est la maîtrise des phénomènes du ballonnement et de résoudre analytiquement les équations non linéaires régissant le mouvement de ballonnement d'un fluide confiné dans des réservoirs de géométries rectangulaires avec un fond normal puis avec un fond incliné soumis aux forces de rappels de type gravitaires et capillaires. Le second objectif est le plus important dans cette recherche est de découvrir l'influence ou l'effet de la tension superficielle et de la capillarité sur l'évolution de la surface libre et aussi l'influence de la profondeur sur l'amplitude.

Le manuscrit est réparti sur les trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique où nous commençons par l'analyse et la présentation des différents travaux réalisés dans cette discipline. Cette revue bibliographique revient sur les premiers travaux réalisés sur le ballonnement d'un liquide dans des réservoirs rectangulaires avant de citer les études faites sur la théorie linéaire et non-linéaire.

Introduction générale

Le chapitre 2 est consacré aux équations qui régissent le mouvement d'un fluide à surface libre dans un réservoir quelconque. Nous adoptons quelques hypothèses pour simplifier le problème en supposant le fluide parfait, incompressible, en écoulement irrotationnel. Nous présentons l'équation de Laplace et les conditions aux limites sur les frontières ensuite nous donnons les équations qui régissent le mouvement dans un réservoir rectangulaire.

Après, on passe à la condition de linéarité, cette dernière condition nous permet de linéariser les équations autour d'un état d'équilibre et d'établir ainsi la relation de dispersion.

Cette relation relie les pulsations ω à leurs vecteurs d'onde k ($\omega = \omega(k)$). La détermination de celle-ci conduit au calcul d'un spectre de valeurs propres, ce dernier étant discret dans le cas considéré et pour la géométrie étudiée ; Les fréquences propres, l'évolution spatiale et temporelle de la surface libre sont analysées. La détermination des modes propres correspondants, conduit à la détermination de la forme de la surface libre.

Dans le chapitre 3, nous étudions le problème du ballonnement d'un fluide parfait incompressible dans un réservoir rectangulaire dans le cas d'un fond faiblement incliné.

Le système d'équations régissant le problème est présenté et une solution, basée sur la méthode de séparations des variables puis nous allons présenter les résultats et les analyser pour déterminer les caractéristiques de ballonnement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné.

Ce travail sera clôturé par une conclusion générale qui résume les résultats importants.

Chapitre 1 :
Étude bibliographique.

Chapitre 1 : étude bibliographique

Ce chapitre est consacré à l'étude bibliographique des travaux réalisés sur la dynamique du ballonnement des fluides contenus dans un réservoir. Un intérêt particulier sera porté sur les méthodes analytiques et numériques traitant la théorie linéaire et non linéaire de ballonnement dans des réservoirs rectangulaires soumis à la capillarité et au champ de gravité.

Pour une revue historique plus détaillée des études portant sur le ballonnement des fluides on pourra se référer au livre d'Ibrahim (2004), dont on trouve une analyse détaillée sur cette étude. Ibrahim (2004) a étudié la théorie linéaire et non linéaire, ainsi que l'interaction linéaire et non linéaire du ballonnement d'un fluide avec les structures élastiques et la dynamique d'un fluide dans des réservoirs en rotation et le ballonnement en microgravité.

Pour traiter ce problème, on doit passer par la théorie linéaire pour simplifier les équations du mouvement afin de les résoudre analytiquement, en supposant que les équations régissant le mouvement du ballonnement d'un fluide dans une cuve peuvent être linéarisées autour d'un état d'équilibre statique.

Cette théorie est basée sur l'estimation du mouvement de la surface libre du liquide, les forces et les mouvements hydrodynamiques résultant.

Les solutions explicites sont possibles uniquement pour des cas particuliers tels que les cuves cylindriques et rectangulaires.

Elle est appropriée pour déterminer les fréquences propres et l'amplitude de l'onde de la surface libre sous une excitation extérieure ainsi que la pression hydrodynamique, les forces et les moments.

Par contre, la théorie linéaire est incapable de prévoir les phénomènes complexes observés expérimentalement près de la résonance et elle ne prend pas en compte les déplacements verticaux importants du centre de gravité du fluide pour les grandes amplitudes du mouvement de la surface libre, incluant le mouvement instable non plan de la surface libre lié à la rotation du diamètre nodal c'est à dire le ballonnement rotationnel et le ballonnement chaotique.

Pour traiter ces phénomènes on fait appel à la théorie d'oscillation faiblement non-linéaire pour l'analyse quantitative et la théorie moderne de la dynamique non-linéaire pour l'analyse de stabilité.

Chapitre 1 : étude bibliographique

Faraday (1831) a observé le fluide à l'intérieur d'un récipient en verre qui oscillait à la moitié de la fréquence d'excitation verticale.

Une autre série d'expériences similaires menées par Matthiessen (1868, 1870) a montré que les oscillations du fluide étaient également synchrones.

La contradiction des deux observations conduit Lord Rayleigh (1883, 1887) à réaliser une nouvelle série d'expériences avec un équipement amélioré et ses observations soutiennent les résultats de Faraday. Pendant ce temps, Mathieu (1868) a formulé ses équations, qui ont aidé Rayleigh à expliquer mathématiquement ce phénomène.

Le problème était étudié à nouveau par Lewis (1950) et Benjamin et Ursell (1954). Ils ont expliqué mathématiquement l'écart entre les observations de Faraday et de Rayleigh et les découvertes de Matthiessen. En réglant $X_0 = 0$ et Z_0 comme fonction sinusoïdale, et après linéarisation, leur analyse a conduit à un système d'équations de Mathieu. Les solutions de ce système d'équations peuvent être stables ou instables. On peut montrer que si la surface libre plane est instable, le mouvement résultant pourrait avoir une fréquence $k/2$ fois la fréquence d'excitation, Les expressions mathématiques des limites de stabilité sont bien documentées (Abramowitz et Segun, 1968). Étant donné que le mouvement pourrait avoir une demi-fréquence sous-harmonique, harmonique ou super harmonique, Faraday et Matthiessen pourraient avoir raison, cependant, les résultats expérimentaux de Benjamin et Ursell n'ont montré que des fréquences sous-harmoniques.

Sorokin (1957), Bolotin (1956), Woodward (1966), Rajappa (1970b), Goldberg (1972), Henstock et Sani (1974), et Hasegawa et al (1983) ont trouvé les domaines d'instabilité qui pourrait être légèrement réduits si l'amortissement visqueux linéaire était introduit. Brand et Nyborg (1965) ont réalisé une série d'expériences pour mesurer la valeur minimale de l'amplitude d'excitation paramétrique requise pour produire des ondes de surface à demi fréquence. Les valeurs mesurées d'excitation d'amplitude se sont avérées beaucoup plus grandes que celles prédites analytiquement. Ils ont attribué cette différence au manque de développement dans les théories précédentes du coefficient d'amortissement de la surface libre. Des efforts considérables ont été fournis par Miles (1967) et Mei et Liu (1973) pour améliorer la théorie d'amortissement prenant en compte les possibles sources de dissipation d'énergie.

En raison de certaines difficultés mathématiques liées à l'analyse de réservoirs de formes géométriques variées, Kana (1966) a mené une étude expérimentale de l'excitation paramétrique de la surface du liquide dans un secteur cylindrique et sphérique à 90° . La réponse

Chapitre 1 : étude bibliographique

liquide dans les deux conteneurs s'est avérée être essentiellement similaire à son comportement dans un réservoir cylindrique, en particulier la réponse sous-harmonique à demi-fréquence. Il était prévu que le mouvement du premier mode du liquide dans le réservoir du secteur à 90° pourrait exercer un couple net d'axe longitudinal, si les relations de phase appropriées existent dans le mouvement. Un tel couple ne peut pas se produire dans une cuve, voire dans une cuve sectorisée sous excitation latérale.

Lomen et Fontenot(1967), Woodward et Bauer (1970) ont considéré les conteneurs paraboliques et réservoirs à section annulaire à secteur, Ils ont montré que la considération de stabilité rendrait l'apparition d'harmoniques et les réponses super harmoniques très difficiles. L'influence de l'excitation paramétrique des réservoirs des véhicules spatiaux a été déterminée expérimentalement par Schoenhall et al (1967) et Névolin (1983). Un retard d'écoulement remarquable a été trouvé lorsque le niveau d'amplitude d'accélération augmente. D'autre part, le retard d'écoulement s'est avéré diminuer à mesure que la fréquence d'excitation augmente pour une amplitude d'accélération fixe. Le problème de l'excitation paramétrique d'une filature liquide a été considéré par Bauer (1989a). Les sources non traditionnelles d'excitation paramétrique comprennent forces électrostatiques et gradient convectif de température. La réponse paramétrique de l'interface entre deux liquides diélectriques sous une force électrostatique alternative a été étudiée par Reynolds (1965), Devitt et Melcher (1965), Briskman et Shaidurov (1968) et Yih (1968a, b). Leurs études ont montré que la stabilité de l'interface requies que la tension appliquée doit être suffisamment élevée pour supprimer les effets de tension de surface et l'abaisser. Pour des tensions supérieures à cette valeur critique, Reynolds indique que l'interface est instable. Des études similaires ont été menées par Raco (1968) pour déterminer la stabilité d'un jet de liquide dans un champ électrique dépendant du temps. Les effets de la fréquence et l'intensité du champ électrique sur la stabilité du jet a été déterminée à partir d'une analyse de stabilité de l'équation de Mathieu.

Gershuni et Zhukhovitskii (1963) ont découvert une résonance paramétrique appelée instabilité convective dans un corps fluide soumis à un gradient de température variant périodiquement. On a constaté que l'équilibre dépendait non seulement du gradient de température moyen, comme dans le problème de Rayleigh (1892), mais aussi de la modulation d'amplitude et de fréquence. La surface libre d'un liquide magnétique a été étudiée par Dodge et Garza (1972). Gershuni et Zhukhovitskii (1964) ont constaté que la modulation du gradient vertical de température avait pour même influence que la modulation de la vitesse angulaire de rotation du fluide en corps rigide.

Chapitre 1 : étude bibliographique

Briskman et al (1976) ont fourni une analyse plus approfondie de l'excitation paramétrique des liquides dans des vases communicants. La stabilité globale du mouvement liquide dans des conteneurs ellipsoïdes a été étudiée par Leonov et Morozov (1988).

Bessem et al (1996) ont examiné la stabilité de la surface sous excitation paramétrique à deux fréquences.

Moiseyev (1958) a proposé la théorie non linéaire pour prédire le mouvement de ballottement dans un liquide excité par balancement du réservoir rempli. Faltinsen (1974) a utilisé une théorie non linéaire pour simuler une oscillation de ballottement dans un balancement et un roulis excité.

Char. Lui et Lou (1990) ont réalisé une étude analytique linéaire pour signifier l'importance du couplage dynamique d'un liquide excité par rouleau - système de réservoir.

Waterhouse (1994) a élucidé l'importance du rapport d'aspect du réservoir (profondeur du liquide, h_s /longueur du réservoir, l) dans le domaine de la dynamique du ballottement liquide et est arrivé à sa valeur critique de 0,337.

Des études sur l'analyse modale du ballottement liquide ont été réalisées par Faltinsen et al. (2000), Faltinsen et Timokha (2001, 2002). La présence éventuelle d'harmoniques dans le système pour le h_s/l compris entre 0,1 et 1.0 a été explorée.

Plusieurs études ont été menées sur la simulation numérique du mouvement de ballottement dans des réservoirs rectangulaires excités.

Faltinsen (1978) a présenté un modèle numérique non linéaire utilisant l'intégrale aux limites soumises à une oscillation harmonique forcée.

Nakayama et Washizu (1980) ont utilisé une méthode des éléments finis pour l'étude d'un conteneur soumis à une oscillation de tangage.

Frandsen (2003) a développé un Schéma basé sur la différence et sigma - technique de cartographie de transformation pour les conteneurs excités verticalement.

Wang et Khoo (2005) ont analysé le comportement de sloshing en utilisant une approche par éléments finis soumis à des excitations en mode de balancement et ont rapporté l'effet de la fréquence de crête sur l'élévation du ballottement et la force induite.

Sriram et al (2006) ont étudié l'effet de la fréquence de crête dans l'excitation horizontale et verticale, séparément.

Frandsen (2004) a développé un schéma de différences finies pour le cas d'excitation combinée horizontale et verticale.

Chapitre 1 : étude bibliographique

Kim et al. (2003) ont examiné le comportement de ballonnement dans un réservoir rectangle utilisant un algorithme numérique basé sur le volume de fluide soumis à six degrés de liberté d'excitation.

Wu et al. (1998) ont rapporté la procédure d'éléments finis pour les degrés d'excitation de translation combinés.

La possibilité de fréquences de résonance infinies contrairement à la fréquence de résonance unique a été observée dans un seul degré de l'excitation et le comportement de démarrage imprévisible est révélé dans le degré combiné d'excitation. Cependant, les études antérieures sur l'excitation combinée du louvoiement, du roulis sont plutôt rares. Basé sur l'enquête de la dynamique de ballonnement dans les réservoirs fixes, l'oscillation de ballonnement et les forces hydrodynamiques induites ne peuvent pas émuler le scénario réel du ballonnement qui se produit dans un réservoir de ballonnement, qui flotte ou est fixé sur les corps flottants. Dès lors, une étude d'interaction est nécessaire pour comprendre l'oscillation de ballonnement et son importance sur un réservoir flottant tels que rapportés par Chen et Chiang (2000). Basé sur la théorie du potentiel linéaire, la formulation de domaine fréquentiel a été développées par différents auteurs pour étudier l'effet d'interaction [(Molin et al. (2002); Malenica et Al. (2003); Kim et al. (2003); Lee et al. (2005); Newman (2005); Zhao et al. (20012)]. Aussi, Lee et al (2007) développé un schéma de simulation dans le domaine temporel pour l'effet d'interaction. Travaux expérimentaux remarquables [Francescutto et Contento (1994); Rognebakke et Faltinsen (2001) ; Molin et al. (2002); Nam et Kim(2007)] ont exploré le comportement de réponse d'un navire flottant avec du liquide partiellement rempli à bord. Mitra et al. (2012) ont formulé une approche dans le domaine temporel et ont exploré l'interaction entre le ballonnement 3D et le flottement de navire en raison de l'action combinée des vagues, du vent et du courant.

Il est déduit de la revue de la littérature que la complétude de l'étude d'interaction entre le navire flottant et l'oscillation de ballonnement dans l'environnement marin en temps réel dépend du nombre de degrés de liberté, de paramètres d'excitation et d'environnement. En gardant à l'esprit les questions ci-dessus, la présente étude vise à étudier la dynamique de ballonnement dans un réservoir rectangulaire fixé sur un navire de type barge flottant librement sous l'excitation des ondes de faisceau. Un système de réservoir de barge avec une échelle de modèle de 1:43 a été fabriqué et les tests ont été effectués avec une vitesse d'avancement nulle de la barge. La barge a été autorisée à osciller dans trois degrés de liberté à savoir le balancement et le roulis et donc le ballonnement induit dans le réservoir de liquide en raison des mouvements de la barge. La dynamique de ballonnement dans un réservoir de liquide rectangulaire partiellement rempli sous

Chapitre 1 : étude bibliographique

excitation d'ondes régulières a été présentée par les auteurs [Nasar et al. (2008a)]. Dans la continuité de l'étude précédente, le présent article détaille les phénomènes de ballotement sous excitation d'ondes aléatoires. L'article présente le programme expérimental et détails de la mesure.

Des études récentes ont rapporté des mouvements de surface liquides libres complexes, qui se produisent en présence de conditions de résonance non linéaires telles que la résonance interne et la résonance paramétrique.

La résonance interne implique la présence d'une relation algébrique linéaire entre les fréquences propres des modes en interaction. Ces problèmes ont été étudiés par Gollub et Simonelli (1989), Simonelli et Gollub (1989), Feng et Sethna (1989), Funakushi et Inoue (1991), et de nombreux autres.

