République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire Présenté

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option : Probabilités Statistique et Applications

Les $\acute{E}$quations Diférentielles Stochastiques Multidimensionnelles

Présenté par : KHIRI AMINA

Devant le Jury composé de :

Mme L.	**BAICHE**	M.C.B	Présidente	Université A.Mira de Béjaia
Mme L.	**BOURAINE**	Pr.	Examinatrice	Université A.Mira de Béjaia
Mme S.	**MEDJBAR**	M.C.B	Promotrice	Université A.Mira de Béjaia

Année universitaire : 2021 / 2022

REMERCIEMENT

Je remercie Dieu, de m'avoir donné la force et la patience afin de parvenir à terminer ce travail.

Je témoigne toute ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à ma formation et je tiens à remercier tous les enseignants du département de mathématiques. *Mes vifs remerciements vont à :*

M^{me} S. MADJBAR pour son encadrement, sa disponibilité, sa confiance et ses précieuses remarques.

M^{me} *L. BOURAINE pour l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant de présider le jury.* *M^{me} L. BAICHE pour avoir accepté d'examiner ce mémoire, ce qui m'inspire un grand honneur.*

Mes remerciements s'adressent aussi à l'ensemble des personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire, en particulier "MONSIEUR . BOURAINE M" et M^{me}. "Takhdmit Baya".

Enfin, je tiens à remercier ma famille pour l'écoute, la présence, le soutien, les encouragements et l'amour qu'elle me porte de jour en jour, que ce soit dans les moments d'euphorie et de joie que dans ceux de doute et de remise en question.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère,A mon adorable père.

A mon Mari et mes petites prniceses Alaa Arrahmene / Eline

A toute ma famille.

A tous mes amis.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

K.Amina

Table des matières

1 Les Outils Stochastique et Calcule Matricielle 3

1.1 Calcul Stochastique . . . 3

1.1.1 Quelques rappels sur les probabilités . . . 3

1.1.2 Processus Stochastique . . . 4

1.1.3 Filtration . . . 5

1.1.4 Martingale . . . 5

1.1.5 Mouvement Brownien . . . 6

1.1.6 Mouvement Brownien Multidimensionnele . . . 7

1.1.7 Mouvement Brownien Généralisé . . . 7

1.1.8 Intégrale Stochastique . . . 10

1.1.9 Formule d'It$\hat{o}$ . . . 11

1.2 Calcul matriciel . . . 12

1.2.1 Type de matrices . . . 12

1.2.2 Matrice triangulaire . . . 13

1.2.3 Matrice inverse . . . 13

1.2.4 Valeur propre . . . 13

1.2.5 Vecteur propre . . . 13

1.2.6 Exponotiel de matrice . . . 13

1.2.7 Calcul effectif . . . 14

1.2.8 Application aux équations differentielles . . . 16

2 L'équation Differentielle stochastique à bruit additif multidimenssionelle et Rétrograde 18

2.1 $\acute{E}$quation Diffrentielle Stochastique . . . 18

2.1.1 L'existence et L'unicité . . . 19

2.1.2 Solution Faible et Forte . . . 21

2.2 Formule d'It$\hat{o}$ . . . 22

2.2.1 Formule d'it$\hat{o}$ vectoriel . . . 25

2.3 L'équation différentielle stochastique à bruit additif . . . 25

2.3.1 les types de L'équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle . . . 26

2.3.2 L'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimmensionelle 27
2.4 Les équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR) 32
2.4.1 L'existence et l'unicité 33

3 Application au Modèle Black et Scholes **34**
3.1 Notions Fondamental sur le langage financier 34
3.2 Description du modèle 35
3.3 Le modèle Black et Scholes multidimensionnele 35
3.4 Formule de Black et Scholes 36
3.5 Simulation dans le modèle Black et Scholes 38
3.5.1 Méthode de simulation en Finance 38
3.5.2 Simulation du mouvement brownien 39

Notations

- ✓ X Variable aléatoire
- ✓ $X =^{\mathcal{L}} Y$ égalité en loi de deux processus
- ✓ $\mathbb{E}(X)$ l'espérence de X
- ✓ $K(s,t) = s \wedge t = min(s,t) = cov(B_t, B_s)$
- ✓ $\tilde{X} = X - \mathbb{E}(X)$
- ✓ $\|.\|$: la norme.
- ✓ $\langle ., . \rangle$: produit scalaire .
- ✓ T : L'ensemble des temps.
- ✓ $\phi^{-1}_{[t_0,t]} = exp(\int_0^t -a(s)ds)$
- ✓ $h_{[t_0,t]} = exp(\frac{1}{2}At^2)$
- ✓ $h^{-1}_{[t_0,t]} = exp(\frac{-1}{2}At^2)$
- ✓ $\left(h^{-1}_{[t_0,t]}\right) = -At\left(h^{-1}_{[t_0,t]}\right)$

Liste des Figures

- Fig(1.1) Mouvement brownien géometrique..................... (9)
- Fig(1.2) Processus O-U...................... (10)
- Fig(3.1) Calcul de prix d'un call européen par utilise la propriété de la loi log-normale.................. (41)
- Fig(3.2) Programme de simulation de mouvement brownien ....(42)
- Fig(3.3) Simulation de mouvement brownien...(43)
- Fig(3.4) Discritisation des trajectoires brownien..(45)
- Fog(3.5) Comparaison de l'application d'E-M et d'une trajectoire de modèle Black et Scholes.............(46)

Introduction générale

Le Concept d'équations differentielles stochastiques (EDS) généralise celui les équations différentielles ordinaires aux processus stochastiques.

Le mot "stochastique" dérive du grec "viser", "deviner".et signifie "aléatoire" ou "chance" [8]. L'antonyme est "sûr", "déterministe" ou "certain". Un modèle déterministe prédit un seul résultat à partir d'un ensemble donné de circonstances. Un modèle stochastique prédit un ensemble de résultats possibles pondérés par leurs vraisemblances ou probabilités. Une pièce de monnaie lancée en l'air reviendra sûrement sur terre quelque part. Qu'elle tombe pile ou face est aléatoire. Pour une pièce de monnaie " juste ", nous considérons que ces alternatives sont également probables et nous attribuons à chacune la probabilité 1/2. Cependant, les phénomènes ne sont pas en eux-même .

La formalisation théorique de ce problème à été posé aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 pour que le Japonais "It$\hat{o}$ Kyoshi" donne la définition de l'integrale d'It$\hat{o}$.
Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques relativement un mouvement brownien . On construira cette intégrale et on donnera un sens à l'expression $\int_s^t f(s,\omega)dB_s$ où $f(t,\omega)$ est un processus stochastique et ω est un évènment aléatoire .

Les EDS sont utilisées dans differentes branches à l'instar de la physique , biologie dynamique , mathématique financiers...etc
En 1908. "Langevin" étudie le mouvement brownien d'une particule dans un fluide [24]. Ce mouvement f$\hat{u}$t observé pour la première fois par le botaniste "Ecossais Brown" en 1827.Langevin d'écrit le mouvement d'une telle particule par l'équation :
$X_t' = -\alpha X_t + \sigma\zeta_t$ (1)

où $\alpha > 0$ et σ sont des constantes , X_t' represente la vitesse de la particule suivant l'axe x ,$-\alpha X_t$ représente la force due à la friction dynamique avec le fluide, la constante α est donnée par la loi de Stockes : $\alpha = \frac{6\pi a\eta}{m}$ avec a est le rayon de la particule , m sa masse et η la viscosité du fluide et la par quantité $\sigma\zeta_t$ représente la force exercée sur la particule par les chocs avec les molicules du fluide. $\sigma\zeta_t$ varie donc trés rapidement et peut $\hat{e}$tre modélisé par le bruit blanc ζ_t qui est tel que $W_t = \int_0^t \zeta_s ds$. Langevin f$\hat{u}$t donc le premier à considérer des équations du type :

$$\begin{cases} X_t' = a(t, X_t) + b(t, X_t)\zeta_t \\ X_{t_0} = C \end{cases} \qquad (2)$$

A u début des années quarante, It$\hat{o}$ développe la notion de l'intégrale stochastique et donne des conditions suffisantes pour l'existence de solutions pour l'équation (1). En posant dans l'équation (1),$dW_t = \zeta_t d_t$, on obtient :

$$\begin{cases} X_t' = a(t, X_t) + b(t, X_t)W_t \\ X_{t_0} = C \end{cases} \qquad (3)$$

ou bien

$$X_t = C + \int_{t_0}^t a(s, X_s)d_s + \int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s \qquad (4)$$

où la deuxième intégrale $(\int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s)$, est une intégrale qui ne peut $\hat{e}$tre interprétée comme une intégrale de Riemann Stieltjes car les réalisations du processus de Wiener ne sont pas à variations bornnées.
Pour résoudre ce problème, on définit l'intégrale stochastique 'It$\hat{o}$ et on entend par EDS au sens de It$\hat{o}$ une équation de la forme (2).
Il existe plusieurs types d'équations différentielles stochastiques . Une solution de cette equation est une fonction aléatoires verifiante (4) .
(rétrograde)
A fin d'étudier la résolution d'une EDS à bruit additif multidimensionel , et rétrogrades ;on a divisé notre mémoire en trois chapitres .

Dans le premier chapitre , on a présenté les outils théoriques dont on avait besoin dans notre étude,il comporte deux parties à savoir : Calcul stochastique et Calcul matriciel.

Dans le deuxième chapitre , nous allons présenter quelques théorèmes pour la résolution de l'EDS a l'instar de l'existence et l'unicité d'une EDS unidimensionelle et multidimensionelle à coefficients lipschitziens. Nous avons éventuellement parlé de solutions faibles et fortes .

Le troisième chapitre a été consacré à l'application d'équation différentielle stochastique en la finance mathémtique .Nous nous sommes intéréssé au modèle d'evolution des options Black et Scholes (1973) .
Ce modèle nous a permis d'evaluer le prix d'une option .L'étude a été débuté par un calcul d'erreur et de la précision de simulation ,et a été finalisé par le schéma d'EULER-MARUYAMA .

Chapitre 1

Les Outils Stochastique et Calcule Matricielle

Introduction

Dans ce chapitre, on introduira des notions et définitions utiles qu'on utilisera par la suite.

1.1 Calcul Stochastique

1.1.1 Quelques rappels sur les probabilités

Tribu

Définition 1.1.1. Soit Ω un ensemble. Une tribu (ou σ algèbre) sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de Ω tels que :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Une tribu contient donc Ω Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu et on le note $(\Omega, \mathcal{F})$

Proposition 1.1.1. *Une intersection de tribus est une tribu. L'union de tribus n'est pas, en général, une tribu.*

Mesurabilité

Définition 1.1.2. Soient $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{G})$ deux espaces mesurables .
$f : \Omega \to E$ est dite $(\mathcal{F}, \mathcal{G})-$ mesurable.
si $\forall A \in \mathcal{G} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ ou $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$.

Remarque 1.1.1. *S'il n'y a pas d'ambiguité sur les tribus utilisées. On dit simplement f mesurable.*

Tribu engendrée

Définition 1.1.3. Soit $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ une famille de sous ensemble Ω. Alors la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, noté $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petit tribu sur Ω qui contient tout les sous ensembles A_i, $i \in I$ (I n'est pas forcement d´enombrable). Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$.
Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont deux tribus, on note $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. C'est la plus petite tribu contenant les deux tribus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$.

Définition 1.1.4. Soit $\Omega = [0, 1]$. la tribu borélienne sur $[0, 1]$ est la tribu engendrée par la famille des sous ensembles :
$\mathcal{A} = \{]a, b[, 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. On la note $\mathcal{B}([0, 1])$.
pour $\Omega = [0, 1]^n$, la tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{A})$.
Avec $\mathcal{A} = \{]a_1, b_1[\times]a_1, b_1[\times....]a_n, b_n[, 0 \leq a_i \leq b_i \leq 1\}$.

