

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques



*Mémoire de fin de cycle Master*

*Option : Probabilités Statistique et Applications*

THÈME

---

Estimation de la fiabilité dans les modèles  
stress-strength

---

Présenté par : *M<sup>elle</sup>* Arbouz Ahlam  
Devant le jury composé de :

---

---

Mr	SOUFIT MASSINISSA	Président	U.A.Mira Béjaïa
Mme	LAGHA KARIMA	Rapporteur	U.A.Mira Béjaïa
Mr	BOURAINÉ MOHAND	Examineur	U.A.Mira Béjaïa

---

---

Année universitaire 2021/2022

---

# Remerciements

---

Louange à Allah, le tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je souhaite manifester ma reconnaissance particulièrement à *M<sup>me</sup>* LAGHA pour m'avoir encadré avec un suivi constant et pour sa disponibilité, sa patience, ses précieux conseils et son optimisme contagieux.

Je tiens également à remercier Mr Y. BOUMZAYED pour son aide, ses conseils et sa générosité. Je lui en suis infiniment reconnaissante.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin qui a contribué dans l'élaboration de ce travail.

---

# Dédicaces

---

Je dédie ce modeste travail :

À mon papa parti trop tôt.

À ma chère maman qui n'a cessé de me guider vers le droit chemin ainsi pour son amour permanent.

À mes chères soeurs Safa et Maroua.

À mon chère frère Nacer-Eddine.

À mes chères oncles El khier, Mouloud son épouse, ainsi que leurs enfants.

À ma copine : Rebiha, merci pour ton amour, amitié. Tu étais toujours là pour me soutenir et m'écouter.

À toute la promotion de Master 2 PSA (2021/2022).

---

# Table des matières

---

	5
<b>Liste des tableaux</b>	<b>6</b>
<b>Notation &amp; Abréviations</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Inférence classique et bayésienne</b>	<b>10</b>
1.1 L'approche classique . . . . .	10
1.1.1 Un estimateur . . . . .	10
1.1.2 Qualité des estimateurs . . . . .	10
1.1.3 Méthodes d'estimation ponctuelles . . . . .	11
1.2 L'approche bayésienne . . . . .	12
1.2.1 Quelques caractéristiques de l'approche bayésienne . . . . .	13
1.2.2 Concept bayésien . . . . .	13
1.2.3 La fonction de coût . . . . .	15
1.2.4 Les fonctions de risque . . . . .	15
1.2.5 L'estimateur de Bayes . . . . .	16
1.2.6 Estimation MMSE (Minimum Mean Squar Error) . . . . .	16
1.2.7 Médiane a posteriori . . . . .	16
1.2.8 Estimateur de maximum a posteriori(MAP) . . . . .	16
1.2.9 Estimation de Bayes généralisé . . . . .	16
1.2.10 Propriétés des estimateurs de Bayes . . . . .	17
1.2.11 Choix de la loi a priori . . . . .	17
<b>2 La fiabilité et les modèles stress-strength</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Notions préliminaires sur la fiabilité . . . . .	19
2.2.1 La durée de vie . . . . .	19
2.2.2 La fiabilité . . . . .	19
2.2.3 La défaillance . . . . .	19
2.2.4 La maintenabilité . . . . .	19
2.2.5 La disponibilité . . . . .	20
2.3 Les indices de fiabilité . . . . .	20
2.3.1 La fonction de fiabilité . . . . .	20
2.3.2 Le taux de défaillance . . . . .	21
2.3.3 Les temps moyens . . . . .	22
2.4 Les lois de probabilité usuelles en fiabilité . . . . .	23
2.5 Les modèles stress-strength (St-St) . . . . .	24
2.5.1 Historique . . . . .	24

2.5.2	Description des modèles stress-strength . . . . .	26
2.5.3	Modélisation de la fiabilité . . . . .	26
2.6	Les lois de probabilité utilisés dans les modèles stress-strength . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Estimation dans les modèles stress-strength</b>	<b>33</b>
3.1	L'estimation classique de la fiabilité dans les modèles stress-strength . . . . .	33
3.1.1	L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance (MLE) . . . . .	33
3.1.2	L'estimation non biaisé (UMVUE) . . . . .	34
3.2	L'estimation bayésienne de la fiabilité dans les modèles stress-strength . . . . .	36
3.2.1	La forme de l'estimateur $\hat{R}$ . . . . .	36
3.2.2	L'inférence de la fiabilité de quelques modèles . . . . .	37
3.3	Conclusion . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Application</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	La simulation de la loi exponentielle . . . . .	49
4.2.1	L'algorithme de simulation . . . . .	49
4.3	Les résultats de la simulation : . . . . .	50
4.3.1	L'estimateur MLE de $R$ : . . . . .	50
4.3.2	L'estimateur bayésienne de $R$ : . . . . .	51
4.3.3	L'estimateur UMVUE de $R$ : . . . . .	52
4.4	La simulation de la loi de Gompertz . . . . .	52
4.4.1	L'estimateur MLE de $R$ . . . . .	53
	<b>Conclusion</b>	<b>54</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>