La structure désordonnée de l'écoulement à surface libre sous une amplitude d'excitation harmonique relativement grande a également été observé expérimentalement par Gollub et Meyer (1983). Les mesures ont montré une séquence de rupture de symétrie conduisant à un état chaotique. Sous excitation harmonique paramétrique, le ballotement chaotique a été expérimentalement observé par Ciliberto et Gollub (1984, 1985a, b), Gollub et Meyer (1983) et Virning et al (1988). Ils ont mené une série d'investigations expérimentales sur une couche fluide dans un réservoir circulaire avec un rapport profondeur/rayon de 0,16. Pour une telle profondeur du fluide, la fréquence propre du ballotement dépend fortement de la profondeur du fluide. Ils ont mesuré les régions d'instabilité paramétrique de deux modes de ballotement. Au-dessus des limites de stabilité, la surface du fluide oscille à la moitié de la fréquence d'entraînement dans un seul mode stable. Cependant, une autre région de compétition de modes apparue dans laquelle la surface fluide peut être décrite comme une superposition des deux modes avec des amplitudes ayant une enveloppe variant lentement. Les variations lentes peuvent être périodiques ou chaotiques. A l'intersection des deux frontières de stabilité, les deux modes oscillent simultanément.

Meron et Procaccia (1986a b) ont dérivé l'équation d'amplitude basée sur des considérations de symétrie pour fournir une base théorique aux résultats expérimentaux.

Milles (1993) a abordé certaines caractéristiques des ondes de Faraday.

Il a observé que les vagues de Faraday étaient particulièrement versatiles (Bechoefer et al, 1995 ; Bechoefer, 1996 ; Kurdolli et Golub, 1996). Ils présentent les modèles communs familiers de convection (rayures, carrés, hexagones, spirales), ainsi que motifs plus exotiques. Ces modèles incluent des triangles (Muller, 1993), des quasi-modèles (Kurdolli et al, 1998 ; Edwards et

Chapitre 1 : étude bibliographique

Fauve, 1994 ; Christiansen et al, 1992), modèles de super-réseaux (Kurdolli et al, 1998 ; Arbell, 1998 ; Wagner et al, 1999), motifs rhombiques dépendant du temps (Arbell et Fineberg, 2000a) et ondes localisées (Wagner et al, 1999 ; Arbell et Fineberg, 2000b). Miller et al (1998) ont présenté une revue sur la formation d'ondes de Faraday.

Plus récemment, il a été montré que les ondes, qui sont synchrones avec l'excitation, peut être excitée en couches minces de fluide vibrant à basse fréquence (voir, par exemple, Kumar, 1996 ; Miller et al, 1997 ; Cerda et Tirapegui, 1997).

Ils aussi se produisent dans certains fluides viscoélastiques (Wagner et al, 1999) et dans les fluides forcés périodiquement, mais avec plus d'une composante de fréquence (Edwards et Fauve, 1994 ; Beyer et Friedrich, 1995 ; Bessem et al, 1996). Pour chaque cas, il est possible de régler les paramètres de forçage pour accéder à la transition entre la réponse sous-harmonique et harmonique.

À ce point de dimension deux, les deux instabilités s'installent simultanément, mais avec des ondes spatiales différentes (Bechoefer et al, 1995 ; Bechoefer, 1996 ; Kurdolli et Golub, 1996). Miles et Henderson (1990) ont passé en revue la dynamique de l'interface sous l'influence d'une accélération harmonique.

Conclusion :

L'étude bibliographique précédente n'est pas complète. Puisqu'elle est limitée aux articles publiés sur le ballotement des fluides dans des réservoirs rectangulaire soumis au champ de gravité.

Cette étude contient les méthodes analytique (traitant la théorie linéaire et non-linéaire) et numérique.

Nous remarquons jusqu'à nos jours, de nombreux développements théoriques, numériques et expérimentaux ont exploité les différentes facettes du problème. En ensuite, la disponibilité des solutions analytiques diminue rapidement avec l'augmentation de la complexité du phénomène, le cas des réservoirs complexes, ainsi que le comportement non-linaire de la surface libre ou l'interaction du fluide avec les parois du réservoir (la structure) et l'effet de parois interne sur le ballotement dans un réservoir. En fait, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable comme d'ailleurs dans la plupart des problèmes dans lesquels intervient la physique des fluides ou l'ingénierie moderne.

L'objectif de ce travail sera l'étude des caractéristiques du ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond normal puis avec un fond faiblement incliné.

En autre, nous déterminons les fréquences et la forme du mode dans un réservoir rectangulaire avec un fond normal puis avec un fond faiblement incliné, en utilisant la théorie linéaire des ondes de gravité.

En effet, nous proposons d'abord d'examiner dans le chapitre qui suit les équations générales régissant le mouvement dans le cas d'un réservoir quelconque puis dans le cas d'un réservoir rectangulaire.

Chapitre 2 :

Ballotement dans un réservoir quelconque
et dans un réservoir rectangulaire.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-1) Introduction :

Dans ce chapitre nous exposons les équations générales régissent le mouvement d'un fluide parfait et incompressible dans un réservoir de géométrie quelconque, en utilisant les conditions dynamique et cinématique.

On termine par le système d'équations du mouvement dans un réservoir rectangulaire.

2-2) Equations générales d'un ballotement dans un réservoir quelconque :

Dans le cas général d'un réservoir fixe, le repère choisi est fixé au réservoir tel que le plan (Oxyz) coïncide avec la surface libre non perturbée, comme illustré dans la figure 2.1.

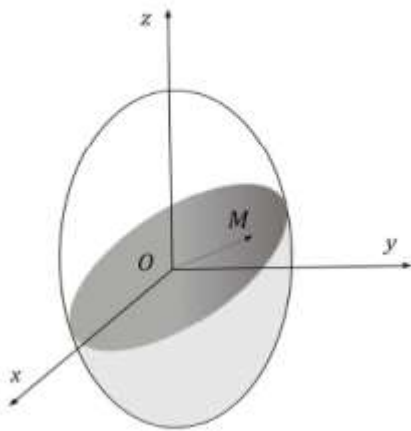


Figure 2.1 – Un réservoir de géométrie quelconque.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-2-1) Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (2-1)$$

2-2-1) Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (2-2)$$

2-3) Hypothèses :

- Fluide incompressible : $\rho = \text{constat} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

- Fluide non visqueux : $\mu = 0 \Leftrightarrow \mu \Delta \vec{V} = 0$.

- Un écoulement irrotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$, c.-à-d. le champ de vitesse dérive d'un potentiel tel que : $\vec{V} = \overrightarrow{\nabla} \phi$.

En utilisant ces hypothèses on trouve :

L'équation (2-1) s'écrit : $\text{div} \vec{V} = 0$

L'équation (2-2) s'écrit : $\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right] = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} P + \overrightarrow{\nabla}(-zg)$

Avec \vec{V} est le champ de vitesse tel que $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{k}$, P c'est le champ de pression, ρ et zg représentent respectivement la masse volumique et potentiel gravitationnel.

En utilisant la condition d'un écoulement irrotationnel :

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad (2-3)$$

Qui veut dire que les particules de fluide ne tournent pas.

Donc le champ de vitesse dérive d'un potentiel tel que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\nabla} \phi \quad (2-4)$$

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

On remplace \vec{V} par $\vec{\nabla}\phi$ dans les équations (2-1) et (2-2) :

$$\text{div}(\vec{\nabla}\phi)=0 \leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\nabla\phi) = \Delta\phi = 0$$

$$\text{div}(\vec{\nabla}\phi)=\Delta\phi.$$

Où $\Delta\phi$ est le Laplacien de ϕ .

$$\text{div}(\vec{\nabla}\phi)=\Delta\phi=0 \tag{2-5}$$

C'est l'équation de Laplace.

En utilisant l'identité suivante :

$$\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) - \vec{\nabla} \nabla \cdot \vec{V} \tag{2-6}$$

$$\text{Avec } \nabla \times \vec{V} = 0$$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) - \vec{\nabla} \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) = \vec{\nabla} \nabla \cdot \vec{V} \tag{2-7}$$

En remplaçant (2-4) et (2-7) dans l'équation (2-2) on trouve :

$$\left[\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla}(-zg)$$

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla(-zg)$$

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{\rho} P + (zg) \right] = 0 \tag{2-8}$$

Puis on intègre et on trouve :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{\rho} P + (zg) \right] = C(t) \tag{2-9}$$

avec $C(t)$ est une fonction arbitraire du temps, alors on peut rajouter un potentiel ϕ une fonction arbitraire de t qui disparaît dans la définition : $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$ en utilisant cet arbitraire pour absorber

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

la constante $C(t)$, ainsi le théorème s'écrit sous forme d'équation de Bernoulli pour un écoulement incompressible :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + \frac{1}{\rho} P + (z g) \right] = 0 \quad (2-10)$$

Cette équation détermine la pression en fonction du potentiel des vitesses.

2-4) Conditions aux limites :

On a deux types de conditions.

2-4-1) Condition cinématique :

A la surface libre $Z = \eta(x, t)$, toutes les particules qui s'y trouvent y restent.

La surface est une ligne de courant, on à $Z = \eta$.

$$Z - \eta = 0 \quad (2-11)$$

$$\frac{d(Z - \eta)}{dt} = 0 \quad (2-12)$$

$$\frac{dZ}{dt} - \frac{d\eta}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \quad (2-13)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (2-14)$$

$$\text{On à } \frac{\partial x}{\partial t} = u \text{ et } u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2-15)$$

Condition aux niveau des parois du réservoir : C'est le glissement du fluide sur les parois (la continuité des vitesses).

$$\nabla \phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2-16)$$

Avec \vec{n} est la normale à la paroi.

Chapitre 2 :

Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-4-2) condition dynamique :

La relation entre la pression atmosphérique et celle du fluide s'écrit :

$$P - P_a = -\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2-17)$$

σ : Est le coefficient de tension superficielle au niveau de l'interface qui sépare le fluide de l'air et R_1, R_2 sont les rayons de courbure principaux.

On remplace (2-17) dans l'équation (2-10) et on trouve :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi - \frac{\sigma}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + zg \right] = 0 \quad (2-18)$$

Avec $P_a = \text{constante} \rightarrow \nabla P_a = 0$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi - \frac{\sigma}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + (gz) \right] = 0 \quad (2-19)$$

Au niveau de l'interface $z = \eta$, l'équation de Bernoulli pour un écoulement incompressible s'écrit :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi - \frac{\sigma}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + (g\eta) \right] = 0 \quad (2-20)$$

Cette équation définit la pression du liquide en fonction du potentiel des vitesses.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-5) Equations du ballotement d'un fluide dans le cas d'un réservoir rectangulaire :

On considère un réservoir bidimensionnel (o x z) de profondeur h et de longueur L.

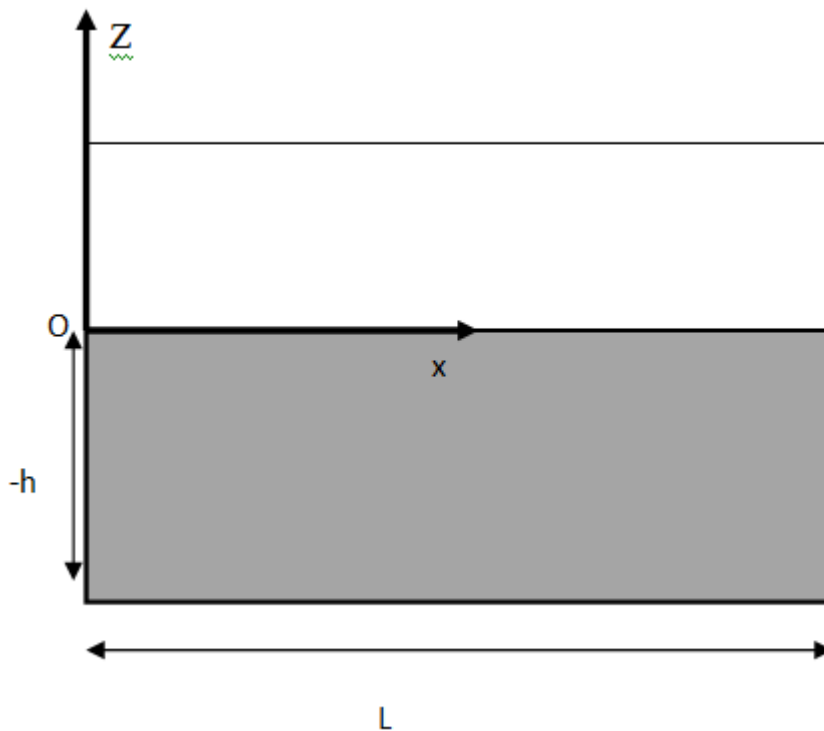


Figure 2.2 – un réservoir de géométrie rectangulaire

2-5-1) Hypothèses :

-Fluide incompressible et parfait.

- L'écoulement est irrotationnel implique que le champ de vitesse dérive d'un potentiel tel que :

$$\vec{V} = \nabla\phi(x, z, t)$$

2-5-2) Conservation de la masse :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2-21)$$

Chapitre 2 :

Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-5-3) Conditions cinématique et dynamique à l'interface $\eta(x, t)$ et les conditions aux limites :

Condition dynamique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + g \eta - \frac{\sigma}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (2-22)$$

Condition cinématique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2-23)$$

Condition aux limites :

-Sur les parois verticales :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (0, z, t) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} (L, z, t) = 0 \quad (2-24-1)$$

-Sur le fond :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} (x, -h, t) = 0 \quad (2-24-2)$$

2-6) Expression de la courbure moyenne en coordonnées cartésiennes :

$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2-25)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2-26)$$

Chapitre 2 :

Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-7) Conditions cinématiques, dynamiques et les conditions aux limites dans le cas gravitaire et gravito capillaire :

2-7-1) Cas gravitaire :

$$\Delta\phi = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 & \text{conditions cinématiques} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \nabla\phi + g\eta = 0 & \text{condition dynamique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 & \frac{\partial\phi}{\partial x} (0, z, t) = 0 \\ x = L & \frac{\partial\phi}{\partial x} (L, z, t) = 0 \quad \text{Les conditions aux limites} \\ z = -h & \frac{\partial\phi}{\partial z} (x, -h, t) = 0 \end{cases}$$

2-7-2) Cas gravito-capillaire :

$$\Delta\phi = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 & \text{conditions cinématiques} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \nabla\phi + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 & \text{condition dynamique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 & \frac{\partial\phi}{\partial x} (0, z, t) = 0 \\ x = L & \frac{\partial\phi}{\partial x} (L, z, t) = 0 \quad \text{Les conditions aux limites} \\ z = -\square & \frac{\partial\phi}{\partial z} (x, -h, t) = 0 \end{cases}$$

Chapitre 2 :

Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-8) Théorie linéaire :

Dans les cas précédents, la solution exacte du problème n'est pas connue, alors on fait appel à la théorie linéaire qui consiste à linéariser les équations de mouvement autour d'un état d'équilibre statique. Cette hypothèse nous permet de simplifier la résolution de ces équations et nous permettra de les résoudre analytiquement dans le cas des géométries simples.

Dans le cas d'un réservoir rectangulaire, où les parois sont verticales.

Sachant que les solutions analytiques sont valables pour une forme régulière de réservoir dont les parois sont droites et verticales.