Remarque 1.1.2. *Pour Ω fini, on choisit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.*
Pour $\Omega \subset \mathbb{R}$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, On choisit $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Variable aléatoire

Définition 1.1.5. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une variable aléatoire (v.a.r) X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{F}$.

1.1.2 Processus Stochastique

Définition 1.1.6. Un processus stochastique est un objet de la forme :

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$$

où

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.
- T (le temps) est un sous ensemble de $\mathbb{R}^+$.
- $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une filtration, i.e .est une famille croissante de sous σ-algébre de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$.

- $(X_t)_{t\in T}$ est une famille sur $(\Omega, \mathcal{F})$ prendre des valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ tel que, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Ce fait est également exprimé en disant que $(X_t)_{t\in T}$ est une adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.

Exemple 1.1. *soit $T = \mathbb{N}$ et $(X_i)_i$ une suite de v.a.i . On considère $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ le processus de sommes partielles . parle dans ce cas de marche alétoire. Alors, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus à accroissements indépendants.*

Définition 1.1.7. (**Egalité de deux processus**) Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique , les lois finies dimensionnelles de X sont les lois de tous les vecteurs $(X_{t_1}, X_{t_2}, ...X_{t_n})$ pour $t_1, t_2, ...t_n \in T$ et $n \in \mathbb{N}$
L'ensemble des lois finies dimensionnelles caractérise la loi P_X du processus X dans la suite l' égalité en loi de deux processus X et Y, nous signifierons l'égalité de toutes les lois finies dimensionnelles de X et de Y . $(X_{t_1}, X_{t_2}, ...X_{t_n}) =^{\mathcal{L}} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ...Y_{t_n})$
pour tout $t_1, t_2, ..., t_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

1.1.3 Filtration

Définition 1.1.8. Une Filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribu telle que pour $s \leq t$ on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Définition 1.1.9. Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **mesurable** si l'application définie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \rightarrow (\mathbb{R}^d)$ par $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable par rapport aux tribus$mathcal B(\mathbb{R}_+ \otimes$ $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1.10. (Adapté) un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **adapté** si pour tout $t \geq 0, \mathcal{F}_t-$ mesurable.

Exemple 1.2. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire .*
Pour tout $t \geq 0$, on pose $\mathcal{F}_t = \sigma(X_i : 0 \leq i \leq t)$ Alors $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration.

1.1.4 Martingale

Définition 1.1.11. Une suite de v.a.$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathcal{F}_n$-martingale si

- X_n est intégrable, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$(adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$).
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (jeu équitable).

Processus Gaussien

Définition 1.1.12. On dit qu'un processus est gaussien si toutes ses lois finies dimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ sont gaussiennes ,$\forall n \in \mathbb{N}, et, \forall t_1, ..., t_n \in T$.
Autrement dit $X = (X_t)_t$ est gaussien si toute combinaison linéaire $a_1X_{t_1} + ... + a_nX_{t_n}$

suit une loi gaussienne $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, ..., t_n \in T, et, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ la loi d'un vecteur gaussien $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est connu par le vecteur moyenne $(\mathbb{E}[X_{t_1}], ..., \mathbb{E}[X_{t_n}])$ et la matrice de la covriance $(Cov(X_{t_i}, X_{t_j}))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$

Remarque 1.1.3. 1. *Le vecteur $(X_{t_1}, ...X_{t_n})$ est un vecteur gaussien de moyenne $(m_{t_1}, ...m_{t_n})$ et de matrice de covariance $(\Gamma(t_j, t_k)$ où $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$,*

$$\Gamma(s,t) = cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}[X_s - \mathbb{E}(X_s)][X_t - \mathbb{E}(X_t)], \text{ pour tout s,t} \tag{1.1.1}$$

et

$$\Gamma(s,t) = \Gamma(t,s) \tag{1.1.2}$$

2. *Pour tout $t_1, ..., t_n \geq 0$ et pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k (\Gamma(t_j, t_k) \geq 0)$$

Posant $\tilde{X}_t = X_t - \mathbb{E}(X_t)$

$$\sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k (\Gamma(t_j, t_k) = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \mathbb{E}(\tilde{X}_{t_j}, \tilde{X}_{t_k})) = \mathbb{E}|\sum_{j} \lambda_j \tilde{X}_{t_j}|^2 \geq 0$$

Définition 1.1.13. **(Bruit blanc gaussien)** Soit $(\mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{A}, \mu(A) < +\infty\}$, le bruit blanc est un processus gaussien $(X_A)_{A\in\mathcal{A}}$ indexé par l'ensemble des mesurables A défini par : $\mathbb{E}[X_A] = 0$ et $cov(A, B) = \mu(A \cap B)$.
Le bruit blanc est une mesure aléatoire $A \mapsto X_A(w)$ elle est aléatoire car a dépend de w .sachant que la loi est

$$X(A) \rightarrow \mathcal{N}(0, \mu(A)).$$

Cepedant un bruit blanc n'est pas une vraie mesure car $A \mapsto X_A$ n'est pas σ additif

1.1.5 Mouvement Brownien

Définition 1.1.14. Un mouvement brownien standard (M.B) est un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues vérifiant les propriétés suivantes :
- $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$ le mouvement brownien issu de l'origine :$B_0 = 0$
- $\forall s \leq t, B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$
- $\forall n, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ les variables aléatoires $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}$sont indépendantes.
- $(B_t)_{t\geq 0}$ est appellé aussi processus de Wiener.

Proposition 1.1.2. *$(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B si et ssi $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien continu, centré de fonction de covariance :*
$Cov(B_t, B_s) = K(s,t) = min(s,t) = s \wedge t$

1.1.6 Mouvement Brownien Multidimensionnele

Définition 1.1.15. Soit $W_t = (W_t^{(1)}, ..., W_t^{(n)})^t$ un vecteur de dimension n . On dit que (W_t) est un M.B multidimensionnel si les processus $(W_t^{(i)}, i \leq n)_{t\geq 0}$ sont des browniens indépendnts , c'est un processus à accroissement indépendants .

1.1.7 Mouvement Brownien Généralisé

Définition 1.1.16. Le processus $(X_t = a + B_t)$ est un mouvement brownien issu de a . On dit que (X_t) est un mouvement brownien generalise ou un mouvement brownien de **Drift** μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B_t est un mouvement brownien standard. La variable X_t est une variable gaussienne d'èspérnce $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$. Les v.a $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, t_0 \leq .... \leq t_n)$ sont independants.

Exemple 1.3. ***Brownien Géométrique*** *:*
Soit B un mouvement brownien , b et σ deux costantes
le processus

$$X_t = X_0 exp[b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t] \tag{1.1.3}$$

est appellé Brownien Géometrique, ce processus est aussi appelle " log-normal". En effet dans ce cas

$$LnX_t = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t + lnx$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.
- le processus $X_t e^{-bt}$ est une martingale
- En notant G une v.a de loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Ce processus est appellé le modèle Black et scholes , il est utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier . le rendement de l'actif entre deux dates est mesuré par la différence des logarithmes des cours et est donné par la variable gaussienne

$$\Big\{ b - \frac{1}{2}\sigma^2 \}(t - s) + \sigma(B_t - B_s).$$

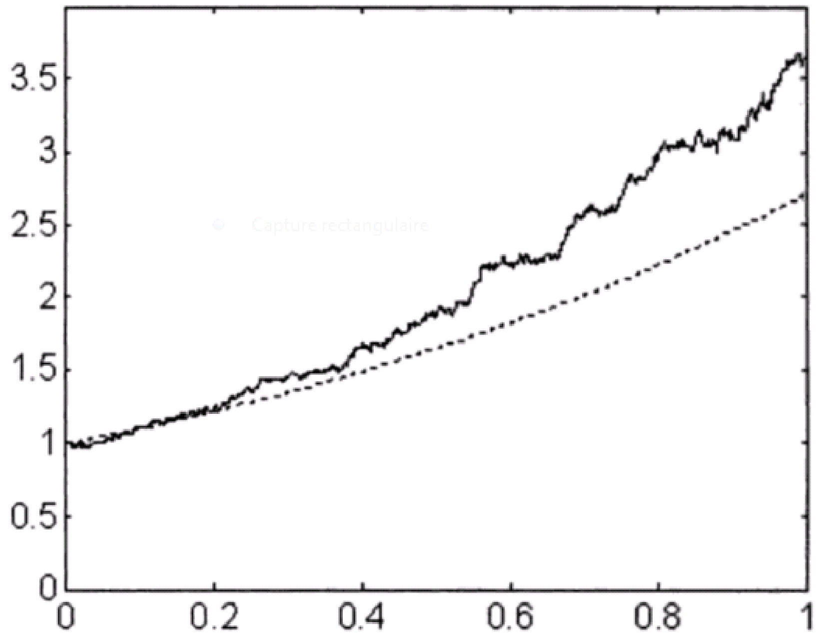

FIG. 1.1 – mouvement brownien géometrique

Exemple 1.4. ***Processus d'Ornstien-Uhlebeck***
L'équation de langevin

$$V_t = -\int_0^t aV_s d_s + \sigma B_t + V_0 \tag{1.1.4}$$

a pour unique solution

$$V_t = e^{-ta}V_0 + \int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dB_s$$

on écrit l'équation (1.1.4) sous forme condensée

$$dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t, V_0 \text{ donné}$$

les données de problème sont : L a variable aléatoire V_0, le Brownien B ,et les constantes a, σ

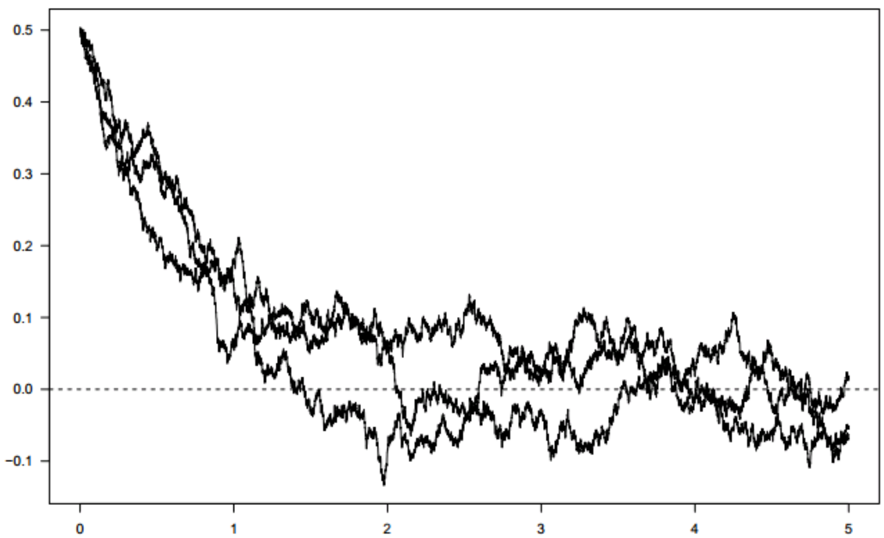

FIG. 1.2 – Processus O-U

Proposition 1.1.3. *[11] Le processus V , appellé* ***Processus d'Ornstien-Uhlebeck*** *est gussien d'espérence $\mathbb{E}(V_t) = e^{-ta}V$ et de covariance $cov[V_s, V_t] = \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma^2 e^{-(t-u)a}du, s \leq t$. En particulier , si V_0 est une constante $V = 0$*

$$cov[V_s, V_t] = \frac{\sigma^2}{2a}e{-}(s+t)(e^{2as} - 1$$
$$et\ Var(V_t) = \tfrac{\sigma^2}{2a}(1 - exp(-2at))$$

On écrivant

$$V_s = e^{-sa}V_0 + \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma dB_u$$
$$V_s e^{(s-t)a} = e^{-(ta)}V_0 + \int_0^s e^{-(t-u)a}\sigma dB_u$$

En déduit pour ,$s \leq t$

$$V_t = V_s e^{-(t-s)a} + \int_s^t e^{-(t-u)a}\sigma dB_u$$

ou encore

$$V_{t+s} = V_s e^{-ta} + \int_0^t e^{-(t-u)a}\sigma d\tilde{B}_u$$

où le processus $\tilde{B}$ défini par $\tilde{B} = B_{s+u} - B_s$ est un MB idépendant de $\mathcal{F}_s$ donc de V_s

1.1.8 Intégrale Stochastique

Intégrale de Wiener

L'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type : $\omega \mapsto Y_1(\omega) = \left(\int_0^1 X_s dB_s\right)(\omega)$ avec X fonction déterministe ,c à d ne depand pas de ω. On fixe un horizon $T > 0$ déterministe (éventiuellement $T = +\infty$) et on note :

$$L^2([0,T],\mathbb{R}) = \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} / \int_0^T |f(s)|^2 ds < \infty \right\}$$

Remarquons que si $T < \infty$, les fonctions continues et les fonctions bornées sont contenues dans$L^2([0;T];\mathbb{R})$ .On peut montrer que muni du produit scalaire ,

$$< f; g >= \int_0^T f(s)g(s)ds$$

$L^2([0;T];\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, au sens pour toute suite de $L^2([0;T];\mathbb{R})$ qui soit de Cauchy pour la norme

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{< f, f >} = \left(\int_0^T f^2(s)ds\right)^{1/2}$$

Définition 1.1.17. Soit $W = (W_t)$ un mouvement brownien standard .
Interprétation formelle de l'intégrale stochastique : On fixe w réalisation du hasard .

$$(\int_0^t X_s dW_s)(w) = \int_0^t X_s(w)\frac{dW_s}{ds}ds$$

l'intégrale se passe par rapport au temps . Le resultat est donc une variable aleatoire.