---

# Table des figures

---

2.1	La courbe de la fonction de fiabilité.[2] . . . . .	20
2.2	La courbe en baignoire . . . . .	22
2.3	Chronogramme lié à la fiabilité et à la disponibilité d'un composant. . . . .	23
2.4	Représentation de modèle stress-strength . . . . .	26

---

# Liste des tableaux

---

1.1	Lois a priori conjuguées naturelle pour quelques familles exponentielles usuelles. . .	18
2.1	Les lois de probabilités usuelles en fiabilité . . . . .	24
4.1	La variation dans $R$ pour $n = 15$ et $m = 10$ . . . . .	50
4.2	La variation dans $R$ pour $n = 10$ et $m = 15$ . . . . .	50
4.3	La variation dans $R$ pour $n = 30$ et $m = 30$ . . . . .	50
4.4	La variation dans $R$ pour $n = 15$ et $m = 10$ . . . . .	51
4.5	La variation dans $R$ pour $n = 10$ et $m = 15$ . . . . .	51
4.6	La variation dans $R$ pour $n = 30$ et $m = 30$ . . . . .	51
4.7	La variation dans $R$ pour $n = 15$ et $m = 10$ . . . . .	52
4.8	La variation dans $R$ pour $n = 10$ et $m = 15$ . . . . .	52
4.9	La variation dans $R$ pour $n = 30$ et $m = 30$ . . . . .	52
4.10	La variation de $R$ avec la méthode MLE . . . . .	53

---

# Notation & Abréviation

---

v.a	Variable aléatoire.
$\mathbb{E}$	Espérance mathématique.
$\mathbb{V}$	Variance mathématique.
$\mathbb{P}$	Probabilité.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels.
iid	Indépendant et identiquement distribué.
MLE	Maximum Likelihood Estimator.
EMV	Estimateur du Maximum de Vraisemblance.
ML	Maximum Likelihood.
St-St	Stress-Strength.
UMVUE	Uniform Minimum Variance Unbiased Estimator.

---

# Introduction

---

La fiabilité concernait les systèmes à haute technologie (centrales, nucléaires, aérospatial). Aujourd'hui, la fiabilité est devenue un paramètre clé de la qualité et d'aide à la décision dans l'étude de la plupart des composants électroniques, composants, produits et processus "grand public" : transport, énergie, bâtiments, composants mécaniques. De nombreux industriels travaillent à l'évaluation et l'amélioration de la fiabilité de leurs produits au cours de leur cycle de développement, de la conception à la mise en service (conception, fabrication et exploitation) a fin de développer leurs connaissances sur le rapport coût /fiabilité et maîtriser les sources de défaillance [27] [28].

La plupart des chercheurs dans le domaine de la fiabilité ont considéré la fiabilité comme une fonction de temps. Il est bien connu que les composants d'un équipement industriel lorsqu'ils sont en fonctionnement sont généralement soumis à un certain niveau de stress et que les composants sont capable de résister à ce stress(environnementales ou dues aux conditions prévalant dans l'équipement) jusqu'à une certaine limite seulement, c'est à dire que les composants possèdent une certaine résistance nominale pour supporter ce stress. Si le niveau de stress dépasse la valeur nominale des résistances des composants, le composant ne fonctionnera pas [25].

Ce fait s'est réalisé pendant la seconde guerre mondiale lorsqu'ils ont constaté que des équipements de défense tels que les radars et les systèmes de communications électroniques qui étaient très faible en temps normal, ne remplissaient pas leurs fonctions de manière adéquate et efficace lorsqu'il étaient soumis à des conditions environnementales contraires à celles pour lesquelles ils étaient conçus. Il est donc devenu nécessaires de prendre en compte les effets des conditions environnementales lors de l'évaluation de la fiabilité d'un équipement.