2-8-1) Equation régissant le mouvement dans le cas gravitaire :

Si on néglige les termes non-linéaires $\langle \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi$ et $\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ dans les équations (2-22) et (2-23)

On trouve :

$$\text{Condition dynamique : } \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (2-27)$$

$$\text{Condition cinématique : } \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (2-28)$$

En négligeant la tension superficielle dans l'équation (2-27) puis en dérivant pour éliminer η :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2-29)$$

2-8-2) Equation régissant le mouvement dans le cas gravité capillarité :

$$\text{Condition dynamique : } \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} \right) = 0 \quad (2-30)$$

$$\text{Avec : } \frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} = \eta_{xx}$$

$$\text{L'équation (2-30) s'écrit : } \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \eta_{xx} = 0$$

$$\text{Condition cinématique : } \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (2-31)$$

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

On dérive l'équation (2-30) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta_{xx}}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2-32)$$

Puis on remplace l'équation (2-31) dans l'équation (2-32) et on trouve :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2-33)$$

2-8-3) L'expression de courbure :

L'expression de courbure moyenne linéarisée $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$C = \nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \eta_{xx} \quad (2-34)$$

2-9) Résolution des équations du mouvement :

Après avoir linéarisée les équations du mouvement on passe à la résolution de ces dernières et pour cela on fait appel à la méthode de séparation des variables afin de déterminer les fréquences et les modes propres qui donnent la déformation de la surface libre par rapport à la position d'équilibre.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-9-1) Cas gravitaire :

On a le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

On considère d'abord le cas où le mouvement est bidimensionnel. Ainsi le potentiel des vitesses ϕ qui satisfait l'équation de Laplace bidimensionnel et les conditions de glissements suivantes :

$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, et $\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$, prend la forme suivante :

$$\phi = \sum F_n \cos(K_n x) \frac{\cosh K_n(z+h)}{\cosh K_n h} \quad (2-34)$$

On a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad \sinh K_n(z+h) \text{ lorsque } z = -h \quad \sinh K_n(0) = 0 \quad (2-35)$$

Donc la condition est vérifiée.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \sin K_n x = 0 \quad (2-36)$$

$$\text{On a: } \sin 0 = 0 \quad (2-37)$$

Donc la condition est vérifiée.

$$\text{Et } \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad \sin K_n L = 0 \quad (2-38)$$

Qui veut dire que : $K_n L = n \pi$

$$k_n = \frac{n \pi}{L} \quad (2-39)$$

Avec K_n est le nombre d'onde du n-ème mode du potentiel des vitesses.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Si on suppose qu'initialement le fluide est au repos avec une perturbation initiale de la surface libre, soit :

$$\varphi = 0; \eta = \eta_0(x), t = 0. \quad (2-40)$$

Lorsqu'on remplace φ dans l'équation (2-29) on trouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} \frac{\cosh [K_n(z+h)]}{\cosh K_n h} + g \frac{\partial F_n(t)}{\partial z} \frac{\cosh [K_n(z+h)]}{\cosh K_n h} \right) \cos(k_n x) = 0 \quad (2-41)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} + g K_n F_n(t) \tanh(K_n h) \right) \cos(k_n x) = 0 \text{ en } z = 0 \quad (2-42)$$

$$\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} + g K_n F_n(t) \tanh(K_n h) = 0 \quad (2-43)$$

Donc

$$\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 F_n(t) = 0 \quad (2-44)$$

Avec ω_n est la fréquence propre de la surface libre qui est donnée par la relation de dispersion des ondes de surface, qui vaut dans le cas purement gravitaire.

$$\omega_n^2 = (g K_n) \tanh(K_n h) \quad (2-45)$$

On prend alors :

$$F_n(t) = \alpha_n \sin(\omega_n t) \quad (2-46)$$

La célérité de l'onde $c = \omega_n/k_n$, qui représente la vitesse de déplacement vertical de la déformation de la surface libre s'écrit :

$$C = \sqrt{\frac{g}{K_n} \tanh(K_n h)} \quad (2-47)$$

L'élévation de la surface libre, $\eta(x, t)$, est donnée par :

$$\eta(x, t) = \frac{-1}{g} \alpha_n \omega_n \cos(\omega_n t) \cos(K_n x) \quad (2-48)$$

Si initialement on suppose que :

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

$$\eta(x, 0) = a_n \cos(K_n x) \quad (2-49)$$

On déduit :

$$\alpha_n = -\frac{a_n g}{\omega_n} \quad (2-50)$$

Où α est l'amplitude de l'onde initiale. Finalement, la solution générale du problème de ballotement linéaire bidimensionnel pour un réservoir rectangulaire est donnée par :

$$\phi = \sum \frac{a_n g}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \cos(K_n x) \frac{\cosh [K_n(z+h)]}{\cosh K_n h} \quad (2-51)$$

$$\eta(x, t) = \sum a_n \sin(\omega_n t) \cos(K_n x) \quad (2-52)$$

2-9-2) Cas gravité capillarité :

On a le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0$$

On garde les mêmes conditions de glissements :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad \text{prend la forme suivante :}$$

$$\phi = \sum F_n \cos(K_n x) \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh K_n h} \quad (2-53)$$

Avec

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (2-54)$$

$$\text{Et à } t = 0 : \phi = 0 ; \eta = \eta_0(x) \quad (2-55)$$

En remplaçant maintenant dans l'équation suivant :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0$$

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} \cos(K_n x) + g K_n F_n(t) \cos(K_n x) \tanh(K_n h) + \right.$$

$$\left. \sum \frac{\sigma}{\rho} K_n^3 F_n(t) \tanh(K_n h) \cos(K_n x) \right) = 0 \quad (2-56)$$

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} + \left(g K_n + \frac{\sigma}{\rho} K_n^3 \right) \tanh(K_n h) F_n(t) = 0 \quad (2-57)$$

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 F_n(t) = 0 \quad (2-58)$$

Alors

$$F_n(t) = \alpha_n \sin(\omega_n t) \quad (2-59)$$

$$\omega_n^2 = \left(g K_n + \frac{\sigma}{\rho} K_n^3 \right) \tanh(K_n h) \quad (2-60)$$

Remarque : c'est la même solution dans les deux cas, la différence c'est ω_n^2 .

$$\phi = \sum \frac{a_n g}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \cos(K_n x) \frac{\cosh [K_n(z+h)]}{\cosh K_n h} \quad (2-61)$$

$$\eta(x, t) = \sum a_n \sin(\omega_n t) \cos(K_n x) \quad (2-62)$$

2-10) Résultats et discussions :

On fixe le taux de remplissage h à 0.5 puis on fait varier σ pour déterminer l'effet de la capillarité.

2-10-1) La fréquence :

Les figures ci-dessous présentent les variations des fréquences linéaires bidimensionnelles du ballotement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire sans et avec la tension superficielle en fonction de la profondeur pour $h = 0.5$ et pour des différentes valeurs de σ . Les fréquences sont représentées pour les cinq premiers modes propres, avec les tensions superficielles :

$\sigma = 0, 001, \sigma = 0, 01$ et $\sigma = 0, 1$ et $\sigma = 1$.

On présente le graphe de gravité pure en ligne continue rouge et celui de gravité-capillarité en ligne discontinue bleu.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Pour $\sigma = 0,001$

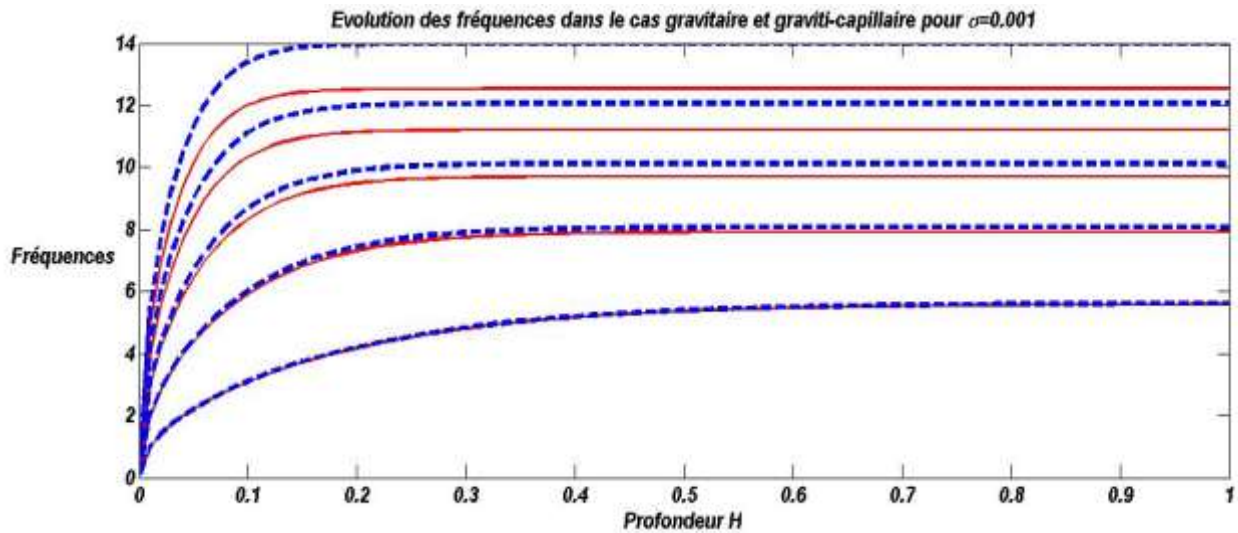


Figure2.3.1 -Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h. Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.001$. Gravité pure (Ligne continue rouge) et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $\sigma = 0,01$

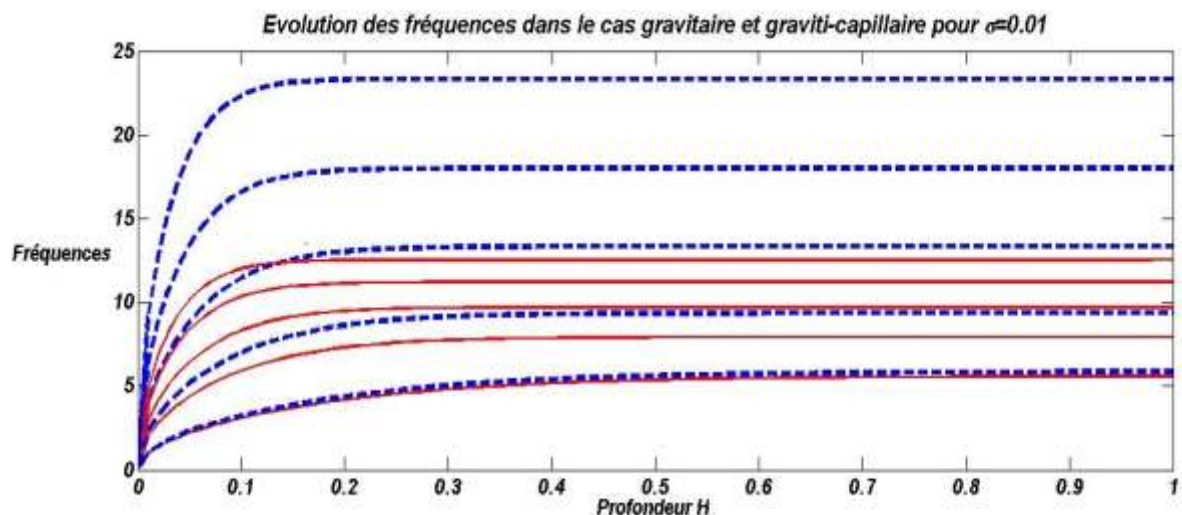


Figure2.3.2 -Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h. Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$. Gravité pure (Ligne continue rouge) et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Pour $\sigma = 0.1$

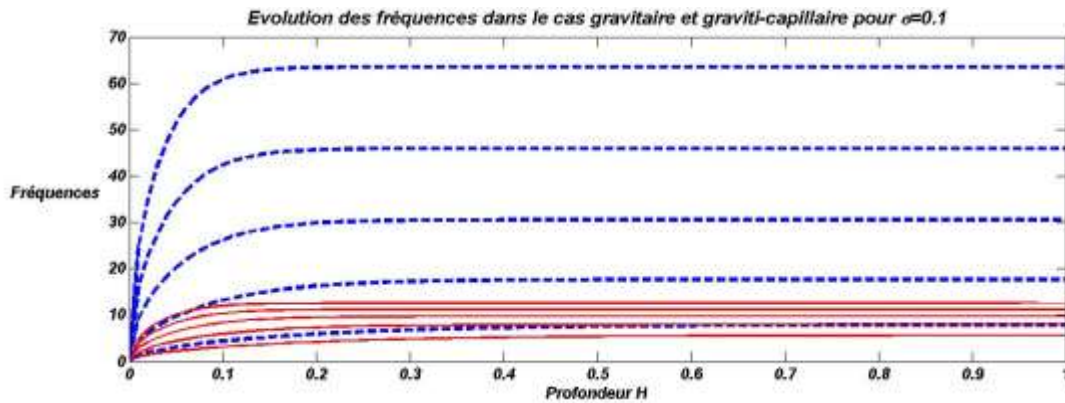


Figure2.3.3 -Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h. Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$. Gravité pure (Ligne continue rouge) et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $\sigma = 1$

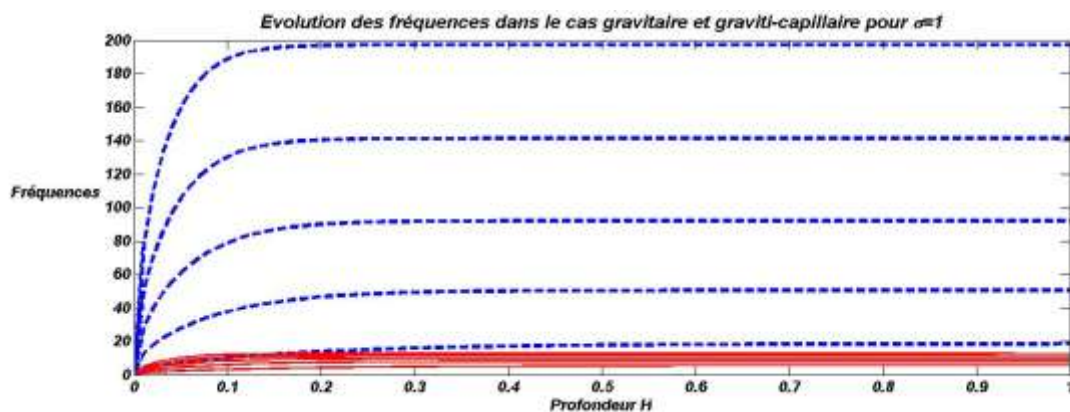


Figure2.3.4 -Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire en fonction du taux de remplissage h. Pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 1$. Gravité pure (Ligne continue rouge) et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Remarque et observation :

Dans le cas gravitaire l'amplitude des fréquences propres augmente avec l'augmentation de la hauteur H puis se stabilise, et les courbes dans les quatre figures sont les mêmes.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Dans le cas gravito-capillaire On remarque que l'augmentation de la tension superficielle fait augmenter les fréquences propres.

2-10-2) l'évolution temporelle :

Les graphes suivants présentent l'élévation de la surface libre en fonction du temps à la position x pour $h = 0.5$ et pour les Cinq premiers modes du ballotement ou $n = 1, 2, \dots, 5$ avec des différentes valeurs de sigma telles que $\sigma = 0.001, \sigma = 0.01, \sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$.

On présente le graphe de Gravité pure en Ligne continue rouge et celui de gravité-capillarité en ligne discontinue bleu.

Pour $\sigma = 0.001$

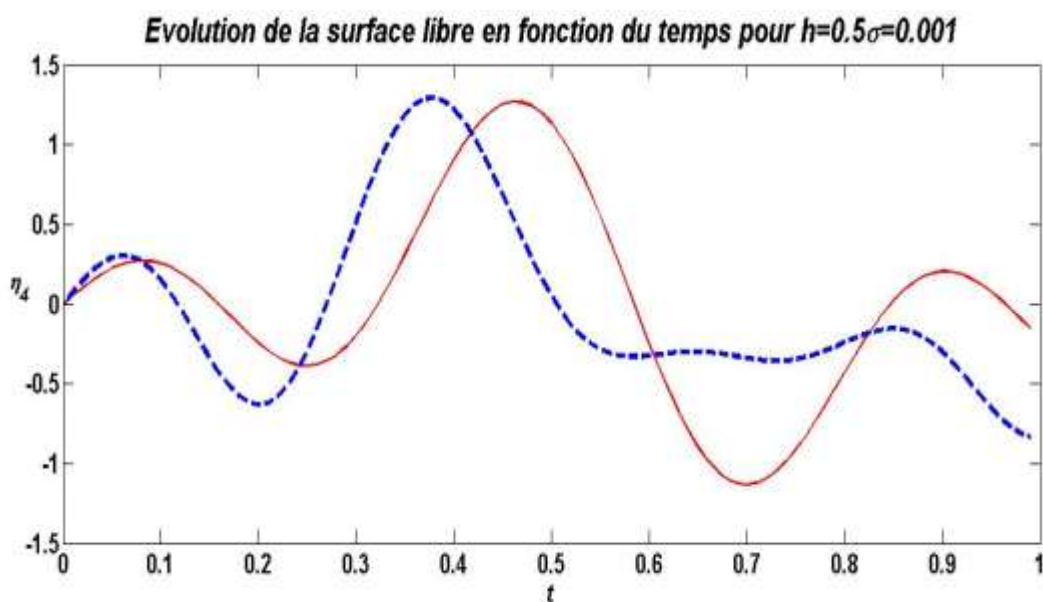


Figure 2.4.1 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.001$.

Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Pour $\sigma = 0.01$

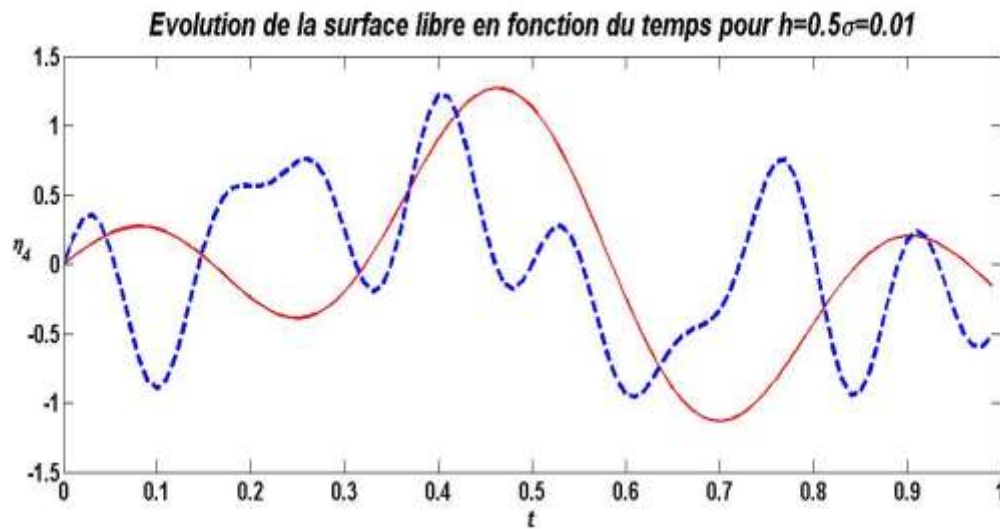


Figure 2.4.2 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $\sigma = 0.1$

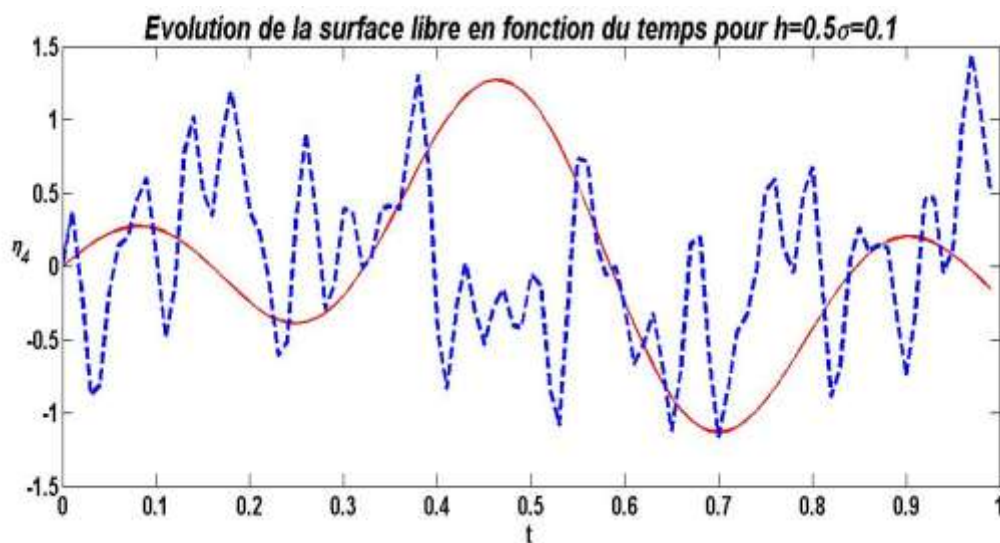


Figure 2.4.3 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$,

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

$n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.1$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $\sigma = 1$

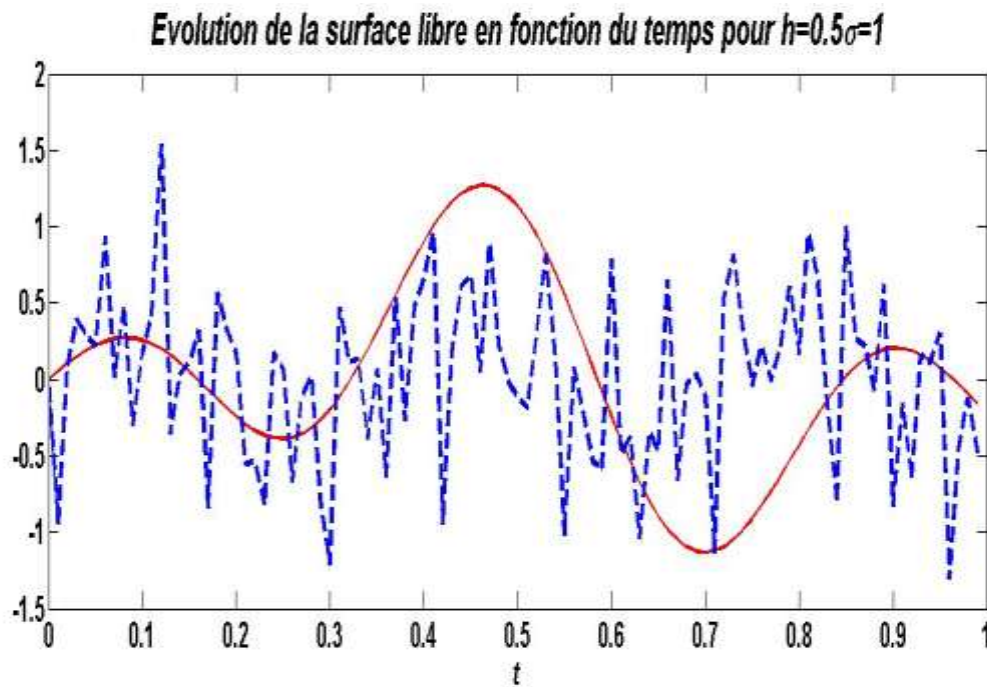


Figure2.4.4 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 1$.

Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Remarque et observation :

Dans le cas gravitaire on remarque que les courbe restent les mêmes par contre dans le cas gavitocapillaire lorsque sigma augmente on remarque un rétrécissement de la période T des ondes ainsi une augmentation du nombre d'onde, et une augmentation de l'amplitude.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-10-3) L'évolution spatiale :

Les graphes ci-dessous présentent l'évolution spatiale de la surface libre en fonction de la position x pour $h = 0.5$ et pour les Cinq premiers modes du ballotement ou $n = 1, 2, \dots, 5$ avec des différentes valeurs de sigma tel que : $\sigma = 0.001, \sigma = 0.01, \sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$.

On présente le graphe de Gravité pure en Ligne continue et celui de gravité-capillarité en ligne discontinue.

Pour $\sigma = 0.001$

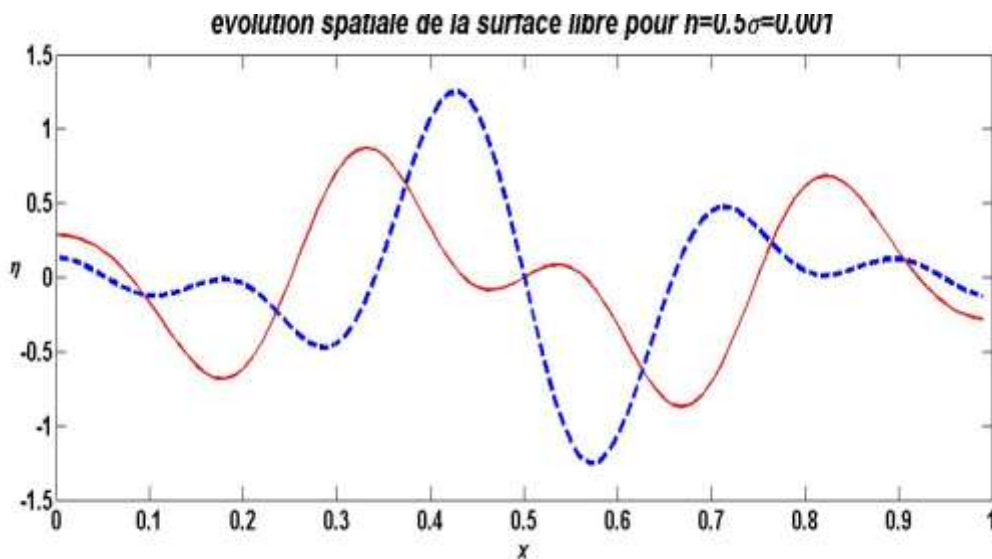


Figure2.5.1 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma=0.001$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Pour $\sigma = 0.01$

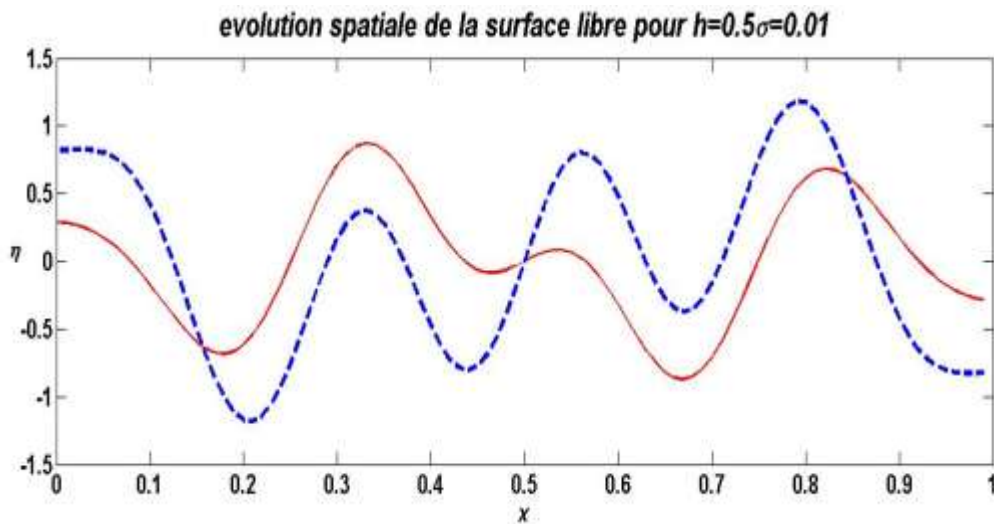


Figure2.5.2 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $\sigma = 0.1$

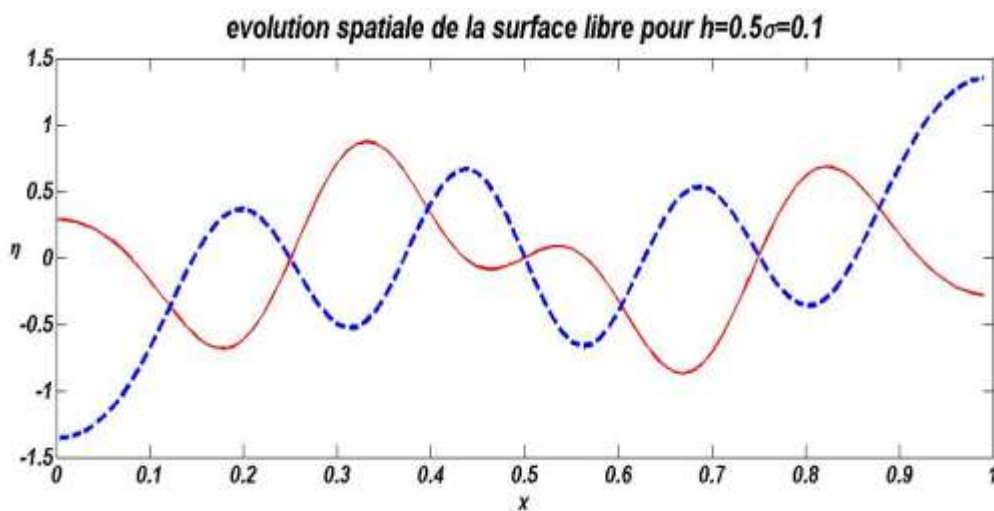


Figure2.5.3 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$,

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

$n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.1$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité
Capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $\sigma = 1$

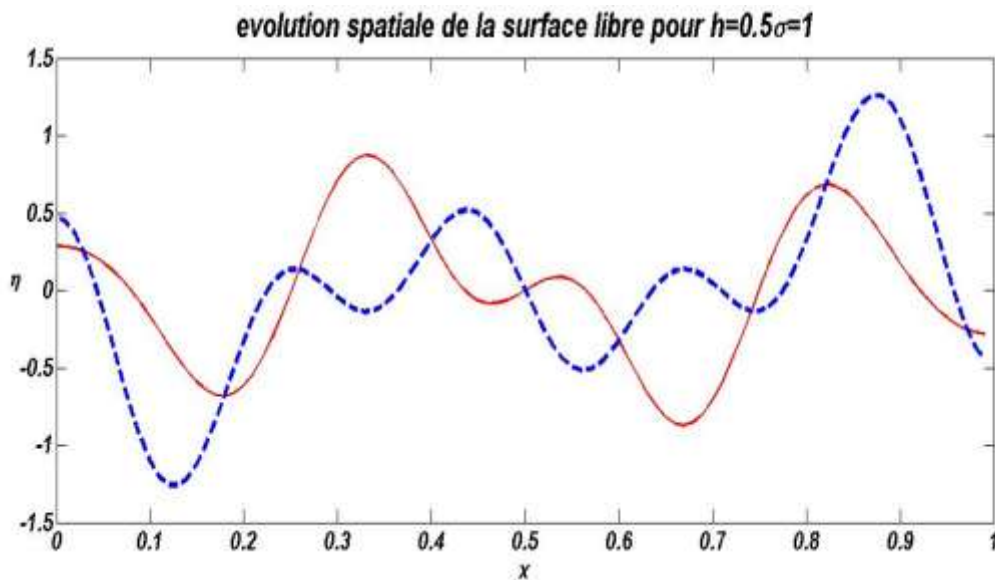


Figure 2.5.4 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 1$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Remarque et observation :

Lorsque σ augmente on remarque une augmentation du nombre d'onde dans le cas gravito-capillaire.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-10-4) L'évolution spatio-temporelle :

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution spatio-temporelle de la surface libre en fonction du la position x et de t , pour $h = 0.5$ et pour les Cinq premiers modes du ballotement où $n = 1, 2, \dots, 5$ avec des différentes valeurs de sigma telles que $\sigma = 0.001, \sigma = 0.01, \sigma = 0.1$ et $\sigma = 1$.

Pour $\sigma = 0.001$

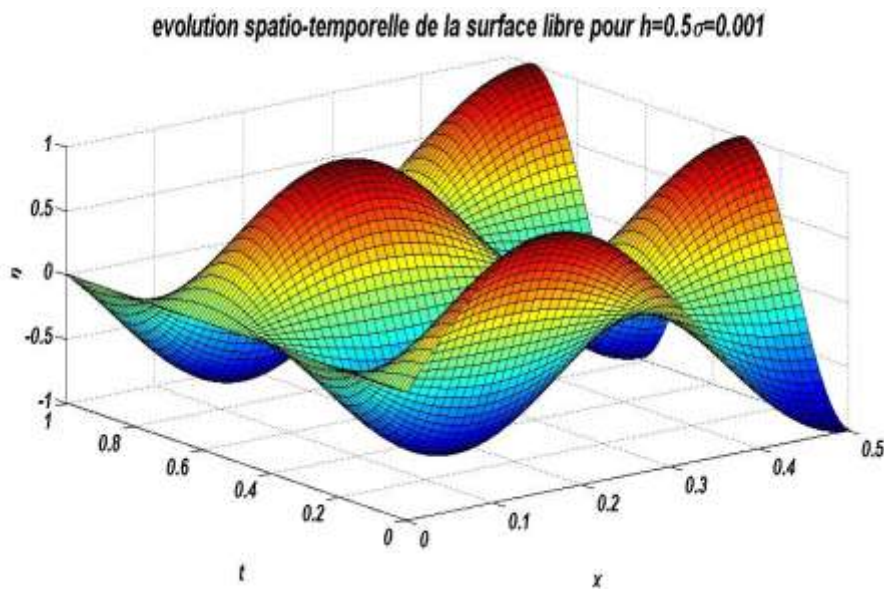


Figure 2.6.1: L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.001$.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Pour $\sigma = 0.01$

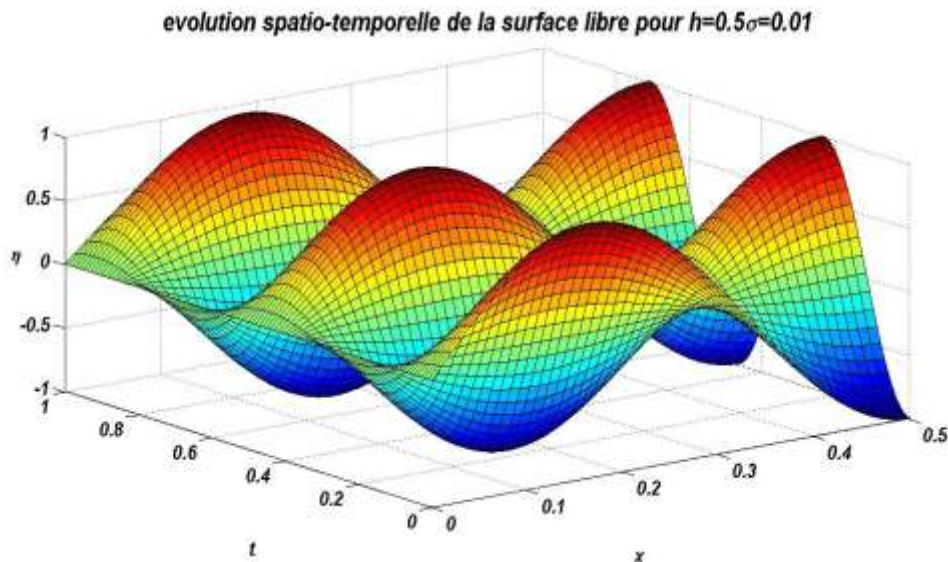


Figure2.6.2: L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuverectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$.

