

Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire de Master

Rédigé par

BOUFELLIOUN Zoubir

En vue d'obtention du diplôme de master en Physique

Spécialité : **Astrophysique**

Intitulé

Introduction à la théorie de la dynamique
newtonienne modifiée (MOND) :
Une alternative à la matière noire

Soutenu publiquement le 06-07-2022 devant le jury

Mr BEKLI M. R.	MCA	<i>Président</i>	Université de Béjaïa
Mr BELABBAS A.	MCA	<i>Examineur</i>	Université de Béjaïa
Mr BELHADI Z.	MCA	<i>Encadrant</i>	Université de Béjaïa

Année Universitaire 2021/2022

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail aux personnes qui me sont très chères parmi lesquelles je cite :

Mes très chers parents auxquels je dois tout. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils m'ont sans cesse comblé. Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté ;

Mes sœurs *Kahina, Lila, Chadia, Rahima* avec leurs familles et mes frères *Mouloud, Massinissa* qui m'ont toujours soutenu et encouragé. ;

Mon oncle *Lounis* et mes tantes ;

Tous mes ami(e)s et mes camarades, en particulier *Lyes, Madjid, Lounis, Amine, Aimen, Riadh, Fares, Koceila, Kahina, Meriem* ;

Tous mes enseignants qui m'ont fait part de leur savoir tout au long de mon cursus universitaire.

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, je tiens à rendre grâce DIEU, le tout puissant, de m'avoir donné la santé, la patience et la volonté pour de mener à bout ce travail.

Je tiens surtout à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à mon encadrant M. BELHADI Zahir, Maître de conférence à l'Université à Bejaia, pour m'avoir honoré en acceptant de diriger mon travail, pour ses conseils, ses efforts et surtout pour son soutien durant la réalisation de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur BEKLI M. R., Maître de conférence à l'Université à Bejaia, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré par présider le jury.
- Monsieur BELABBAS A. , Maître de conférences, d'examiner ce travail. Je lui en suis profondément reconnaissant de m'avoir fait cet honneur

Mes remerciements s'adressent ensuite à l'ensemble des enseignants et des responsables du département de Physique de l'Université A / Mira de Bejaia pour leur disponibilité et leurs enseignements de qualité.

Je tiens à exprimer ici mes plus profonds et chaleureux remerciements à mes très chers parents pour le courage et le sacrifice dont ils ont fait preuve pendant la durée de mes études, en leurs souhaitant une longue vie pleine de joie et de santé.

Enfin, mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction	3
1 La gravitation newtonienne et la matière noire	5
1.1 Les trois lois de Newton	5
1.2 L'interaction gravitationnelle	6
1.2.1 La loi de de l'attraction universelle gravitationnelle	7
1.2.2 Le champ gravitationnel créé par une masse	7
1.2.3 L'énergie potentielle et le potentiel gravitationnel	8
1.3 Les lois de Kepler	10
1.3.1 L'énoncé des trois lois de Kepler	10
1.3.2 L'explication des lois de Kepler	11
1.4 Les vitesses cosmiques	16
1.5 L'équation de Poisson et le théorème de Gauss	18
1.5.1 Définition de l'angle solide	18
1.5.2 Le théorème de Gauss	20
1.5.3 L'équation de Poisson	22
1.6 La morphologie des galaxies	25
1.7 Les courbes de rotation plates des galaxies	29
1.8 La loi de Tully-Ficher	31
1.9 Introduction de la matière noire dans les galaxies	33
1.10 La manifestation de la matière noire à partir des lentilles gravitationnelles	33
1.11 Le rôle de la matière noire dans le modèle cosmologique standard	34
1.12 Les difficultés de la théorie de la matière noire	35
2 La théorie de la dynamique newtonienne modifiée (MOND)	36
2.1 La formule empirique de Milgrom	36
2.2 La difficulté de la théorie MOND comme modification de l'inertie	38
2.3 La formulation lagrangienne aquadratique (AQUAL) de la théorie MOND .	41
2.3.1 Le potentiel gravitationnel modifié	41
2.3.2 L'équation du Poisson modifiée	42
2.3.3 Le lagrangien du potentiel de la théorie MOND (AQUAL)	43

2.4	La formulation lagrangienne quasi-linéaire de la théorie MOND (QUMOND)	45
2.4.1	L'équation de Poisson avec QUMOND	45
2.4.2	Le lagrangien de QUMOND	47
2.5	Les lois de Kepler et la vitesse de libération en théorie MOND	48
2.5.1	Les lois de Kepler en théorie MOND	48
2.5.2	La vitesse de libération	50
2.6	L'effet du champ extérieur en théorie MOND	51
2.7	Les succès de la théorie MOND	56
2.8	Les difficultés de MOND dans les amas de galaxies	59
	Conclusion	61
	Bibliographie	63

Introduction générale

Les premiers principes de la mécanique céleste ont été proposés par Newton. En effet, Newton a découvert les trois lois de la dynamique qui demeurent jusqu'à nos jours le fondement de la mécanique classique. Il a aussi établi la fameuse loi de la gravitation appelée aussi loi d'attraction universelle, qui stipule que deux masses quelconques dans l'Univers sont attirées l'une vers l'autre par une force inversement proportionnelle au carré de la distance qui les séparent [1], ce qui lui a permis d'expliquer les lois de Kepler.

Depuis, la théorie de Newton de la gravitation a bien fait ses preuves dans l'étude du mouvement des corps célestes dans le système solaire. En effet, elle a permis de faire des prédictions très précises confirmées par l'observation. Ces succès ont conduit les astrophysiciens à faire des applications à des échelles encore plus grandes allant jusqu'au niveau galactique.

Cependant, pour l'application avec succès de la dynamique newtonienne aux galaxies, il est nécessaire de faire appel à la matière noire. Le point de départ est l'étude des courbes de rotation des galaxies qui doivent tendre vers zéro à très grande distance du centre galactique, mais les observations donnent une courbe qui s'aplatit dans ces régions, d'où l'intérêt d'introduire la matière noire pour que la loi d'attraction universelle reproduise ces résultats. Même à très grande échelle (amas de galaxies) l'invocation d'une masse supplémentaire invisible est plus que nécessaire pour avoir un rapport masse luminosité raisonnable.

Mais, malgré toutes nos capacités de recherche et d'observation actuelles, les astrophysiciens n'ont toujours pas observé ou détecté des objets particuliers qui confirment l'hypothèse de la présence de cette matière. A l'origine, certains ont suggéré que la masse manquante dans l'Univers été composée de petites étoiles faibles et de trous noirs, bien que des observations détaillées n'ont pas trouvé suffisamment de tels objets pour expliquer l'influence de la matière noire. Même si actuellement on fait l'hypothèse que cette matière invisible se compose de petites particules hypothétiques appelées particules massives à faible interaction (WIMP) [2], ces conjectures ne conduisent qu'à plus de questions.

Pour pallier ce problème, l'astrophysicien M. Milgrom en 1983 a proposé de modifier les lois de la gravitation au lieu de faire appel à une masse supplémentaire invisible [3, 4].

En effet, lorsqu'on est à de faibles accélérations, situation qui correspond à un champ gravitationnel très faible, la loi de gravitation devient proportionnelle à l'inverse de la distance au lieu de son carré.

A ce jour, la seule suggestion qui va dans une certaine mesure vers la résolution du problème de la courbe de rotation plate des galaxies spirales en se contentant de la matière visible, est la théorie de la dynamique newtonienne modifiée MOND (MODified Newtonian Dynamics) de Milgrom et Bekenstein.

L'objectif de ce mémoire est de présenter une nouvelle théorie modifiant les lois de gravitation universelle, constituant une alternative à la matière noire, dont l'existence n'est toujours pas mise en évidence.

Pour ce faire, ce mémoire est structuré en deux gros chapitres. Le premier chapitre est un rappel sur la gravitation newtonienne dans lequel nous allons introduire les lois de Newton et la loi d'interaction gravitationnelle ainsi que les explications théoriques des lois de Kepler. Ensuite, nous allons approfondir la théorie de la gravitation newtonienne dans le cadre de la théorie du potentiel gravitationnel conduisant au théorème de Gauss et à l'équation de Poisson. Dans la deuxième partie du chapitre, nous allons introduire quelques notions sur les galaxies ainsi que leurs caractéristiques, avant d'entamer une partie sur la théorie de la matière noire et son rôle dans la formation des grandes structures dans l'Univers depuis l'ère du Big bang. Le chapitre se termine en signalant quelques difficultés de la théorie de la matière noire.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de la théorie de la dynamique newtonienne modifiée. Dans un premier temps, nous allons introduire la forme modifiée du champ gravitationnel de la théorie MOND en montrant son lien avec le champ newtonien. Puis, nous présentons deux formulations lagrangiennes de cette théorie. En deuxième partie, nous allons étudier les lois de Kepler, la vitesse de libération ainsi que l'effet du champ extérieur dans le cas de la théorie MOND, et finir par analyser ces succès et ces difficultés.

La gravitation newtonienne et la matière noire

Isaac Newton (1643-1727) a mis au point les fameuses lois de mouvement et la loi de gravitation universelle, loi qui nous a permis de comprendre les mouvements des corps célestes [1]. Newton a montré que les planètes suivent des orbites elliptique autour du soleil suivant les lois de Kepler en formulant l'hypothèse que la force d'attraction est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance qui sépare une planète et le soleil.

Ensuite, ces notions ont été développées par d'autres physiciens et astronomes, pour que la force de l'attraction gravitationnelle soit généralisée pour étudier et bien comprendre la dynamique stellaire à grande échelle.

Les observations des astrophysiciens se reportant au mouvement des étoiles dans les galaxies suggèrent la présence d'une matière invisible pour maintenir la dynamique des systèmes stellaires en équilibre. Cette matière est connue sous le nom matière noire.

Première partie : La gravitation newtonienne

1.1 Les trois lois de Newton

En 1687, Newton a expliqué dans son ouvrage *Philosophiae naturalis principia mathematica* le mouvement des objets à l'aide des principes formulés sous forme de lois mathématiques qui constituent les trois lois de Newton :

La première loi

Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, l'en contraigne à changer l'état.

Cette loi peut être vue comme une définition d'un référentiel inertiel. Comme la vitesse d'un objet dépend du référentiel utilisé pour l'observer, la vitesse constante dans un référentiel peut être accélérée dans un autre. Un référentiel est inertiel ou galiléen, si un objet se déplace à une vitesse constante et ne subit aucune influence extérieure dans ce référentiel [1]. Donc la première loi peut se reformuler de la manière suivante :

Un objet libre d'influence extérieure se meut à une vitesse constante dans un référentiel inertiel.

La deuxième loi

Si un corps au repos ou en mouvement subit des forces extérieures (\vec{F}_i), des changements vont apparaître en même direction dans laquelle cette force est imprimée.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.1.1)$$

Sachant que l'impulsion \vec{p} s'écrit $\vec{p} = m\vec{v}$, où m est la masse du corps sur laquelle les forces sont appliquées et \vec{v} sa vitesse, son accélération sera $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et l'équation (1.1.1) devient, dans le cas d'une masse constante,

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = \sum_i \vec{F}_i \quad \implies \quad m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.1.2)$$

qui est le principe fondamental de la dynamique de la dynamique newtonienne (le PFD).

La troisième loi

L'action est toujours opposée à la réaction. Les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales en intensité et de sens contraires. Dans le cas de deux corps A et B, on aura la relation

$$\vec{F}_{a/b} = -\vec{F}_{b/a}$$

1.2 L'interaction gravitationnelle

La gravitation est la force qui détermine le comportement des astres et des corps célestes et l'objet de la mécanique céleste est d'étudier le mouvement de ces objets sous l'action de la gravitation.

1.2.1 La loi de de l'attraction universelle gravitationnelle

La loi d'attraction universelle ou loi de gravitation universelle, découverte par Isaac Newton décrit la gravitation comme une force qui s'exerce entre deux corps. Deux corps ponctuels de masse M et m avec ($M > m$) s'attirent avec une force proportionnellement à l'inverse du carré de la distance r qui les sépare. Autrement dit, la force qui s'exerce par le corps M sur le corps m s'écrit

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u} = -G \frac{Mm}{|r|^3} \vec{r} \quad (1.2.1)$$

\vec{r} est le rayon vecteur entre M et m

\vec{u} est le vecteur unitaire en direction $M \rightarrow m$

G est la constante de gravitation (constante de Newton)

$$G = 6.6732 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \quad (1.2.2)$$

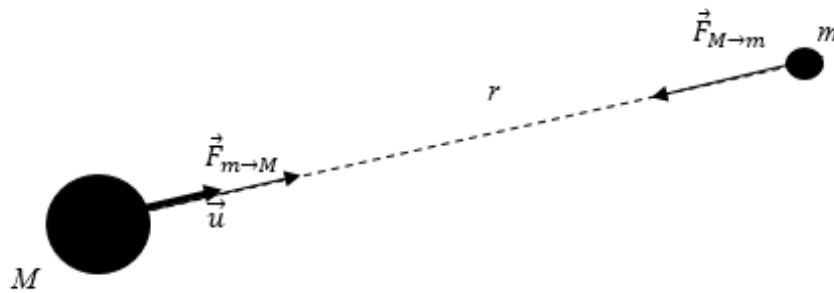


Figure 1.1 - Une figure qui montre les forces de gravitation exercées entre deux corps massifs

1.2.2 Le champ gravitationnel créé par une masse

La force d'attraction gravitationnelle ne peut exister que lorsque deux masses au moins sont présentes. Il faut donc considérer que chaque masse M crée en tout point de l'espace un champ gravitationnel \vec{g} , et en présence d'une autre masse m , elle subira une force d'attraction \vec{F} d'où

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \implies \quad -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u} = m\vec{g} \quad (1.2.3)$$

On déduit l'expression du champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle M dans l'espace qui l'entoure

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r = -G \frac{M}{|r|^3} \vec{r} \quad (1.2.4)$$

Cette fois, \vec{r} est le rayon vecteur joignant M au point considéré, \vec{e}_r est le vecteur unitaire de même direction. Le champ \vec{g} créé par M est non homogène, car il est différent selon

qu'on soit plus proche de M ou plus loin. Donc, il n'est pas le même en tout point de l'espace, et il pointe toujours vers la masse source.

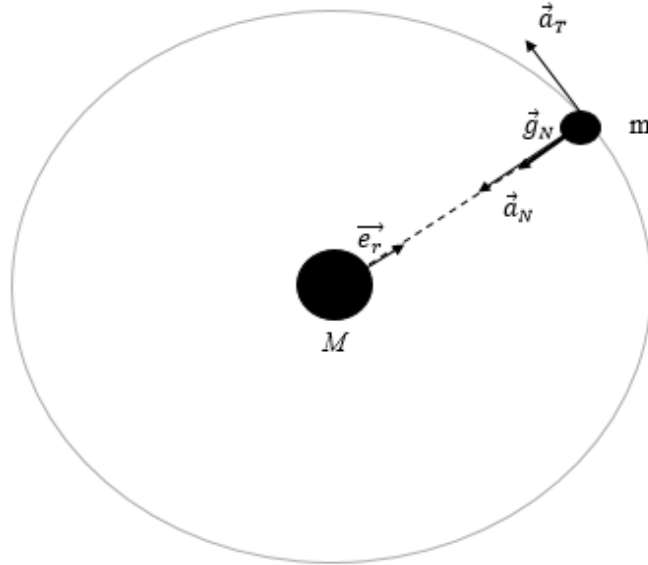


Figure 1.2 - Une figure qui montre une masse m soumise à un champ gravitationnel central créé par une masse M

1.2.3 L'énergie potentielle et le potentiel gravitationnel

La force d'attraction gravitationnelle dérive d'une énergie potentielle. En effet, soit la masse m qui subit la force d'attraction de la masse M donnée par l'équation (1.2.3). S'il existe une énergie potentielle, elle doit vérifier la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\vec{\nabla} E_p$. Pour simplifier, supposons que la masse M est à l'origine, en utilisant l'équation du gradient en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , sachant que $\vec{u} = \vec{e}_r$, on en déduit par projection que

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{GMm}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial E_p}{\partial \psi} = 0 \end{cases} \quad (1.2.5)$$

On peut bien vérifier que E_p ne dépend que de la distance au centre r . En intégrant l'équation (1.2.5), on trouve

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \text{constante} \quad (1.2.6)$$

En imposant que l'énergie potentielle s'annule quand r tend vers l'infini, la constante d'intégration va s'annuler. Donc la force d'attraction dérive bien de l'énergie potentielle qui s'écrit

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Le potentiel gravitationnel φ associé au champ gravitationnel \vec{g} créé par la masse M est égal à $\varphi = \frac{E_P}{m}$. Autrement dit,

$$\varphi(r) = -G \frac{M}{r} \quad (1.2.7)$$

Le champ gravitationnel peut lui aussi s'écrire sous la forme

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}_r \varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r. \quad (1.2.8)$$

Introduisons maintenant le champ gravitationnel créé par une densité de masse volumique ρ contenue dans le volume V' au point \vec{r} , qui est donné par l'équation

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.2.9)$$

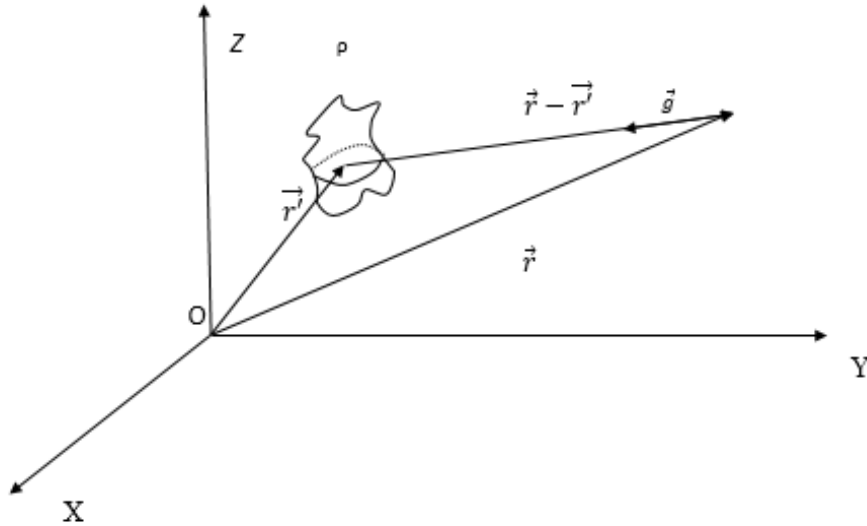


Figure 1.3 - Illustration du champ gravitationnel créé en tout point dans l'espace par une densité de masse ρ

Le potentiel gravitationnel suivant doit obéir à l'équation (1.2.8)

$$\varphi(\vec{r}) = -G \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'. \quad (1.2.10)$$

Pour le vérifier, calculons d'abord $\overrightarrow{\text{grad}}_r \varphi(\vec{r})$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_r \varphi(\vec{r}) = -G \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \overrightarrow{\text{grad}}_r \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \quad (1.2.11)$$

Remarquons que

$$\overrightarrow{\text{grad}}_r \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.2.12)$$

alors l'équation (1.2.11) devient

$$\overrightarrow{\text{grad}}_r \varphi(\vec{r}) = +G \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{g}(\vec{r}) \quad (1.2.13)$$

ce qui montre clairement que le champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ dérive bel et bien du potentiel $\varphi(\vec{r})$.