Remarque 1.1.4. *1. la definition univoque .*

2. *supposons X non-anticipant (progressivement mesurable) : X_t ne dépend que de $(W_s, s \leq t)$*
3. *integrale d'itô : $\int_0^t X_s dW_s$: si les trajectoires de X sont continues (ou Riemann-intégrables) alors ce sera la limite*

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

où $0 = t_0 < t_1 < ..... < t_n = t$ est un element d'une suite de subdivisions dont le pas

$$\max_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)$$

converge vers zéro

1.1.9 Formule d'Itô

Théorème 1.1.4. *Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R})$, et X un processus à variation quadratique finie , avec la probabilité 1, on a pour tout $t \geq 0$*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s)dX_s + \int_0^t f_t^{'}(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_x''x(s, X_s)d\langle X\rangle_s \quad (1.1.5)$$

Le terme $\int_0^t f_x^{'}(s, X_s)dX_s$ s'appelle l'intégrale stochastique de $f_x'(s, X_s)$ par rapport a X : c'est la limite p.s

$$\sum_{t_i \leq 0} f_x^{'}(t_i, X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

le long de la subdivision dyadique d'ordre n
La formule d'itô (1.1.5) peut aussi s'écrire sous forme differentielle

$$df(t, X_t) = f_x^{'}(t, X_t)dX_t + f_t^{'}(t, X_t)dt + \frac{1}{2}f_x''x(t, X_t)d\langle X\rangle_t \quad (1.1.6)$$

voir [18]

Démonstration. voir [18]

Calcule le crochet d'un processus X

Proposition 1.1.5. *(Calcul de Crochet) Considérons deux processus continus A et M ayant les propriétes suivantes :*
- *A est variation finie.*
- *M est variation quadratique finie.*

Alors

1. $\langle A\rangle_t = 0$.
2. *Si* $X_t = x + M_t$ *,alors* $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$.
3. *Si* $X_t = \lambda M_t$ *, alors* $\langle X\rangle_t = \lambda^2\langle M\rangle_t$.
4. *Si* $X_t = M_t + A_t$ *, alors* $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$.

1.2 Calcul matriciel

Définition 1.2.1. Soit m et n deux entiers . Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombres avec m lignes et n colonnes de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \dots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \dots & a_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \dots & a_{m.n} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij}sont des réels appelés coefficients de A . On notera aussi $A = (a_{ij_{1\leq i\leq m 1\leq n}})$ où $A = (a_{ij})$

1.2.1 Type de matrices

Définition 1.2.2. (Matrice de Winer)
Soit $W_{ij,1\leq i\leq j}$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ $\mathbb{E}|(W_{ij})|^2 = 1$ .On suppose de plus que $\forall k, sup_{i,j}\mathbb{E}|(W_{ij})|^k = C(k) < +\infty$
La matrice W_N est une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ est définit par

$$W_N = \begin{cases} W_{ii} & \text{si } i = j, \\ W_{ij} & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

Définition 1.2.3. (**Matrice Carée**) Une matrice de taille $n \times n$ est dite carrée. L'ensemble de toutes ces matrices est noté $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients $(a_{ij}), 1 \leq i \leq n$ sont appelés les coefficients diagonaux de A

Définition 1.2.4 (Matrice Diagonale). Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.5. (**Matrice Identité**) La matrice identité de taille n est la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valeur 1 et tous l sont nuls .
On l'a notée I_n , $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Matrice triangulaire

Définition 1.2.6. soit $A = a_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire si :

1. $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, alors la matrice A est dite triangulaire supérieure.
2. $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, alors la matrice A est dite triangulaire inférieure.
3. $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $1 < i, j < n$. Autrement dit si, $A^t = A$, alors A est symétrique
4. $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $1 < i, j < n$. Autrement dit si, $A^t = -A$,alors A est anti-symétrique

1.2.3 Matrice inverse

Définition 1.2.7. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA = I_n$, B est dite inverse de A et note $B = A^{-1}$. L'ensemble des matrices inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désigné par $GI_n(\mathbb{R})$.

Remarque 1.2.1. *Si A et B sont dans $GI_n(\mathbb{R})$, alors l'inverse du produit AB est donné par :* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Définition 1.2.8. (La Trace de Matrice) On appelle trace d'un matrice carré $A = (a_{ij})_{i;j=1\ldots n}$; noté TrA , la somme de ses éléments diagonaux .

$$TrA = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}.$$

1.2.4 Valeur propre

Définition 1.2.9. λ est une valeur propre de A si et seulement si $Det(A - \lambda I) = 0$

1.2.5 Vecteur propre

Définition 1.2.10. Soit λ_i est une valeur propre de A, les vecteurs propres associés à valeur propre λ_i sont les solutions non nulles du système linéaire homogène suivant :

$$(A - \lambda_i I)X = 0$$

1.2.6 Exponotiel de matrice

Dans la suite $\mathbb{K}$, Désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1.2.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La serié $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!}$ est normalement convergente sur tout compact ; donc a un sens . On l'appelle l'exponontiel de la matrice A , et on la note $Exp(A) = e^A$.

Proposition 1.2.1. – $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbb{K}(X), e^A = P(A)$
- *l'application* $A \longmapsto e^A$ *est* C^∞ *, sa différentielle en 0 est l'identité*
- *soient A,B* $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *deux matrices alors*

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

- *soit* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$ *,* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), det(e^A) = e^{Tr(A)}$
- $e^{A^{-1}} = e^{-A}$
- *si on note* O_n *la matrice nulle , alors* $exp(O_n) = I_n$
- $e^{kA} = e^{A^k}$*pour tout* $k \in \mathbb{Z}$

Théorème 1.2.2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *alors ,*$exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective*
si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *alors ,* $exp : M_n(\mathbb{R}) \to M^2, M \in GL_n(\mathbb{R})$ *est surjective*

Proposition 1.2.3. *Il existe des voisinage U de 0 et V de* I_n *dans* $GL_n(\mathbb{K})$ *tel que :*
$exp : U \to V$ *soit un* C^1 *difféomorfisme*

Définition 1.2.12. Soit $A \in B(I_n, 1)$. on dit que l'algorithme de A , et noté $log(A)$ la série oabsolument convergente : $log(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(g - I_n)^k$.

Théorème 1.2.4.

$$\forall A \in B(I_n, 1).exp(log(A)) = A$$

$$\forall A \in B(0, ln2).log(exp(A)) = A$$

[2]

1.2.7 Calcul effectif

Théorème 1.2.5. *voir[12] Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *, il existe une unique couple* (D, N) *tel que :*

1. $A = D + N$
2. $DN = ND$
3. *D est diagonalisable et N nilpotente.*

Corollaire 1.2.6. *On utilise le théorème précédent pour calculer l'exponotiel d'une matrice.*
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ *, D et N comme dans le théorème. On a alors :*

$$expA = e^D e^N$$

or ;

1. *N nilpotente , si on note q son indice nilpotence on a :*

$$e^N = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$$

2. *D étant diagonalisable , notons* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *on a deux moyens de calculer son exponontiel :*

(a) *Si on connait une base de diagonalisation, soit P la matrice de passage. On a* $e^D = P$.

(b) *Soit* $\mathcal{P}$ *un polynome interpolateur tel que* $\mathcal{P}(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, *alors*

$$e^A = \mathcal{P}(A)$$

Exemple 1.5. *Soit A une matrice telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. ***Décomposition de Dunford*** *La décomposition de Dunford est : A=D+N avec*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} etN = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici D est une matrice diagonale $D = 2I_3$ *, ce qui va simplifier les calculs .*

2. ***la matrice diagonale.***

$$exp(D) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = e^2 I$$

3. ***la matrice nilpotente*** *La matrice N est nilpotente*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$ *ainsi*

$$exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2!} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. ***Exponotiel de A***

$$exp(A) = exp(D)exp(N) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{2}e^2 \\ \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 & \frac{-3}{2}e^2 \\ -e^2 & e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

Norme matricielle

Définition 1.2.13. Une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application
$\|.\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

1.2.8 Application aux équations differentielles

Système différentiel

Dérivée

Définition 1.2.14. Si M(t)est une matrice dont les coefficients $a_{ij}(t)$ sont des fonctions dérivables de la variable t , alors la dérivées de A(t) est la matrice A′(t) dont les coefficients sont les dérivées $a'_{ij}(t)$.
La dérivée d'une matrice vérifiée les propriétées usuelles des dérivées .
En particilier , elle vérifie que , si les matrices M(t) et N(t) sont dérivable , alors le produit aussi et on a : $(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$

Proposition 1.2.7.

$$\frac{d}{dt}(exp(tA)) = Aexp(tA), \forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \tag{1.2.7}$$

Théorème 1.2.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors le système differentiel*

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

a une unique solution définie $\forall t \in \mathbb{R}$ donné par : $X(t) = X_0.e^{(At)}$

Remarque 1.2.2.
- *Dans le cas n=1 .On trouve simplement une seule equation que l'on écrit $X'(t) = aX(t)$ et son solution est : $X(t) = x_0e^{at}$ pour tout constante réel ou complexe*
- *l'ensemble des solutions est un espace vectoriel . en effet , on prouve facilement que l'ensemble de solution est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ la fonction identiquement nulle est solution , et si X_1, X_2 sont solutions alors $\lambda X_1 + \mu X_2$ est aussi solution (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)*

Approche qualitative

On rappel ici les notions liées à la stabilité d'un système différentiel autonome : Prenons U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonctions de classe C^1 .

On considère le système différentiel autonome suivant :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

soit x un point d'équilibre de ce système ($f(x) = 0$).