Pour $\sigma = 0.1$

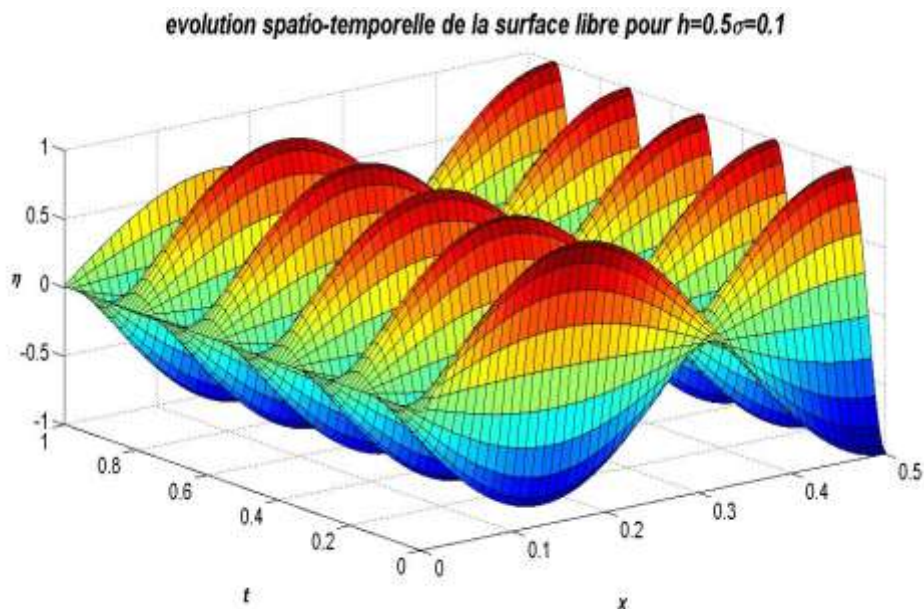


Figure2.6.3: L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.1$.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

Pour $\sigma=1$

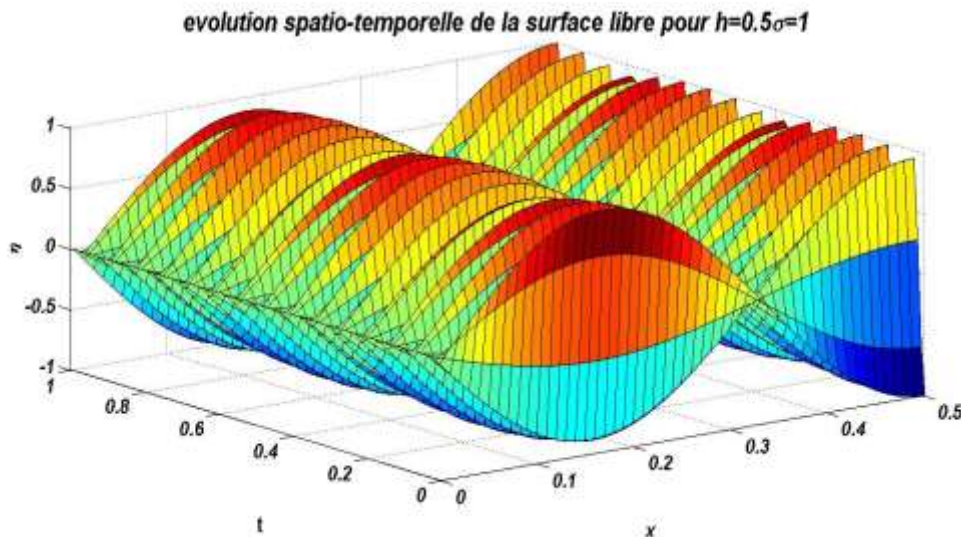


Figure 2.6.4: L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire pour $h=0.5, n=1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma=1$.

Remarque et observation :

Lorsque σ augmente, le nombre d'onde augmente aussi et les ondes sont longues et étalées.

2-11) Effet de la tension superficielle :

La présence de la capillarité est importante quand le fluide étudié est trop léger ou lorsqu'on s'intéresse au ballotement dans des réservoirs de petite échelle de longueur. Autrement, ces effets sont masqués par l'influence la gravité. Les figures précédentes montrent l'effet de la capillarité sur l'élévation de la surface libre ou la capillarité augmente les fréquences de ballotement d'un fluide et l'élévation de la surface libre sera affectée via ces fréquences, alors ce dernier augmente avec l'augmentation de la tension superficielle.

Chapitre 2 : Ballotement dans un réservoir quelconque et dans un réservoir rectangulaire

2-13) Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons exposé les équations régissant le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait, incompressible et non visqueux dans un réservoir quelconque puis dans un réservoir rectangulaire en utilisant les conditions cinématiques, dynamiques et les conditions aux limites puis on a linéarisé ces équations en utilisant la théorie linéaire.

Puis on a résolu analytiquement ces équations pour avoir les fréquences propres qui sont données comme solutions de l'équation de dispersion. Finalement on a présenté les résultats numériquement sous forme graphique.

Ensuite on a conclu que les fréquences propres augmentent avec l'augmentation de la tension superficielle qui a un effet sur le nombre d'onde. La forme de la surface libre est une combinaison des modes propres correspondant à chacune des fréquences propres. Plus le nombre de modes est grand, plus la forme de la surface libre obtenue est proche de la forme réelle.

Chapitre 3 :
Ballotement dans un réservoir
rectangulaire avec un fond faiblement
Incliné.

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-1) Introduction :

Dans ce chapitre nous allons traiter le ballotement d'un fluide parfait, incompressible et irrotationnel dans le cas d'un réservoir rectangulaire avec un fond incliné.

En commençant par présenter les équations du mouvement et la condition dynamique, la condition cinématique et les conditions aux limites.

Finalement on va résoudre analytiquement ces équations pour des faibles dénivellations uniquement, puis on va présenter les graphes numériquement.

3-2) Equations du mouvement :

On considère un réservoir bidimensionnel (oxz) de profondeur inclinée h_x et de longueur L .

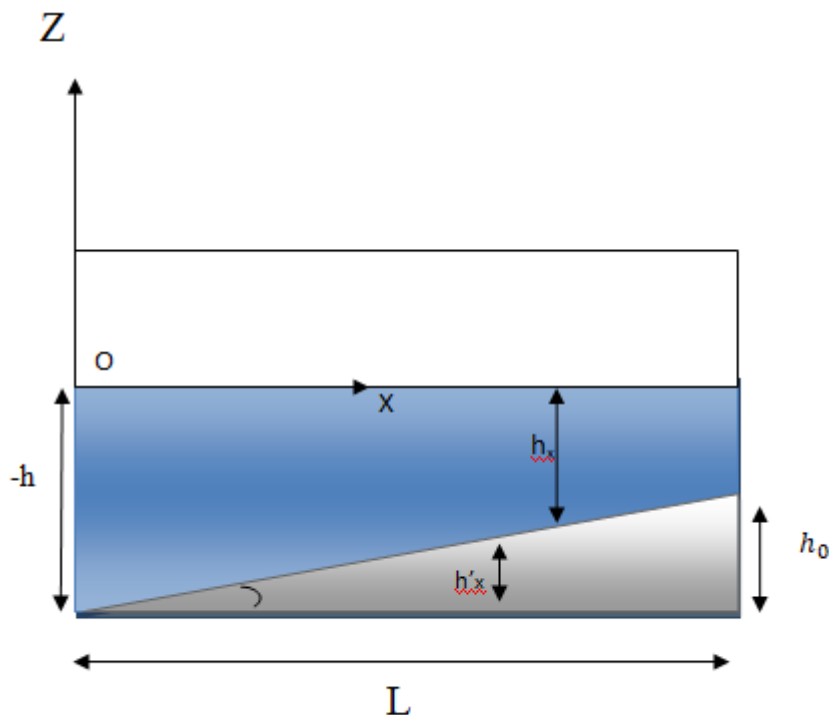


Figure 3.1 –Un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-2-1) Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (3-1)$$

3-2-2) Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (3-2)$$

3-3) Hypothèses :

- Fluide incompressible : $\rho = \text{constat} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

- Fluide non visqueux : $\mu = 0 \Leftrightarrow \mu \Delta \vec{V} = 0$.

- Un écoulement irrotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$, c.-à-d le champ de vitesse dérive d'un potentiel tel que : $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$.

En utilisant les hypothèses précédentes on trouve :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (3-3)$$

$$\text{div}(\vec{\nabla} \phi) = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\nabla \phi) = \Delta \phi = 0$$

$$\text{div}(\vec{\nabla} \phi) = \Delta \phi$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-4)$$

Où $\Delta \phi$ est le Laplacien de ϕ .

En utilisant les hypothèses précédentes on trouve :

$$\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right] = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla}(-zg) \quad (3-5)$$

En utilisant l'identité suivante $\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) - \vec{\nabla} \nabla \cdot \vec{V}$ et en remplaçant \vec{V} par $\vec{\nabla} \phi(x, z, t)$ on trouve :

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

$$\left[\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{V} \phi \cdot \vec{V} \phi \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \vec{V} P + \vec{V}(-zg) \quad (3-6)$$

$$\vec{V} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla(-zg) \quad (3-7)$$

$$\vec{V} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + \frac{1}{\rho} P + (zg) \right] = 0 \quad (3-8)$$

Puis on intègre et on trouve :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + \frac{1}{\rho} P + (zg) \right] = C(t) \quad (3-9)$$

Avec C(t) est une équation arbitraire du temps, alors on peut rajouter un potentiel ϕ une fonction arbitraire de t qui disparaît dans la définition : $\vec{V} = \nabla \phi$ en utilisant cet arbitraire pour absorber la constante C(t), ainsi le théorème s'écrit sous forme d'équation de Bernoulli pour un écoulement incompressible s'écrit :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + \frac{1}{\rho} P + (zg) \right] = 0 \quad (3-10)$$

Cette équation détermine la pression en fonction du potentiel des vitesses.

3-4) Conditions cinématique et dynamique à l'interface $\eta(x,t)$ et les conditions aux limites :

Condition dynamique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \right) = 0 \quad (3-11)$$

Condition cinématique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3-12)$$

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Condition aux limites :

-Sur les parois verticales

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, z, t) = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(L, z, t) = 0 \quad (3-13)$$

-Sur le fond

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, -h_x, t) = 0 \quad (3-14)$$

Avec :

$$\text{tng} \alpha = \frac{h_0}{L} = \frac{h'_x}{x} \quad (3-15)$$

$$h'_x = \frac{h_0}{L} x$$

$$h_x = h - h'_x \quad (3-16)$$

$$h_x = h - \frac{h_0}{L} x$$

$$-h_x = -h + \frac{h_0}{L} x \quad (3-17)$$

3-5) Expression de la courbure moyenne en coordonnées cartésiennes :

$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3-18)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3-19)$$

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-6) Conditions cinématiques, dynamiques et les conditions aux limites dans le cas gravitaire et gravito- capillaire :

3-6-1) Cas gravitaire :

$$\Delta\phi = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 & \text{conditions cinématiques} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \nabla\phi + g\eta = 0 & \text{condition dynamique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} (0, z, t) = 0 \\ x = L \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} (L, z, t) = 0 \quad \text{Les conditions aux limites} \\ z = -h \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} (x, -h, t) = 0 \end{cases}$$

3-6-2) Cas gravité capillarité :

$$\Delta\phi = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 & \text{conditions cinématiques} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \nabla\phi + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 & \text{condition dynamique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} (0, z, t) = 0 \\ x = L \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} (L, z, t) = 0 \quad \text{Les conditions aux limites} \\ z = -h \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} (x, -h, t) = 0 \end{cases}$$

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-7) Linéarisations des équations du mouvement :

Dans le cas linéaire on va négliger les termes non linéaires dans les équations précédentes.

3-7-1) cas gravité pure :

On va négliger les termes non linéaires dans les équations (3-11) et (3-12) et on trouve :

Condition dynamique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \right) = 0 \quad (3-20)$$

Condition cinématique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (3-21)$$

En négligeant la tension superficielle dans l'équation (3-20) puis en dérivant pour éliminer η :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0 \quad (3-22)$$

3-7-2) Cas gravité capillarité :

Condition dynamique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\eta_{xxx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} \right) = 0 \quad (3-23)$$

Condition cinématique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (3-24)$$

On dérive l'équation (3-23) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta_{xxx}}{\partial x \partial x} \right) = 0 \quad (3-25)$$

Puis on remplace l'équation (3-24) dans l'équation (3-25) et on trouve :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial Z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} \right) = 0 \quad (3-26)$$

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-8) Expression de courbure linéarisé :

L'expression de courbure moyenne linéarisée $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ en coordonnées cartésiennes

$$s'écrit : \nabla C = \nabla \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \eta_{xxx} \quad (3-27)$$

3-9) Résolution des équations du mouvement :

Pour résoudre ces équations on utilise la méthode de séparation des variables et cela pour déterminer les fréquences et les modes propres qui donnent la déformation de la surface libre par rapport à la position d'équilibre.

3-9-1) Cas gravitaire :

On a le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

On considère d'abord le cas où le mouvement est bidimensionnel, Ainsi, le potentiel des vitesses ϕ qui satisfait l'équation de Laplace bidimensionnel et les conditions de glissements suivantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h_x} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad \text{prend la forme suivante :}$$

$$\phi = \sum F_n \cos(K_n x) \frac{\cosh K_n(z+h_x)}{\cosh k_n h_x} \quad (3-28)$$

$$\text{Avec : } h_x = h - \frac{h_0}{L} x$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h_x} = 0 \quad \sinh K_n(z+h_x) \text{ lorsque } z = -h_x \quad \sinh K_n(0) = 0 \quad (3-29)$$

Donc la condition est vérifiée.

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \sin K_n x = 0 \quad (3-30)$$

On a : $\sin 0 = 0$ donc la condition est vérifiée.

$$\text{Et } \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad \sin K_n L = 0 \quad (3-31)$$

Qui veut dire que $K_n L = n \pi$

$$k_n = \frac{n \pi}{L} \quad (3-32)$$

Avec K_n est le nombre d'onde qui décrit l'évolution en temps du n-ème mode du potentiel des vitesses.