1.3 Les lois de Kepler

1.3.1 L'énoncé des trois lois de Kepler

En astronomie, sur la base des observations et des mesures de la position des planètes effectuées par Tycho Brahé, Johannes Kepler a découvert ses fameuses lois de mouvement des planètes autour du soleil [5].

La première loi

Toute planète décrit une orbite elliptique dont le soleil occupe l'un des deux foyers.

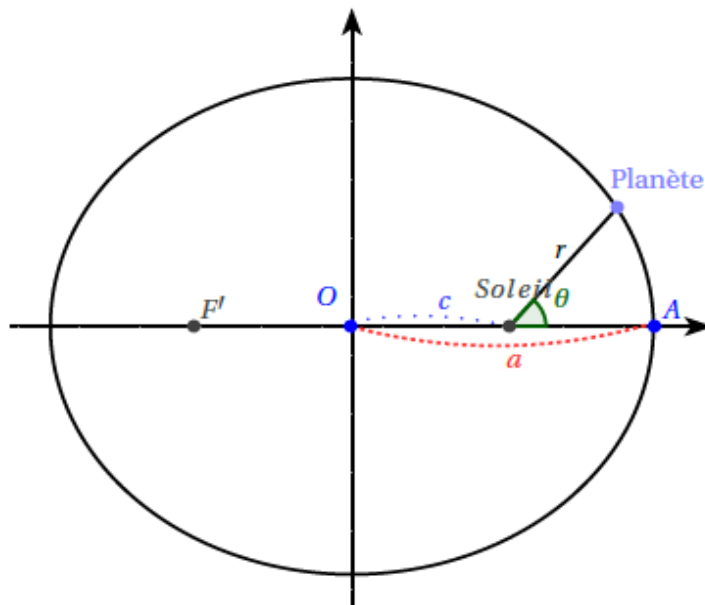


Figure 1.4 - *Figure d'une orbite elliptique dont une planète tourne autour du soleil qui occupe l'un des foyers de l'ellipse*

La deuxième loi

Le rayon vecteur entre le soleil et une planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

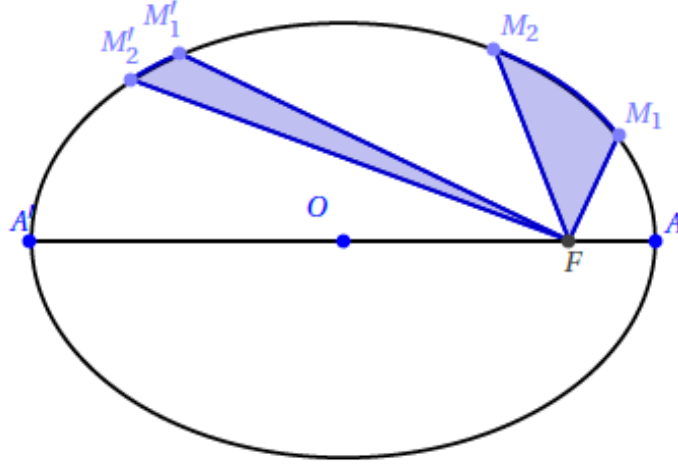


Figure 1.5- Illustration de deux aires balayées pendant des durées égales

La troisième loi

Le rapport du carré de la période T de révolution sur le cube de demi-grand axe a de la trajectoire elliptique est égale à la même constante pour toutes les planètes du système solaire.

$$\frac{T^2}{a^3} = k \quad (1.3.1)$$

avec k c'est une constante.

1.3.2 L'explication des lois de Kepler

Loi des aires (la deuxième loi)

Considérons un corps céleste de masse m soumis à une force d'attraction $\vec{F} = -\frac{GMm}{|r|^3}\vec{r}$ d'un autre corps de masse M qui occupe l'origine des coordonnées O sans le quitter ($m \ll M$) [6]. En mécanique classique, le moment cinétique de la masse m par rapport au point O s'écrit

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad (1.3.2)$$

où \vec{r} est le vecteur position et \vec{v} la vitesse de cette masse m . La variation dans le temps du moment cinétique est donnée par

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \implies \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (1.3.3)$$

Donc, dans le cas de la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{GMm}{|r|^3}\vec{r}$ qui est une force centrale, le moment cinétique est conservé

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (1.3.4)$$

Comme la direction de ce vecteur moment cinétique ne changera pas au cours du temps, le vecteur position \vec{r} va toujours rester dans le plan orienté par ce dernier. Autrement dit, le mouvement de la masse m va se faire dans un plan.

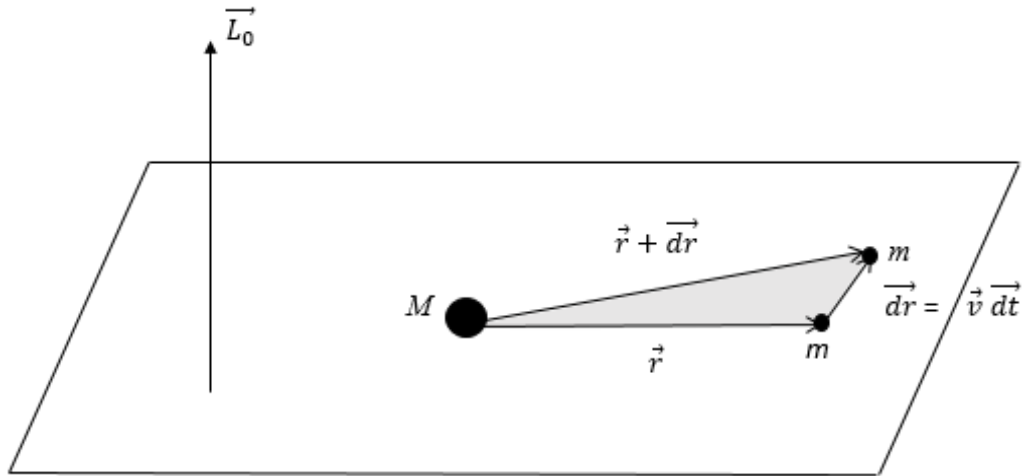


Figure 1.6 - Représentation graphique de la surface balayée par le vecteur-position

D'un autre côté, la surface balayée par le vecteur position entre les instants t et $t + dt$ s'obtient grâce au produit vectoriel suivant la formule

$$ds = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge (\vec{r} + d\vec{r})| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge (\vec{r} + \vec{v} dt)| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| dt \quad (1.3.5)$$

d'où la relation

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{L}| = C^{st} \quad (1.3.6)$$

On retrouve ainsi le moment cinétique conservé. Nous pouvons déduire que la dérivée par rapport au temps de la surface s balayée par le vecteur de position est une constante, c'est à dire que les surfaces balayées en des temps égaux sont égales, ce qui confirme la deuxième loi de Kepler.

La première loi

Comme le mouvement se fait dans un plan, on introduit les expressions des vecteurs de position, vitesse et l'accélération en coordonnées polaires :

Le vecteur de position

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (1.3.7)$$

Le vecteur de la vitesse

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \quad (1.3.8)$$

Le vecteur d'accélération

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta \quad (1.3.9)$$

Nous avons d'après la loi de gravitation newtonienne

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad (1.3.10)$$

En faisant l'égalité entre ces deux équations et en remplaçant le vecteur accélération \vec{a} par son expression en coordonnées polaires, on trouve

$$-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r = m\left[\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta\right] \quad (1.3.11)$$

d'où les équations de mouvement

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -G\frac{M}{r^2} \quad (1.3.12)$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = K \quad (1.3.13)$$

où K est une constante d'intégration. D'un autre côté, nous avons la relation

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = -r^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.3.14)$$

En utilisant les deux expressions précédentes, on peut donner l'expression de $\frac{d^2r}{dt^2}$ en fonction de K

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -r^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\theta}{dt} = -K\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.3.15)$$

Après dérivation,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[-K\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -K\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\frac{d\theta}{dt} = \frac{-K^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.3.16)$$

Nous avons aussi l'implication

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = K \quad \Rightarrow \quad r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{K^2}{r^3} \quad (1.3.17)$$

Remplaçant les expressions (1.3.16) et (1.3.17) dans l'expression (1.3.12)

$$-G \frac{M}{r^2} = \frac{-K^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{K^2}{r^3} \quad (1.3.18)$$

On trouve ainsi une équation différentielle du second ordre qui décrit la trajectoire de la masse m

$$\frac{GM}{K^2} = \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \quad (1.3.19)$$

dont la générale solution est

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{K^2} \quad (1.3.20)$$

où A et θ_0 sont des constantes d'intégration. Après simplification et si on pose $p = \frac{K^2}{GM}$ et $e = \frac{AK^2}{GM}$, on déduit finalement l'équation d'une conique en coordonnées polaires

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (1.3.21)$$

Si $e = 0$, la conique est un cercle.

Si $0 < e < 1$, la conique est une ellipse.

Si $e = 1$, la conique est une parabole.

Si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

On reconnaît ainsi l'équation d'une conique d'excentricité e , et de paramètre p , et comme la trajectoire des planètes est fermée, on en déduit que la trajectoire est une ellipse.

La troisième loi

Soit un point matériel P qui se déplace sur une ellipse du foyer F et F' du paramètre P comme le montre la figure suivante

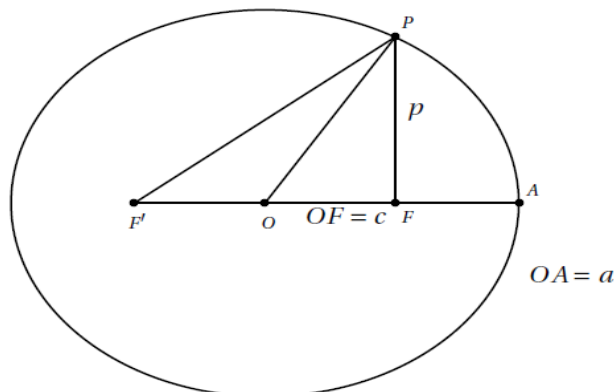


Figure 1.7- Illustration qui montre un point matériel P qui se déplace sur l'orbite elliptique

On fait un choix particulier $\theta_0 = 0$, ce qui se traduit par le fait que $\theta = \frac{\pi}{2}$ implique que $r = p = PF$. Dans la figure (1.7) on note que $PF = p$ et $OF = c$ ainsi que $OA = a$. D'après la définition de l'ellipse, nous avons $PF + PF' = 2a$. Sachant que $\widehat{PFF'} = \frac{\pi}{2}$, le théorème de Pythagore implique que $FF'^2 + PF^2 = PF'^2$. Ensuite, on peut en déduire ce qui suit :

$$\begin{cases} p + PF' = 2a \\ p^2 + (2c)^2 = PF'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PF' = 2a - p \\ p^2 + 4c^2 = (2a - p)^2 \end{cases}$$

d'où la relation

$$c^2 = a^2 - ap \quad (1.3.22)$$

Nous savons que l'excentricité $e = \frac{c}{a}$, donc on peut écrire $c^2 = e^2 a^2$, et le paramètre p devient $p = a(1 - e^2)$. Ainsi, l'équation (1.3.21) se réduit à la forme

$$r = \frac{a(1 - e)}{1 + e \cos \theta} \quad (1.3.23)$$

Nous avons vu que la surface ds balayée pendant un laps de temps dt est une constante (loi des aires)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{K}{2}. \quad (1.3.24)$$

On en déduit que la surface balayée pendant la période de rotation T , qui est aussi égale à l'aire de la surface de la trajectoire elliptique, est

$$S = \int_0^T \frac{K}{2} dt \Rightarrow S = \frac{K}{2} T \quad (1.3.25)$$

S est la surface de l'ellipse de grand axe a et de petite axe b , donc $S = ab\pi$. En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve

$$\pi ab = \frac{K}{2} T \Leftrightarrow (\pi ab)^2 = \left(\frac{K}{2} T \right)^2 \quad (1.3.26)$$

Maintenant, d'une part, nous avons $p = a(1 - e^2)$, avec $p = \frac{K^2}{GM}$ et d'autre part $b^2 = a^2(1 - e^2)$, donc si on remplace dans l'équation précédente on trouve

$$\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{GM a (1 - e^2)}{4} T^2 \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = C^{ste} \quad (1.3.27)$$

Comme G et M sont des constantes, on déduit que le carré de la période T de révolution sur le cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique est égal à une constante pour

toutes les planètes de système solaire comme l'avait bien prédit Kepler dans sa troisième loi.

Nous avons ainsi démontré que la loi d'attraction universelle et le principe fondamental de la dynamique conduisent inévitablement aux trois lois de Kepler.

1.4 Les vitesses cosmiques

En 1883, Constantine Tsiolkovski a introduit une nouvelle notion dans le domaine de l'astronautique qui est la notion des vitesses cosmiques qui sont en nombre de trois.

La première vitesse "la vitesse de satellisation"

La vitesse de satellisation est la vitesse minimale qu'il faut donner à un corps de masse m pour qu'il se satellise autour d'un autre corps de masse céleste M en orbite circulaire basse. Sachant que $r = R$ est le rayon de satellisation d'un corps, on reconnaît que $v_s = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$ est la vitesse circulaire. Ainsi, la relation (1.3.12) devient

$$-G \frac{M}{R^2} = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad G \frac{M}{R} = \left[R \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right]^2 \quad (1.4.1)$$

On déduit donc l'expression de la vitesse de satellisation comme suit :

$$G \frac{M}{R} = v_s^2 \quad \Rightarrow \quad v_s = \sqrt{G \frac{M}{R}} \quad (1.4.2)$$

Donc v_s est la vitesse de satellisation d'un corps autour d'un corps de masse M à une distance R .

La deuxième vitesse "la vitesse de libération"

Si un corps de masse m possède une certaine vitesse suffisante, il peut échapper à l'attraction gravitationnelle d'un autre corps de masse M . On appelle cette vitesse *la vitesse de libération*. On peut la déterminer par deux méthodes :

La première méthode :

En utilisant la relation entre la loi de la force d'attraction et l'accélération en coordonnées polaire où $\theta = \theta_0 = C^{st}$ (pour simplifier, on a choisi un mouvement radial), la relation (1.3.12) devient

$$-G \frac{M}{r^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (1.4.3)$$

Si on multiplie les deux membres de l'équation précédente par dr et on utilise le fait que $\frac{dr}{dt} = v$ et $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ on aura l'équation

$$-G \frac{M}{r^2} dr = v dv \quad (1.4.4)$$

La vitesse minimale v_l qu'il faut pour se libérer à partir d'un rayon R pour arriver à l'infini avec une vitesse nulle se calcule comme suit :

$$\int_R^{+\infty} -G \frac{M}{r^2} dr = \int_{v_l}^0 v dv \quad \implies \quad \frac{GM}{R} = \frac{1}{2} v_l^2 \quad (1.4.5)$$

Finalement,

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1.4.6)$$

On a ainsi obtenu v_l qui est la vitesse de libération du champ créé par un corps de masse M à partir d'une distance R .

La deuxième méthode :

L'énergie potentielle du corps m est $E_P = -\frac{GMm}{r}$ et son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, alors l'énergie mécanique de ce dernier $E_m = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$ est conservée car notre système est conservatif. A un instant donné, la masse m se trouve au point $\vec{r} = \vec{R}$ avec la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_l$. Pour quitter complètement la masse M , avec une vitesse minimale, elle doit arriver à l'infini ($R \rightarrow \infty$) avec une vitesse nulle ($\vec{v}_\infty = \vec{0}$). Dans ce cas, E_m va tendre vers zéro (il suffit de remplacer dans l'expression de E_m). Mais l'énergie mécanique est conservée, d'où la relation

$$E_m = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_l^2 = 0$$

On en déduit directement que

$$\frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_l^2 \quad \implies \quad v_l^2 = 2\frac{GM}{R}$$

Finalement la vitesse de libération est

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1.4.7)$$

On a ainsi obtenu pour la deuxième fois la vitesse de libération d'un corps de masse M à partir d'une distance R .

La troisième vitesse

La troisième vitesse est définie comme étant la vitesse de libération d'un corps quittant le système solaire depuis l'orbite terrestre.

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a}} \quad (1.4.8)$$

où M_\odot est la masse du soleil et a est la distance moyenne terre-soleil.

1.5 L'équation de Poisson et le théorème de Gauss

1.5.1 Définition de l'angle solide

En géométrie spatiale, un angle solide est l'analogie tridimensionnel de l'angle plan. Il désigne une partie dans l'espace vue à partir d'un point O qui est délimitée par un cône et son unité est le stéradian. Soit l'angle solide montré dans la figure (1.8).