– x est stable si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \|y_0 - x\| < \eta \Longrightarrow (\forall t > 0 \|y(t) - x\| < \epsilon$$

– x est asymptotiquement stable si de plus

$$lim_{t \to +\infty} \|y(t) - x\| = 0$$

Théorème 1.2.9. *(stabilité de Lyapunov voir [4]) Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *telle que* $f(0) = 0$ *et* $df(0)$ *ait des valeurs propres de parties réeles strictement négatives . Alors 0 est asymptotiquement stable pour le système* (1.2.9)*.*

Définition 1.2.15. (fonction Lyapunov) Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue localement lipschtizienne par rapport à la second variable et telle que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t, 0) = 0$ soient $R > 0$ et $V : \mathbb{R}^+ \times B(0, R) \to \mathbb{R}$. On dit que V une fonction de Lyapunov si :

1. V est C^1 et $\forall t \in \mathbb{R}^+, V(t, 0) = 0$
2. Il existe $W : B(0, R) \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\forall t$,x $W(x) \leq V(t, x)$
3. $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. L'expression $\tilde{V} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \langle f, \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$ est négative ou nulle sur $\mathbb{R}^+ \times B(0, R)$

Lemme 1.2.10. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue localement lipschtizienne par rapport à la second variable et telle que* $\forall t \in \mathbb{R}, f(t, 0) = 0$*. S'il existe* $R > 0$ *et* $V : \mathbb{R}^+ \times B(0, R) \to \mathbb{R}$ *telle que V est une fonction Lyaponuv ,*

alors la solution nulle est stable . Si en plus V vérifie :

1. *il existe* $\tilde{W} : B(0, R) \longrightarrow \mathbb{R}^-$ *continue telle que* $\forall t, x \tilde{V}(t, x) \leq \tilde{W}(x)$
2. $\tilde{W}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $lim_{x \to 0} sup_{t \geq 0} V(t, x) = 0$ *alors la solution nulle est asymptotiquement stable .*

Chapitre 2

L'équation Differentielle stochastique à bruit additif multidimenssionelle et Rétrograde

introduction

l'equation differentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien , c'est une équation permettent de tenir d'un bruit aléatoire dans l'évolution d'un phénomène. En particulier elles fournissent des modèles en phisique , biologie,economie, finance....ect. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on obtient l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)d_t + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

$où \mu, \sigma$ deux fonction

2.1 $\acute{E}$quation Diffrentielle Stochastique

Soient $f, g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions déterministes mesurables .
On peut considèrer que ce bruit est un processus gaussien généralement modélisé par un mouvement brownien B

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1.1}$$

La solution de l'équation (2.1.1) est sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dB_s, \forall t \geq 0$$

– La fonction f est communément appelée coefficient de dérivé, alors que g est appelée coefficient de diffusion.
– Une solution de l'équation précedente s'appelle diffusion.
– Ces équations permettent de construire la plupart des modèles d'actifs en finance. aussi bien lorsqué on cherche à modèliser des actifs que des taux d'interet.

Définition 2.1.1. Soient $d \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers . $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times m$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux fonctions mesurables et localement bornées . On écrit $(\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$. On considère l'EDS suivante que l'on appelle $E(\sigma, b)$

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt \tag{2.1.2}$$

L'equation (2.1.3) admet une solution sachant que :
– $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ est une espace probabilité filtré dont la filtration est continue à droite et complète .
– Sur cet espace, on se donne un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien $B = (B^1, ..., B^m)$
– un processus $(X = X^1, ..., X^d)$ qui est $\mathcal{F}_t$ adapté et continue telque .

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

c'est à dire pour $1 \leq i \leq d$

$$X_t = X_0^i + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dB_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s)ds$$

lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, B, X)$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$

2.1.1 L'existence et L'unicité

Théorème 2.1.1. *: voir [5]*
On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}_t, \mathbb{P})$,soit l'équation differentielle stochastique

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dw_t \tag{2.1.3}$$

avec la condition initial $X_{t_0} = x_0 = c$, où
- *W_t est un processus de winer m-dimenssionnel ,et c est une v.a independante de $W_t - W_{t_0}$*
- *$a(t, X_t)$ est une fonction définie sur $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ et $b(t, X_t)$ définie sur $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ a valeur dans l'ensemble des matrices $d \times m$*

sont mesuraables et vérifient les proprietés suivantes :

1. *$\exists K_1 > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T], \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall y \in \mathbb{R}^d$*

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_1|x - y| \text{ (condition de lipischitz)}$$

2. *$\exists K_2 > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T], \forall x \in \mathbb{R}^d$:*

$$|a(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq K_2(1+|x|^2) \text{ (condition de restriction sur la croissance)}$$

alors, l'équation differentielle stochastique (2.1.4) admet une solution unique X_t à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ continue presque surement et satisfaisant la condition initiale $X_{t_0} = x_0$.
L'unicité est dans le sens que si X_t, Y_t sont deux solutions continues presque surement telles que $X_{t_0} = Y_{t_0} = x_0$, alors $P[sup_{t_0 \leq t \leq T}|X_t - Y_t|] = 0$

Si $E[X_{t_0}^2] < \infty$ l'équation (2.0.1) admet une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$. Cette solution vérifie de plus la condition d'intégrabilité suivante :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t]^2 < \infty$$

On suppose pour simplifer que b et σ sont globalement lipschitziennes en espace, avec constante K . L'argument repose sur le lemme suivant qui est extremement utile

Lemme 2.1.2. *(Gronwall)*
voir : [4]
Soit $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée telle que

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds$$

pour tout $t\Delta \leq T$; où a et b sont des constantes positives. Alors

$$g(t) \leq ae^{bt}$$

pout tout $t \leq T$.

Lemme 2.1.3. *Yamada-Watanabe*
voir [4] Supposons que $E_x(\mu.\sigma)$ admette une solution faible et que toutes ses solutions sont indistinguable . Alors, $E_x(\mu.\sigma)$ admet une solution forte .

Démonstration. (l'existence et l'unicité) L'idée de la preuve comme souvent lorsque nous avons afaire à des équations differentielles (ordinaires ou stochastiques) la preuve de l'existence fait intervenir un argument de point fixe et celle de l'unicité un argument de type lemme de (**Gronwall**)

1. (Etape 1) travaille sur le bon espace $\mathcal{S}$ On définit l'espace complet suivant :
$\mathcal{S} = \{(X_t)_{t\in[0,T]}$ processus C^0 et adapté tel que $\mathbb{E}[sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2] < \infty$ équipé de la norme définie par

$$\parallel X \parallel_{\mathcal{S}} = \mathbb{E}[sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2]^{\frac{1}{2}}$$

Etape 2 **applique le théorème du point fixe de picard pour T petit**
soit f l'application qui à un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ associe le processus $(F(X)_t)_{t\in[0,T]}$ defini par

$$f(X)_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dw_s$$

A) f est bien définie
D'après la condition 2 , lorsque $(X_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{S}$, les processus $b(t, X_t)_{t\in[0,T]}$ et $a(t, X_t)_{t\in[0,T]}$ sont dans $L^2(\Omega \times [0, T])$. (le processus $\int_0^t b(s, X_s)dW_s$ est une martingale de carré intégrable).

B) $f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. comme $(u + v)^2 \leq 2(u^2 + v^2)$,
$|f(X)_t - f(0)_t|^2 \leq 2(sup|\int_0^t a(s, X_s) - a(s, 0)ds|^2 + sup|\int_0^t b(s, X_s) - b(s, 0)dw_s|^2)$
or d'après la condition (1) de théorème (2.1.1)

$$\mathbb{E}[sup|\int_0^t a(s, X_s) - a(s, 0)ds|^2] \leq K^2T^2\mathbb{E}[sup|X_t|^2]$$

et d'apres les proprites de l'integrale stochastique et la condition (1) de théorème (2.1.1)

$$\mathbb{E}[sup|\int_0^t a(s, X_s) - a(s, 0)ds|^2] \leq 4K^2T\mathbb{E}[sup|X_t|^2]$$

ainsi

$$\|f(X)\|_{\mathcal{S}} \leq \sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}\|X\|_{\mathcal{S}} + \|f(0)\|_{\mathcal{S}}$$

et donc ;

$$\|f(X_0)\|_{\mathcal{S}} \leq 3(\mathbb{E}[X_0^2] + K^2T^2 + 4K^2T) < \infty$$

ce qui entraine le résultat car $\|f(X)\|_{\mathcal{S}} < \infty$ donc $X \in \mathcal{S}$

C) par un calcul en tout point analogue à celui mené au B)

$$\|f(X) - f(Y)\|_{\mathcal{S}} \leq \sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}\|X\|_{\mathcal{S}} + \|X - Y\|_{\mathcal{S}}$$

L'application f est donc lipschitzienne de rapport $\sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}$ pour T suffisamment petit c'est meme une contraction strict .

D) Pour $T = T_0$ petit ; f admet donc un unique point fixe dans $\mathcal{S}$, ce point fixe est une solution de (2.1.4) sur $[0, T_0]$. donc la solution est donc unique si on se restrient à $\mathcal{S}$

Etape 3 unicité
On passe de l'unicité sur $\mathcal{S}$ à l'unicité en géneral (sur $[0, T_0]$ en utilise un argument que nous admettrons (lemme de Gronwall)

Etape 4 On passe de l'existence et de l'unicité sur $[0, T_0]$ a celles sur $[0, t]$en travaille successivement sur $[0, T_0], [T_0, 2T_0]$..... et . On obtient le resultat .

2.1.2 Solution Faible et Forte

Définition 2.1.2. On dit qu'il y a existence faible pour $E(\sigma, b)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,s'il existe une solution de $E_x(\sigma, b)$.
On dit qu'il y a unicité faible pour $E(\sigma, b)$, si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,toutes les solutions de $E_x(\sigma, b)$ ont la même loi.

Exemple 2.1. *Soit l'EDS suivante :*

$$dX_t = sgnX_t dB_t$$

telle que

$$sgn(u) = \begin{cases} +1si & u > 0 \\ -1si & u < 0 \end{cases}$$

On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *sur lequel est défini un* $(\mathcal{F}_t)$*-mouvement brownien* B *avec* $B_0 = x \in \mathbb{R}$ *, on pose*

$$B_t = \int_0^t sgn(B_s) dB_s$$

Le théorème de Lévy nous dit que B est un mouvement brownien issu de 0.comme

$$B_t = x + \int_0^t sgn(B_s) dB_s$$

On voit qu'il y a existence faible pour l'EDS,qui possède la propriété d'unicité faible, car d'après le théorème de Lévy, toute solution de $E_x(\sigma, b)$*est un mouvement brownien issu de x.*

Définition 2.1.3. On dit que l'EDS $E(\sigma, b)$ a la propriété d'unicité trajectorielle si, deux solutions X et $\tilde{X}$ associées au meme espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et au meme mouvement brownien B telles que $X_0 = \tilde{X}_0$ p.s., sont indistinguables,
c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t, \forall t \geq 0) = 1$
Fixons un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. (dont la filtration est continue à droite et complète) et un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B.On dit que X est une solution forte de $E(\sigma, b)$ si elle est adaptée par rapport à la filtration canonique de B.