Si on suppose qu'initialement le fluide est au repos avec une perturbation initiale de la surface libre, soit : $\phi = 0$; $\eta = \eta_0(x)$, $t = 0$ (3-33)

Lorsqu'on remplace ϕ dans l'équation (3-22) on trouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} \frac{\cosh[K_n(z+h_x)]}{\cosh K_n h_x} + g \frac{\partial F_n(t)}{\partial z} \frac{\cosh [K_n(z+h_x)]}{\cosh K_n h_x} \right) \cos(k_n x) = 0 \quad (3-34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} + g K_n F_n(t) \tanh(K_n h_x) \right) \cos(k_n x) = 0 \text{ en } z = 0 \quad (3-35)$$

$$\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} + g K_n F_n(t) \tanh(K_n h_x) = 0 \quad (3-36)$$

Donc

$$\frac{\partial^2 F_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 F_n(t) = 0 \quad (3-37)$$

Avec ω_n est la fréquence propre de la surface libre qui est donnée par la relation de dispersion des ondes de surface, qui vaut dans le cas purement gravitaire.

$$\omega_n^2 = (g K_n) \tanh(K_n h_x) \quad (3-38)$$

On prend alors :

$$F_n(t) = \alpha_n \sin(\omega_n t) \quad (3-39)$$

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

La célérité de l'onde $c = \omega_n/k_n$, qui représente la vitesse de déplacement verticale de la déformation de la surface libre s'écrit :

$$C = \sqrt{\frac{g}{K_n} \tanh(K_n h_x)} \quad (3-40)$$

L'élévation de la surface libre, $\eta(x, t)$, est donnée par :

$$\eta(x, t) = \frac{-1}{g} \sqrt{\alpha_n \omega_n} \cos(\omega_n t) \cos(K_n x) \quad (3-41)$$

Si initialement on suppose que :

$$\eta(x, 0) = a_n \cos(K_n x) \quad (3-42)$$

On déduit :

$$\alpha_n = -\frac{a_n g}{\omega_n} \quad (3-43)$$

Où α est l'amplitude de l'onde initiale. Finalement, la solution générale du problème de ballotement linéaire bidimensionnel pour un réservoir rectangulaire est donnée par :

$$\phi = \sum \frac{a_n g}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \cos(K_n x) \frac{\cosh [K_n(z+h_x)]}{\cosh K h_x} \quad (3-44)$$

$$\eta(x, t) = \sum a_n \sin(\omega_n t) \cos(K_n x) \quad (3-45)$$

3-9-2) Cas gravité capillarité :

On a le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} \right) = 0$$

On garde les mêmes conditions de glissements : $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, et $\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$.

La solution prend la forme suivante :

$$\phi = \sum F_n \cos(K_n x) \frac{\cosh K_n(z+h_x)}{\cosh K h_x} \quad (3-46)$$

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Avec

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3-47)$$

$$\text{Et a } t = 0 \text{ :, } \varphi = 0; \eta = \eta_0(x) \quad (3-48)$$

En remplaçant maintenant dans l'équation $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} \right) = 0$ puis en dérivant on trouve:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} \cos(K_n x) + g K_n F_n(t) \cos(K_n x) \tanh(K_n h_x) \right) \sum \frac{\sigma}{\rho} K_n^3 F_n(t) \tanh(K_n h_x) \cos(K_n x) = 0 \quad (3-49)$$

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} + \left(g K_n + \frac{\sigma}{\rho} K_n^3 \right) \tanh(K_n h_x) F_n(t) = 0 \quad (3-50)$$

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 F_n(t) = 0 \quad (3-51)$$

Alors

$$F_n(t) = \alpha_n \sin(\omega_n t) \quad (3-52)$$

$$\omega_n^2 = \left(g K_n + \frac{\sigma}{\rho} K_n^3 \right) \tanh(K_n h_x) \quad (3-53)$$

Remarque : c'est la même solution dans les deux cas la différence c'est ω_n^2

$$\phi = \sum \frac{a_n g}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \cos(K_n x) \frac{\cosh[K_n(z+h_x)]}{\cosh k h_x}$$

$$\eta(x, t) = \sum a_n \sin(\omega_n t) \cos(K_n x)$$

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-10) Résultats et discussions :

Dans cette partie du chapitre nous allons fixer σ puis on variera x ainsi on change la valeur de taux de remplissage h_x pour déterminer l'effet de la hauteur h (taux de remplissage) sur le ballotement dans un réservoir rectangulaire

$L= 10$, $\sigma= 0.01$, $H= 0.5$, $h_0= 0.3$ et $x = 0$, $x=3$, $x=6$ et $x=10$

3-10-1) La fréquence :

Les figures (3.2.1),(3.2.2),(3.2.3)et (3.2.4), représentent les variations des fréquences linéaires bidimensionnelles du ballotement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné sans et avec la tension superficielle en fonction de la profondeur pour h_x telles que $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ pour $x=0,x=3,x=6,x=10$.

Les fréquences sont représentées pour les Cinq premiers modes propres, avec la tension superficielle $\sigma = 0, 01$.

Pour $x = 0$:

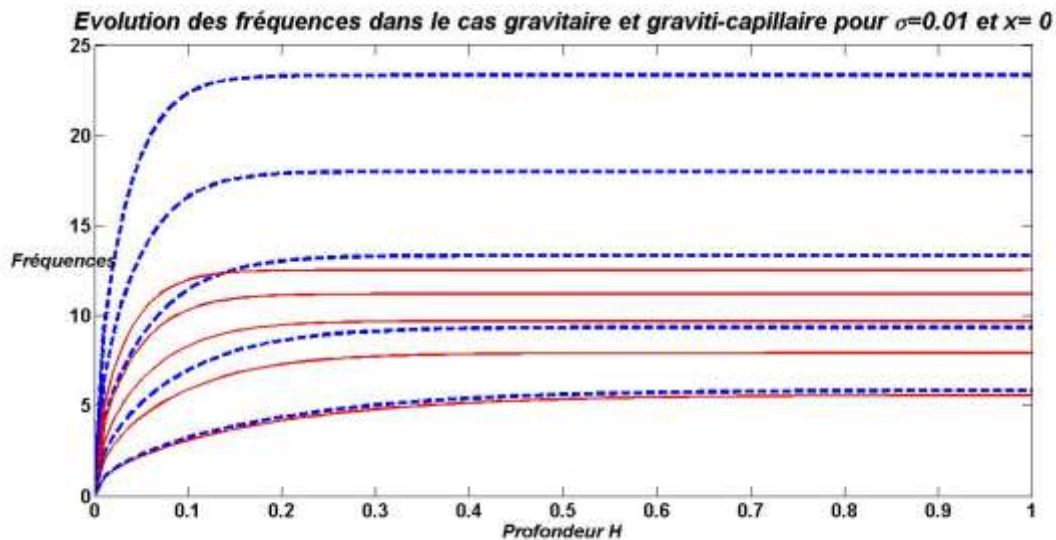


Figure 3.2.1-Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage h_x . Pour $x=0$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x=3$

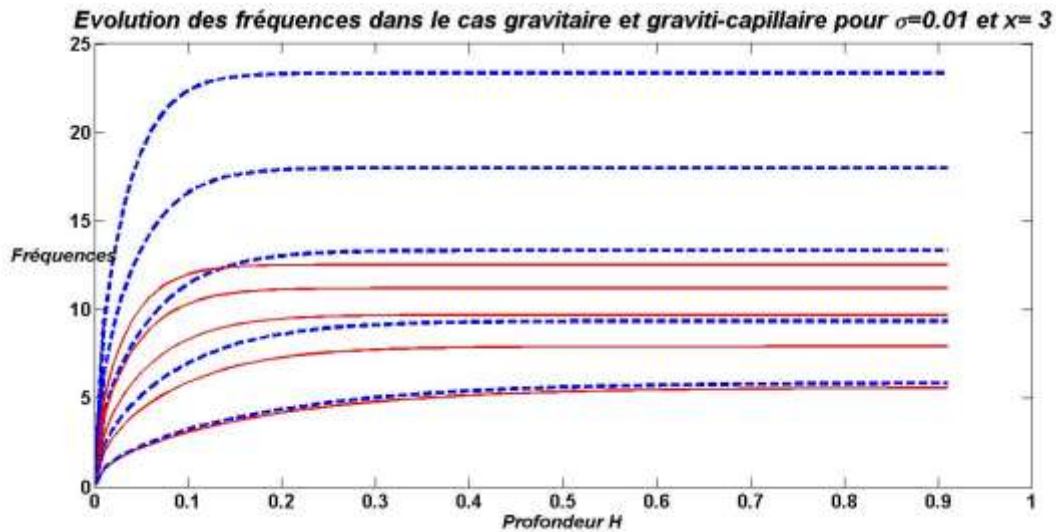


Figure3.2.2-Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage hx . Pour $x=3$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $x= 6$

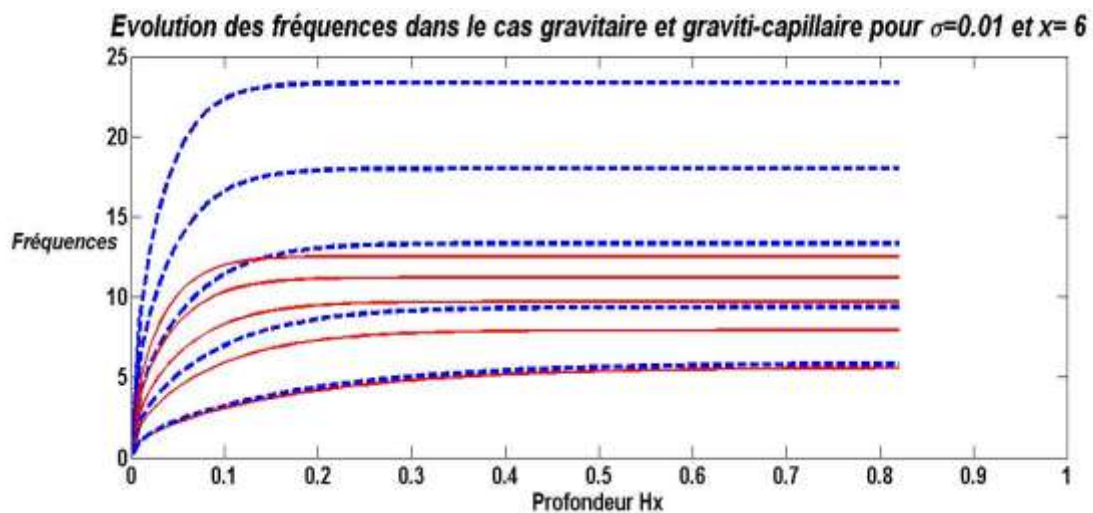


Figure3.2.3-Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage hx . Pour $x=6$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x=10$

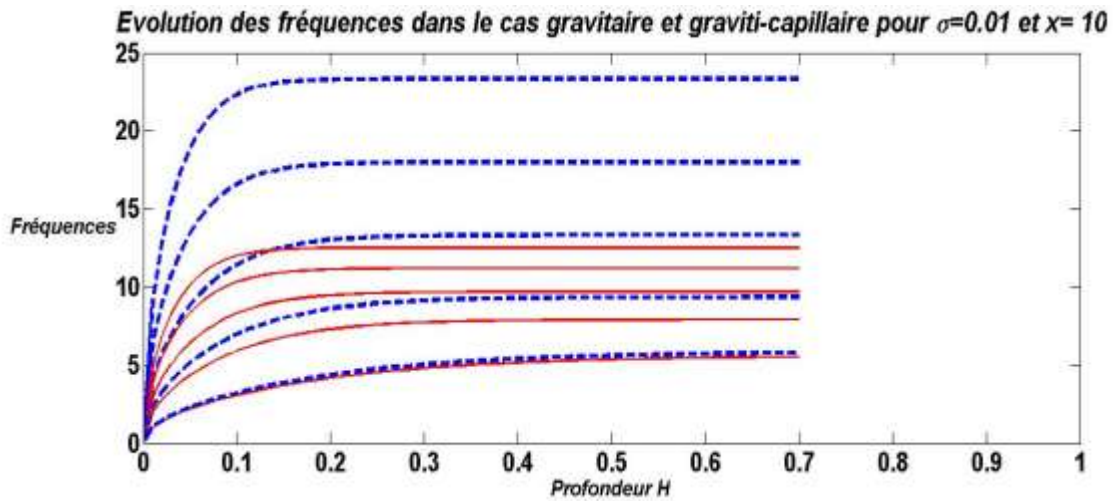


Figure3.2.4-Variations des fréquences propres d'une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du taux de remplissage hx . Pour $x=3$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma= 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Remarque et observation :

Quel que soit la valeur de la tension superficielle et le mode considéré, on remarque une augmentation rapide des fréquences lorsque le taux de remplissage augmente et qui se stabilisent pour des grands taux de remplissage.

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-10-2) L'évolution temporelle :

Les graphes suivants présentent l'élévation de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné en fonction du temps et la position x pour les Cinq premiers modes du ballotement ou $n = 1, 2, \dots, 5$ avec des différentes valeurs de h_x tel que $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ pour $x=0, x=3, x=6, x=10$ et $\sigma = 0.01$. On présente le graphe de Gravité pure en Ligne continue rouge et celui de gravité-capillarité en ligne discontinue bleu.

Pour $x=0$:

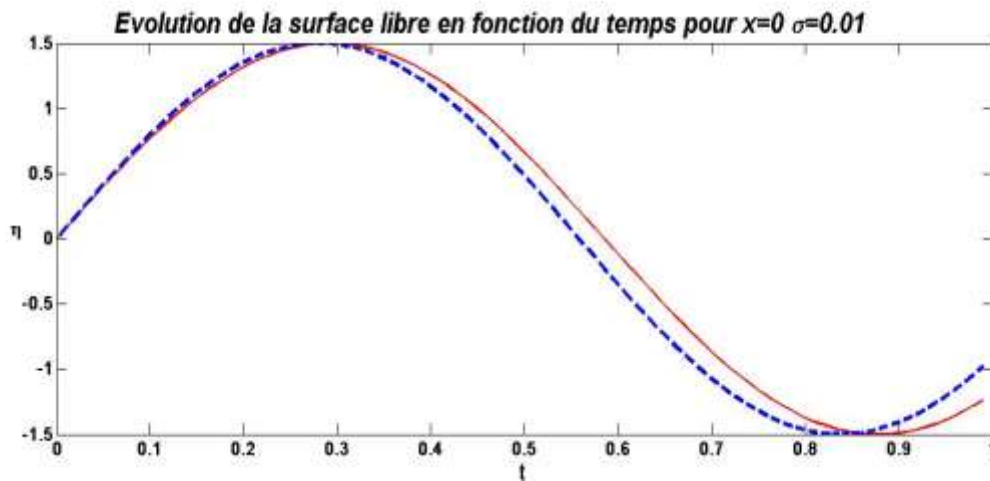


Figure 3.3.1 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $x=0$, $n = 1, 2, \dots, 5$ et Pour $\sigma = 0.01$, Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x = 3$

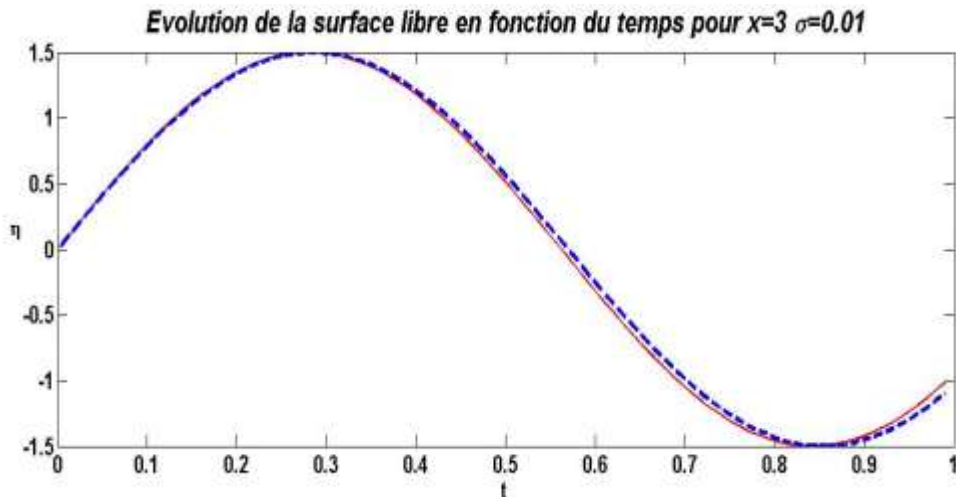


Figure3.3.2 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 3$, Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $x=6$:

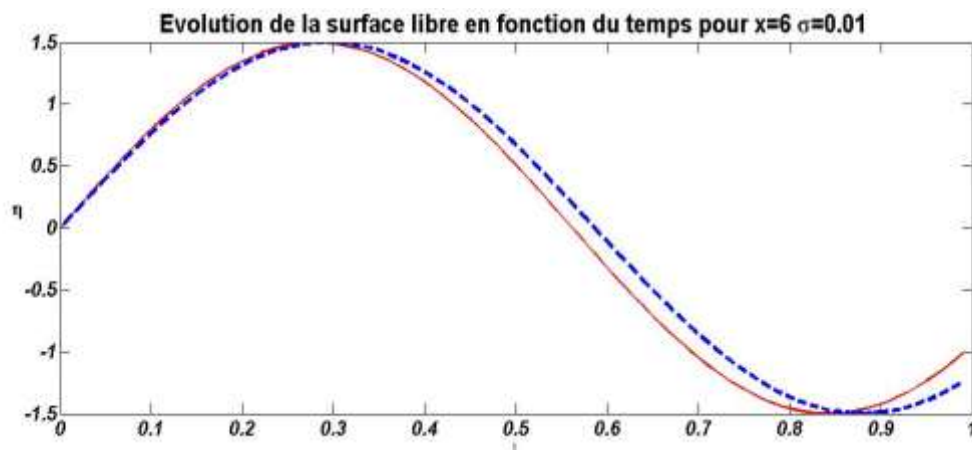


Figure3.3.3 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x = 6$, Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x=10$

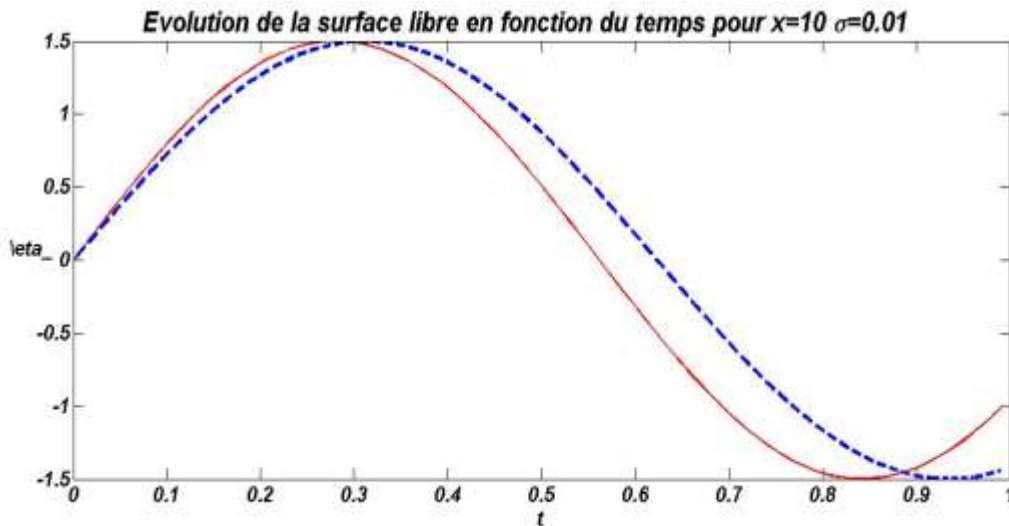


Figure3.3.4 : L'évolution temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $n = 1, 2, \dots, 5$, $\sigma = 0.01$ et $x=10$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Remarque et observation :

Lorsque x augmente on remarque un petit décalage entre le graphe de gravité pure et celui de gravité capillarité, et dans les quatre figures on remarque la même déformation de la surface libre au cours du temps tel que l'amplitude est nulle à $t_0=0$ puis elle augmente avec le temps et après une période elle diminue.

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-10-3) L'évolution spatiale :

Les graphes ci-dessous présentent l'évolution spatiale de la surface libre en fonction de la position x pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=0, x=3, x=6, x=10$ et pour les Cinq premiers modes du ballotement ou $n = 1, 2, \dots, 5$ avec $\sigma = 0.001$,

On présente le graphe de Gravité pure en Ligne continue rouge et celui de gravité-capillarité en ligne discontinue bleu.

Pour $x=0$

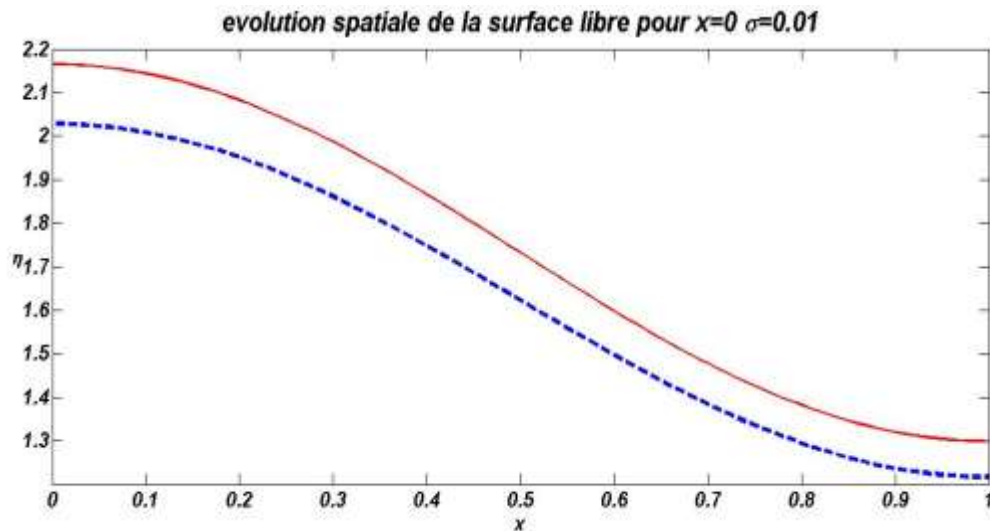


Figure 3.4.1 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=0$ et pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et $\sigma = 0.01$.

Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x=3$:

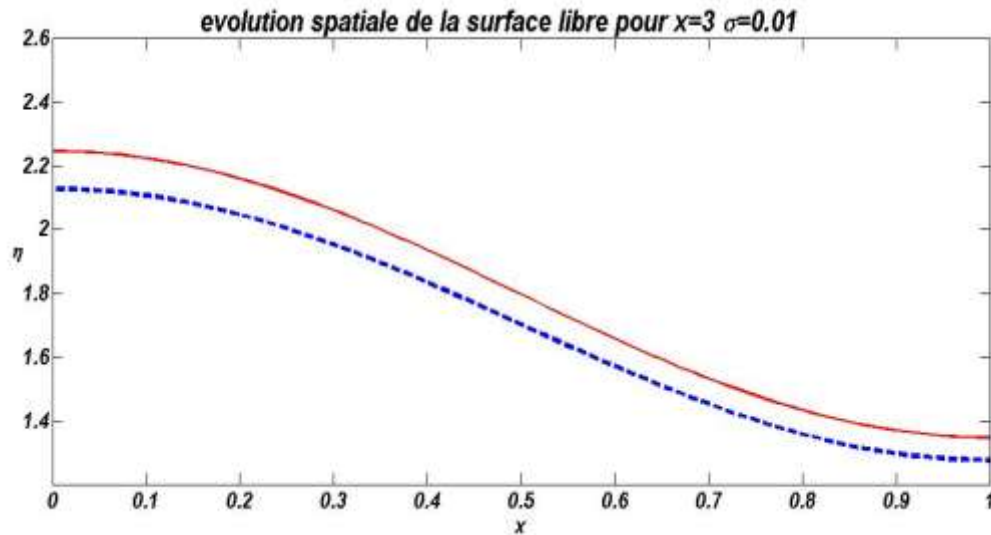


Figure3.4.2 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=3$ et pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et $\sigma= 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Pour $x=6$

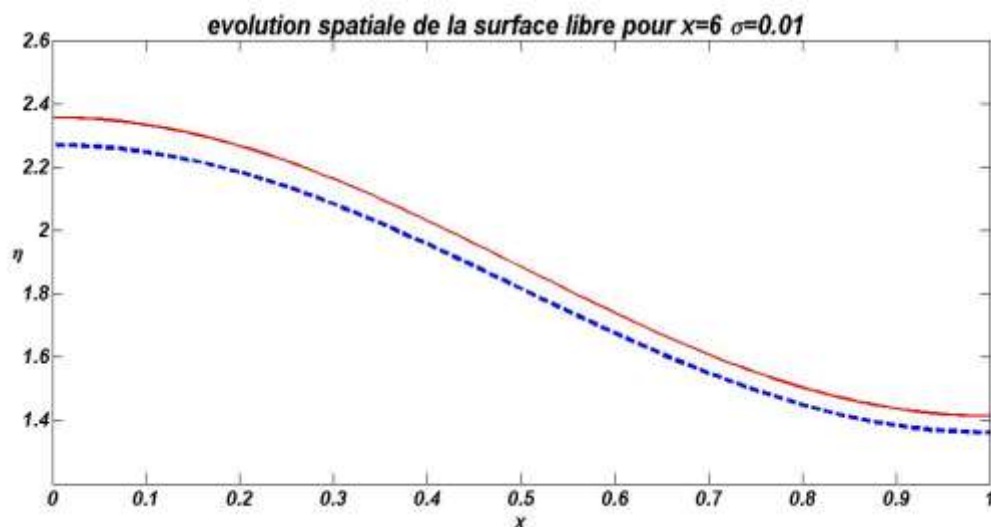


Figure3.4.3: L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=6$ et pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et $\sigma= 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x=10$:

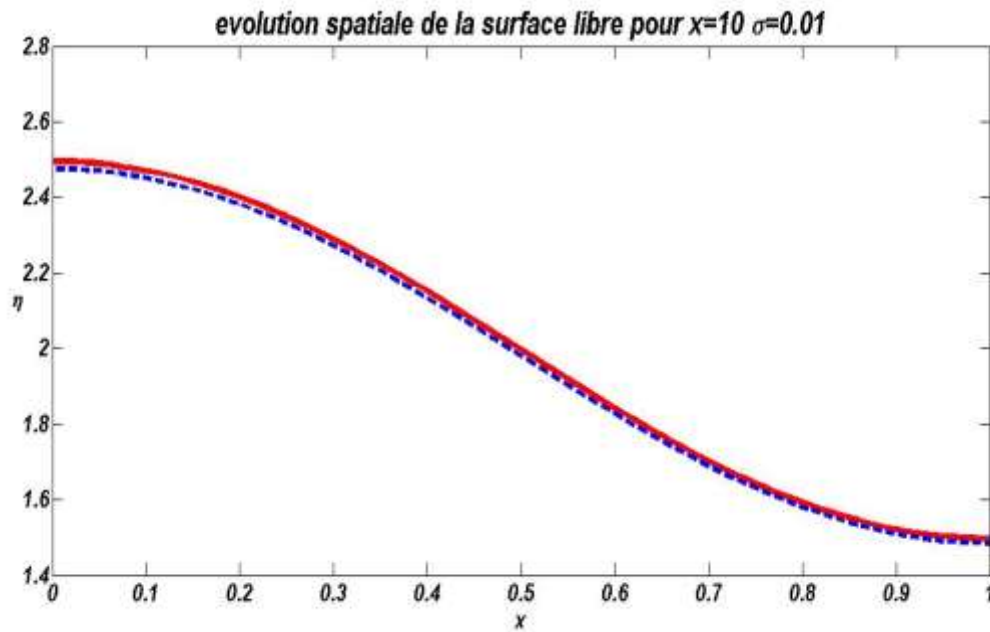


Figure3.4.4 : L'évolution spatiale de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=10$ et pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et $\sigma= 0.01$. Gravité pure (Ligne continue) en rouge et gravité-capillarité (ligne discontinue) en bleu.

Remarque et observation :

Dans les quatre figures précédentes On remarque à $x=0$ une amplitude maximale et elle diminue lorsque x augmente dans chacune des figures.

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-10-4) L'évolution spatio-temporelle :

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution spatio-temporelle de la surface libre en fonction du la position x et de t , pour les Cinq premiers modes du ballotement ou $n = 1, 2, \dots, 5$ avec des différentes valeurs de x tel que $x=0, x=3, x=6, x=10$ et $\sigma=0.01$.

On présente le graphe de Gravité pure en Ligne continue rouge et celui de gravité-capillarité en ligne discontinue bleu.

Pour $x = 0$:

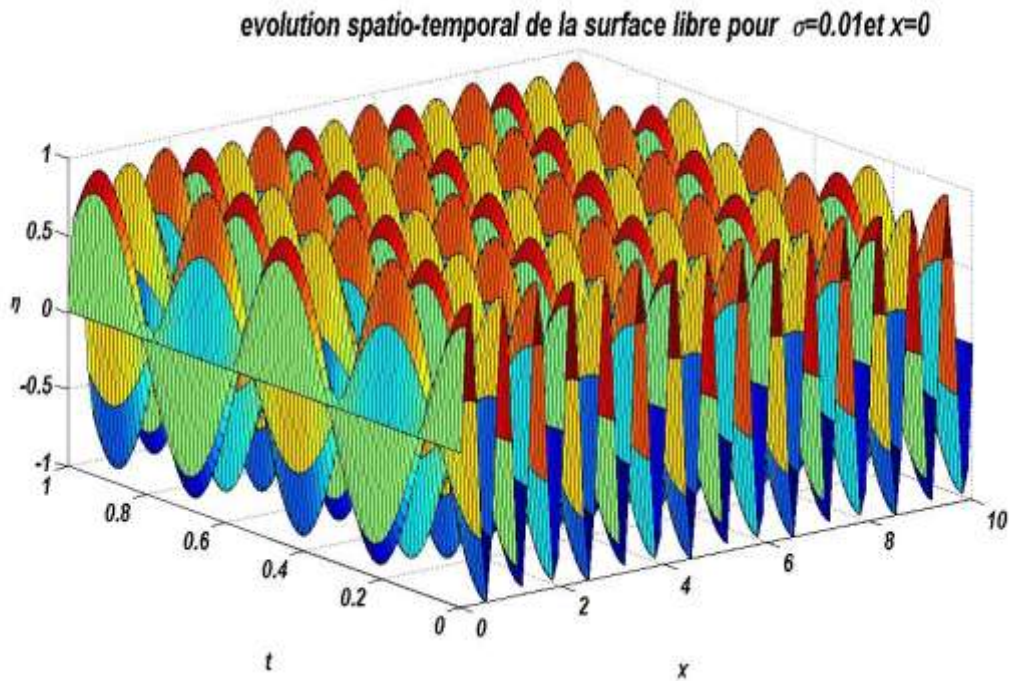


Figure3.5.1 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=0$ et pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et $\sigma= 0.01$.