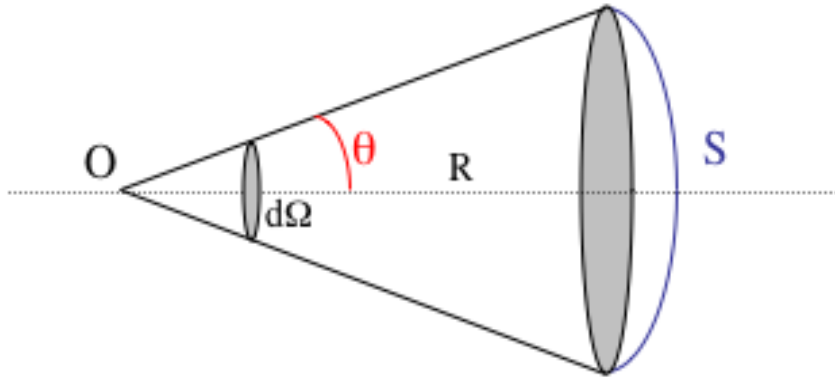


Figure 1.8 - La projection d'une angle solide $d\Omega$ sur une surface S

On définit aussi l'angle solide comme le rapport de l'aire S de la projection d'une surface sur une sphère dont le centre est le sommet du cône sur carré du rayon R de cette sphère

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (1.5.1)$$

L'angle solide élémentaire $d\Omega$ correspondant à une surface infinitésimale ds vue à partir de l'origine O s'écrit

$$d\Omega = \frac{ds(\vec{u} \cdot \vec{n})}{r^2} = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{u}}{r^2} \quad \text{où} \quad \vec{ds} = ds \vec{n} \quad (1.5.2)$$

où le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{z}}{r}$ et \vec{n} est vecteur unitaire qui donne la direction de l'élément de surface. Dans le cas d'une sphère de rayon $r = R$, l'élément de surface $ds = R^2 \sin \theta$

$d\theta d\varphi$ et $\vec{n} = \vec{e}_r$, avec $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$, donc

$$d\Omega = \frac{R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi}{R^2} = \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (1.5.3)$$

d'où

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 4\pi \quad (1.5.4)$$

Ce résultat est valable pour toutes les surfaces fermées simples car elles peuvent toutes être projetées sur une sphère.

Supposons à présent qu'on souhaite calculer l'angle solide à partir d'un point O' qui occupe la position \vec{r}' . Si les points de la surface S en question sont repérés par le vecteur \vec{r} , l'angle solide infinitésimal va s'écrire

$$d\Omega = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{u}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{ds \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.5.5)$$

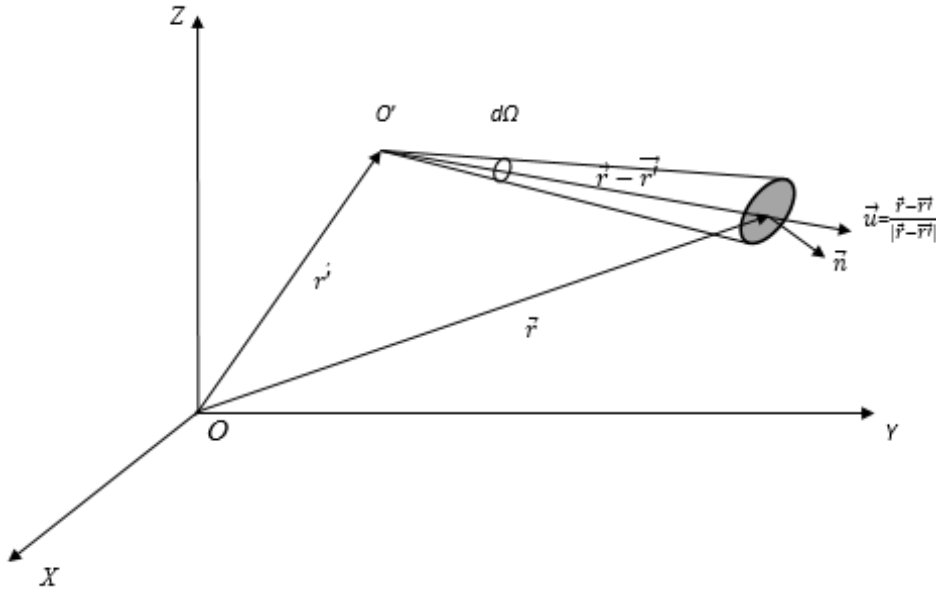


Figure 1.9 - Illustration d'un angle solide élémentaire dans un plan tridimensionnel

Si en plus, la surface S est fermée simple et contient le point O' , alors $\Omega = 4\pi$. En utilisant l'équation précédente on peut déduire la relation

$$\Omega = \oint_S \frac{\vec{ds} \cdot \vec{u}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = 4\pi \quad (1.5.6)$$

Ce résultat est valable pour toutes les surfaces fermées simples contenant le point O' repéré par le vecteur \vec{r}' .

1.5.2 Le théorème de Gauss

En électrostatique, nous pouvons calculer le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée en utilisant le théorème de Gauss à condition de connaître les charges électriques que cette surface renferme. Il est aussi possible d'appliquer le théorème de Gauss au flux du champ gravitationnel \vec{g} créé par une distribution de la masse ρ à travers une surface S fermée contenant un volume V .

Sachant que $\vec{g} = \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$, on peut calculer le flux à travers une surface fermée S qui contient toute la densité $\rho(\vec{r}')$. Autrement dit, \vec{r}' est situé à l'intérieur de S (voir figure 1.10). En effet, grâce à l'équation (1.5.6), on aura

$$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{ds} = -G \oint_S \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{ds} \quad (1.5.7)$$

$$= -G \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') dv' \oint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{ds}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -4\pi G \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') dv' \quad (1.5.8)$$

$$= -4\pi GM \quad (1.5.9)$$

où M est la masse totale contenue à l'intérieur du volume V' .

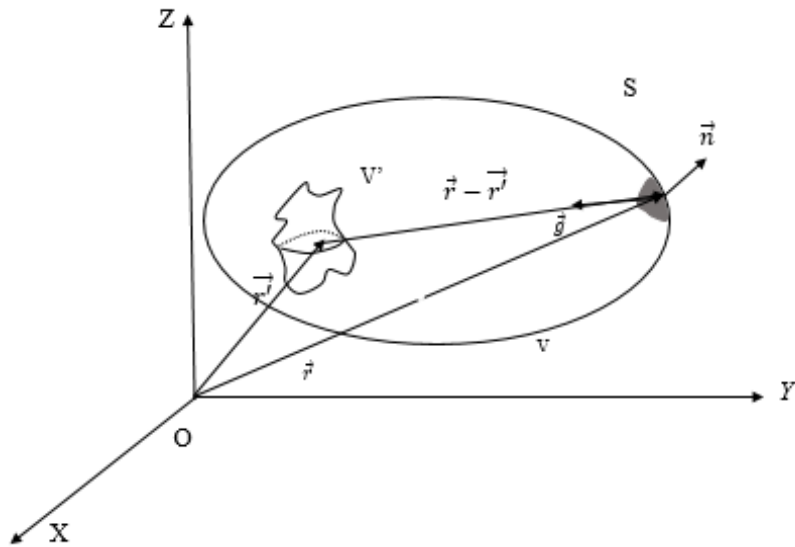
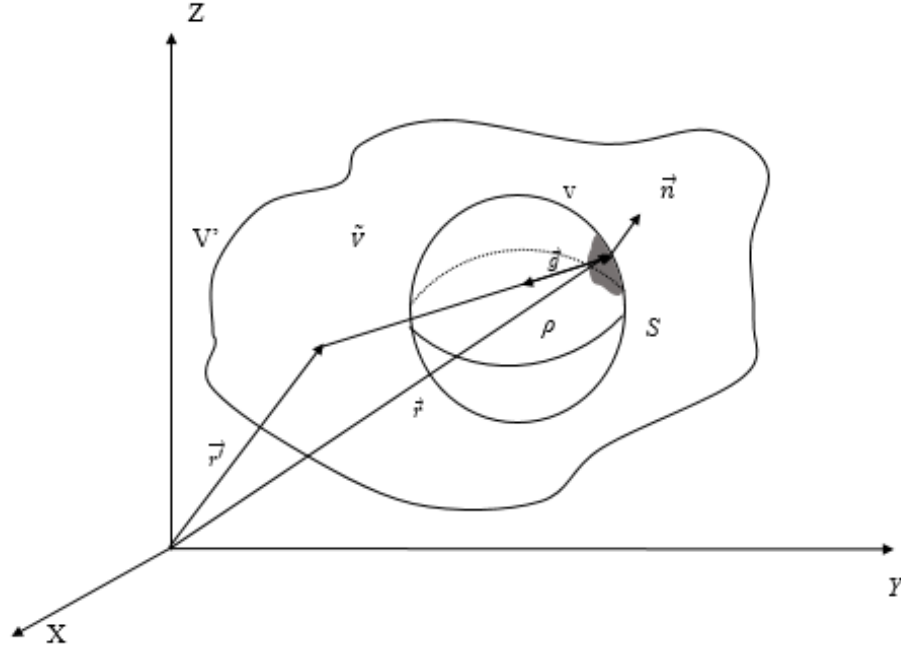


Figure 1.10 - Figure représentant le flux à travers une surface S fermée qui renferme toute la densité de masse ρ

Dans le cas où la surface de Gauss S qui délimite le volume V contient juste une partie de la densité $\rho(\vec{r}')$ contenue dans le volume V' , nous allons introduire le volume \tilde{V} tel que $V' = V \cup \tilde{V}$ (voir la figure 1.11).

Figure 1.11 - La surface de Gauss S située à l'intérieur du volume V'

La relation (1.5.7) va s'écrire alors comme suit

$$\oint_s \vec{g} \cdot \vec{ds} = -G \oint_s \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{ds} - G \oint_s \iiint_{\tilde{V}} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{ds} \quad (1.5.10)$$

Le premier terme vaut $-4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}') dv'$ car $\vec{r}' \in V$ et le deuxième terme s'annule car dans le cas où le champ est créé par une masse extérieure à la surface de Gauss, le flux est nul $\vec{r}' \notin V$.

Pour le démontrer, remarquons que l'angle solide $d\Omega$ traversant une surface fermée en ds_1 et continue jusqu'à la traverser une deuxième surface ds_2 (voir la figure 1.12).

$$d\Omega = \frac{ds_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{u}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^2} = \frac{ds_2 \vec{N}_2 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|^2} \Rightarrow \frac{ds_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{u}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^2} - \frac{ds_2 \vec{N}_2 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|^2} = 0 \quad (1.5.11)$$

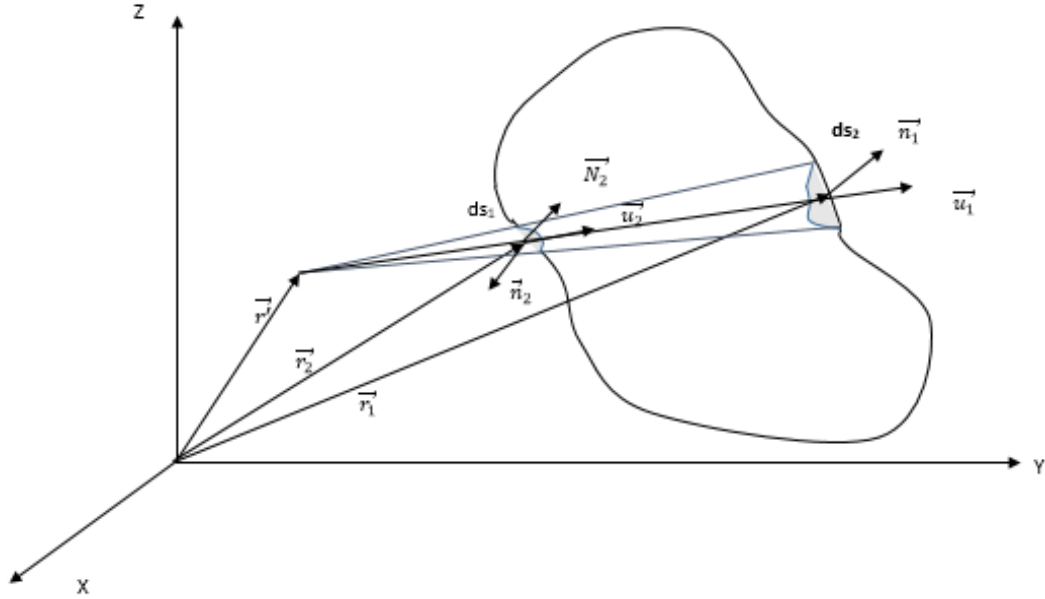


Figure 1.12 - Illustration d'un angle solide qui traverse une densité surfacique quelconque

A présent, la densité de masse $\rho(\vec{r}')$ va créer un champ $\vec{dg}_1 = \frac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^2} \vec{u}_1$ en \vec{r}_1 et un champ $\vec{dg}_2 = \frac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|^2} \vec{u}_2$ en \vec{r}_2 . Dans ce cas, leur flux $d\Phi$ à travers la surface ds_1 et ds_2 sera

$$d\Phi = \vec{dg}_1 \cdot \vec{n}_1 ds_1 + \vec{dg}_2 \cdot \vec{n}_2 ds_2 = \vec{dg}_1 \cdot \vec{n}_1 ds_1 - \vec{dg}_2 \cdot \vec{N}_2 ds_2 \quad (1.5.12)$$

Autrement dit, d'après (1.5.11)

$$d\Phi = \frac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^2} \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 ds_1 - \frac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|^2} \vec{u}_2 \cdot \vec{N}_2 ds_2 = 0 \quad (1.5.13)$$

Donc le flux en ds_1 annule le flux en ds_2 , ce qui fait que le flux total du champ gravitationnel créé par une masse extérieure à une surface fermée est nul. Finalement, nous obtenons le théorème de Gauss

$$\oint_s \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}') dv' \quad (1.5.14)$$

où le volume V est délimité par la surface S .

1.5.3 L'équation de Poisson

En analyse vectorielle, l'équation de Poisson est l'équation aux dérivées partielles du second ordre ayant la forme $\Delta\phi = f$ où Δ est l'opérateur laplacien et f une distribution quelconque. Le potentiel gravitationnel vérifie également ce genre d'équations. En effet,

D'après le théorème de Gauss

$$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{ds} = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}') dv' \quad (1.5.15)$$

Après changement de la variable d'intégration,

$$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{ds} = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) dv \quad (1.5.16)$$

Tout en ayant recours au théorème d'Ostrogradski

$$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{g}(\vec{r}) dv \quad (1.5.17)$$

on aboutit à l'équation ci-dessous.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{g}(\vec{r}) dv = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) dv \quad (1.5.18)$$

Cette relation est valable quelque soit le volume V délimité par la surface de Gauss S . Il s'en suit que

$$\operatorname{div} \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r}) \quad (1.5.19)$$

Mais le champ gravitationnel dérive d'un potentiel

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi(\vec{r}) \quad (1.5.20)$$

d'où

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}) \quad (1.5.21)$$

Comme le laplacien est défini par $\Delta\varphi(\vec{r}) = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi(\vec{r})$, l'équation précédente se réduit alors à la forme

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}) \quad (1.5.22)$$

Autrement dit, $\Delta\varphi(\vec{r})$ est égal à la distribution de masse $4\pi\rho(\vec{r})$ multipliée par la constante gravitationnelle G . C'est l'équation de Poisson relative à la gravitation [7].

Il est aussi possible de déduire l'équation de Poisson à partir du principe de moindre action à l'aide d'un lagrangien quadratique. En effet, soit la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi + 4\pi G \rho \varphi = \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + 4\pi G \rho \varphi \quad (1.5.23)$$

où φ est le potentiel gravitationnel créé par la densité de masse ρ . A l'aide de l'équation de Euler-Lagrange

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.5.24)$$

on vérifie que

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi - 4\pi G \rho = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 4\pi G \rho \quad (1.5.25)$$

Nous avons bel et bien obtenu l'équation de Poisson $\Delta \varphi = 4\pi G \rho$ à l'aide du principe de moindre action.

Nous allons terminer cette partie par la détermination du potentiel gravitationnel en dehors des masses qui vont le créer ($\rho = 0$). Dans cette situation, l'équation de Poisson s'écrit $\Delta \varphi = 0$. En coordonnées sphérique

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan(\theta)} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \quad (1.5.26)$$

Dans le cas stationnaire à symétrie sphérique $\varphi = \varphi(r)$ ainsi $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, l'équation de Poisson se réduit à la forme

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.5.27)$$

Si pose $\frac{d\varphi}{dr} = \chi$, l'équation (1.5.27) va devenir

$$\frac{d\chi}{dr} + \frac{2}{r} \chi = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{A}{r^2} \quad (1.5.28)$$

où A est une constante d'intégration. On en déduit que

$$\varphi = \int \chi dr = \int \frac{A}{r^2} dr = -\frac{A}{r} + B \quad (1.5.29)$$

où B une deuxième constante d'intégration. Mais si on impose à φ de s'annuler à l'infini, on doit prendre $B = 0$ pour avoir finalement

$$\varphi = \frac{-A}{r} \quad (1.5.30)$$

On retrouve ainsi le cas d'une masse ponctuelle M où le potentiel gravitation est donné par la relation

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

ce qui montre que l'équation de Poisson contient la loi de l'attraction universelle formulée par Newton.

Deuxième partie : La matière noire

1.6 La morphologie des galaxies

Les galaxies sont de vastes systèmes d'étoiles autogravitants à grande échelle constituées de gaz, d'étoiles et de poussières interstellaires (et probablement de la matière noire). Les galaxies varient en taille partant des galaxies naines avec quelques centaines de millions d'étoiles, aux galaxies géantes allant jusqu'à cent mille milliards d'étoiles, chacune en orbite autour du centre de sa galaxie.

Comme les étoiles, les galaxies forment souvent des amas. En effet, le regroupement et la concentration de plusieurs galaxies de l'ordre de dizaines jusqu'au millier forme ce qu'on appelle les amas de galaxies. Les superamas de galaxies sont les structures les plus massives connues à ce jour.

Les galaxies spirales

Ce type de galaxies adopte la forme d'un disque aplati qui présente des bras spiraux (siège de la formation stellaire). Ces galaxies contiennent en leurs centres un bulbe de forme sphérique, abritant généralement en son sein un trou noir super massif. Il s'agit d'une zone lumineuse et relativement dense composée généralement de vieilles étoiles.

On observe autour du disque et du bulbe une extension beaucoup plus vaste et moins dense de faible luminosité, généralement de forme sphérique appelée le halo stellaire, contenant des amas globulaires (regroupement de milliers d'étoiles très denses) et une éventuelle matière sombre (noire, non lumineuse) qui demeure encore mystérieuse.



Figure 1.13- Cette image, prise avec le télescope (VLT) de l'ESO, montre la galaxie NGC 1187. Cette galaxie spirale impressionnante se situe à 60 millions d'années-lumière de la terre dans la constellation de l'Eridan. NGC 1187 a été le théâtre de deux explosions de supernova observées au cours des trente dernières années, la dernière en 2007.