Exemple 2.2. *Considérons l'EDS suivante :*

$$dX_t = \lambda X_t dB_t$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$*. On sait d'après le théorème (2.1.1) qu'il y a unicité trajectorielle pour cette EDS, et que pour tout* x *,l'unique solution forte de* $E_x(\sigma, b)$ *est* $X_t = xe^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$ *On verra que les coeffecients de cette EDS satisfont les conditions du théoreme (2.2) pour l'unicité trajectorielle d'une EDS.*

2.2 Formule d'It*ô*

La formule d'Ito est l'outil de base du calcul stochastique. Pour f une fonction de classe C^1et $X_t$un proceessus , on a alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s$$

Théorème 2.2.1. *(Formule d'itô) voir [5] soit X un semimartingale et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 .Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

Si on considère p semimartingales continues $X^{(1)}, ..., X^{(p)}$ et $f : \mathbb{R}^{(p)} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors.
$f({X_t}^{(1)}, ..., {X_t}^{(p)}) = f({X_0}^{(1)}, ..., {X_0}^{(p)}) + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_i}({X_s}^{(1)}, ..., {X_s}^{(p)})d{X_s}^{(i)}$
$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_i X_j}({X_s}^{(1)}, ..., {X_s}^{(p))}d\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_s$

Démonstration. voir [5]
il existe deux cas ;

✓ Pour p=1
on considèrons une suite $\{0 = t_0^n < ... < t_{p_n}^n = t\}_{n\geq 1}$ de subdivision emboîtées $[0, t]$ de pas tendant vers 0 . Alors en télescopant la somme, on a
$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=0}^{p_n-1}(f(X_{t_{i+1}^n}) - f(X_{t_i^n}))$
La formule de Taylor (Lagrange) à l'ordre 2 sur l'intervalle (non ordonnée) $(X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n})$ est donnée pour chaque $\omega \in \Omega$:
$f(X_{t_{i+1}^n}) - f(X_{t_i^n}) = f'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \frac{g_{n,i}(\omega)}{2}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$
où
$g_{n,i} \in [inf_{\theta\in[0,1]} f''(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})), sup_{\theta\in[0,1]} f''(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}))]$
On a au sens de la convergence en probabilitée :
$\sum_{i=0}^{p_n-1} f'(X_{t_i^n})(f(X_{t_{i+1}^n}) - f(X_{t_i^n})) \to^{\mathbb{P}} \int_0^t f'(X_s)dX_s$, $n \to +\infty$
Pour prouver la premiére formule d'It$\hat{o}$, il reste à établir la convergence en probabilitée :
$g_{n,i}(\omega)(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \to^{\mathbb{P}} \int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s n \to \infty$
car alors, par unicitée presque sure de la limite en probabilitée, on aura pour tout $t \geq 0$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

Les deux termes de l'égalité ci-dessus étant continus en t, les deux processus seront en fait indistinguables, ce qui donnera la premiere formule d'It$\hat{o}$

✓ pour $p \geq 1$
on note $n < m$

$$T_m = \sum_{j=0}^{p_m-1} g_{m,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$$

$$T_{n,m} = \sum_{i=0}^{p_n-1} g_{n,j}(\omega) \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$$

comme $\sum_{j=0}^{p_m-1} = \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n}$ (subdivisions emboitées), on a

$$T_m = \sum_{j=0}^{p_m-1} \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} g_{m,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$$

et on peut écrire
$|T_m - T_{n,m}|$
$=| \sum_{j=0}^{p_m-1} \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} g_{m,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 - \sum_{j=0}^{p_n-1} \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} g_{n,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 |$
$= \sum_{j=0}^{p_n-1} \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} (g_{m,i}(\omega) - g_{n,i}(\omega))(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 |$
$\leq Z_{n,m} | \sum_{j=0}^{p_n-1} \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 |$
$= Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$
avec $Z_{n,m} = sup_{0 \leq i \leq p_n - 1}(sup_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} \mid g_{m,j} - g_{n,i} \mid)$ La continuitée de f'' assure que $Z_{n,m} \to 0$ quand $n, m \to +\infty$. D'après l'interprétation "variation quadratique" du crochet , On a
$\sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \to \rangle X, X \rangle_t$, Et donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_1 \geq 1$ tel que pour tout $m > n \geq n_1$

$$\mathbb{P}\left(|T_m - T_{n,m}| \geq \varepsilon/3\right) \leq \mathbb{P}\left(Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \geq \varepsilon/4\right)$$

donc ;

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} - lim_{m \to +\infty} T_{n,m} = \mathbb{P} - lim_{m \to +\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} g_{n,i} \sum_{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \\
= \sum_{i=0}^{p_n-1} g_{n,i}(\langle X, X \rangle_{t_{i+1}^n} - \langle X, X \rangle_{t_i^n}) \\
= \int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s
\end{aligned}$$

où $h_n = \sum_{i=0}^{p_n-1} g_{n,i} \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$. Ainsi il existe $n_2 \geq 1$ tel que pour $m > n_2$

$$\mathbb{P}\left(T_{n,m} - \left|\int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right) \leq \varepsilon/3. \tag{2.2.4}$$

on a pour tout $s \in [t_n^i; t_{n+1}^i[$
$|h_n(s) - f''(X_s)| = |g_{n,i} - lim_{m \to +\infty} g_{m,n}| = lim_{m \to +\infty} |g_{n,i} - g_{m,j}| \leq lim_{m \to +\infty} Z_{n,m}$
et donc,

$$sup_{s \in [0,t]} |h_n(s) - f''(X_s)| \to 0, n \to +\infty$$

Ainsi il existe aussi $n_3 \geq 1$ tel que pour $n \geq n_3$

$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_n(s)d\langle X,X\rangle_s - \int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right) \leq \varepsilon/3$
en combinant (2.2.5), (2.2.6), et en prenant
$m > n > \max(n_1; n_2; n_3)$ on a :
$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} g_{m,j}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 - \int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s\right| \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon$.
Finalement, la première formule d'Ito est prouve pour $p = 1$.
Dans le cas ou' p est quelconque, la formule de Taylor (toujours à l'ordre 2) donne
$f(X_{t^n_{i+1}(1)}, ..., X_{t^n_{i+1}(p)}) - f(X_{t^n_i(1)}, ..., X_{t^n_i(p)})$
$= \Sigma_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{t^n_i(1)}, ..., X_{t^n_i(p)})(X_{t^n_{i+1}(k)} - X^{(k)}_{t^n_i}) + \sum_{k,l=1}^p \frac{f^{k,l}_{n,i}}{2}(X_{t^n_{i+1}(k)} - X_{t^n_i(k)})(X_{t^n_{i+1}(l)} - X_{t^n_i(l)})$ avec
$f^{k,l}_{n,i} \in \left[\inf_{\theta\in[0,1]} \frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_l}(X^{(1)}_{t^n_i} + \theta(X^{(1)}_{t^n_{i+1}} - X^{(1)}_{t^n_i}, ...), \sup_{\theta\in[0,1]} \frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_l}(X^{(1)}_{t^n_i} + \theta(X^{(1)}_{t^n_{i+1}} - X^{(1)}_{t^n_i}, ...)\right]$
En adaptant légèrement les arguments du cas $p = 1$,
on montre que pour tous $k, l \in \{1, ..., p\}$:
$\sum_{i=0}^{p_n-1} f^{k,l}_{n,i}(X^{(k)}_{t^n_{i+1}} - X^{(k)}_{t^n_i})(X^{(l)}_{t^n_{i+1}} - X^{(l)}_{t^n_i}) \to \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_l}(X^{(1)}_s, ...X^{(p)}_s)d\langle X^{(k)}, X^{(l)}\rangle_s$, $n \to +\infty$
Cela achève la preuve de la formule d'Ito dans le cas général .

2.2.1 Formule d'it$\hat{o}$ vectoriel

[17] soient $B_t = [B_{1,t}, ..., B_{m,t}]^T$ est un mouvement brownien de dimenssion m et $X_t = [X_{1,t}, ..., X_{n,t}]^T$ un processus ;le processus d'it$\hat{o}$ de dimenssion n est donné par :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \begin{bmatrix} b_{1,t} \\ \vdots \\ b_{n,t} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \dots & \sigma_{1m,t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n,t} & \dots & \sigma_{nm,t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{m,t} \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

et soit $F(t, X)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $Y_t = F(t, X)$ alors Y_t est un processus d'it$\hat{o}$ et ;

$$dF(t,X) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j} g_{ik} g_{jk}\right) dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} g_{ij} dB_j(t)$$

2.3 L'équation différentielle stochastique à bruit additif

Il existe une liste de certaines equations differentielles stochastiques dont les solutions generale explicites sont obtenus (2.1.4), EDS à bruit additif multiplicatif, EDS à bruit additif multidimensionelle , EDS irredictible ...ect. Nous interessons dans ce mémoire l'éqution differentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle , avant de commencer à le resoudre nous verons le type à bruit additif unidimensionnelle

Théorème 2.3.1 (L'existence et L'unicité).
Supposons que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ il existe deux constantes $\mathcal{M}_k > 0c$ et $\mathcal{M}$ telle que

1. $|b_i(t,x) - b(t,y)| + |\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t,y)| \leq \mathcal{M}_k|x-y|$
   pour tout $i = 1...d, j = 1...m, t \geq 0, x, y \in K$ (condition de lipischitz)

2. $|b_i(t,x)| + |\sigma_{ij}(t,x)| \leq M(1+|x|)$
   pour tout $i = 1...d, j = 1...m, t \geq 0x, y \in \mathbb{R}^d$ (condition de croissance lineaire)

alors il existe une unique solution forte $E_x(\sigma, b)$ de durée de vie infinie. La démonstration de l'existence faible repose sur une méthode de point fixe, un peu trop longue à détailler ici. L'iddee est de construire une suite X^n défini par

$$X_t^n = x + \int_0^t b^i(s, X_s^{n-1})ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s^{n-1})dB_s^j$$

voir [3]
Nous allons en revanche démontrer l'unicité trajectorielle, qui suit pour avoir existence et unicité d'une solution forte, d'aprés le théorème de Yamada-Watanabe.

2.3.1 les types de L'équation différentielle stochastique à bruit additif unidimensionnelle

1. **L'équation differentielle stochastique à bruit additif homogène à coefficients constants** :
   Elle s'ecrit sous la forme :
   $$\begin{cases} dX_t = aX_tdt + bdW_t \\ \hfill X_0 = x \end{cases}$$
   telque $a, b \in \mathbb{R}^*$
   la solution est donnée sous la forme :
   $$X_t = e^{-at}(X_0 + b\int_0^t e^{as}dW_s)$$

2. **L'équation différentielle stochastique à bruit additif homogéne à coefficients variables**
   Elle s'ecrit sous la forme :
   $$\begin{cases} dX_t = a(t)X_tdt + b(t)dW_t \\ \hfill X_0 = x \end{cases}$$
   la solution est sous la forme
   $$X_t = \phi_{[t_0,t]}(X_0 + \int_0^t b(t)\phi_{[}^{-1}t_0, t]dW_t)$$
   telque $\phi_{[t_0,t]} = exp(\int_0^t a(s)ds)$ et $\phi_{[t_0,t]}^{-1} = exp(\int_0^t -a(s)ds)$

3. **L'équation différentielle stochastique à bruit additif non homogéne à coefficient constant** :

   Elle s'ecrit sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t = (aX_t + c)dt + bdW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

   la solution est sous la forme

$$X_t = e^{-at}[(X_0 + \frac{c}{a}(1 - e^{-at})) + b\int_0^t e^{-as}dW_s]$$

4. **L'équation différentielle stochastique à bruit additif non homogéne à coefficient variable** :
   Elle s'ecrit sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t = (a(t)X_t + c(t))dt + b(t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

   la solution est sous la forme

$$X_t = \phi_{[t_0,t]}(X_0 + \int_{t_0}^t (c(s)ds + b(s)dW_s)(\phi_{s,t_0}^{-1}))$$

2.3.2 L'équation différentielle stochastique à bruit additif multidimensionelle

[16] Soit $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus à valeur dans $\mathbb{R}^d$; Notons $X_t^1, ..., X_t^d$ les coordonées de la variable X_t nous pouvons alors considerer le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t^1 = b_1(t, X_t) + \sum_{j=1}^d \sigma_{1j}(t, X_t)dB_t^j, & X_0^1 = x_1 \\ dX_t^2 = b_2(t, X_t) + \sum_{j=1}^d \sigma_{2j}(t, X_t)dB_t^j, & X_0^2 = x_2 \\ \vdots & \vdots \\ dX_t^d = b_d(t, X_t) + \sum_{j=1}^d \sigma_{dj}(t, X_t)dB_t^j, & X_0^d = x_d \end{cases}$$

où $(B_t^1, ..., B_t^d)$ est un mouvement brownien standard de dimmension d
on pose $X_t = (X_t^1, ..., X_t^d)^t$, $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)^t$,$b = (b_1, ..., b_d)^t$, $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ .Ainsi s'écrira sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Types de L'équations differentielles stochastique à bruit additif multidimensionelles

dans la suivante :
- A est une matrice
- B est un vecteur
- e^A l'expononticl de matrice A