La fiabilité d'un système (ou d'un équipement) donné est la probabilité que ce système fonctionne dans des conditions d'environnement données, dans le cas des modèles Stress-Strength c'est la probabilité que le système surmonte le stress imposé, le terme stress (contrainte) étant définie comme la variable induisant la défaillance, ou comme le stress qui tend à provoquer la défaillance d'un composant ou d'un dispositif, tandis que le terme strength (résistance) est définie comme la capacité d'un composant ou d'un matériau à accomplir la fonction requise de manière satisfaisante et sans défaillance, lorsqu'il est soumis à une charge et à un environnement externes[28].

On s'intéresse au problème d'estimation de la fiabilité dans les modèles stress-strength, définie par la probabilité  $R = P(X > Y)$ , où  $X$  est une variable aléatoire représentant la résistance d'un composant (Strength) et  $Y$  la variable aléatoire représentant le stress appliqué à ce composant (contrainte), alors  $R$  est une mesure de performance du composant, appelée la fiabilité. Plusieurs travaux existent pour l'estimation de ce paramètre. L'estimation considérée est l'estimation classique (Méthodes MLE et UMVUE) ainsi que l'estimation bayésienne

Ce mémoire, est structuré en quatre chapitres essentiels agencés comme suit :

Le premier chapitre introduit les concepts de base de l'approche classique et bayésienne ainsi que les notations et la terminologie appropriée sur lesquels se fonde l'analyse des deux écoles (classique et bayésienne) dont nous aurons besoin pour établir les prochains chapitres de ce mémoire.

Le deuxième chapitre rappelle les notions générales de fiabilité et donne une présentation des modèles stress-strength.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse au problème d'estimation de la fiabilité dans les modèles stress-strength en développant les différentes méthodes d'estimation paramétrique citées dans le premier chapitre, telle que la méthode MLE, UMVUE et la méthode bayésienne pour différentes distributions de survie telles que la distribution Exponentielle, Gompertz, Lindley, Rayleigh-Half-Normal.

# Chapitre 1

---

## Inférence classique et bayésienne

---

### Introduction

Parmi les grandes écoles d'inférence statistique l'école bayésienne et l'école classique, se distinguent par des postulats philosophiques et des méthodes mathématiques fondamentalement différentes. Dans l'école classique les données sont des observations provenant d'une population dont la loi dépend d'un paramètre inconnu  $\theta$  à estimer sur la base des observations et dans l'école bayésienne on tient compte d'une information supplémentaire en dehors des observations qui nous permet de donner plus de précision dans l'estimation, le paramètre  $\theta$  est considéré comme une variable aléatoire.

Nous allons présenter dans ce chapitre les notions générales sur l'inférence bayésienne et l'inférence classique.

### 1.1 L'approche classique

Considérons un modèle statistique  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Theta)$  où  $\mathcal{X}$  est l'espace des observations ( $= R^n$ ),  $\mathcal{A}$  est la tribu sigma algèbre,  $\Theta$  c'est l'espace des paramètres et  $P_\theta$  c'est la loi de probabilité dépendant du paramètre inconnu  $\theta \in \Theta$ , définie sur cet espace. Considérons une variable aléatoire (v.a)  $X$  distribuée suivant la loi de probabilité  $P_\theta$  ayant pour densité  $f_\theta$ .

Soit  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un échantillon de taille  $n$  issu de la v.a  $X$  et on note  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une observation de  $\underline{X}$ .

#### 1.1.1 Un estimateur

Un estimateur de  $\theta$ , noté  $\hat{\theta}$ , est une statistique qui permet d'attribuer une valeur pour le paramètre inconnu  $\theta$  [21].

Une estimation c'est une valeur numérique prise par l'estimateur suite à la réalisation du  $n$ -échantillons.

#### 1.1.2 Qualité des estimateurs

On considère une statistique comme un bon estimateur du paramètre inconnu  $\theta$ , si elle possède certaines qualités. Les plus importantes d'entre elles sont données par :

– **Estimateur sans biais :**

On appelle biais d'un estimateur  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$ , la quantité suivante :

$$Biais(n, \theta) = \mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta.$$

$\hat{\theta}_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$  si :  $Biais(n, \theta) = 0$ . Donc,  $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$ . On dit aussi l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est non biaisé.