Dans certaines des galaxies spirales, les bras spiraux n'émergent pas du centre de la galaxie, mais d'une barre constituée d'étoiles traversant ce centre ; on parle ici de galaxies spirales barrées.

Les galaxies elliptiques

Les galaxies elliptiques sont à la fois les plus massives et les plus grandes des types de galaxies. Elles sont des concentrations de milliards de vieilles étoiles sous la forme d'ellipsoïde. Elles sont dépourvues de disque et il n'y a pratiquement pas de formation stellaire en leur sein car elles contiennent très peu, voire pas du tout, de gaz interstellaire.



Figure 1.14 - La galaxie elliptique M87. Aussi appelée NGC 4486, elle est de type E0 dans la séquence de Hubble. © Canada-France-Hawaii Telescope, J.-C. Cuillandre(CFHT), Coelum

Les galaxies lenticulaires

Une galaxie lenticulaire est un type de galaxie intermédiaire entre une galaxie elliptique et une galaxie spirale. Ce sont des galaxies à disque qui possèdent un noyau volumineux, dépourvues de bras spiraux bien définis.



Figure 1.15 - M104, appelée galaxie du sombrero est une galaxie lenticulaire.

Les galaxies irrégulières

Ce type de galaxies ne montre aucune structure régulière. Elles sont encore riches en gaz, en poussière et en jeunes étoiles chaudes et très brillantes, dont la formation est récente et la distribution est chaotique.



Figure 1.16 - La galaxie irrégulière NGC 4214. Les régions très brillantes sont des zones où il se forme beaucoup d'étoiles.

La séquence de Hubble

La séquence de Hubble est une classification des types de galaxies basées sur leur forme morphologique.

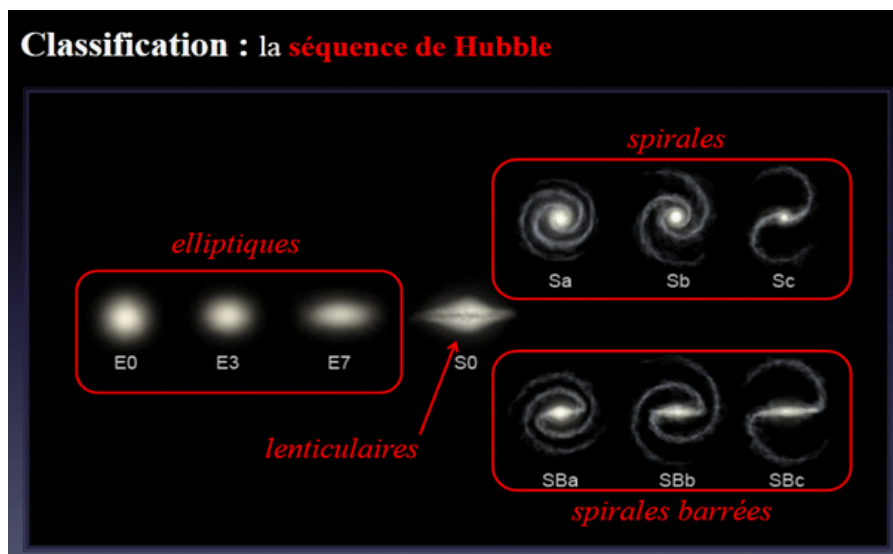


Figure 1.17 - Diagramme de la séquence de Hubble

1.7 Les courbes de rotation plates des galaxies

La courbe de rotation d'une galaxie peut être représentée par un graphe qui décrit la vitesse orbitale des objets en fonction de la distance par rapport au centre de cette galaxie [8]. Dans les années 70, à partir de l'analyse des spectres des galaxies, l'astronome américaine Vera Rubin étudia la rotation des galaxies spirales. L'observation de plusieurs galaxies a montré que les étoiles périphériques tournent autour du centre galactique avec une vitesse constante à grande distance du centre, ce qui constitue une anomalie avec les prédictions de la gravitation newtonienne basées sur la loi d'attraction universelle en vertu de laquelle la vitesse d'une étoile sur une orbite circulaire décroît proportionnellement à la distance par rapport au centre. Cette situation a soulevé la question de l'existence d'une matière manquante, à cause de la différence entre la masse lumineuse (visible) présente dans les étoiles qu'on arrive à détecter grâce au rayonnement et la masse dynamique qu'on déduit en étudiant le mouvement de rotation des étoiles de la galaxie.

Pour analyser la situation dans un cas très simple, soit une masse M qui applique une force d'attraction à la masse m (voir figure 1.18)

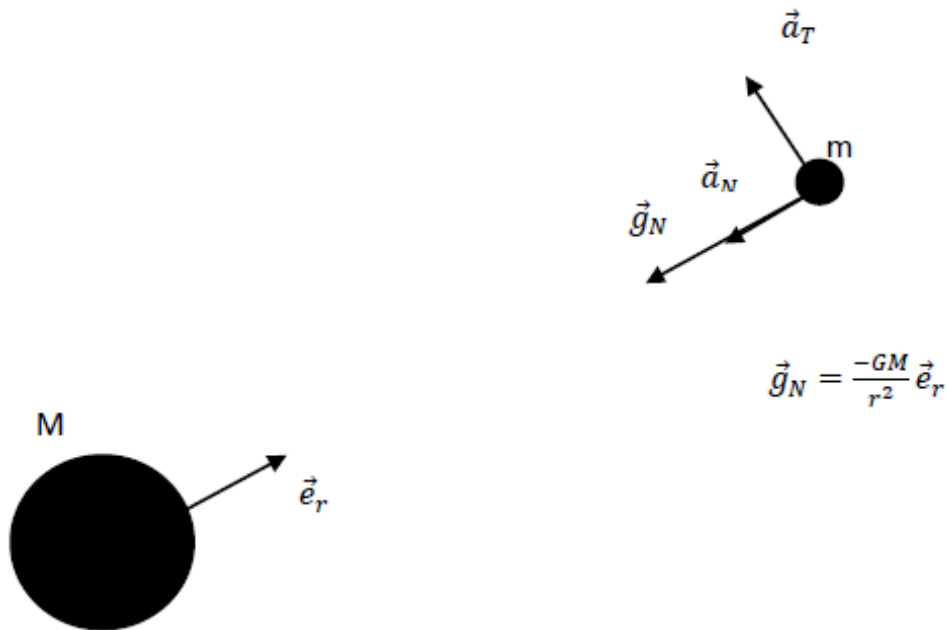


Figure 1.18 - Interaction gravitationnelle entre deux corps massiques

D'après la loi de Newton, le champ gravitationnel $\vec{g}_N = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r$ va engendrer une accélération \vec{a} selon le principe fondamental de la dynamique

$$m\vec{a} = m\vec{g}_N \quad (1.7.1)$$

Supposons que la trajectoire est circulaire où M occupe le centre ($r = c^{st}$)

$$m(\vec{a}_T + \vec{a}_N) = m\vec{g}_N \quad (1.7.2)$$

avec une accélération tangentielle $\vec{a}_T = 0$ et une accélération normale $\vec{a}_N = \vec{g}_N$. En prenant le module, on trouve

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (1.7.3)$$

Donc selon Newton, la vitesse va décroître avec r , ce qui est en contradiction avec les courbes de rotation observées.

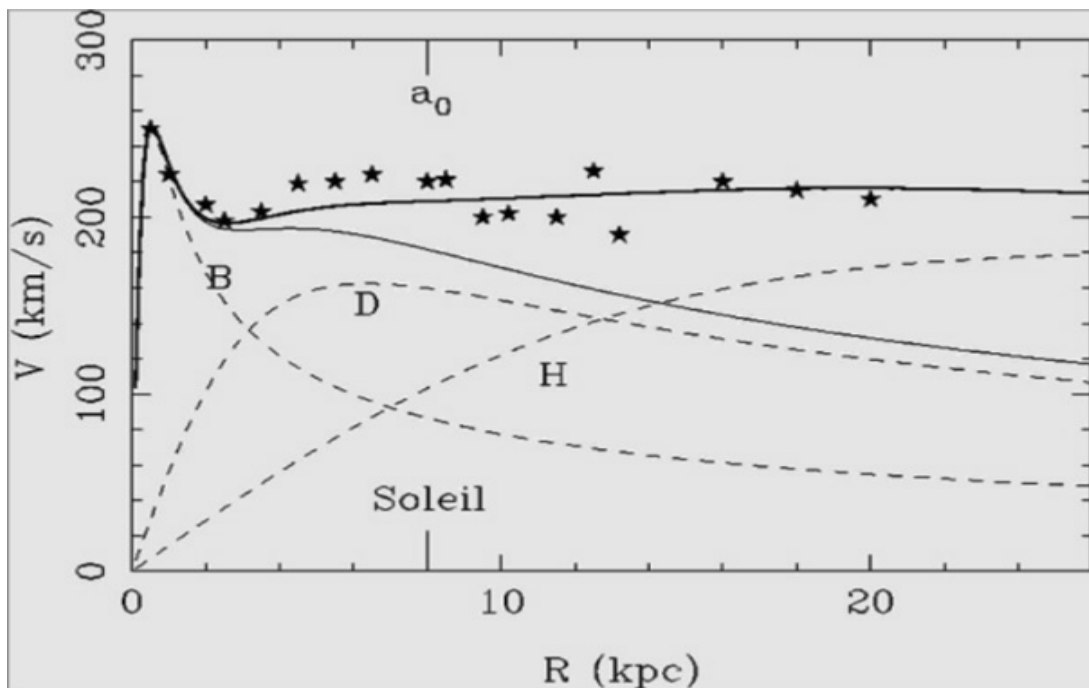


Figure 1.19 - La courbe de rotation de la voie lactée (B : bulbe ; D : disque ; H : halo) [9]

La figure 1.19 montre la courbe de rotation de notre galaxie la voie lactée. Comme nous avons moins de masse au bord de la galaxie, nous nous attendons à une vitesse qui décroît en fonction de la distance comme le montre la courbe B , mais la courbe de rotation observée (celle qui est entourée d'étoiles) montre que la vitesse de rotation de la galaxie augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur maximale près du bulbe, puis elle suit un plateau assez loin du centre de la galaxie.

L'observation de l'hydrogène atomique HI grâce à la raie de 21 cm montre aussi un plateau assez loin du centre galactique (voir la figure 1.20). Sa cartographie montre qu'il s'étend beaucoup plus loin que la galaxie, jusqu'à un rayon cinq ou six fois plus grand. Ce gaz est très peu massif, donc il contribue faiblement au pourcentage de la masse totale de la galaxie.

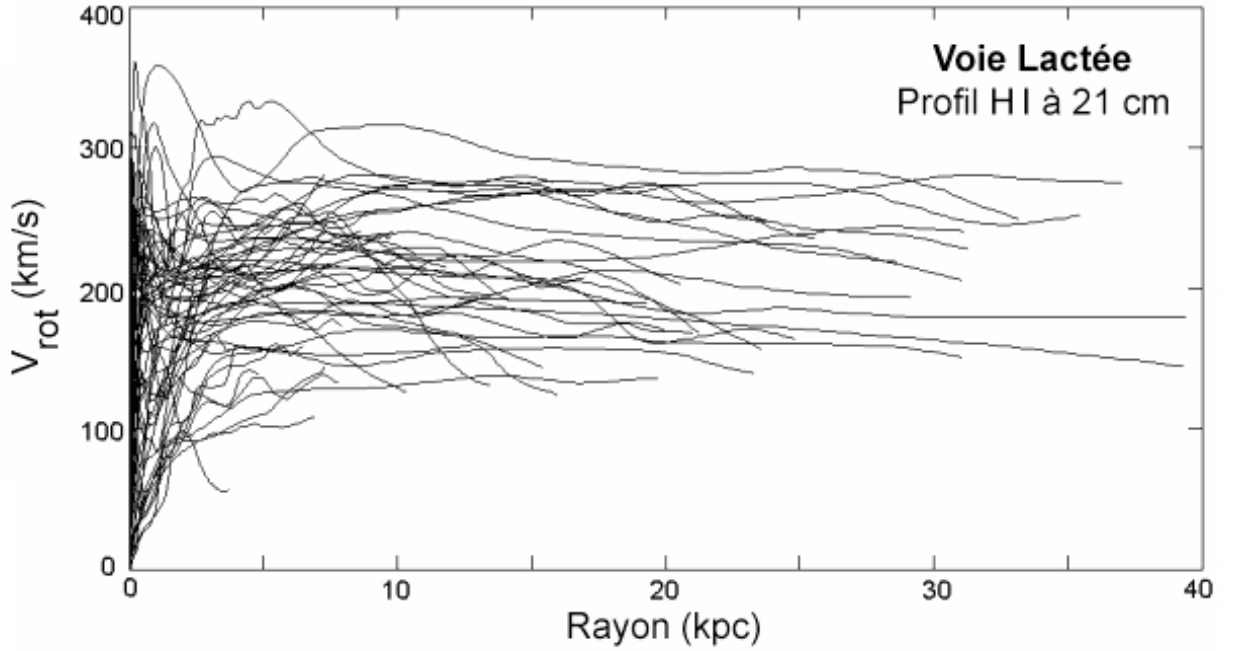


Figure 1.20 - Courbes de rotation du gaz d'hydrogène atomique HI dans la Voie Lactée [10].

1.8 La loi de Tully-Ficher

La relation de Tully-Ficher est une relation empirique entre la luminosité L apparente d'une galaxie spirale et sa vitesse de rotation asymptotique v_{\max} qui est la vitesse maximale correspondant au plateau de la courbe de rotation. Cette relation, indépendante de la distance au centre, a été publiée en 1977 par les deux astronomes R.B Tully et J.R Ficher dans le but de trouver un moyen de mesurer les distances entre notre galaxie et les autres galaxies [11]. Elle stipule que

$$v_{\max}^4 \sim L \quad (1.8.1)$$

Dans sa forme moderne, on parle plutôt, de la relation entre la masse baryonique M_b (masse des étoiles et du gaz) et la vitesse maximale de la rotation des galaxies spirale v_{\max}

$$v_{\max}^4 \sim M_b \quad (1.8.2)$$

En effet, la luminosité L est déterminée principalement par la lumière des étoiles sans prendre en considération la présence du gaz, d'où l'intérêt de prendre la masse baryonique.

On peut essayer d'expliquer cette relation (1.8.1) dans le cadre newtonien où

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \Longrightarrow \quad v^4 = \frac{G^2 M^2}{r^2}. \quad (1.8.3)$$

Pour ce faire, supposons que le rapport masse-luminosité $M/L = \gamma$ est relativement constant pour toutes les galaxies spirales. Si on introduit la brillance de surface des galaxies I définie par $I = L/\pi r^2$ [12], on déduit une relation entre la luminosité L et la vitesse de rotation des galaxies v comme suit

$$v_{\max}^4 = \pi G^2 \gamma^2 I L \quad (1.8.4)$$

Le problème avec cette relation réside dans le fait que la brillance de surface I dépend implicitement de la distance par rapport au centre galactique, ce qui fait que nous ne pouvons pas parler de proportionnalité.

La figure ci-dessous montre en vertical la luminosité apparente des étoiles et en abscisse la vitesse de rotation mesurée par l'effet Doppler.

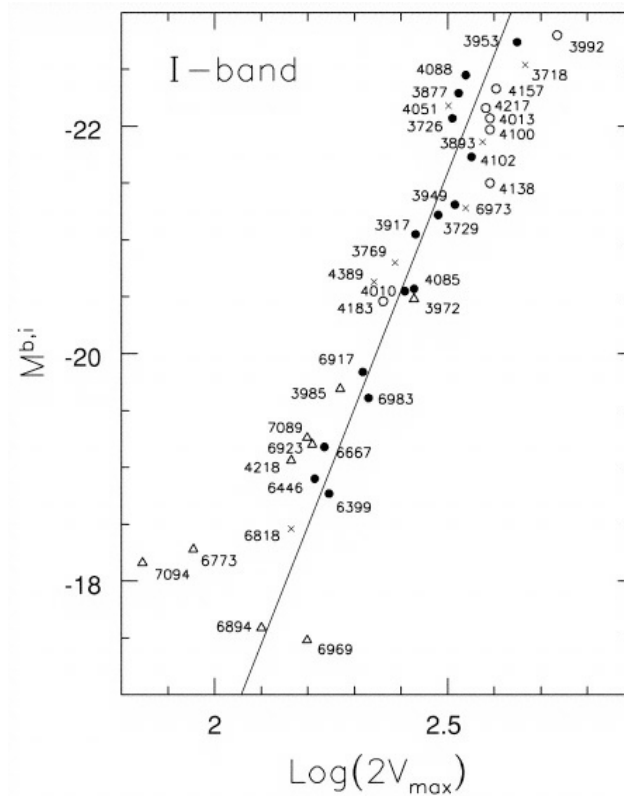


Figure 1.21 - La relation Tully-Fischer entre la luminosité et la vitesse de rotation des galaxies (en échelle logarithmique) [13]

1.9 Introduction de la matière noire dans les galaxies

L'existence de la matière noire est une hypothèse proposée par F. Zwicky dans les années 30 suite à l'observation de plusieurs amas de galaxies, notamment, l'amas de Coma. En étudiant le mouvement individuel des galaxies il s'est aperçu que leurs vitesses étaient beaucoup trop grandes, dépassant largement les prédictions théorique faites à base de la matière visible. Il a donc proposé l'existence d'une masse invisible pour maintenir l'amas en équilibre [14].

A partir des années 70, l'existence de la matière noire dans le halo des galaxies devient plus acceptable. Le problème des courbes de rotation s'explique le plus souvent par la présence de matière noire. En effet, ce qu'on observe à large distance du centre galactique, c'est une courbe qui s'aplatit au moment où les prédictions newtonienne disent qu'on doit avoir une courbe qui décroît. Cette différence appuie fortement l'hypothèse de l'existence de la matière noire responsable de ce comportement.

Cette matière ne rayonne pas et n'absorbe pas de photons car si c'était le cas, elle aurait déjà été détectée. Elle pourrait être composée de n'importe quoi, des étoiles mortes aux minuscules particules, comme par exemple des axions ou de particules supersymétriques.