1. **L'équation homogène à coefficients constants :**

$$\begin{cases} dX_t = AX_t d_t + BdW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.3.6}$$

la solution est donnée sous la forme

$$X_t = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s \tag{2.3.7}$$

Démonstration. La solution homogène
l'equation homogène associée est donnée par ; $dX_t = A.X_t dt \Rightarrow X_t = exp(A.t)X_0$
La solution generle
En posant $X_0 = Y_t$, on obtient ;

$$\begin{aligned} X_t &= exp(A.t)Y_t \Rightarrow y_t = X_t exp(-A.t) \\ dY_t &= dX_t exp(-A.t) - A.exp(A.t)dt \end{aligned}$$

par substitution dans(2.3.7)

$$\begin{aligned} dY_t &= ((AX_t d_t + BdW_t)(exp(-A.t)) - A.exp(A.t)dt \\ &= exp(-A.t).BdW_t \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t exp(-A.s).BdW_s \\ X_t &= exp(A.t)(X_0 + \int_0^t exp(-A.s).BdW_s) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{X_t = X_0 exp(A.t) + \int_0^t exp(A(t-s)).B.dW_s}$$

2. **L'équation homogène à coefficients variables :**

$$\begin{cases} dX_t = A.t.X_t dt + B.t.dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.3.8}$$

la solution sous la forme

$$X_t = h_{[t_0,t]} X_0 + h_{[t_0,t]} \int_0^t h_{st}^{-1} B.s.dW_s \tag{2.3.9}$$

Démonstration. Solution homogène
l'équation differentielle homogène ordinaire :

$$dX_t = A.t.X_t dt \Rightarrow X_t = exp(\frac{1}{2}A.t^2)X_0$$

Solution génerale :
on pose
$h_{[t_0,t]} = exp(\frac{1}{2}A.t^2)$
$h_{[t_0,t]}^{-1} = exp(\frac{-1}{2}A.t^2)$
$(h_{[t_0,t]}^{-1})' = -A.t(h_{[t_0,t]}^{-1})$
on pose $X_0 = Y_t$

$$\begin{aligned} X_t &= h_{[t_0,t]} Y_t \Rightarrow Y_t = h_{[t_0,t]}^{-1} X_t \\ dY_t &= h_{[t_0,t]}^{-1} dX_t - A.t.X_t(h_{[t_0,t]}^{-1})dt \end{aligned}$$

par substitution dans (2.3.9)

$$\begin{aligned} dY_t &= h_{[t_0,t]}^{-1} B.tdW_t \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t (h_{st_0}^{-1}) B.sdW_s \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{X_t = h_{[t_0,t]} X_0 + h_{[t_0,t]} \int_0^t h_{st_0}^{-1} B.s.dW_s}$$

3. **L'équation non homogène à coefficients constants :**

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + C)d_t + BdW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.3.10}$$

la solution est sous la forme

$$X_t = exp(At)X_0 + \int_0^t exp(A(t-s))Cd_s + \int_0^t exp(A(t-s))BdW_s \tag{2.3.11}$$

Démonstration. La solution homogène :
L'équation différentielle ordinaire homogène : $dX_t = AX_tdt$
$X_t = exp(A.t)X_0$
on .pose $X_0 = Y_t$

$$\begin{aligned} X_t &= exp(A.t)Y_t \Rightarrow \\ Y_t &= exp(-A.t).X_t \\ dY_t &= exp(-A.t)dX_t - A.exp(-A.t)X_td_t \end{aligned}$$

par sibstitution dans (2.3.11)

$$\begin{aligned} dY_t &= exp(-At)(Cdt + BdW_t) \\ Y_t &= y_0 + \int_0^t exp(-As)C.ds + \int_0^t exp(-As)BdW_s \\ X_t &= exp(At)(X_0 + \int_0^t exp(-As)C.ds + \int_0^t exp(-As)BdW_s) \\ X_t &= exp(At)X_0 + exp(At)(\int_0^t exp(-As)C.ds + \int_0^t exp(-As)BdW_s)) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{X_t = exp(At)X_0 + \int_0^t exp(A(t-s))C.ds + \int_0^t exp(A(t-s))BdW_s}$$

4. **L'équation non homogène à coefficients variables :**

$$\begin{cases} dX_t = (A.t.X_t + Ct)d_t + BtdW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.3.12}$$

la solution est sous la forme

$$X_t = h_{[t_0,t]}X_0 + h_{[t_0,t]}(\int_0^t h_s^{-1}t_0(C.s.ds + B.s.dW_s)) \tag{2.3.13}$$

Démonstration. La solution hmogène :
L'équation différentielle ordinaire homogène :

$$dX_t = A.t.X_td_t \Rightarrow X_t = exp(\frac{1}{2}A.t^2)X_0$$

la solution génerale :

En posant $X_0 = Y_t \Rightarrow X_t = exp(\frac{1}{2}A.t^2)Y_t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
h_{[t_0,t]} &= exp(\frac{1}{2}A.t^2)et \\
h^{-1}_{[t_0,t]} &= exp(\frac{-1}{2}A.t^2) \Rightarrow \\
(h^{-1}_{[t_0,t]})' &= -A.t.h^{-1}_{[t_0,t]} \\
Y_t &= h^{-1}_{[t_0,t]}X_t \\
dY_t &= h^{-1}_{[t_0,t]}dX_t - A.t(h^{-1}_{[t_0,t]}X_t).dt
\end{aligned}$$

par substitution dans (2.3.13)

$$\begin{aligned}
dY_t &= h^{-1}_{[t_0,t]}[(A.t.X_t + Ct)d_t + B.t.dW_t] - A.t(h^{-1}_{[t_0,t]}X_t).dt \\
dY_t &= h^{-1}_{[t_0,t]}[C.t.d_t + B.t.dW_t] \\
Y_t &= Y_0 + h^{-1}_{[t_0,t]}[C.t.d_t + B.t.dW_t] \\
X_t &= h_{[t_0,t]}(X_0 + h^{-1}_{[t_0,t]}[C.t.d_t + B.t.dW_t])
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{X_t = h_{[t_0,t]}X_0 + h_{[t_0,t]}(\int_0^t h_s^{-1}t_0(C.s.ds + B.s.dW_s))}$$

Exemple 2.3. *soit l'EDS suivant :*

$$dX_t = AX_t + bdW_t$$

telle que :$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
c'est une EDS à bruit additif multidimensionnelle de type (homogène à coefficient constant) la solution est sous la forme (2.3.9) ; à savoir :

$$X_t = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s$$

On calcule l'exponentiel de matrice A

$$exp(A.t) = Pexp(D.t)P^{-1}$$

telle que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors ;

$$e^{At}X_0 = \begin{pmatrix} (-2e^{-t}+3e^{2t}) & 0 & (-3e^{-t}+3e^{2t}) \\ (e^{-t}-e^{2t}) & e{-}t & (e^{-t}-e^{2t}) \\ (-2e^{-t}-2e^{2t}) & 0 & (-3e^{-t}-2e^{2t}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} X_{1_t} \\ X_{2_t} \\ X_{3_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2e^{-t}+3e^{2t})x_{1_0}+(-3e^{-t}+3e^{2t})x_{3_0} \\ (e^{-t}-e^{2t})x_{1_0}+e{-}tx_{2_0}+(e^{-t}-e^{2t})x_{3_0} \\ (-2e^{-t}-2e^{2t})x_{1_0}+(-3e^{-t}-2e^{2t})x_{3_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_0^t e^{-(t-s)}dWt$$

et

$$\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s = \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dWt$$

2.4 Les équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR)

voir [7] Dans ce paragraphe , on va donner un petit aperçu sur les EDSR, le théorème d'existence et l'unicité de la solution
On considère :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t) - bZ_t dW_t \\ \qquad Y_t = \xi(\text{condition finale}). \end{cases} \tag{2.4.14}$$

Le rôle de $(Z_t)_{t\geq 0}$ est de rendre le procesuss $(Y_t)_{t\geq 0}$ adapté. Cette dernière équation $(2.4.14)$ possède une unique solution (Y,Z)adaptée, donnée par $Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ et on obtient Z par le théorème de representation martingale apliqué à Y dans $[0, T]$.

Le système $(2.4.14)$ est une forme particulière simple de ce qu'on va appeler dans la suite "Les équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR)". En pratique, dans le domaine financier par exemple ξ peut présenter une fonction du prix d'une action à l'instant T et la filtration répresente dans ce cas les informations existantes sur le marché à chaque instant t.
Pour plus de détails voir [6].

Définition 2.4.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, W un mouvement brownien à n dimensions avec sa filtration naturelle $\mathcal{F}$, ξ une variable aléatoire ,$\mathcal{F}_t$ mesurable et de carrée integrable et une fonction mesurable f (appelée générateur ou dérivée)

$f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}^d.$
Les équations de la forme

$$\begin{cases} -dY_t = f(\omega, t, Y_t, Z_t)dt - Z_t^* dW_t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Y_t = \xi \end{cases} \tag{2.4.15}$$

Où Z_t^* est la transposé de la matrice Z_t, $(2.4.15)$ sont appelées équations differentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). La solution de l'EDSR est un processus continu $\mathcal{F}$ adapté à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et $\{Z_t, t \in [0,T]\}$ est un processus prévisible à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et qui satisfait $\int_0^T |Z_s|^2 ds < \infty$ p.p.s.
On a p.p.s

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(\omega, s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s^T dW s, 0 \leq t \leq T \tag{2.4.16}$$

Remarque 2.4.1. *1. Les integrales dans l'équation* $(2.4.16)$ *sont bien définies et* Y *est une semie martingale continue .*

2. Y_0 *est une quantité déterministe .*

3. *On peut définir encore une solution d'une EDSR de cette façon :*
Si on note par L un ensemble de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n}$ *du processus* (Y, Z), $\mathcal{F}_t$ *sont adaptés, défini sur* $\Omega \times \mathbb{R}^+$, *tels que* $\|(Y,Z)\|^2 \leq \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2 ds) < \infty$.

2.4.1 L'existence et l'unicité

Théorème 2.4.1. *voir [13] Supposons que*

1. *f est continue en* (y, z), *pour tout* (t, ω).
2. *Il existe une constante* $K > 0$ *et* $0 \leq \alpha < 1$ *telle que :* $|f(t, \omega, y, z)| \leq K(1 + |y|^\alpha + |z|^\alpha)$.
3. *Pour tout* $N > 0$ *, il existe* L_N *tel que* $|f(t, y, z) - f(t', y', z')| \leq L_N(|y - y'| + |z - z'|)$.
4. $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{R}^d)$

Théorème 2.4.2. *[13]* $L_n \leq \sqrt{logN}$ *implique l'existence et l'unicité d'une solution pour l'EDSR*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(\omega, s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s^* dW_s$$

Chapitre 3

Application au Modèle Black et Scholes

Introduction

Le modèle Black et Scholes a été publié en 1973 par Fischer Black et Myrton Scholes.Il permet de calculer la valeur théorique d'une option d'achat européenee et de vente américaine. c'est une modèle mathématique d'un marché pour une action dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique.

3.1 Notions Fondamental sur le langage financier

[4] Une option est un titre financier donnant à son détenteur le droit , et non l'ablegation d'acheter ou de vendre (selon le type d'option) une certain quantité d' actif financier a une date convenue et a un prix fixé d'avance . La descreption précise d'une option se fait a partir des elements suivants.

1. La nature de l'option ;**call** pour une option d'achat et **put** pour une option de vente.
2. L'actif sous-jacent, sur lequelle porte l'option : dans la pratique , il peut s'agir d'une action ,d'une obligation , d'une devise...ect
3. Le montant ; c'est-à-dire la quantité d'actif sous jacent à acheter ou à vendre.
4. L'èchéance ou date d'expiration qui limite la durée de vie de l'option : si l'option peut être exercée n'importe quel instant avant l'échéance , elle est dite américaine , si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance , elle est dite européene .
5. Le prix d'exercice qui il le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option . L'option elle même a un prix , appelé prime .