– **Estimateur asymptotiquement sans biais :**

L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$  est dit asymptotiquement sans biais de  $\theta$  si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Biais(n, \theta) = 0.$$

$$\text{i.e, } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta.$$

– **Estimateur convergent :**

L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$  est dit convergent s'il converge en probabilité vers  $\theta$ . i.e,

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0.$$

– **Estimateur de variance minimale :**

$\hat{\theta}_n$  est dit de variance minimale si  $\forall \hat{\theta}'$  un estimateur de  $\theta$ ,  $\mathbb{V}(\hat{\theta}_n) \leq \mathbb{V}(\hat{\theta}')$ .

**Théorème 1.1.1.** Soit  $\hat{\theta}_n$  un estimateur sans biais de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}_n$  est dit convergent si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = 0.$$

– **Dominance :**

Soit  $\hat{\theta}_n$  un estimateur de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}_n$  est dominant si pour tout autre estimateur  $\hat{\theta}_n^*$  on a :

$$MSE(\hat{\theta}_n) \leq MSE(\hat{\theta}_n^*)$$

Où  $MSE(\hat{\theta}_n)$  est l'erreur quadratique moyenne de  $\hat{\theta}_n$  par rapport à  $\theta$ , elle est définie par :

$$MSE(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) + Biais^2(n, \theta)$$

Si  $\hat{\theta}_n$  et  $\hat{\theta}_n^*$  sont deux estimateurs sans biais de  $\theta$ , la comparaison de ses deux estimateurs au sens du risque ( $MSE$ ) revient à comparer leurs variances. Le meilleur estimateur dans ce cas est celui qui a la variance faible.

### 1.1.3 Méthodes d'estimation ponctuelles

Soit  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un échantillon de taille  $n$  issu de la variable aléatoire  $X$  de densité  $f(x, \theta)$  où  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$  est un paramètre inconnu dans  $\mathbb{R}^K$ ,  $K \in \mathbb{N}^*$ .

– **La méthode des moments :**

On note les moments théoriques et empiriques d'ordre  $k$ ,  $k \geq 1$  de la variable aléatoire  $X$  par :  $m_k = \mathbb{E}(X^k)$  et  $M_{k,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$  respectivement.

Le principe de la méthode est d'égaliser les moments théoriques  $m_k$  (qui dépendent du

paramètre) avec les moments empiriques  $M_{k,n}$ .

La solution du système  $M_{k,n} = m_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  nous donne les estimateurs de  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ .

$$\begin{cases} M_1 = m_1 \\ M_2 = m_2 \\ \vdots \\ M_K = m_K \end{cases}$$

– **La méthode de maximum de vraisemblance (MV) :** [21]

Cette méthode est la plus utilisée en pratique. Elle est optimale et efficace asymptotiquement, lorsque la taille de l'échantillon est assez grande ( $n > 30$ ) elle fournit des estimateurs de très bonne qualité.

Elle est facile à appliquer, se ramenant de problème classique de résolution numérique.

Soit  $L(x, \theta)$  la fonction de vraisemblance de l'échantillon  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  issu de la variable aléatoire  $X$  calculée au point  $x$  en fonction de  $\theta$  donnée par :

$$L(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (ou en anglais maximum likelihood estimator (MLE)) pour  $\theta$  est la statistique  $\hat{\theta}_{MLE}$  telle que :

$$L(\underline{x}, \hat{\theta}_{MLE}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\underline{x}, \theta)$$

Le principe de cette méthode est de trouver un estimateur  $\hat{\theta}_{MLE}$  qui maximise la fonction de vraisemblance  $L(\underline{x}, \theta)$ .

Les fonctions  $L(\underline{x}, \theta)$  et  $\ln L(\underline{x}, \theta)$  atteignent leurs maximum au même point, donc :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} (L(\underline{x}, \theta)) = \arg \max_{\theta \in \Theta} (\ln L(\underline{x}, \theta)).$$

Si le domaine de  $X$  ne dépend pas de  $\theta$  et si la fonction de vraisemblance est deux fois différentiable par rapport à  $\theta$ .  $\forall \theta$ , alors  $\hat{\theta}_{MLE}$  est une solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(L(\underline{x}, \theta)) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(L(\underline{x}, \theta)) < 0. \end{cases}$$

## 1.2 L'approche bayésienne

On considère  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un échantillon de taille  $n$ , issus de la v.a  $X$  dont la loi de probabilité dépend d'un paramètre inconnu  $\theta \in \Theta$  et de densité  $f(x, \theta)$ . Notre objectif est de faire de l'inférence sur le paramètre inconnu  $\theta$ , c'est-à-dire décrire un phénomène passé ou avenir dans un cadre probabiliste. L'inférence de ce paramètre dépend de l'information concernant  $\theta$ , si toute l'information est contenue dans les observations on applique l'approche classique. S'il existe d'autres informations supplémentaire en dehors des données sur  $\theta$  il s'agit du cas où nous avons des connaissance a priori sur ce paramètre considéré comme variable aléatoire et nous lui associons une loi de probabilité, dans ce cas là on applique l'approche bayésienne.