Il faut noter que la matière ordinaire que nous pouvons observer est formée par des baryons d'où son nom de matière baryonique, mais une nature non baryonique a été mise en jeu après avoir eu les estimations de la densité de l'Univers et de nombre d'atomes. Donc, l'existence d'autre particules tels que le neutralino supersymétrique n'est pas exclue, on parle des WIMP (*weakly interactive massive particles*) qui interagissent très faiblement avec la matière ordinaire [13]. Ces particules subatomiques neutres peuvent constituer une solution au problème de la matière noire. En tous cas, elles sont l'un des piliers du modèle cosmologique standard de l'évolution de l'Univers.

Plusieurs tentatives ont été faites par des astrophysiciens pour détecter cette matière noire, en étudiant les courbes de rotation des galaxies, les lentilles gravitationnels, le fond diffus cosmique, la formation des structures à grande échelle...mais sans résultat tranchant et définitif jusqu'à présent.

1.10 La manifestation de la matière noire à partir des lentilles gravitationnelles

Appelées aussi les mirages gravitationnels, les lentilles gravitationnelles se produisent lorsqu'on observe l'image d'une source lumineuse lointaine qui se situe derrière un corps céleste à grand champ gravitationnel. Ce dernier a pour effet de dévier les rayons lumineux qui passent devant lui en déformant l'image que l'observateur reçoit.

Les lentilles gravitationnelles font l'objet de plusieurs études et leurs effets pourraient conduire à mieux comprendre la matière noire d'une façon indirecte. En effet, on constate un désaccord entre la masse visible (lumineuse) et la déviation de la lumière suite l'effet des lentilles gravitationnelles [14]. Pour relever ce désaccord, on fait appel à la présence de la matière noire.

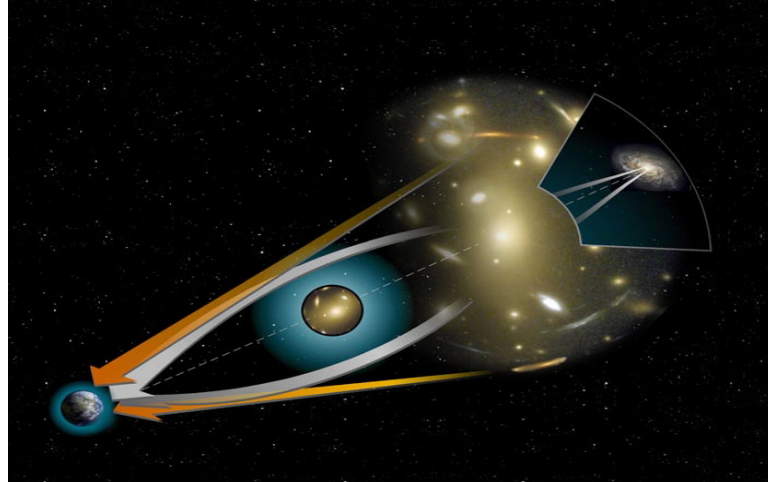


Figure 1.22 - Illustration d'une lentille gravitationnelle qui montre la déviation des rayons lumineux par l'effet d'une source à grand potentiel gravitationnel

1.11 Le rôle de la matière noire dans le modèle cosmologique standard

La matière ordinaire ne forme que 4% de la masse-énergie totale de l'Univers et tandis que 23% se trouve sous forme de matière noire et les 73% restant sont sous la forme d'une énergie noire [13].

La nature de la matière noire étant inconnue, plusieurs tentatives ont vu le jour pour la comprendre, conduisant ainsi à trois grands modèles de la formation de l'Univers [15] :

Le modèle HDM (matière noire chaude) écarté car les particules relativistes ne conviennent pas pour expliquer l'effondrement gravitationnel à l'échelle des galaxies ;

Le modèle WDM (matière noire tiède) corrige un peu le problème, mais la formation des galaxies se fait d'une façon très lente par rapport à ce qu'on observe dans notre Univers ;

Le modèle CDM (matière noire froide), où les particules sont non relativistes, est le plus communément utilisé de nos jours.

En cosmologie, le modèle (Λ CDM) désigne un modèle cosmologique du Big Bang paramétré par une constante cosmologique (lambda Λ) associée à l'énergie noire en plus de la matière noire froide (CDM). C'est le modèle le plus simple qui rend compte des propriétés du cosmos. Il est souvent appelé le modèle standard du Big Bang. De nos jours,

il est préférable de représenter l'Univers par le modèle (Λ CDM) qui décrit un espace-temps en expansion dominée par la matière et l'énergie noires, où la contribution de la matière ordinaire est de l'ordre de 4%.

Dans ce modèle, les structures de l'Univers se forment en ordre à partir des fluctuations primordiales petit à petit jusqu'à ce que un filament cosmique se forme par l'intermédiaire de la matière noire qui emporte avec elle le gaz chaud primordial. Avec le temps celui-ci se refroidit et forme les premières structures de protogalaxies qui se regroupent dans les premiers amas de protogalaxies qui finissent par fusionner entre elles pour former les galaxies qu'on observe aujourd'hui.

Avec l'augmentation de la puissance du calcul ces dernières années, les simulations numériques à haute résolutions ont permis de faire des avancées majeures dans la compréhension du cosmos. En effet, le modèle Λ CDM a un énorme succès dans l'étude de la formation des grandes structures de l'Univers [15].

1.12 Les difficultés de la théorie de la matière noire

Qu'est-ce que c'est que la matière noire ? Et si elle n'existait pas ? Les scientifiques croient qu'elle existe en raison des effets gravitationnels apparents, mais ils ne l'ont jamais observée. Et si notre compréhension actuelle de la gravité était tout simplement fautive ? Lorsqu'elle est analysée à l'aide des lois de Newton, plusieurs observations indépendantes indiquent que la masse visible dans les galaxies et les amas de galaxies est insuffisante pour rendre compte de leur dynamique observée. Du côté expérimental, aucune expérience n'a pu livrer des preuves solides sur l'existence de la matière noire et sur sa nature.

L'hypothèse de la matière noire se trouve en face d'autres difficultés. Dans le cadre du modèle Λ CDM, le problème majeur est le fait que les simulations montrent que la matière noire qui se situe dans les galaxies se concentre dans leurs centres. Cependant, il semble plutôt que les centres des galaxies n'ont vraisemblablement aucune concentration de matière noire. De même, ces simulations prédisent que les galaxies devraient être entourées de centaines de galaxies naines ou de satellites, mais les observations ne montrent que quelques dizaines [2].

Pour remédier à ces difficultés une théorie alternative a été mise au point. Nous allons l'introduire dans le chapitre suivant.

La théorie de la dynamique newtonienne modifiée (MOND)

En 1983, l'astrophysicien M. Milgrom a proposé une modification de la loi de la gravitation comme alternative à l'existence de la matière noire dans les galaxies [3]. Cette nouvelle théorie est supposée remplacer la dynamique newtonienne dans le cas du régime de champ faible, autrement dit, à de faibles accélérations.

Son but principal est de rendre compte des phénomènes observés sans invoquer l'existence de la matière noire, requise si l'on adhère à la dynamique standard. La théorie de la dynamique newtonienne modifiée (MOND) s'écarte de cette dernière à des accélérations inférieures à une accélération bien définie ayant le statut d'une nouvelle constante universelle [16]. De telles accélérations caractérisent bien les systèmes galactiques et l'Univers dans son ensemble.

La motivation de MOND n'est pas seulement d'être une alternative à la matière noire, dont les particules n'ont pas encore été observées, mais aussi de résoudre les problèmes que le modèle Λ CDM standard rencontre à l'échelle des galaxies.

2.1 La formule empirique de Milgrom

Dans le but de résoudre le problème lié aux courbes de rotation dans les galaxies, Milgrom a introduit une formule liant l'accélération et le champ gravitationnel différente de la loi de Newton $m\vec{a} = m\vec{g}_N$ (voir la section 1.7). En effet, après plusieurs tentatives, Milgrom propose un deuxième régime qui diffère du régime newtonien dans le cas des accélérations très faibles devant $a_0 = 1.2 \cdot 10^{-10} m.s^{-2}$ qui est une accélération jouant le rôle d'une constante universelle obtenue à l'aide de l'ajustement de la relation de Tully-

Fisher [3]. Dans le cas d'un mouvement circulaire (voir la page 29), la relation de Milgrom entre l'accélération et le champ gravitationnel est donnée par

$$m \frac{a^2}{a_0} = mg_N \quad (2.1.1)$$

Sachant que $a = a_N = \frac{v^2}{r}$ et $g_N = \frac{GM}{r^2}$, on obtient la relation

$$v^4 = GMa_0 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt[4]{GMa_0} \quad (2.1.2)$$

On remarque que la vitesse ne dépend plus de la distance au centre. Ainsi, Milgrom a pu reproduire les courbes plates des galaxies dans un cas simple où la masse d'une galaxie est concentrée en un point et la trajectoire est parfaitement circulaire. Dans le cas des accélérations très élevées devant a_0 , le régime newtonien reste valable, à savoir

$$m a = mg_N \quad (2.1.3)$$

Pour récapituler, nous avons les relations suivantes correspondant à deux régimes différents

$$\begin{cases} m a = mg_N & \text{si } a \gg a_0 \\ m \frac{a^2}{a_0} = mg_N & \text{si } a \ll a_0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

On peut donc introduire une fonction d'interpolation μ dépendant du rapport a/a_0 afin de raccorder les deux régimes

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \gg a_0 \\ \frac{a}{a_0} & \text{si } a \ll a_0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Ainsi nous pouvons réécrire les relations (2.1.4) sous la forme réduite

$$a \mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = g_N \quad (2.1.6)$$

Plusieurs formes de la fonction μ ont été proposées dans la littérature, dont on peut citer la forme standard et la forme simple respectivement

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2.1.7)$$

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x} \quad (2.1.8)$$

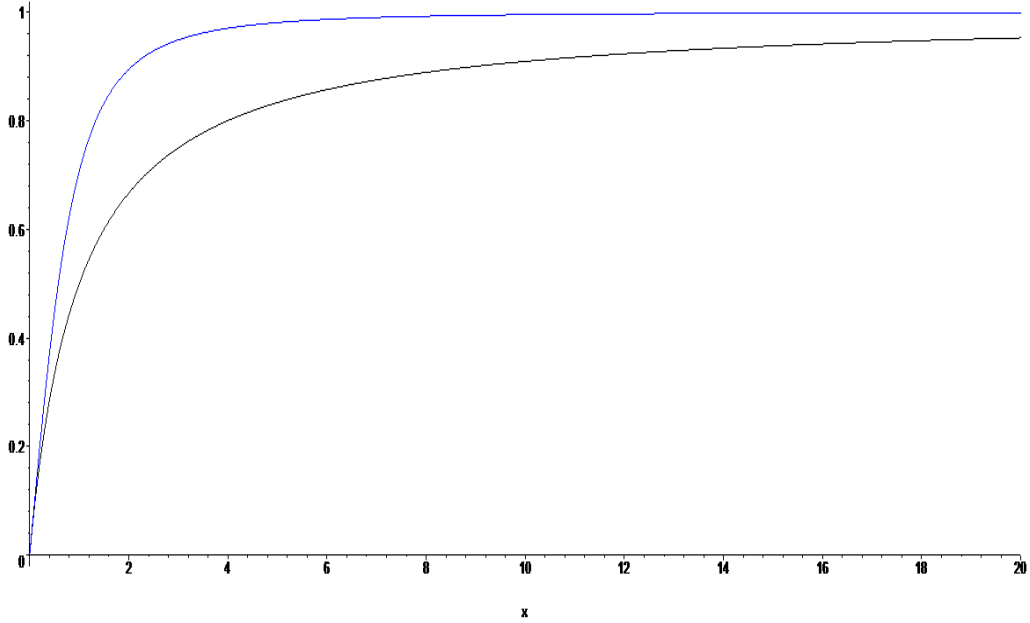


Figure 2.1 - Représentation graphique des deux fonctions simple (noire) et standard (bleu)

Pour récapituler, grâce à une formule relativement simple, Milgrom arrive à reproduire les courbes de rotation de galaxies sans postuler l'existence de la matière noire. Dans ce qui suit, nous allons construire un cadre théorique de la dynamique galactique à base de cette dernière.

2.2 La difficulté de la théorie MOND comme modification de l'inertie

La nouvelle relation (2.1.1) entre le champ gravitationnel newtonien engendré par une masse M et l'accélération de la particule test de masse m introduite par Milgrom en 1983, peut être interprétée de deux façons différentes. D'abord, Milgrom a modifié la seconde loi de Newton en l'écrivant sous la forme[3]

$$m\vec{a} \mu\left(\frac{|\vec{a}|}{a_0}\right) = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.2.1)$$

où les \vec{F}_i sont les forces habituelles bien connues en mécanique newtonienne. En particulier, $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{g}_N$ dans le cas de la gravitation. C'est là l'origine de l'appellation "*dynamique newtonienne modifiée MOND*". Il est clair que cette forme contient la formule de Milgrom (2.1.1).

Mais, est-il possible de modifier l'inertie avec cette facilité? L'équation (2.2.1) certes est compatible avec l'idée de MOND, cependant, pour de nombreuses raisons, on ne peut

pas la garder sous cette forme. On a réalisé rapidement que l'équation (2.2.1) pose de sérieux problèmes.

En effet, soient deux corps massifs isolés m_1 et m_2 en interaction par le biais des forces d'attraction respectives $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ vérifiant le principe de l'action et de la réaction $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ [17]. D'après (2.2.1),

$$\begin{cases} m_1 \mu \left(\frac{|\vec{a}_1|}{a_0} \right) \vec{a}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \mu \left(\frac{|\vec{a}_2|}{a_0} \right) \vec{a}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Dans le cas du régime MONDien où $a_1 \ll a_0$ et $a_2 \ll a_0$, l'équation précédente devient

$$\begin{cases} m_1 \frac{a_1}{a_0} \vec{a}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \frac{a_2}{a_0} \vec{a}_2 = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Si on prend les modules dans les équations précédentes, on peut déduire les expressions des accélérations a_1 et a_2 en fonction des masses et de l'accélération critique a_0 ainsi que du module de la force $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{\frac{a_0}{m_1} |\vec{F}_{2 \rightarrow 1}|} \\ a_2 = \sqrt{\frac{a_0}{m_2} |\vec{F}_{2 \rightarrow 1}|} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Remplaçons ces expressions dans l'équation (2.2.3),

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \sqrt{m_1 a_0} \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{\sqrt{|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}|}} \\ m_2 \vec{a}_2 = -\sqrt{m_2 a_0} \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{\sqrt{|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}|}} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Pour que la quantité de mouvement d'un système à plusieurs masses soit conservée, il faut que sa dérivée par rapport au temps s'annule $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Sachant que la quantité de mouvement d'un système à deux masses s'écrit $\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$, où \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont les vitesses des corps m_1 et m_2 respectivement, sa variation au cours du temps est donnée

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 \quad (2.2.6)$$

En remplaçant $m_1 \vec{a}_1$ et $m_2 \vec{a}_2$ par leurs expressions déjà calculées, on obtient l'équation

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sqrt{a_0} \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{\sqrt{|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}|}} (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}) \quad (2.2.7)$$

On constate que $\frac{d\vec{p}}{dt} \neq 0$ sauf dans le cas où $m_1 = m_2$. La quantité de mouvement de notre système isolé n'est pas conservée, car les deux accélérations ne sont pas inversement proportionnelles aux masses comme dans la dynamique newtonienne.

Le fait que la quantité de mouvement n'est pas conservée dans un système isolé, nous conduit à essayer de changer sa forme. D'ailleurs, on observe une telle situation en passant de la théorie newtonienne à la théorie de la relativité restreinte. Pour cette raison, définissons une impulsion généralisée

$$\vec{p}(t) = m f(v) \vec{v} \quad (2.2.8)$$

où $f(v) = 1$ en dynamique newtonienne, et égale à $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ en relativité restreinte ($v = |\vec{v}|$).

La force \vec{F} peut être obtenue à partir de l'équation (2.2.8) grâce au principe fondamental de la dynamique $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. En effet,

$$\vec{F} = m \frac{\partial f(v)}{\partial v} \frac{dv}{dt} \vec{v} + m f(v) \vec{a} \quad (2.2.9)$$

Mais dans la théorie MOND

$$\vec{F} = m \vec{a} \mu \left(\frac{|\vec{a}|}{a_0} \right) \quad (2.2.10)$$

Il est clair que suite à la comparaison qu'une identification n'est pas possible entre les deux formes.

On pourrait essayer de déduire une forme d'impulsion $\vec{p}(t)$ compatible avec l'idée de la théorie MOND à partir de l'équation (2.2.10) comme suit :

$$d\vec{p}(t) = m \vec{a}(t) \mu \left(\frac{|\vec{a}(t)|}{a_0} \right) dt \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}(t) = \int_{t_0}^t m \vec{a}(t') \mu \left(\frac{|\vec{a}(t')|}{a_0} \right) dt' \quad (2.2.11)$$

Cette forme est non locale car pour trouver l'impulsion à l'instant t , il faut sommer sur tout l'intervalle $[t_0, t]$ en suivant la trajectoire de la masse m , ce qui n'est pas le cas d'habitude où l'impulsion ne dépend que de l'instant t . Cette non localité semble typique de la modification de l'inertie selon Milgrom, qui a prouvé plus généralement que la théorie MOND est invariante par les transformations du Galilée et elle ne peut dériver d'un formalisme lagrangien que si ce dernier est non local [18].

Nous avons ainsi démontré la difficulté d'interpréter la théorie de la dynamique newtonienne modifiée comme une modification d'inertie.