3.2 Description du modèle

La dynamique de l'actif risqué dans le modèle Black et scholes est donnée par l' EDS suivante :

$$\begin{cases} dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dB_t \\ S_0 = x_0 > 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

B_t est un mouvement brownien standard avec les coefficients :
- b est un coefficient de diffusion
- σ est un coefficient de voltalité

a partir de (3.2.1) admet une unique la solution , donnée par le brownien géométrique

$$S_t = x_0.exp(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \tag{3.2.2}$$

3.3 Le modèle Black et Scholes multidimensionnele

[3] Le modèle Black et Scholes multidimensionnele s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} dS_i(t) = b_i S_{i,t} dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} S_{i,t} dB_{j,t} \\ S_0 = x_0 > 0 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

avec : $S_i(t)$ est un processus.
b_i est un vecteur aléatoire.
σ_{ij} est une matrice.
B_t est un mouvement brownien.
Pour atteindre la solution de (3.3.3) on cherche un processus adapté qui vérifier :

$$S_{i,t} = x_0 + \int_0^t b_i S_{i,s} ds + \int_0^t S_{i,s} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dB_s$$

En utilisant la formule d'it$\hat{o}$ vectoriel donnée dans le chapitre 2 par (2.2.7)telle que :

On pose $X_i = S_i$ (changement de variable)
$F(t, X) = ln(X_{i,t})$ et $f_i = b_i X_i$ et $g_{ij} = X_i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$

on obtient

$$\begin{aligned} dF(t, X) &= \left(\frac{1}{X_i} b_i X_i - \frac{1}{2X_i^2} X_i^2 \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) dt + \frac{1}{X_i} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_{i,t} dB_{j,t} \\ &= \left(b_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dB_{jt} \end{aligned}$$

$\forall t\ [0, T]$

$$\int_0^t dF(s,X) = \int_0^t \left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\sigma_{ij}|^2\right)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dB_{js}$$

C'est à dire le processus $F(t, X)$ est un solution de l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle (3.2.1) ainsi :

$$ln(X_i) = ln(x_{i,0}) + \int_0^t \left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\sigma_{ij}|^2\right)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dB_{js}$$

la solution exacte est donnée par ;

$$X_{i,t} = x_{i,0} + exp\left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2\right)t + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}B_{js}$$

d'où la solution exacte du modèle black et scholes multidimensionnele est :

$$S_{i,t} = x_{i,0} + exp\left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\sigma_{ij}^2|\right)t + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}B_{js}$$

3.4 Formule de Black et Scholes

[24] La formule de Black et Scholes permet de calculer la valeur théorique d'un option européenne à partir de cinq données ;à savoir :

1. S_0 : Où S la valeur actuelle de l'action sous-jacente.
2. T : Le temps qui reste à l'option avant son échéance.
3. K : Le prix d'exercice fixé par l'option, ou (le strike price).
4. r : Le taux d'intérêt sans risque.
5. σ^2 :la voltalité du prix de l'action.

Le prix d'un option d'achat**(call)** a la date $t = 0$ qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T , est caractérisé par son payoff

$$\max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+$$

Le prix d'un call européen est donnée par :

$$C = S\phi(d_1) - Ke^{-rT}\phi(d_2) \tag{3.4.4}$$

Où :

* ϕ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ définie par $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-t^2)}{2}\right) dt$,
* $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$,
* $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

pour le prix théorique d'un **(put)** est éstimé par ;

$$P = Ke^{-rT}\phi(-d_2) - S\phi(-d_1). \tag{3.4.5}$$

Démonstration. Soit le marché financier comportant un actif dit sans risque de taux constant r et de prix $S_t^0 e^{rt}$ tel que $(dS_t^0 = rS_t^0 dt$ et un actif risqué dont le prix S verifier (3.1.1) (EDS black et scholes)et la solution donnée par (3.1.2) avec B_t est un mouvement brownien et $b, \sigma \in \mathbb{R}$.
On fixe un horizon $T > 0$ et on souhaite donner le prix d' un actif financier qui versera $h(S_T)$ à la date T . Le cas d' un call européenn du maturité et de strike K correspond au cas $h(x) = (x-K)^+$. On procède par duplication : on forme un portefeuille et d'α_t parts de l'actif sans risque (le montant de la richesse investie dans cette actif est αe^{rt} et de β_t parts de l'actif risqué . On va trouver un portefeuille auto-financier de valeur terminale $h(S_T)$.La valeur de ce portefeuille à la date t est :

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t$$

La condition d'auto-financement se formalise par :

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t S_t$$

soit dV$_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t S_t$
$= rV_t dt + \beta_t S_t(b-r)dt + \sigma dB_t$

La valeur initiale du portefeuille sera la valeur de l'actif financier . On suppose que la valeur V_t du portefeuille à la date t est une fonction déterministe du temps et de la valeur de l'actif risqué . Soit $V_t = V(t, S_t)$, en utilisant la deuxième formule d'ito On Calcule

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + bS_t\frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,S_t)\right)d_t + \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}\right)dB_t$$

par les condition auto-financier en identifiant les parties martingales ,

$$\sigma\beta_t S_t + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t) = 0$$

et $\beta_t = \frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t)$

avec pour condition terminale $V(T, S_T) = h(S_T)$ on déduit que V satisfait l'EDP

$$rS_t\frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, S_t) - rV(t, S_t) = 0 \tag{3.4.6}$$

La solution de l'EDP (3.3.6) donnée par :

$$V(t, S_t) = s_t\phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_2) \tag{3.4.7}$$

Où :

* ϕ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$
  $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-t^2)}{2}\right) dt$,
* $d_1 = \frac{1}{2\sigma\sqrt{T}}\left(log\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$,
* $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

la quantité

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) = \phi(d_1)$$

qui représente le nombre de parts de l'actif sous jacent utilisées , $(V(t, S_t) - \beta_t S_t, \beta_t)$ représente le portefeuille couverture.

Remarque 3.4.1. *Comme conséquence de la formule d'itô appliquée aux EDS,on verra le prix de call :*

$$C(t, S_t) = e^{r(t-T)}\mathbb{E}[(S_t - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

où dans le calcul de l'espérance on considère Sa dynamique

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Cette formule est fondamentale en finance , et fait intervenir un changement de probabilité.

3.5 Simulation dans le modèle Black et Scholes

3.5.1 Méthode de simulation en Finance

Les méthodes de Monté Carlo sont relativement intéressante car elles permettent de modélise , a priori des produits relativement complexes
La base des techniques de simulation est la loi de grands nombres,afin d'estimer une espérance . Si $X_1, ..., X_n$ sont des réalisations indépendantes [1]

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}(X)$$

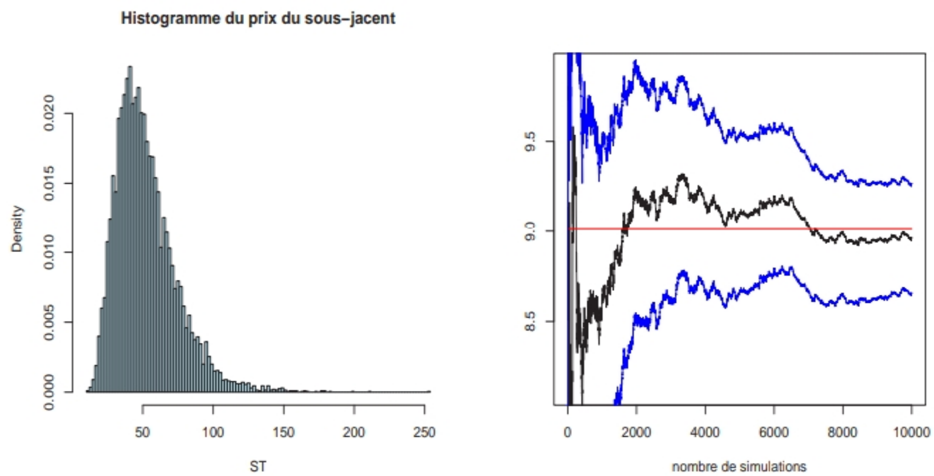

FIG. 3.1 – Calcul de prix d'un call européen par utilise la propriété de la loi log-normale

3.5.2 Simulation du mouvement brownien

Nous s'appliquerons la méthode d'Euler-Maruyama (EM) à l'EDS (modèle de black et scholes unidimensionelle) dans l'equation (3.1.1) nous prendrons $\mu X = f(X)$ et $\sigma X = g(X)$. Nous calculons une discrétisation des trajectoires browniens sur $[0.1], N = 500, T = 1$

Programme 1

```
%Discrétisation d'une trajectoire brownien
randn('state',99)
T = 1; N =500; dt = T/N;
dW = zeros(1,N);
W = zeros(1,N); % Pour efficacité
dW(1) = sqrt(dt)*randn; % Première approximation à l'extérieur de la boucle
W(1)=dW(1); % Depuis W(0)= 0 ne permettent pas
for j = 2:N
dW(j) = sqrt(dt)*randn; % Incrément général
W(j) = W(j-1) + dW(j);
end
plot([0:dt:T],[0,W],'b-') %Tracez W en fonction de t
```

FIG. 3.2 – programe de Simulation de mouvement brownien.

La figure (3.3)montre une trajectoire simulé pour le mouvement brownien .

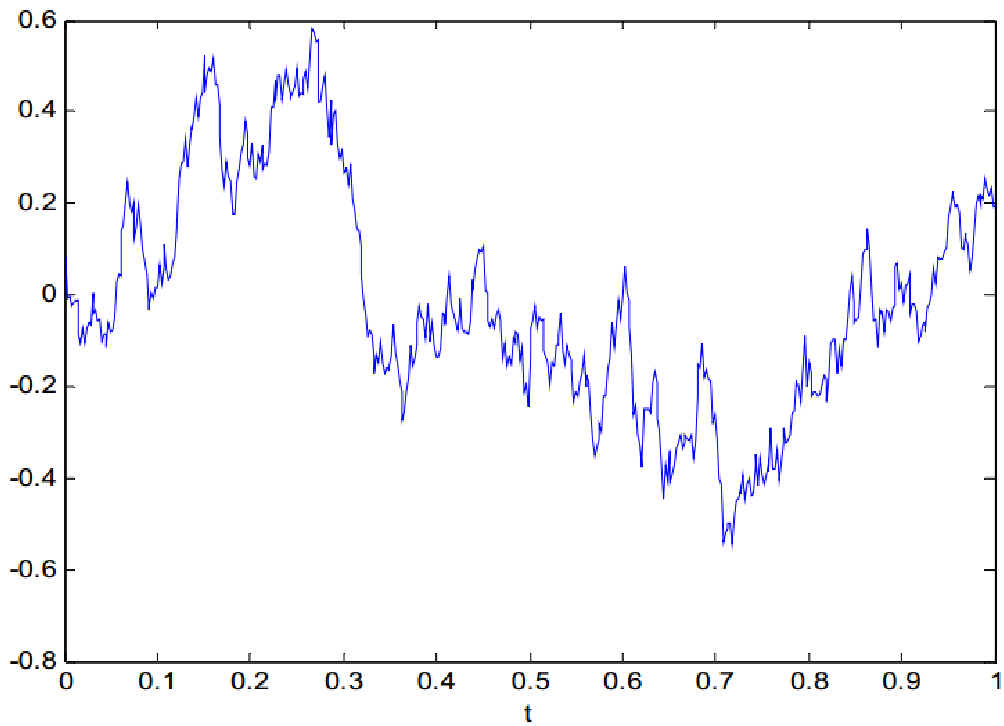

FIG. 3.3 – Simulation du mouvement brownien

Schéma d'EULER-MARUYAMA pour le modèle Blacke et Scholes

Dans cette section nous présentons la méthode d'Euler-Maruyama (EM) utilisée pour la déscritisation des équations differentielles stochastiques .
On considère l'EDS (3.1.1) pour laquelle nous allons appliquer une méthode numérique sur [0,T].Pour sous faire ,nous commençerons par discritiser l'intervalle [0,T] .
Soient $T \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$; en posont $\Delta t = \frac{T}{N}$, $t = (n+1)\Delta t$ et $r = n\Delta t$, nous trouverons donc .

$$X_{(n+1)\Delta t} \simeq X_{n\Delta t} + f(n\Delta t, X_{n\Delta t})\Delta t + g(n\Delta t, X_{n\Delta t})(B_{(n+1)\Delta t} - B_{n\Delta t}) \tag{3.5.8}$$

où $B_{(n+1)\Delta t} - B_{n\Delta t}$ est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ indépendante de $F_{n\Delta t}$ et F_t est la filtration à laquelle sont adapté les processus (B_t) et (X_t). de là , on déduit le schéma numérique suivant :

$$X_0^{(N)} = x_0$$

$$X_{(n+1)\Delta t}^{(N)} = X_{n\Delta t}^{(N)} + f(n\Delta t, X_{n\Delta t}^{(N)})\Delta t + g(n\Delta t, X_{n\Delta t}^{(N)})\zeta_{n+1}\sqrt{\Delta t}, 0 \leq n \leq N \tag{3.5.9}$$

où $(\zeta_n)_{n=1}^N$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $\mathcal{N}(0,1)$ (de telle sorte à ce que les variables aléatoires $\zeta_{n+1}\sqrt{\Delta t}$ et $(B_{(n+1)\Delta t} - B_{n\Delta t})$soient identiquement distrubiées) . Ceci définit le schéma numérique $X^{(N)}$ aux instant $n\Delta t$.
Pour définir le schéma sur l'intervalle $[0, T]$ tout entier ,
on définit pour tout $t \in]n\Delta t, (n+1)\Delta t[$:

$$X_t^{(N)} = X_{n\Delta t}^{(N)} + (t - n\Delta t)(X_{(n+1)\Delta t}^{(N)} - X_{n\Delta t}^{(N)}) \tag{3.5.10}$$

Le schéma numérique $X^{(N)}$ étant défini , on se pose alors la question de la précision de l'approximation de celui -ci avec la solution X.