L'approche bayésienne se diffère donc de l'approche classique dans le sens où le paramètre  $\theta$  n'est plus considéré comme étant totalement inconnu, il est devenu une v.a dont le comportement est supposé connu. On fait intervenir dans l'analyse statistique une distribution associé à ce paramètre.

### 1.2.1 Quelques caractéristiques de l'approche bayésienne

- Le paramètre inconnu  $\theta$  n'est pas une constante, c'est une quantité aléatoire. On peut donc obtenir sa loi de probabilité.
- On a la possibilité d'incorporer l'information apriori sur le paramètre  $\theta$ .
- L'inférence est réalisée par la description de la loi de  $\theta$  telle que la moyenne, intervalle de confiance, la probabilité de prendre certaines valeurs, etc.
- peut d'intérêt pour un test d'hypothèses, malgré l'existence des outils pour le faire.

### 1.2.2 Concept bayésien

#### 1. Information a priori

On appelle information a priori sur le paramètre inconnu  $\theta$  toute information disponible en dehors des observations.

#### 2. La loi a priori

On appelle loi a priori, notée  $\pi(\theta)$ , la loi modélisant l'idée a priori disponible sur le paramètre  $\theta$ . Cette loi se divise en deux catégories :

##### - Loi a priori informative :

On connaît déjà la moyenne ou l'étendue grâce à des études antérieures, des jugements d'expert, retour d'expérience, enquêtes, etc.

##### - Loi a priori non informative :

On ne sait rien à l'avance donc toute valeur est possible.

#### 3. La loi des observations

On interprète la loi des observations donnée par la fonction de vraisemblance comme la loi conditionnelle des observations  $X$  sachant  $\theta$ .

On note la densité de la loi des observations par  $L(\theta|\underline{x})$  définie par :

- Cas continu :

$$L(\theta|\underline{x}) = f_{\theta}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

- Cas discret :

$$L(\theta|\underline{x}) = P_{\theta}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i|\theta)$$

#### 4. La loi a posteriori

En combinant la loi a priori donnée par  $\pi(\theta)$  avec celle des observations  $L(\theta|x)$ , on obtiendra une nouvelle loi. Cette loi est appelée loi a posteriori notée  $\pi(\theta/\underline{x})$ , elle représente la distribution conditionnelle de paramètre  $\theta$  sachant les observations  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

La loi a posteriori modélise alors toute l'information disponible sur le paramètre d'intérêt  $\theta$ , compte tenu des observations.[19]

(a) **Théorème de Bayes** [8]

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $A, B$  deux événements de  $\mathcal{A}$ . Supposons que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$  et considérons une partition  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $\Omega$ . Pour un  $A_i$  particulier, la formule de probabilité conditionnelle donnée par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

L'addition des probabilités d'événements disjoints et la règle des probabilités composées permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

D'où la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

En utilisant le théorème de Bayes, la distribution a posteriori de  $\theta$  peut être calculée à partir de la relation suivante :

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{\varphi(\theta, \underline{x})}{m(\underline{x})}.$$

Où,  $\varphi(\theta, \underline{x})$  est la loi conjointe de  $\underline{x}$  et  $\theta$ , donnée par :

$$\varphi(\theta, \underline{x}) = L(\theta, \underline{x})\pi(\theta).$$

et  $m(\underline{x})$  représente la loi marginale de  $\underline{x}$ , avec :

$$m(\underline{x}) = \int_{\Theta} \varphi(\theta, \underline{x})d\theta = \int_{\Theta} L(\theta, \underline{x})\pi(\theta)d\theta$$

La distribution a posteriori est alors donnée par :

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{L(\theta, \underline{x})\pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(\theta, \underline{x})\pi(\theta)d\theta}.$$

(b) **Le raisonnement proportionnel** [19]

Il est possible d'utiliser le raisonnement de proportionnalité pour éviter de calculer l'intégrale  $\int_{\Theta} L(\theta, \underline{x})\pi(\theta)d\theta$  qui est parfois difficile à calculer.