2.3 La formulation lagrangienne aquadratique (AQUAL) de la théorie MOND

2.3.1 Le potentiel gravitationnel modifié

Nous avons vu que la modification de l'inertie n'était pas une bonne solution, ainsi Milgrom et Bekenstein [4] ont pensé à modifier seulement la gravité en gardant la deuxième loi de Newton intacte. Ils ont commencé par la relation

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad (2.3.1)$$

où \vec{g} est le champ gravitationnel modifié qui diffère du champ newtonien \vec{g}_N . Grâce à la formule de Milgrom $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a} = \vec{g}_N$ et l'équation précédente, on aboutit à la relation

$$\mu\left(\frac{g}{a_0}\right)\vec{g} = \vec{g}_N. \quad (2.3.2)$$

où $g = |\vec{g}|$. A partir de la propriété

$$\mu\left(\frac{g}{a_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \gg a_0 \\ \frac{g}{a_0} & \text{si } g \ll a_0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

on déduit que

$$\vec{g}_N = \mu\left(\frac{g}{a_0}\right)\vec{g} = \begin{cases} \vec{g} & \text{si } g \gg a_0 \\ \frac{g}{a_0}\vec{g} & \text{si } g \ll a_0 \end{cases} \quad (2.3.4)$$

On distingue alors deux cas extrêmes : le cas où le champ gravitationnel \vec{g} est important ($g \gg a_0$) où il sera égal au champ newtonien $\vec{g}_N = \vec{g}$, ainsi que le cas du champ faible ($g \ll a_0$) relatif à la théorie MOND où $\frac{g}{a_0}\vec{g} = \vec{g}_N$. En terme des modules,

$$g = \sqrt{a_0 g_N} \quad (2.3.5)$$

En particulier, le champ stationnaire créé par une masse sphérique qui occupe l'origine des coordonnées sphériques dans le régime MONDien sera en $\frac{1}{r}$ au lieu de $\frac{1}{r^2}$ comme le montre l'équation suivante :

$$\vec{g} = -\frac{\sqrt{GMa_0}}{r}\vec{e}_r \quad (2.3.6)$$

car el champ newtonien $\vec{g}_N = -\frac{GMa_0}{r^2}\vec{e}_r$. On constate que le champ de la théorie MOND est plus important que le champ newtonien ($|\vec{g}| > |\vec{g}_N|$) quand on s'éloigne suffisamment du centre attractif, ce qui est responsable du maintien des étoiles dans leurs courbes de rotation malgré leurs vitesses fulgurantes.

A partir de l'équation précédente, il est possible de déterminer un rayon r_0 en fonction de la masse M à partir duquel on entre dans le régime MONDien. En effet,

$$g \ll a_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{GMa_0}}{r} \ll a_0 \quad \Rightarrow \quad r \gg \sqrt{\frac{GM}{a_0}} = r_0 \quad (2.3.7)$$

Le potentiel gravitationnel dans la théorie MOND prend une forme tout à fait différente de celle du potentiel newtonien. En utilisant l'équation (2.3.6) et la définition $\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$ en coordonnées sphériques, on déduit que

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \int \frac{\sqrt{GMa_0}}{r} dr \quad (2.3.8)$$

car en coordonnées sphériques s'écrit $\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\vec{e}_\psi$. Après intégration et en annulant la constante résultante, on trouve finalement la nouvelle forme de potentiel gravitationnel du régime MONDien

$$\varphi = \sqrt{GMa_0} \ln(r) \quad (2.3.9)$$

Contrairement au potentiel newtonien, ce dernier ne s'annule pas à l'infini, ce qui aura des conséquences considérables sur le mouvement des corps.

2.3.2 L'équation du Poisson modifiée

Le laplacien du potentiel gravitationnel newtonien est proportionnel à la densité de masse comme le montre l'équation de Poisson $\Delta\varphi_N = 4\pi G\rho$. Comme le champ gravitationnel $\vec{g}_N = -\vec{\nabla}\varphi_N$, il est possible d'en déduire que

$$\operatorname{div} \vec{g}_N = -4\pi G\rho. \quad (2.3.10)$$

Pour trouver l'équation de Poisson de la théorie MOND, nous allons faire la substitution $\vec{g}_N = \mu\left(\frac{|\vec{g}|}{a_0}\right)\vec{g}$ dans l'équation précédente afin d'aboutir à la nouvelle forme

$$\operatorname{div} \left[\mu \left(\frac{|\vec{g}|}{a_0} \right) \vec{g} \right] = -4\pi G\rho \quad (2.3.11)$$

Si on suppose que $\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$, on obtient l'équation de Poisson modifiée non linéaire qui décrit le champ gravitationnel dans le cadre de la théorie MOND

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\mu \left(\frac{|\vec{\nabla}\varphi|}{a_0} \right) \vec{\nabla}\varphi \right] = 4\pi G\rho \quad (2.3.12)$$

où

$$\mu\left(\frac{|\vec{\nabla}\varphi|}{a_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\vec{\nabla}\varphi| \gg a_0 \\ \frac{|\vec{\nabla}\varphi|}{a_0} & \text{si } |\vec{\nabla}\varphi| \ll a_0 \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Nous allons à présent résoudre cette équation en régime MONDien dans le cas stationnaire à symétrie sphérique où $\varphi = \varphi(r)$. Nous avons donc $\vec{\nabla}\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\vec{e}_r$ et $|\vec{\nabla}\varphi| = \left|\frac{d\varphi}{dr}\right| = \frac{d\varphi}{dr}$ avec $|\vec{\nabla}\varphi| \ll a_0$. Notre équation se réduit à la forme

$$\operatorname{div}\left(\underbrace{\frac{1}{a_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2}_{=A_r(r)}\vec{e}_r\right) = 0 \quad (2.3.14)$$

Sachant que la divergence en coordonnées sphériques d'un vecteur (A_r, A_θ, A_ψ) s'écrit

$$\operatorname{div}(\vec{A}_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\psi}(A_\psi) \quad (2.3.15)$$

l'équation précédent se simplifie à l'expression

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{a_0}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right) = 0 \quad (2.3.16)$$

d'où

$$\frac{r^2}{a_0}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = C \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sqrt{a_0C}}{r}. \quad (2.3.17)$$

où C est une constante d'intégration. Finalement, après intégration (en annulant la constante d'intégration), on aura le potentiel gravitationnel sous la forme

$$\varphi = \sqrt{a_0C}\ln(r) \quad (2.3.18)$$

Par comparaison au potentiel gravitationnel calculé précédemment (2.3.9), on constate que $C = GM$ et le potentiel devient $\varphi = \sqrt{a_0GM}\ln(r)$.

2.3.3 Le lagrangien du potentiel de la théorie MOND (AQUAL)

L'étape consiste à reformuler la théorie MOND pour obtenir une première théorie effective à partir d'un lagrangien qui va préserver les symétries et garantir ainsi les lois de conservation [4]. Soit donc la densité lagrangienne modifiée suivante :

$$\mathcal{L} = \rho\varphi + \frac{a_0^2}{8\pi G}f\left(\frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi}{a_0^2}\right) \quad (2.3.19)$$

où f est une fonction d'interpolation que nous allons ajuster plus tard. L'équation d'Euler-Lagrange pour le champ φ s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.3.20)$$

D'abord $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \rho$. Maintenant, si on pose que $\frac{(\vec{\nabla} \varphi)^2}{a_0^2} = y$, et à l'aide de propriété $(f \circ y)'(x) = f'(y(x)) y'(x)$ bien connue lors de la composition de fonctions, on vérifie que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \varphi} = \frac{a_0^2}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial \vec{\nabla} \varphi} f(y) = \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial y} f(y) \Big|_{y=\frac{(\vec{\nabla} \varphi)^2}{a_0^2}} \frac{\partial y}{\partial \vec{\nabla} \varphi} = \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial y} f(y) \Big|_{y=\frac{(\vec{\nabla} \varphi)^2}{a_0^2}} \vec{\nabla} \varphi \quad (2.3.21)$$

Finalement, l'équation d'Euler-Lagrange prend la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} f(y) \Big|_{y=\frac{(\vec{\nabla} \varphi)^2}{a_0^2}} \vec{\nabla} \varphi \right) = 4\pi G \rho \quad (2.3.22)$$

Nous avons déjà trouvé l'équation de Poisson modifiée qui s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\mu \left(\frac{|\vec{\nabla} \varphi|}{a_0} \right) \vec{\nabla} \varphi \right) = 4\pi G \rho$$

Par identification, on retrouve que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y) = \mu(\sqrt{y}) \quad (2.3.23)$$

car $y = \frac{(\vec{\nabla} \varphi)^2}{a_0^2} \implies \sqrt{y} = \frac{|\vec{\nabla} \varphi|}{a_0}$. On distingue deux régimes importants : si $y \gg 1 \implies \mu(\sqrt{y}) = 1$ alors $f(y) = \int 1 dy = y$ pour le régime newtonien et si $y \ll 1 \implies \mu(\sqrt{y}) = \sqrt{y}$ alors $f(y) = \int y^{1/2} dy = \frac{2}{3} y^{3/2}$ pour le régime MONDien. Autrement dit,

$$f(y) = \begin{cases} y & y \gg 1 \\ \frac{2}{3} y^{3/2} & y \ll 1 \end{cases} \quad (2.3.24)$$

Soit maintenant la fonction μ simple

$$\mu(\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} \quad (2.3.25)$$

On peut retrouver f suite à une intégration

$$f(y) = \int^y \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} dy = y - 2\sqrt{y} + 2 \ln(1 + \sqrt{y}) \quad (2.3.26)$$

Finalement,

$$\mathcal{L} = \rho\varphi + \frac{a_0^2}{8\pi G} \left(\frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi}{a_0^2} - 2\sqrt{\frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi}{a_0^2}} + 2 \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi}{a_0^2}} \right) \right) \quad (2.3.27)$$

Cette expression montre bien que le lagrangien de la théorie MOND est non linéaire et loin d'être quadratique d'où le nom AQUAL.

En 2004, l'astrophysicien Bekenstein a proposé une extension relativiste de la théorie MOND appelée la théorie TeVeS (Tenseur-Vecteur-Scalaire). Son objet principal est de donner une version relativiste de la théorie MOND, et en particulier, expliquer les effets des lentilles gravitationnelles sans faire appel à la matière noire [19].

2.4 La formulation lagrangienne quasi-linéaire de la théorie MOND (QUMOND)

2.4.1 L'équation de Poisson avec QUMOND

Une autre reformulation de la modification de la gravité modifiée [20] a été proposée plus tard par Milgrom pour recadrer cette théorie dans une formulation quasi-linéaire, ce qui est plus souhaitable que la formulation complètement non linéaire. D'après (2.3.4),

$$\vec{g}_N = \begin{cases} \vec{g} & \text{si } g \gg a_0 \\ \frac{g}{a_0} \vec{g} & \text{si } g \ll a_0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Après inversion,

$$\vec{g} = \begin{cases} \vec{g}_N & \text{si } g_N \gg a_0 \\ \sqrt{\frac{a_0}{g_N}} \vec{g}_N & \text{si } g_N \ll a_0 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Il est commode de réécrire l'équation précédente sous une forme où il est facile de passer entre les régimes MONDien et le newtonien en introduisant la fonction v

$$\vec{g} = \vec{g}_N v \left(\frac{|\vec{g}_N|}{a_0} \right) \quad (2.4.3)$$

ayant la propriété suivante :

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \gg 1 \\ \sqrt{\frac{1}{x}} & \text{si } x \ll 1 \end{cases} \quad (2.4.4)$$

d'où

$$v\left(\frac{|\vec{g}_N|}{a_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\vec{g}_N| \gg a_0 \\ \sqrt{\frac{a_0}{|\vec{g}_N|}} & \text{si } |\vec{g}_N| \ll a_0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

La fonction $v(x)$ est liée directement à la fonction d'interpolation $\mu(x)$ déjà vue. En effet, remplaçons (2.4.3) dans (2.3.2), ensuite posons $\frac{|\vec{g}_N|}{a_0} = x$ afin d'aboutir à la relation

$$\mu(x v(x)) v(x) = 1. \quad (2.4.6)$$

Si on choisit la forme simple de $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$, la fonction $v(x)$ va avoir l'expression simple

$$v(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x}} \right) \quad (2.4.7)$$

Dans ce cas, les champs gravitationnels seront liés par l'équation

$$\vec{g} = \vec{g}_N \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4\frac{a_0}{g_N}}}{2} \right) \quad (2.4.8)$$

où

$$v\left(\frac{|\vec{g}_N|}{a_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4\frac{a_0}{g_N}}}{2}. \quad (2.4.9)$$

A présent, les potentiels gravitationnels φ et φ_N seront liés par l'équation (2.4.3)

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\varphi_N v\left(\frac{|\vec{\nabla}\varphi_N|}{a_0}\right) \quad (2.4.10)$$

car, par définition, $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{g}$ et $\vec{\nabla}\varphi_N = -\vec{g}_N$. La divergence de l'équation (2.4.10) nous donne

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi_N v\left(\frac{|\vec{\nabla}\varphi_N|}{a_0}\right) \right) \quad (2.4.11)$$

Mais le potentiel newtonien vérifie l'équation de Poisson $\Delta\varphi_N = 4\pi G\rho$, d'où le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \Delta\varphi_N = 4\pi G\rho \\ \Delta\varphi = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi_N v \left(\frac{|\vec{\nabla}\varphi_N|}{a_0} \right) \right) \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Visiblement, il faut d'abord résoudre l'équation de Poisson newtonienne, ensuite remplacer dans la deuxième équation pour déterminer le potentiel de la théorie MOND. La forme quasi-linéaire de cette formulation est bien adaptée à la résolution numérique, contrairement à la forme non linéaire de la formulation AQUAL, mais avec QUMOND, le passage par le potentiel newtonien pendant la résolution est indispensable.

2.4.2 Le lagrangien de QUMOND

Pour dériver la formulation QUMOND à partir du principe de moindre action, soit la densité lagrangienne suivante où les deux champs φ et φ_N sont indépendants [20] :

$$\mathcal{L} = \rho\varphi + \frac{1}{8\pi G} \left[2\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\varphi_N - a_0^2 Q \left(\frac{\vec{\nabla}\varphi_N \cdot \vec{\nabla}\varphi_N}{a_0^2} \right) \right] \quad (2.4.13)$$

où Q est une fonction à déterminer. En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange par rapport au potentiel φ , on dérive l'équation de Poisson newtonienne

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \rho \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\varphi} = \frac{1}{4\pi G} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi_N \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_N = 4\pi G\rho \quad (2.4.14)$$

Par rapport au potentiel φ_N , nous aura

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi G} \vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial y} Q(y) \Big|_{y=\frac{(\vec{\nabla}\varphi)^2}{a_0^2}} \vec{\nabla}\varphi_N \right) = 0 \quad (2.4.15)$$

Finalement, l'équation de Poisson du potentiel φ est

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} Q(y) \Big|_{y=\frac{(\vec{\nabla}\varphi)^2}{a_0^2}} \vec{\nabla}\varphi_N \right) \quad (2.4.16)$$

Par identification avec l'équation (2.4.11), on aura

$$\frac{\partial}{\partial y} Q(y) \Big|_{y=\frac{(\vec{\nabla}\varphi)^2}{a_0^2}} = v \left(\frac{|\vec{\nabla}\varphi_N|}{a_0} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} Q(y) = v(\sqrt{y}) \quad (2.4.17)$$

Dans le régime newtonien, $y \gg 1 \implies \nu(\sqrt{y}) = 1$ d'où $Q(y) = \int 1 dy = y$ et dans le régime MONDien $y \ll 1 \implies \nu(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y}}}$ d'où $Q(y) = \int y^{-1/4} dy = \frac{4}{3}y^{3/4}$. Finalement,

$$Q(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \gg 1 \\ \frac{4}{3}y^{3/4} & \text{si } y \ll 1 \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Dans le cas simple où $v(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right)$, la fonction $Q(y)$ aura la forme

$$Q = 1/2 y^{3/4} \sqrt{\sqrt{y} + 4} + \sqrt[4]{y} \sqrt{\sqrt{y} + 4} - 4 \operatorname{arcsinh}(1/2 \sqrt[4]{y}) + 1/2 y \quad (2.4.19)$$

Nous avons ainsi démontré la possibilité de construire une théorie quasi-linéaire du potentiel gravitationnel dans le cadre de la théorie de la dynamique newtonienne modifiée (MOND).

2.5 Les lois de Kepler et la vitesse de libération en théorie MOND

2.5.1 Les lois de Kepler en théorie MOND

La force qui s'exerce entre une masse M qui occupe l'origine des coordonnées et une autre masse m située à une distance r de la première en régime MONDien, est une force centrale comme le montre

$$\vec{F} = m\vec{g} = -\frac{m\sqrt{GMa_0}}{r} \vec{e}_r \quad (2.5.1)$$

Cela assure la conservation du moment cinétique. Cette propriété nous garantit deux choses comme on l'a déjà vu dans le premier chapitre dans la partie consacrée aux lois de Kepler : le mouvement va se faire dans un plan et la loi des aires sera respectée.

Examinons maintenant la dynamique de notre système. En coordonnées polaires, la loi $m\vec{a} = \vec{F}$ se réduit à la forme

$$-\frac{\sqrt{GMa_0}}{r} \vec{e}_r = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta \quad (2.5.2)$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\sqrt{GMa_0}}{r} \\ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Nous avons déjà démontré dans le premier chapitre que

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{-K^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad (2.5.4)$$

où $r^2 \frac{d\theta}{dt} = K$. Avec la théorie MOND l'équation (2.5.3), va se réécrire sous la forme réduite

$$-\frac{\sqrt{GMa_0}}{r} = \frac{-K^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad (2.5.5)$$

Finalement, on aboutit à une équation différentielle non linéaire

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{GMa_0}}{K^2} r \quad (2.5.6)$$

Cette équation ne peut décrire une trajectoire elliptique, car son membre de droite dépend de r contrairement au cas newtonien. En effet, la trajectoire va être une rosasse bornée mais non fermée comme le montre les figures ci-dessous obtenues avec un petit code exécuté sur Maple. De même la troisième loi de Kepler ne peut être vérifiée car elle suppose une elle aussi une trajectoire elliptique.

```
>
sys := D(r)(t) = v(t), D(theta)(t) = w(t), D(v)(t) = r(t)*w(t)^2-20/r(t),
D(w)(t) = -2/r(t)*v(t)*w(t);
sol := dsolve({sys, v(0) = 0, w(0) = 3, r(0) = 1, theta(0) = 0},
numeric,method = rkf45,stepsize = .1e-2,output = listprocedure);
Theta := subs(sol,theta(t)); R := subs(sol,r(t));
plot([R(t), Theta(t), t = 0 .. 10],coords = polar,axiscoordinates = polar);
```

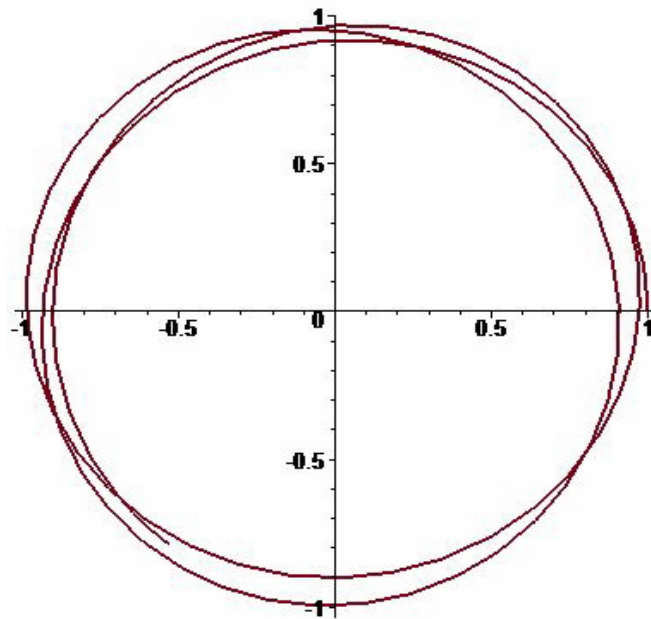


Figure 2.2 - Trajectoire en régime MONDien avec $G = 1$, $a_0 = 1$ et $M = 100$.