Programme 2

```
%EM methode Euler-Maruyama pour EDS" black scholes"
% EDS is dX = mu*X dt + sigma*X dW, X(0) = Xzero,
% mu = 2, sigma = 1 and Xzero = 1.
% discrétisation des trajectoires browniennes  [0,1] à dt = 2^(8).
% Euler-Maruyama utilise temps de discritisation R*dt.

randn('state',500)
mu = 2; sigma = 1; Xzero = 1;
T = 1; N = 2^8; dt = T/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW);
Xtrue = Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*([dt:dt:T])+sigma*W);
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'b'), hold on

R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;
Xem = zeros(1,L);
Xtemp = Xzero;
for j = 1:L
Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
Xtemp = Xtemp + Dt*mu*Xtemp + sigma*Xtemp*Winc;
Xem(j) = Xtemp;
end
emerr = abs(Xem(end)-Xtrue(end))
plot([0:Dt:T],[Xzero,Xem],'m--'), hold off
```

FIG. 3.4 – Discrétisation des trajectoires browniennes sur [0.1]

Nous considérons l'équation de Black et Scholes (3.1.1), avec $\mu = 2$ et $\sigma = 1X(0) = 1$, nous calculons une discrétisation des trajectoires browniens sur [0,1] avec $dt = 2^{-8}$ et évaluons la solution comme Xtrue .
Nous appliquons alors schéma Euler l'utilisation d'un pas de discrétisation $Dt = Rdt$ où $R = 4$
La figure (3.5) montre le tracé d'une trajectoire de la solution exacte (trait plein) et l'approximation correspondante donnée par le schéma (trait pointillé.)

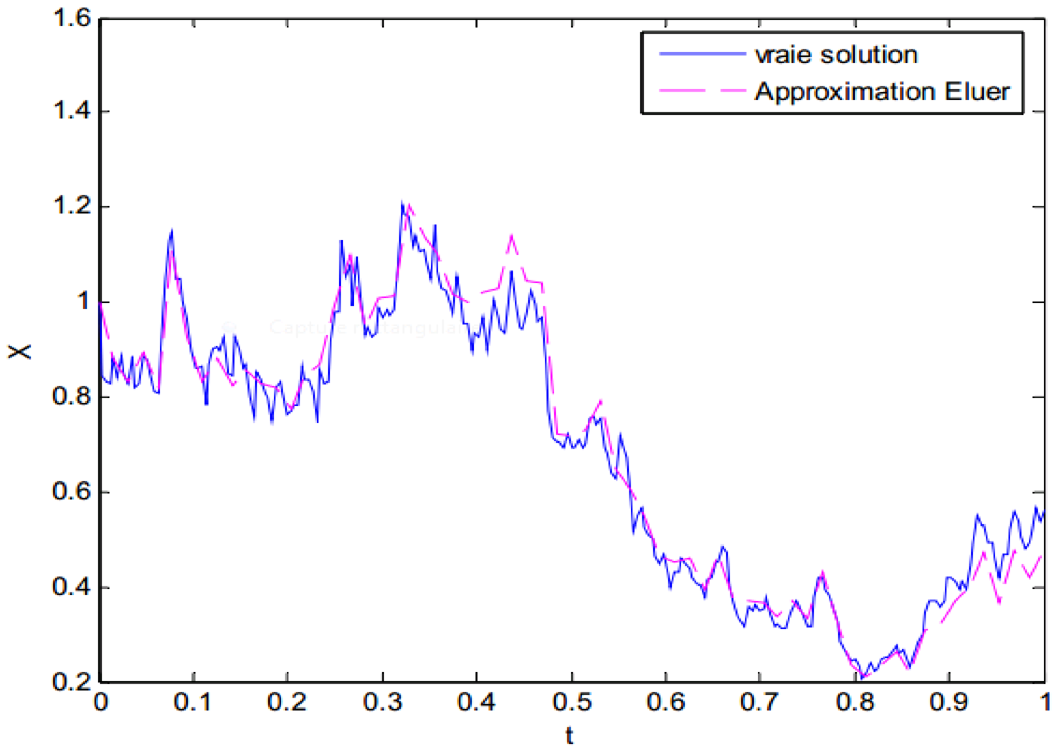

FIG. 3.5 – Comparaison de l'approximation d'EM et d'une trajectoire de modèle Black et Scholes

Conclusion

La solution exacte et la dicrétisation selon le schema d'Euler-Maruyama sont relativement proches graphiquement, l'erreur est égal a 0.6907×10^{-4}

Algorithme

pour simuler le prix d'un option

1. Pour $k = 1, ...N$, on simule $S_T$solution de $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$

$$S_t = S_0 exp\left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right] t + \sigma W_t\right)$$

soit $S(k) \Leftarrow \left(S_0 exp\left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right] t + \sigma\sqrt{t}N\right)\right)$, où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$

2. pour chaque scénario k On détermine le payoff ? $V(S_T, T)(k) \rightarrow V(S(k), T)$
3. On détermine alors l'espérance (risque neutre) associé $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} V(S_T, T)(k) \Rightarrow \mathbb{E}(V(S_T, T))$
4. En fin la valeur actualisé $e^{-rT}\mathbb{E}(V(S_T, T)) \Rightarrow V$ est le prix en 0 de l'option

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est la résolution de l'équations differentielles stochastiques qui notera EDS .
Nous nous sommes intéréssés à deux types d'équations , à savoir le type à bruit additif et le type rétrograde multidimentionnel .
Nous avons montroné l'existense et l'unicité d'une solution forte , ainsi qu'une solution faible
Nous avons donnée une appliquons dans le domaine des des finances mathématiques du cas rétrograde, en utilisant le modèle Black et Scholes . le schema d'Euler-Maruyama nous a certifier que les discrétisation et la solution exacte sont relativement proche avec une erreur , égal à 0.6907×10^{-4}.

Annexe

Les Programmes Utilisees
- LaTeX
- Logicielle Matlab

Bibliographie

[1] **Arthur Charpentier** .
"Méthode Numérique en Finance.2006/2007

[2] **Aurelien Sgnier . Gautier Deannoy**,
"Leçon Exponotiel de Matrice". 18/03/2012

[3] **Asmaa Benkhlouf**.
"Etude de la convergence de la solution des equations différentielles stochastiques multidimensionneles",mémoire de master ,université Kasdi Merbah ourgla, 11/06/2018.

[4] **Baya Takhdmit**.
"Processus Stochastiques Appliqués à la Finance",université de bejaia,2019/2020.

[5] **Brent Økendel**.
"Stochastique Differentiel Equation,An Introduction", fifth edition corrected , priting , spring-verlag Heidelberg, New YORK.

[6] **Brinard P**.
"$\acute{E}$quations Differentielles Stochastiques Retrogrades"-maars$_2 001$.

[7] **Bsmut J**.
"Théorie Probabiliste du contr$\hat{o}$le des diffusions".Meme Amer.1973.

[8] **Howard M.Taylor, Samel Karlin**.
"An introduction to stochastic Modeling" . Third Edition newo york sydny tokyo, 1998.

[9] **Ismail Ghraeiri** .
"Etude de l'equationdifferentielle stochastique à bruit additif multidimensionnelle",mémoire de master,université Kasdi Merbah ourgla.2015

[10] **Jean-Cristophe Breton**.
"Processus Gaussien", Université de La Rechelle september-December, 2006.

[11] **Jean-Cristophe Breton**.
"processus stochastique", université de Rennes 1, octobre December 2020.

[12] **Madalina Deaconu** .
" EDS. Resolution numérique et Application ", 2020/2021.

[13] **Peng S and Pardoux E**.
"Adapted solution of a backward stochastique differential equation ". System controle lettres,14(1).1990.

[14] **Mahieddine Zitouni**.
"Discrétisations et resolutions numériques des equations differentielles stochastiques rétrogrades". mémoire de magister, université de boumerdes.2009-2010

[15] **Monique .Jean blanc,Thomas simon**.
" Element de Calcul Stochastique".september 2005 .

[16] **Monique Jean Blanc Thomas Simon**.
"Element de calcul stochastique", Irbid,September 2005.

[17] **Naïla Krouazene** .
Mémoire de master : "Equation differentielle stovhastique", Université de Telemcen, 2015.

[18] **Nicole El Karaoui et Emmanuel Gobet**.
"Les Outils Stochastique et des Marchées Financiers ", Edition L'Ecole Polytichnique, 2011.

[19] **Paoulo Baldi**.
" Stochastic Calculs An intoduction through theory and exercices", springer,roma italy.2010.

[20] **Paoulo Baldi**.
"Stochastique Calculs ", University Roma Italy, 2017.

[21] **Pierre Priouret** .
"Introduction aux Processus de diffusion ",université de Pierre et Marie curie, 2004/2005.

[22] **Rebiha Zaghdene**.
Thèse doctorat :" Dynamique de structure soumise à des sollisitations aléatoire,Analyse mathématique et résolution numérique de l'equation differentielle stochastique ", Université de sétif, 2014.

[23] **Saadeddine Hamizi** .
"Integrabilité des systèmes differentiel planaires".thèse de doctorat , université de bejaia.2021

[24] **Sabin Lessard** .
"Processus Stochastiques cours et exercices corriges".edition ELLIPSES.PARIS.2014.

[25] **Samia Medahi** .
"estimations des paramètres des EDS : modèle black et scholes",mémoire de magister ,université de boumerdes.2009

Résumé

Ce mémoire traite la résolution des équations differentielles stochastiques (EDS) en générale , et en particulier d'une EDS à bruit additif et rétrogrades multidimensionnelle(EDSR) .
On a introduit quelques notions relatives aux EDS et à leur integration exacte (formule d'it$\hat{o}$) ou à leur solutions approchées donnée par un méthode numérique en fonction de mouvement brownien B) .
Cette approche est utile en particulier pour l'étude du comportement moyen des equations, appliquée par simulation de Monté Carlo.

Mots clé : *Processus stochastique, Mouvement brownien, Formule d'It$\hat{o}$, Processus de winer, Integrale stochastique, Exponentiele de matrice.*

Abstract

This thesis deals with the solution of stochastic differential equations (SDE) in general, and in particular with an additive noise and multidimensional retrograde SDE.
We have introduced some notions related to SDEs and their exact integration (it$\hat{o}$ formula) or to their approximate solutions given by a numerical method in function of Brownian motion B) .
This approach is useful in particular for the study of the mean behaviour of equations, applied by Monte Carlo simulation.
Keywords : *stochastic process,brownien motion, Ito formula, Wiener process, stochastic differential equations , matrix exponential.*