Chapitre 3 : Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x=3$

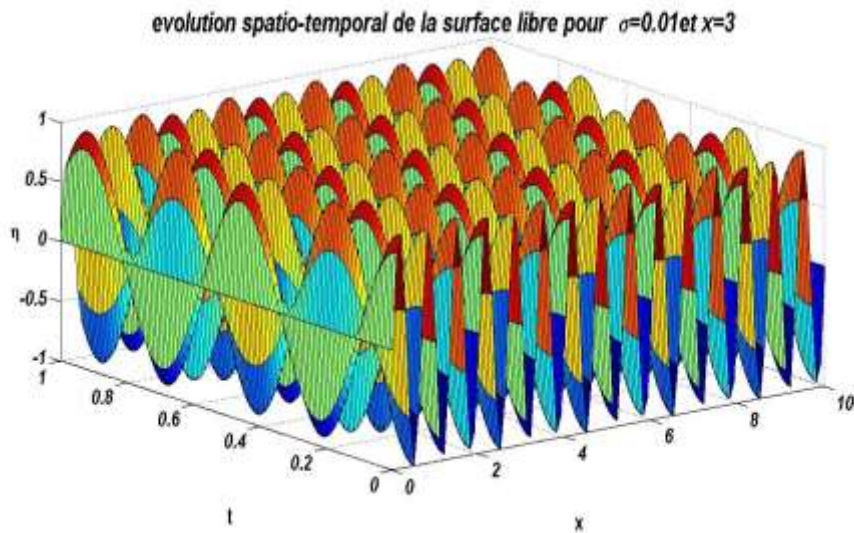


Figure3.5.2 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=3$ et pour $n=1,2,\dots,5$ et $\sigma=0.01$

Pour $x=6$

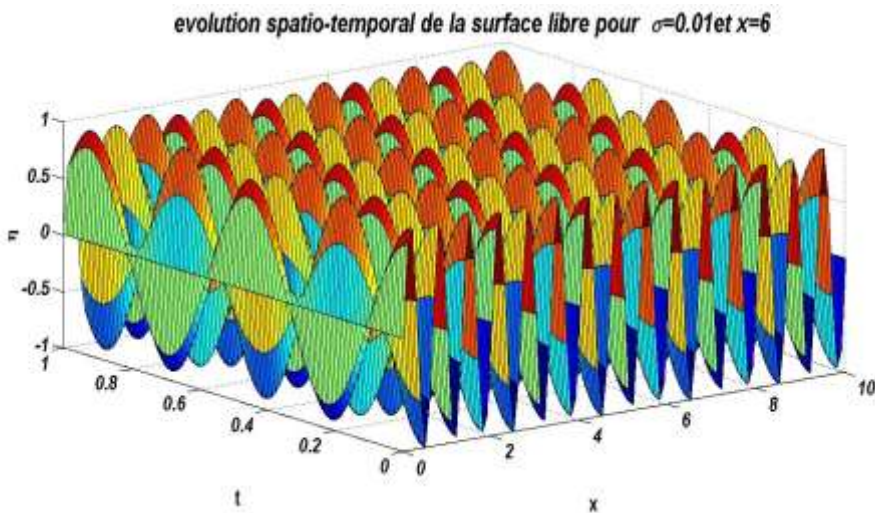


Figure3.5.3 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=6$ et pour $n=1,2,\dots,5$ et $\sigma=0.01$

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

Pour $x=10$

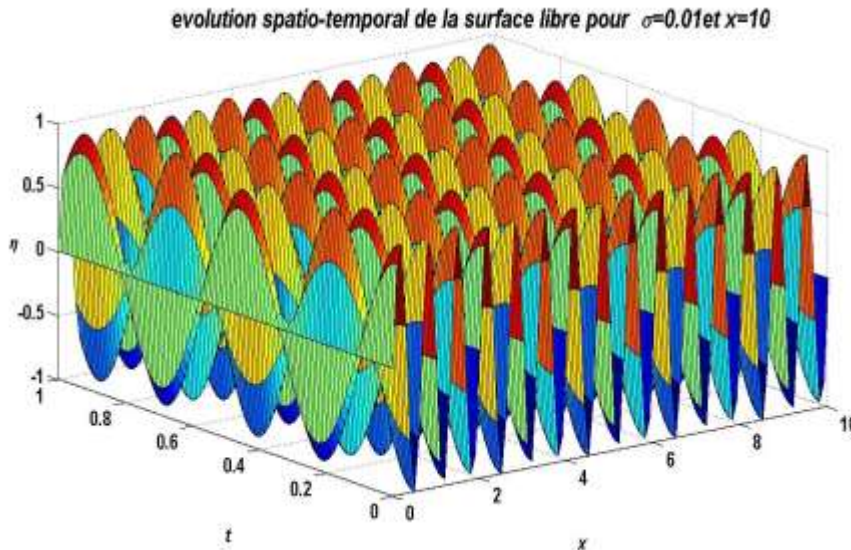


Figure3.5.4 : L'évolution spatio-temporelle de la surface libre dans une cuve rectangulaire avec un fond faiblement incliné pour $h_x = h - \frac{h_0}{L} x$ tel que $x=10$ et pour $n = 1, 2, \dots, 5$ et $\sigma=0.01$

Remarque et observation :

Si on compare les quatre figures spatio-temporelle obtenue dans ce chapitre avec celle obtenue dans le chapitre deux, on remarque une différence entre les ondes obtenue dans les deux parties.

Les ondes obtenue dans ce chapitre sont courtes ou contraires a celle de chapitre précédant qui sont talés et longues.

3-11) Effet de la hauteur de remplissage :

La hauteur de remplissage fait augmenter les fréquences propres des ondes et ces dernières se stabilisent pour les grandes valeurs du taux de remplissage, Et elle a une influence sur propagations des ondes

Chapitre 3 :

Ballotement dans un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné

3-12) Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons établi les équations régissant le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait, incompressible et non visqueux dans un réservoir rectangulaire faiblement incliné en utilisant les mêmes conditions cinématiques, dynamiques et les conditions aux limites puis on a linéarisé ces équations en utilisant la théorie linéaire.

Puis on a résolu analytiquement ces équations pour avoir les fréquences propres et sont données comme solution de l'équation de dispersion finalement on a présenté les résultats numériquement sous forme graphique.

Et on a conclu que les fréquences propres augmentent avec l'augmentation de taux de remplissage puis elles se stabilisent pour les grands taux de remplissage.

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a traité un phénomène très important c'est le phénomène de ballotement de fluide dans un réservoir de géométrie rectangulaire avec un fond normal puis avec un fond incliné.

A l'aide de ce manuscrit nous pouvons répondre à plusieurs questions reliées à ce phénomène, aussi d'établir certaines hypothèses pour proposer des solutions analytiques afin de résoudre ce problème à l'aide de la théorie linéaire.

Premièrement on a commencé par une étude bibliographique qui est présentée dans le premier chapitre, dans cette analyse nous avons fait un peu d'histoire on a parlé sur les différents travaux réalisés sur la dynamique du ballotement des fluides dans un réservoir rectangulaire et on a discuté sur les deux méthodes de résolution analytique et numérique traitant la théorie linéaire et non linéaire.

Dans le deuxième chapitre on a présenté les équations générales régissant le mouvement d'un fluide parfait, incompressible et non visqueux dans un réservoir quelconque puis dans un réservoir rectangulaire à l'aide de la théorie linéaire on a linéarisé ces équations afin de résoudre analytiquement pour avoir Les fréquences propres est sont données comme solution de l'équation de dispersion finalement on à présenter les résultats numériquement sous forme graphique, à travers cette étude on a trouvé que les fréquences propres augmentent avec l'augmentation de la tension superficielle qui a un effet sur le nombre d'onde.

Le troisième chapitre est consacré pour traiter le ballotement d'un fluide parfait, incompressible et irrotationnel dans le cas d'un réservoir rectangulaire avec un fond faiblement incliné, En premier lieu nous avons présenté les équations du mouvement et la condition dynamique, la condition cinématique et les conditions aux limites, Finalement on a déduit une solution analytique à ces équations pour des faibles dénivellations uniquement, puis on a présenté les graphes numériquement puis on les a analysé On remarque une différence de la nature des ondes tels que dans ce chapitre les ondes sont courtes et leurs nombre d'onde augmente au contraire du deuxième chapitre .

Alors on conclut que lorsqu' on a un fond plan nous avons des longues vagues et quand

On a un fond déformable nous avons des courtes vagues.

Références

- [1] Ibrahim et al. Recent advances in liquid sloshing dynamics Appl Mech Rev vol 54, no 2, March 2001
- [2] Faraday, M. (1831): On the Forms and States assumed by Fluids in Contact with Vibrating Elastic Surfaces, Transactions of Royal Society of London.
- [3] Benjamin, T.B. and Ursell, H.W. (1954): The Stability of the Plane Free Surface of a Liquid in a Vertical Periodic Motion, Proceedings of Royal Society of London.
- [5] Mathiessen L (1868), Akustische Versuche, die Kleinsten Transversalwellen der Flüssigkeiten Betreffend, Annalen der Physi
- [6] Mathiessen J (1976), Sloshing Loads Due to Random Pitch Motion, Norwegian Maritime Research 4(3), Det Norske Veritas.
- [7] Rayleigh L (1883), On the ripples of fluid resting upon a vibrating support, Phil Mag 1
- [8] Rayleigh L (1887), On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure
- [9] Mathieu E (1868), Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique, J Math Pures Appli (J Liouville)
- [10] Lewis DJ (1950), The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes, Proc Royal Soc (London) Series ,4 202,
- [12] Sorokin VI (1957), The effect of fountain formation at the surface of a vertically oscillating liquid, Soviet Phys-Dok
- [13] Bolotin VV (1956), On the motion of a fluid on an oscillating vessel, Prikl Math Mekh 20(2),
- [14] Woodward JH (1966), Fluid Motion in a Circular Tank of Sector-Annular Cross-Section when Subjected to Longitudinal Excitation, PhD Diss., Georgia Tech
- [15] Rajappa NR (1970b), On the instability of fluid surfaces when accelerated perpendicular to their planes,
- [16] Goldberg ZA (1972), Parametric amplification of standing waves in fluids, Soviet Phys Doklady

Références

- [17] Henstock W and Sani RL (1974), On the stability of the free surface of a cylindrical layer of fluid in vertical periodic motion, *Lett Heat Transfer*
- [18] Hasegawa E, Umehara S, and Atsumi M (1983), The critical condition for the onset of waves on the free surface of a horizontal liquid layer under a vertical oscillation, (Japanese)
- [19] Brand RP and Nyborg WL (1965), Parametrically excited surface waves, *J Acoust Soc Am* 37(3)
- [20] Miles JW (1967), Surface-wave damping in closed basins, *Proc Royal Soc (London) Series A, Math Phys* 297(1451),
- [21] Kana DD (1966), An Experimental Study of Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Compartmented Cylindrical and Spherical Tanks, NASA CR-545, (August).
- [22] Lomen DO and Fontenot LL (1967), Fluid behavior in parabolic containers undergoing vertical excitation, *J Math Phys* 46(1)
- [23] Woodward JH (1966), Fluid Motion in a Circular Tank of Sector-Annular Cross-Section when Subjected to Longitudinal Excitation, PhD Diss, Georgia Tech
- [24] Woodward JH and Bauer HF 1970, Fluid behavior in a longitudinally excited cylinder
- [25] Schoenhals RJ, Winter ERF, and Griggs EI (1967), Effects of longitudinal vibration on discharge of liquids from propellant tanks, *Proc 1967 Heat Transfer and Fluid Mech Inst, San Diego*, 277-297, Stanford Univ Press. Scholl HF, Pinson LD, and Stephens DG (1971), Investigation of Slosh Anomaly in Apollo Lunar Module Propellant Gage, NASA-TM-X-2362, L-7757.
- [26] Nevolin VG (1983), Parametric excitation of oscillations of a fluid flowing out of a container, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza* 2,
- [27] Bauer HF and Eidel W (1989a), Nonlinear oscillations of a non-viscous cylindrical liquid system in weightlessness condition, *ZAMP* 40(4)
- [28] Reynolds JM (1965), Stability of an electrostatically supported fluid column, *Phys Fluids* 8(1)
- [29] Devitt EB and Melcher JR (1965), Surface electrostatics with high frequency fluids, *Phys Fluids* 8(6)

Références

- [30] Briskman VA and Shaidurov GF (1968), Parametric Instability of a fluid surface in an alternating electric field, *Sov Phys- Doklady* 13(6),
- [31] Yih CS (1968a), Instability of unsteady flows or configurations - Part I: Instability of a horizontal liquid layer on an oscillatory plane, *J Fluid Mech* 31(4),
- [32] Yih CS (1968b), Stability of a horizontal fluid interface in a periodic vertical electric field, *Phys Fluid* 11(7),
- [33] Raco RJ (1968), Stability of a liquid in a longitudinal time varying electric field, *AIAA J* 6,
- [34] Gershuni GZ and Zhukhovitskii EM (1963), On parametric excitation of convective instability, *Prikl Mati Mekh* 27(5),
- [35] Rayleigh L (1892), *On the Instability of Cylindrical Surfaces*, *Collected papers*, 594, vol 3, Cambridge Univ Press, Cambridge, England.
- [36] Dodge FT and Garza LR (1972), Free surface vibrations of a magnetic liquid, *J Eng Indus*
- [37] Gershuni GZ and Zhukhovitskii EM (1964), On parametric excitation of a rigid rotating fluid, *PriklMat i Mekh* 28(5), 1010-1016.
- [38] Leonov GA and Morozov AV (1988), On the global stability of the forced motions of a liquid within an ellipsoid, *J Appl Math Mech* 52(1),
- [39] Bessem T, Edwards WS, and Tuckerman L (1996), Two-frequency parametric excitation of surface waves, *Phys Rev E* 54,
- [40] Moiseev NN (1958), On the theory of nonlinear vibration of a liquid of finite volume, *Prikl Math Mekh* 22, 612-621.
- [41] Faltinsen OM (1974), A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks, *J Ship Res* 18(4).
- [42] Waterhouse DD (1994), Resonant sloshing near a critical depth, *J FluidMech* 281, 313-318.
- [43] Faltinsen OM (1978), A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow, *J Ship Research* 22(3), 193-202.

Références

- [44] Nakayama T and Washizu K (1980), Nonlinear analysis of liquid motion in a container subjected to forced pitching oscillations, *Int J Numer Methods Eng* 15,1207-1220.
- [45] Wu S et al (1998), Numerical simulation of sloshing waves in a 3d tank based on a finite element method, *Appl Ocean Res* 20, 337-355.
- [46] Gollub JP and Simonelli F (1989), Bifurcation and modal interactions in fluid mechanics: surface waves, *Proc XVII Int Congress of Theor Appl Mech, Grenoble, France, 21-27 August 1988*, P Germain, M Piau, and D Caillerie (eds), Elsevier Science Publisher B V (North Holland), 73-82.
- [47] Simonelli F and Gollub, JP (1989), Surface wave mode interactions: effects of symmetry and degeneracy, *J Fluid Mech* 199, 471-494.
- [48] Feng ZC and Sethna PR (1989), Symmetry-breaking bifurcations in resonance surface waves, *J Fluid*
- [49] Fynakushi M and Inoue S (1991), Bifurcations in resonantly forced water waves, *European J Mech B/Fluids* 10, 31-36.
- [50] Gollub JP and Meyer CW (1983), Symmetry-breaking instabilities on a fluid surface, *Physica 6D*, 337-346
- [51] Ciliberto S and Gollub JP (1984), Pattern competition leads to chaos, *Phys Rev Lett* 52(11), 922-925.
- [52] Ciliberto S and Gollub JP (1985a), Phenomenological model of chaotic mode competition in surface waves, *IL Nouvo Cimento* 6(4), 309-316.
- [53] Ciliberto S and Gollub JP (1985b), Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves, *J Fluid Mech* 158,381-398.
- [54] Gollub JP and Meyer CW (1983), Symmetry-breaking instabilities on a fluid surface, *Physica 6D*, 337-346
- [55] Meron E and Procaccia I (1986a), Theory of chaos in surface waves: The reduction from hydrodynamics to few-dimensional dynamics, *Phys Rev Lett* 56,1323-1326.
- [56] Meron E and Procaccia I (1986b), Low-dimensional chaos in surface waves: theoretical analysis of an experiment, *Phys Revs A* 34, 3221-3237.

Références

- [57] Miles JW (1993), On faraday waves, *J Fluid Mech* 248, 571-683.
- [58] Bechhoefer J, Ego V, Manneville S, and Johnson B (1995), An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluid, *J FluidMech* 288,325-350.
- [59] Bechhoefer J (1996), A simple model of faraday waves, *Am J Phys* 64(12)
- [60] Kurdolli A and Gollub JP (1996a), Patterns and spatio-temporal chaos in parametrically forced surface waves: A systematic survey at large aspect ratio, *Physica D* 97, 133-154.
- [61]Kurdolli A and Gollub JP (1996b), Localized spatio-temporal chaos in surface waves, *Phys Revs E* 54, R1052-1055.
- [62] Müller HW (1993), Periodic Triangular patterns in the faraday experiment, *Phys Rev Lett* 71,3287-3290.
- [63] Edwards WS and Fauve S (1994), Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment, *J FluidMech* 278, 123-148
- [64] Christiansen B, Alstrom P, and Levinson MT (1992), Ordered capillary wave states: quasicrystals, hexagons, and radial waves, *Phys Rev Lett* 68,2157-2160.
- [65] Arbell H and Fineberg J (2000a), Two-mode rhomboidal states in driven surface waves, *Phys Rev Lett* 84, 654-657.
- [66] Arbell H and Fineberg J (2000b), Temporally Harmonic Oscillations in Newtonian Fluids, Reprint.
- [67] Kumar K (1996), Linear theory of faraday instability in viscous liquids, *Proc Royal Soc {London} A* 452, 1113-1126.
- [68] Cerda EA and Tirapegul EL (1997), Faraday's instability for viscous fluids, *Phys Rev Lett* 78,859-862.
- [69] Edwards WS and Fauve S (1994), Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment, *J Fluid Mech* 278, 123-148.
- [70] Beyer J and Friedrich R (1995), Faraday instability: Linear analysis for viscous fluids, *Phys Rev E* 51, 1162-1168.

Références

- [71] Bessem T, Edwards WS, and Tuckerman L (1996), Two-frequency parametric excitation of surface waves, *Phys Rev E* 54, 507-513
- [72] Bechhoefer J, Ego V, Manneville S, and Johnson B (1995), An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluid, *J Fluid Mech* 288,325-350.
- [73] Bechhoefer J (1996), A simple model of faraday waves, *Am J Phys* 64(12).