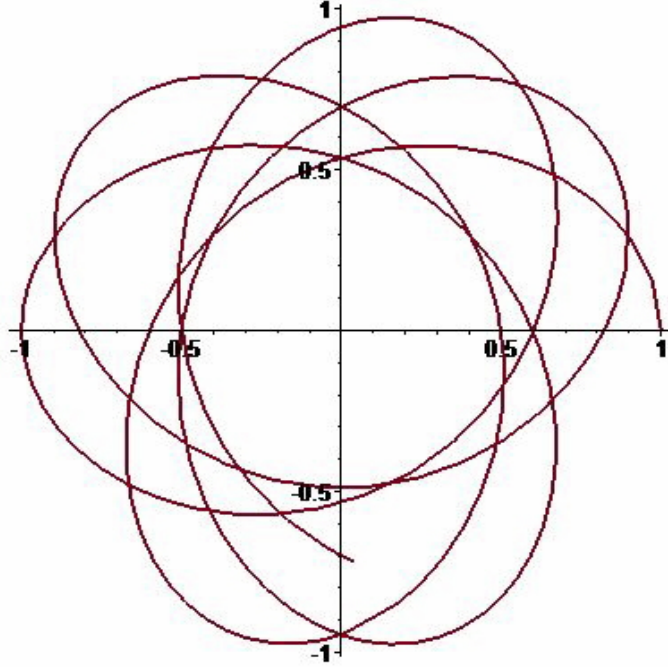


Figure 2.3 - Trajectoire en régime MONDien avec $G = 1$, $a_0 = 1$ et $M = 400$.

A partir de l'équation (2.5.6), on peut déduire la possibilité d'avoir une trajectoire circulaire. En effet, si on suppose que le rayon r reste constant, on aura l'équation d'un cercle du rayon

$$r = \frac{K}{(GMa_0)^{1/4}} \quad (2.5.7)$$

Nous avons ainsi retrouvé la trajectoire circulaire postulée par Milgrom dans la dérivation de sa formule (2.1.1).

2.5.2 La vitesse de libération

Nous avons déjà calculé la vitesse de libération des corps dans le régime newtonien, que devient-elle en régime MONDien ? Dans ce régime.

$$\vec{F} = m\vec{g} = -\frac{m\sqrt{GMa_0}}{r}\vec{e}_r \quad (2.5.8)$$

L'énergie potentielle associée à cette force est donnée par

$$E_p = m\sqrt{GMa_0}\ln(r) \quad (2.5.9)$$

L'énergie mécanique d'un corps céleste est rien d'autre que la somme de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique

$$E_m(v, r) = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + m\sqrt{GMa_0}\ln(r). \quad (2.5.10)$$

Pour des considérations déjà vues dans le premier chapitre concernant les vitesses cosmiques, la vitesse de libération v_l à partir d'une distance R de la source, doit vérifier la condition

$$E_m(v_l, R) = E_m(v_\infty = 0, r \rightarrow +\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_l^2 + m\sqrt{GMa_0} \ln(R) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{GMa_0} \ln(r) \quad (2.5.11)$$

Finalement, le carré de la vitesse de libération s'écrit

$$v_l^2 = 2\sqrt{GMa_0} (\ln(+\infty) - \ln(R)) \quad (2.5.12)$$

Par conséquent, la vitesse de libération qu'un corps devrait avoir pour quitter le puits du potentiel d'un autre corps dans le cadre de la théorie MOND est infini.

Dans notre galaxie, la vitesse de libération mesurée est de $v_l = 544_{+46}^{-64} km/s$ [15]. Avec la gravitation modifiée pour résoudre ce problème, il faut prendre en compte l'effet des champs extérieurs. En effet, le champ extérieur nous permet de retrouver un potentiel quasi-newtonien au-delà d'un certain rayon, comme nous allons le voir dans la section suivante.

Une étude a montré que notre galaxie devrait être soumise à un champ extérieur de l'ordre de $a_0/100$, ce qui permet de donner le bon ordre de grandeur de la vitesse de libération. Cette valeur correspond à l'accélération produite par Andromède (la galaxie la plus proche de nous) au niveau de notre galaxie [15].

2.6 L'effet du champ extérieur en théorie MOND

Dans cette section, nous allons discuter une propriété caractéristique de la théorie MOND sans analogue en gravitation newtonienne. Il s'agit de l'effet du champ extérieur qui explique certains comportements dans le cadre de cette théorie [4].

Soit un système constitué d'une masse m sous l'influence du potentiel gravitationnel d'une autre masse M telle que $m \ll M$. Ce système à son tour, est soumis à l'effet d'un champ extérieur créé par une troisième masse M' (voir la figure ci-dessous). C'est le cas d'une étoile qui tourne autour du centre d'une galaxie soumise à son tour à l'effet du champ gravitationnel créé par une galaxie voisine.

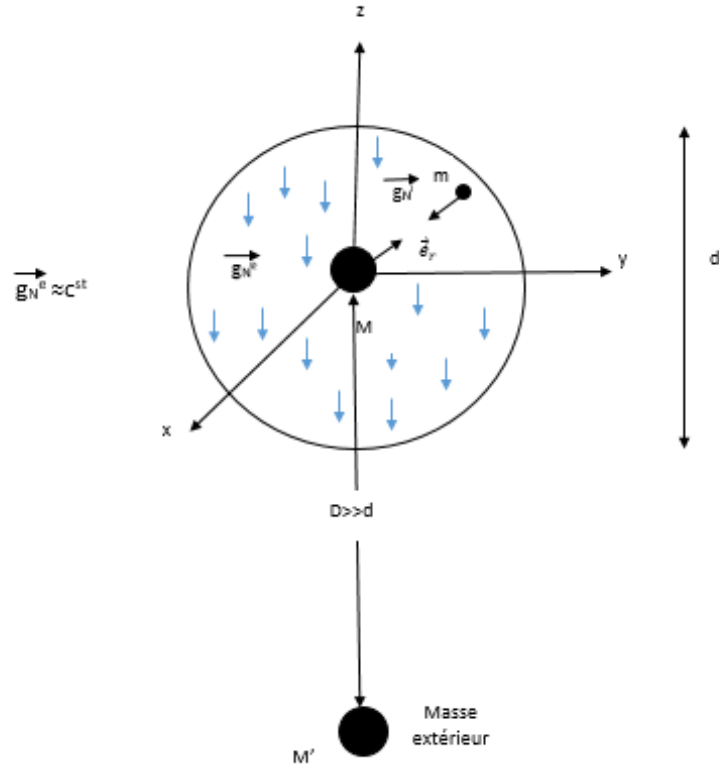


Figure 2.4 - Un système de deux masses soumis à l'effet d'un champ extérieur d'une troisième masse

Dans le cas de la gravité newtonienne, en vertu du principe de superposition, le champ total qui agit sur la masse m s'écrit de la manière suivante⁽¹⁾

$$\vec{g}_N = \vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \quad (2.6.1)$$

où $\vec{g}_N^{(i)}$ est le champ interne qui agit sur la masse m créée par la masse M

$$\vec{g}_N^{(i)} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.6.2)$$

et $\vec{g}_N^{(e)}$ est le champ extérieur qui agit sur l'ensemble du système, créé par la masse M' . Sachant que le système (m, M) est situé à une distance très grande de la masse M' , le champ créé par cette dernière sera presque constant en tous points de notre système

$$\vec{g}_N^{(e)} \simeq -g_N^e \vec{k} \quad (2.6.3)$$

⁽¹⁾ Voir la figure 2.4 pour apercevoir l'orientation de notre système de coordonnées sphériques.

En résumé, le champ gravitationnel total agissant sur m s'écrit comme une somme de deux termes où les effets des deux masses M et M' sont complètement séparés

$$\vec{g}_N = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r - g_N^e \vec{k} = \vec{g}_N = -\frac{GM'}{r^2}\vec{e}_r - g_N^{(e)} (\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta) \quad (2.6.4)$$

Nous avons la même situation avec le potentiel gravitationnel total

$$\varphi_N = \varphi_N^{(i)} + \varphi_N^{(e)} = -\frac{GM}{r} + g_N^{(e)} \underbrace{r \cos(\theta)}_{=z} \quad (2.6.5)$$

A présent, voyons la situation dans le cas de la gravitation modifiée. Pour ce faire, nous allons faire appel à la relation (2.4.3). En effet,

$$\vec{g} = \vec{g}_N v \left(\frac{|\vec{g}_N|}{a_0} \right) \quad (2.6.6)$$

Sachant $\vec{g}_N = \vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)}$, on déduit que

$$\vec{g} = \left(\vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \right) v \left(\frac{|\vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)}|}{a_0} \right) \quad (2.6.7)$$

La situation qui nous intéresse dans notre étude vérifie les conditions $|\vec{g}_N^{(i)}| \ll |\vec{g}_N^{(e)}| \ll a_0$, cela implique que $|\vec{g}_N| \ll a_0$. Donc, chacun des deux champs $\vec{g}_N^{(i)}$ et $\vec{g}_N^{(e)}$ pris séparément se trouve dans le régime MONDien. C'est cette situation qui permet d'expliquer les vitesses de libération des étoiles déjà observées.

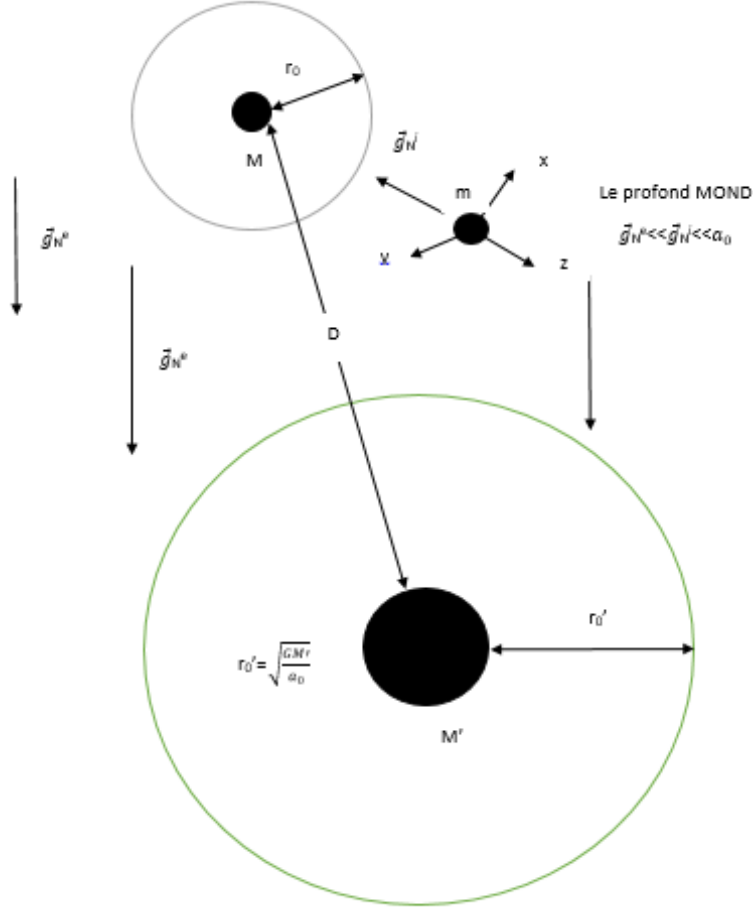


Figure 2.5- Trois corps de différentes masses situées dans l'espace séparées par des grandes distances

Comme $|\vec{g}_N| \ll a_0$, la fonction $v\left(\frac{|\vec{g}_N|}{a_0}\right) = \sqrt{\frac{a_0}{|\vec{g}_N|}}$ d'où

$$\vec{g} = \sqrt{\frac{a_0}{|\vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)}|}} \left(\vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \right) \quad (2.6.8)$$

Commençons par

$$\left| \vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \right| = \sqrt{\left(\vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \right) \cdot \left(\vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \right)} = \sqrt{\left(g_N^{(i)} \right)^2 + \left(g_N^{(e)} \right)^2 + 2g_N^{(i)} \cdot g_N^{(e)} \cos(\theta)} \quad (2.6.9)$$

où l'angle θ coïncide avec l'angle formé par $\vec{g}_N^{(i)}$ et $\vec{g}_N^{(e)}$. D'une autre façon,

$$\left| \vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \right| = g_N^{(e)} \sqrt{1 + \left(\frac{g_N^{(i)}}{g_N^{(e)}} \right)^2 + 2 \frac{g_N^{(i)}}{g_N^{(e)}} \cos(\theta)} \quad (2.6.10)$$

A ce stade, remarquons que le fait que $g_N^{(i)} \ll g_N^{(e)}$ rend le terme $\frac{g_N^{(i)}}{g_N^{(e)}}$ très proche de zéro, ce qui justifie l'approximation

$$\left| \vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)} \right| \approx g_N^{(e)} \left(1 + 2 \frac{g_N^{(i)}}{g_N^{(e)}} \cos(\theta) \right)^{1/2} \quad (2.6.11)$$

Le champ total \vec{g} donné par (2.6.8) va se réduire à la forme

$$\vec{g} = \sqrt{a_0} \left(g_N^{(e)} \right)^{-1/2} \left(1 + 2 \frac{g_N^{(i)}}{g_N^{(e)}} \cos(\theta) \right)^{-1/4} \vec{g}_N \quad (2.6.12)$$

Connaissant le développement limité $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, l'équation précédente devient

$$\vec{g} = \sqrt{\frac{a_0}{g_N^{(e)}}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{g_N^{(i)}}{g_N^{(e)}} \cos(\theta) \right) \vec{g}_N \quad (2.6.13)$$

Après développement et en gardant juste le terme dominant,

$$\vec{g} = \sqrt{\frac{a_0}{g_N^{(e)}}} \vec{g}_N \quad (2.6.14)$$

Cette équation montre qu'après une bonne approximation, \vec{g} et \vec{g}_N sont proportionnels car $\sqrt{\frac{a_0}{g_N^{(e)}}}$ est une constante.

Maintenant essayons de voir si on peut séparer l'effet de champ extérieur de celui du champ interne. Nous avons que $\vec{g}_N = \vec{g}_N^{(i)} + \vec{g}_N^{(e)}$ où $\vec{g}_N^{(i)} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$, alors

$$\vec{g} = \sqrt{\frac{a_0}{g_N^{(e)}}} \left(-\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r + \vec{g}_N^{(e)} \right) = -\sqrt{\frac{a_0}{g_N^{(e)}}} \frac{GM}{r^2} \vec{e}_r + \sqrt{\frac{a_0}{g_N^{(e)}}} \vec{g}_N^{(e)} \quad (2.6.15)$$

Soit $\vec{g}^{(e)}$ le champ extérieur modifié créé par M' en l'absence du système (m, M) . Il est donc lié au champ extérieur newtonien $\vec{g}_N^{(e)}$ par la relation

$$\vec{g}^{(e)} = v \left(\frac{|\vec{g}_N^{(e)}|}{a_0} \right) \vec{g}_N^{(e)} \simeq \sqrt{\frac{a_0}{|\vec{g}_e|}} \vec{g}_N^{(e)} \quad \Rightarrow \quad g_N^{(e)} = \frac{[g^{(e)}]^2}{a_0} \quad (2.6.16)$$

Finalement, l'équation (2.6.15) va prendre la forme définitive

$$\vec{g} = -\frac{a_0 G M}{g^{(e)} r^2} \vec{e}_r + \vec{g}^{(e)} \quad (2.6.17)$$

Au premier regard, on constate que le champ extérieur $\vec{g}^{(e)}$ apparaît dans l'expression du champ interne $-\frac{a_0 G}{g^{(e)}} \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$, d'où l'impossibilité de les séparer contrairement au cas newtonien. Deuxièmement, ce champ interne aura exactement la forme du potentiel newtonien à condition de remplacer G par $G' = \frac{a_0 G}{g^{(e)}} \gg G$. On parle ici du régime quasi-newtonien (car les termes négligés dépendent de l'angle θ) dans lequel les masses vont avoir un comportement analogue au régime newtonien en ce qui concerne les trajectoires et les vitesses de libération. Cela est complètement inattendu, car nous avons pris des champs qui sont MONDiens si on les regarde individuellement et qui donnent naissance à un champ quasi-newtonien quand on les prend ensemble. Ce phénomène, sans équivalent en gravitation newtonienne, est désigné par l'effet du champ extérieur dû à la non linéarité des équations de la théorie MOND.

2.7 Les succès de la théorie MOND

Ce qui est bien avec la théorie MOND, c'est sa capacité de décrire une grande diversité de courbes de rotation des galaxies. Autrement dit, toutes les formes de courbes de rotation sont bien modélisées par la théorie MOND, y compris les galaxies à très grandes masse, dont les courbes de rotation augmentent jusqu'à un maximum de $(200 - 400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1})$ et diminuent vers un plateau $(200 - 250 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1})$. Les galaxies à faible brillance de surface et les galaxies de faible masse sont aussi en accord avec les prédictions de la théorie MOND, d'autant plus qu'elles sont intéressantes à étudier vu que leurs accélérations caractéristiques sont de l'ordre de a_0 [15]. Néanmoins, certaines galaxies ne sont pas encore modélisées avec la théorie MOND, faute de manque d'information sur leurs distances ou l'inclinaison.

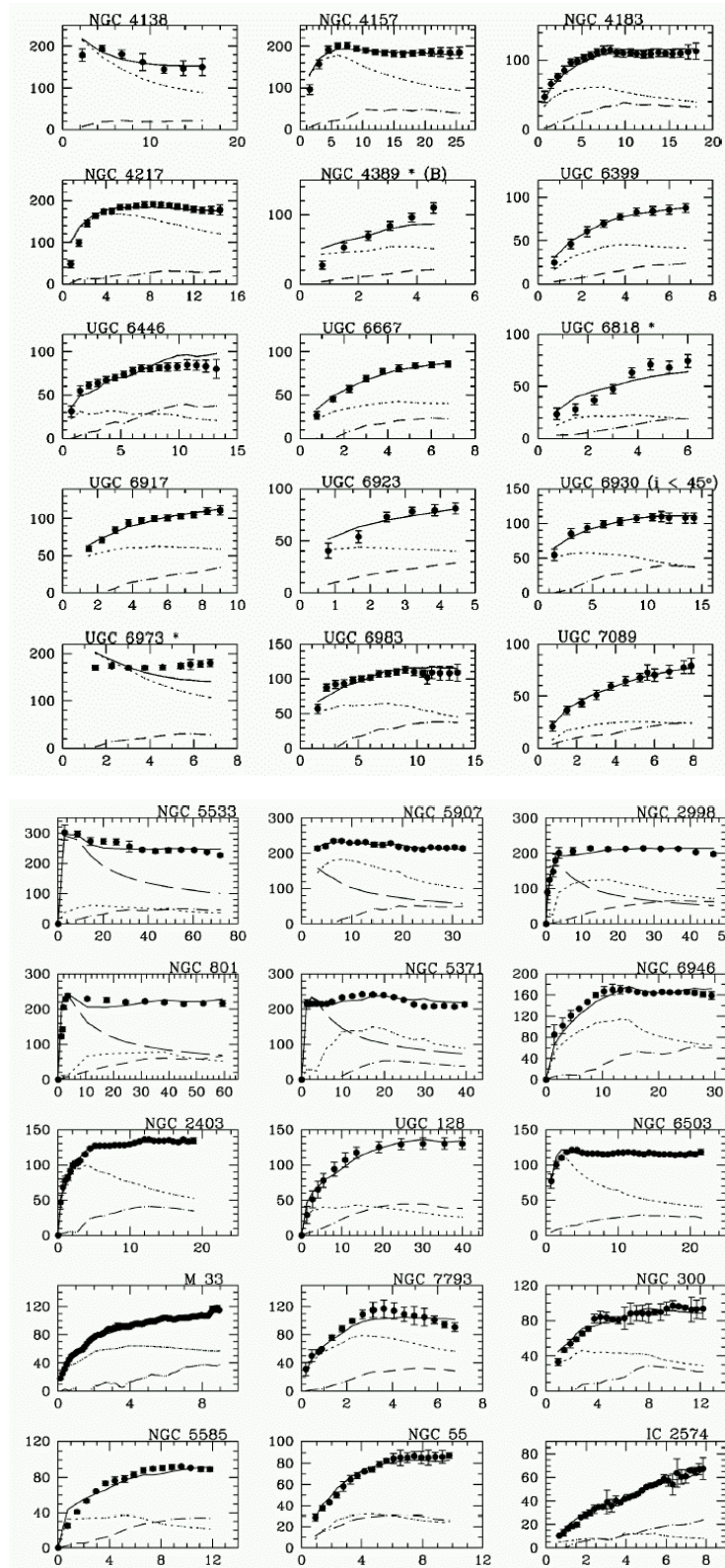


Figure 2.6- Exemples de courbes de rotation ajustées par MOND [21]

La relation entre la luminosité L et la vitesse maximale des courbes de rotation donne ce qu'on appelle la loi observationnelle de Tully-Fischer. D'après la formule de Milgrom, la vitesse des courbes de rotation des galaxies est $v_{\max} = (GMa_0)^{1/4}$, donc la masse baryonique totale de la galaxie est proportionnelle à sa vitesse de rotation à puissance quatre

$$v_{\max}^4 = GMa_0$$

On sait que le rapport entre la masse et la luminosité est pratiquement constant dans toutes les galaxies $M / L = \gamma$ [12], alors si on remplace la masse M par γL dans l'expression précédente, on en déduit que la luminosité L est proportionnelle à v_{\max}^4

$$v_{\max}^4 = GL\gamma a_0 \quad \implies \quad v_{\max}^4 \sim L$$

Nous avons vu que cette loi n'était pas en accord avec la gravitation newtonienne en présence de matière noire, alors qu'elle coïncide parfaitement avec la prédiction de la théorie MOND.

Le succès de la théorie MOND s'étend au cas d'interaction entre galaxies comme c'est le cas des galaxies des antennes situées dans la constellation du Corbeau, où la théorie MOND arrive à reproduire le comportement observé sans la matière noire.

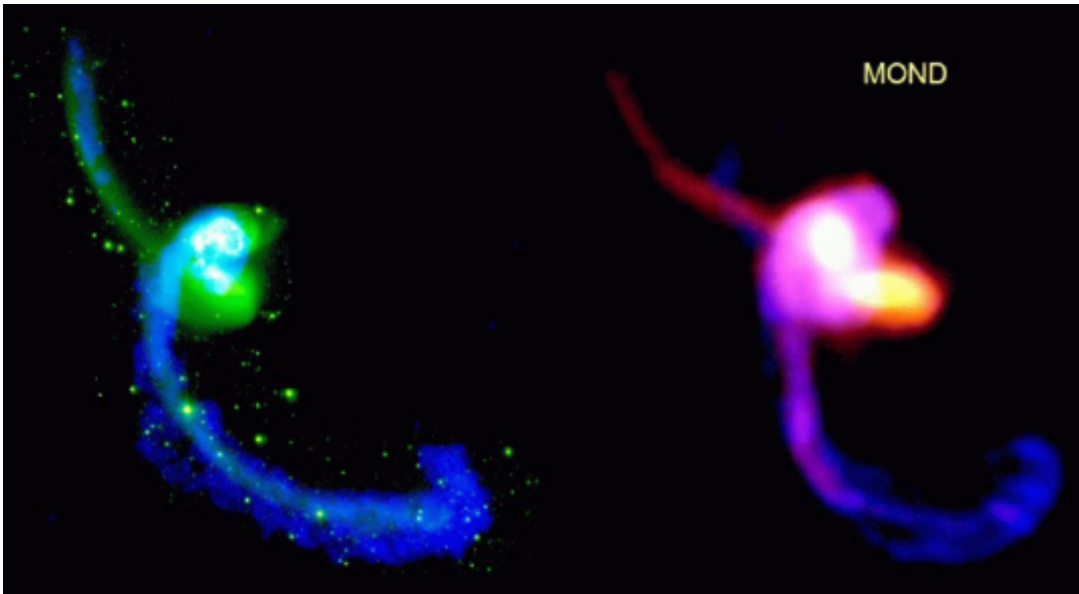


Figure 2.7 - Comparaison entre l'observation des "Antennes" à gauche, galaxies de masses semblables en interaction, et développant deux queues de marée, et les simulations dans le cadre de MOND, de deux galaxies de masse égale [22].

2.8 Les difficultés de MOND dans les amas de galaxies

L'observation de deux amas de galaxies en collision (l'amas du boulet 1E 0657-56) a longtemps été considérée comme une preuve en faveur de l'existence de la matière noire, allant ainsi à l'encontre de MOND. En effet, les simulations montrent que dans la collision, les galaxies et la matière noire se traversent sans se voir (séparation entre la matière baryonique et la matière noire), alors que le gaz chaud, émetteur de rayons X, il s'arrête ; on distingue donc une répartition de gaz en rayons X dans des régions différentes à l'intérieur de l'amas, et l'étude des lentilles gravitationnelles appuie sur l'idée de l'existence de cette matière invisible. Cependant, en gravitation modifiée, le gaz chaud est censé dominer la masse baryonique à cette échelle, et les caractéristiques de convergence des cartes de lentille gravitationnelle doivent être centrées autour du gaz [23].

L'analyse de l'onde de choc dans le gaz de l'amas (1E 0657-56) retourne la situation en faveur de MOND, elle permet d'évaluer la vitesse relative de collision entre les deux amas, mais cette vitesse semble très élevée par rapport aux prédictions reproduites par les simulations Λ CDM [24].

A l'échelle des amas, pour expliquer la dynamique, la masse baryonique n'est pas suffisante. Par ailleurs en 2005, Pointecouteau et Silk font un écart entre la masse dynamique M_d prédite par MOND et la masse baryonique M_b observée de $\frac{M_d}{M_b} = 4.94 \pm 0.5$. Pour résoudre ce problème de la masse manquante avec MOND, il faut prendre en considération la masse des neutrinos au centre de l'amas. Cependant, cette hypothèse nécessite d'attribuer une masse minimale aux neutrinos de l'ordre de 2 *ev* [25].



Figure 2.8 - La collision entre deux amas (l'amas du boulet 1E 0657-56), le rouge représente l'émission en rayons X du gaz chaud intra-amas, et le bleu la cartographie de masse totale, déduite des lentilles gravitationnelles. Le tout est superposé sur une image optique du ciel, les tâches blanches concentrées représentent les galaxies des amas, l'amas le plus massif est à gauche. Noter le cône rose à droite qui indique une onde de choc [26].

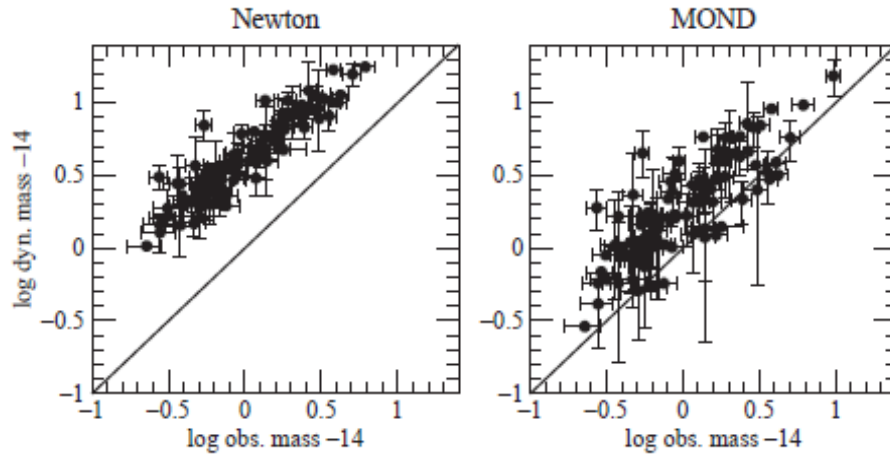


Figure 2.9 - Le rapport entre la masse dynamique des amas et la masse observée dans les deux cas (Newtonien et MONDien). On représente en vertical la masse dynamique et en abscisse la masse observée [2].

La figure 2.9 nous montre la différence de rapport masse dynamique et masse visible des amas de galaxies. On peut constater que la masse dynamique est bien plus grande que la masse visible des amas dans le cas de la gravité newtonienne. De même, la gravité modifiée ne résout pas le problème correctement, pour cela il doit y avoir encore de masse invisible.

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier la théorie de la dynamique newtonienne modifiée (MOND) qui est une alternative prometteuse qui va à l'encontre de l'existence de la matière noire dans l'Univers. En effet, en se basant sur la dynamique newtonienne, on rencontre un problème inexplicable lors de l'analyse des courbes de rotation au niveau des galaxies. Pour relever cette difficulté, on fait appel habituellement à la matière noire invisible pour maintenir les galaxies en équilibre. Pour ne pas invoquer une matière invisible aux caractéristiques mystérieuses, Milgrom a proposé sa théorie qui consiste à modifier la dynamique newtonienne.

Nous avons entamé ce travail en rappelant brièvement les principes de la théorie de gravitation newtonienne en commençant par énoncer la loi d'attraction gravitationnelle et l'explication des lois de Kepler ainsi que les vitesses cosmiques. Puis, nous avons démontré le théorème de Gauss relatif au champ gravitationnel et obtenu l'équation de Poisson à partir d'une formulation lagrangienne.

Ensuite, l'application de la théorie de gravitation newtonienne (même dans sa version relativiste) aux galaxies et à l'Univers entier nous a montré à quel point nous étions dans l'obligation de faire appel à l'existence de la matière noire. En effet, nous avons constaté que la matière noire est une pierre angulaire dans la compréhension de l'histoire de l'Univers dans le cadre de la théorie de Big Bang, en particulier, dans la formation des grandes structures. Cependant, cette matière hypothétique a devant elle certaines difficultés qui demandent d'être surmontées.

Pour écarter cette hypothèse de matière noire dont l'objectif est de préserver les lois déjà établies, la théorie MOND a vu le jour comme une théorie qui propose de nouvelles lois de la physique.

Après avoir éliminé la possibilité de modifier l'inertie, nous avons reformulé la théorie de gravitation dans un cadre lagrangien de deux façons équivalentes : AQUAL et QU-MOND. La détermination par la suite du potentiel gravitationnel modifié s'est soldée par analyser le sort des lois de Kepler et de la vitesse de libération dans cette théorie. Enfin, nous avons introduit l'effet du champ extérieur qui est un phénomène caractéristique de la théorie MOND, sans analogue newtonien.

La théorie MOND n'a pas la puissance et l'élégance mathématique de la gravitation newtonienne ou de la relativité générale, mais elle se dresse toujours comme une alternative solide qui résiste encore à la domination de l'idée de la matière noire dans la communauté scientifique.

Ce travail reste une introduction à cette nouvelle théorie qui reste toujours dans le stade de la recherche en pleine évolution, espérant qu'elle serait de grande utilité plus tard dans la compréhension de l'évolution de l'Univers et de son origine.

Bibliographie

- [1] David Sénéchal. *Mécanique classique. PHQ114 : MECANIQUE 1*. [En ligne]. SHERBROOK : Faculté des sciences, Département de physique; 30 mai 2018 [24 juin 2022]. Disponible : <https://www.physique.usherbrooke.ca/pages/node/7929>
- [2] SANDERS, Robert H. *The dark matter problem : a historical perspective*. Cambridge University Press; 2010.
- [3] MILGROM, Mordehai. *A modification of the Newtonian dynamics-Implications for galaxies*. The Astrophysical Journal. vol. 270, p. 371-383; 1983
- [4] BEKENSTEIN, Jacob et MILGROM, Mordehai. *Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity ?*. The Astrophysical Journal, vol. 286, p. 7-14; 1984
- [5] Michel Capderou. *Satellites : de Kepler au GPS*. Palaiseau : Springer Science & Business Media; 2011.
- [6] Observatoire de lyon. *Les lois de Kepler démontrées*; Avril 2004 [26 avril 2022]. Disponible sur : https://cral-perso.univ-lyon1.fr/labo/fc/cdroms/cdrom2014/gravitation/genese/140324-kepler_demontre.pdf
- [7] PEREZ, Jérôme. *Gravitation classique : problème à N corps, de 2 à l'infini*. Les presses de l'ENSTA; 2008.
- [8] L. Volders. *Neutral hydrogen in M 33 and M 101*. Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands. vol. 14. no 492. p. 323-334; 1959.
- [9] Françoise Combes. *MOND et les galaxies. Observatoire de paris, LERMA; 14 Novembre 2008*.
- [10] SOFUE, Yoshiaki et RUBIN, Vera. *Rotation curves of spiral galaxies*. arXiv preprint astro-ph/0010594; 2000.
- [11] TULLY, R. Brent et FISHER, J. Richard. *A new method of determining distances to galaxies. Astronomy and Astrophysics*. vol. 54, p. 661-673; 1977
- [12] Scarpa, Riccardo. *Modified Newtonian Dynamics, an Introductory Review*. doi :10.1063/1.2189141; 2006.

-
- [13] Luc Blanchet. *Gravité modifiée ou matière modifiée ?*. Institut d'Astrophysique de Paris - CNRS, Université Pierre & Marie Curie ; 2009.
- [14] COMBES, Françoise. *La matière noire, clé de l'univers ?*. Vuibert ; 2016.
- [15] Olivier Tiret. *Dynamique des galaxies : gravité newtonienne & gravité modifiée* [Thèse de doctorat]. [Paris]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI ; 2008.
- [16] Mordehai Milgrom. *The MOND paradigm* ; 2008.
- [17] FELTEN, J. E. *Milgrom's revision of Newton's laws-Dynamical and cosmological consequences*. The Astrophysical Journal. vol. 286, p. 3-6 ; 1984
- [18] Jean-Philippe Bruneton. *Théories alternatives de la gravitation et applications*. [Thèse de doctorat]. [Paris]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI ; 2007.
- [19] BEKENSTEIN, J. D. *Relativistic gravitational theory for the MOND paradigm*. Phys. Rev. D, vol. 70 ; 2005.
- [20] MILGROM, Mordehai. *Quasi-linear formulation of MOND*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. vol. 403. no 2. p. 886-895 ; 2010.
- [21] Sanders, R. H. and M. A. W. Verheijen. *Rotation Curves of Ursa Major Galaxies in the Context of Modified Newtonian Dynamics*. The Astrophysical Journal 503, no. 1. 97-108 ; 2005.
- [22] TIRET, O. et COMBES, F. *Interacting galaxies with modified newtonian dynamics*. In : Formation and Evolution of Galaxy Disks. p. 259 ; 2008.
- [23] AVERSA, Alan G. *Modified Newtonian Dynamics (MOND) and the Bullet Cluster (1E 0657-558)*.
- [24] Hayashi, Eric Et Simon D. M. White. *How Rare is the Bullet Cluster ?*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Letters 370, no. 1. L38-L41 ; 2006.
- [25] Pointecouteau, Etienne Et Joseph Silk. *New Constraints on Modified Newtonian Dynamics from Galaxy Clusters*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 364, no. 2. 654-658 ; 2005.
- [26] CLOWE, Douglas, BRADAČ, Maruša, GONZALEZ, Anthony H., et al. *A direct empirical proof of the existence of dark matter*. The Astrophysical Journal, vol. 648, no 2, p. L109 ; 2006.