**Definition 1.2.1.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies sur le même espace  $\mathcal{X}$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont proportionnel et on note  $f \propto g$ , s'il existe une constante  $a > 0$  tel que  $f(x) = ag(x), \forall x \in \mathcal{X}$ .

Dans le contexte bayésienne on a :

$$\pi(\theta|\underline{x}) = aL(\theta|\underline{x})\pi(\theta)$$

avec,

$$a = \frac{1}{m(\underline{x})} \text{ et } m(\underline{x}) = \int_{\Theta} L(\theta|\underline{x})\pi(\theta)d\theta.$$

D'où :

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto L(\theta|\underline{x})\pi(\theta).$$

5. **Le modèle statistique bayésien**

On appelle modèle statistique bayésien, la donnée d'un modèle paramétrique qui est donné par  $L(\theta|\underline{x})$  et d'une distribution a priori  $\pi(\theta)$ . On obtient le modèle bayésien :  $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta, \pi(\theta), \theta \in \Theta\}$ .

6. **La loi a priori impropre**[19]

Soit  $\pi(\theta)$  une application définie de  $\theta$  dans  $]0, +\infty[$ . La loi a priori impropre vérifie :

$$\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = +\infty$$

**Remarque** La loi a priori impropre de densité  $\pi(\theta)$  n'est pas une loi de probabilité car :  $\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta \neq 1$ .

**Les bases de la théorie de la décision dans l'analyse bayésienne**

Pour choisir une décision, on construit une relation de préférence en considérant une mesure du coût ou perte lorsque on prend la décision  $\delta(x)$  et que l'état de la nature est  $\theta \in \Theta$ . Pour ce faire on introduit la fonction  $\omega$ , appelée fonction de coût (ou de perte). En statistique, la règle de décision est un estimateur.

1.2.3 **La fonction de coût**

La fonction de coût ou de perte notée  $\omega(\theta, \delta(x))$ , est une fonction mesurable de  $(\Theta \times \mathcal{D})$  à valeurs réelles positives :  $\omega : \Theta \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Où  $\mathcal{D}$  est l'ensemble de toutes les décisions [19]. Parmi les fonctions de coût les plus connues, on peut citer :

- **Le coût quadratique**

La fonction de coût quadratique est définie par :

$$\omega(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2.$$

- **Le coût absolu ( $L^1$ )**

La fonction de coût absolu est définie par :

$$\begin{aligned} \omega(\theta, \delta) &= |\theta - \delta| \\ &= \begin{cases} \theta - \delta & \text{si } \theta \geq \delta \\ \delta - \theta & \text{si } \theta \leq \delta. \end{cases} \end{aligned}$$

- **Le coût 0-1**

Le coût 0-1 est définie par :

$$\omega(\theta, \delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in \Theta_0 \\ 1 & \text{si } \theta \in \Theta_1. \end{cases}$$

Où  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  avec  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

1.2.4 **Les fonctions de risque**

- **Risque fréquentiste**

Pour une fonction de perte donnée, le risque fréquentiste notée  $R(\theta, \delta)$ , est le coût moyen du coût d'une règle de décision, donné par :

$$R(\theta, \delta) = \int_{\mathcal{X}} \omega(\theta, \delta) L(\underline{x}|\theta) dx.$$

- **Risque a posteriori**

On appelle risque a posteriori noté  $\rho(\pi, \delta|\underline{x})$ , la moyenne du coût par rapport à la loi a posteriori :

$$\rho(\pi, \delta|\underline{x}) = \mathbb{E}(\omega(\theta, \delta)|\underline{x}) = \int_{\Theta} \omega(\theta, \delta(\underline{x})) \pi(\theta|\underline{x}) d\theta.$$

• **Risque intégré**

On appelle risque intégré ou risque moyen de Bayes associé à la loi a priori  $\pi$ , l'espérance du risque fréquentiste par rapport à la loi a priori  $\pi(\theta)$ .

$$R_\pi(\delta) = \mathbb{E}(R(\theta, \delta)) = \int_{\Theta} R(\theta, \delta)\pi(\theta)d\theta.$$

• **Risque de Bayes**

On appelle décision de Bayes noté  $\delta_B^\pi$ , la décision qui minimise le risque intégré  $R_\pi(\delta)$ , ou encoure la décision qui minimise le risque a posteriori  $\rho(\pi, \delta|\underline{x})$  :

$$\delta_B^\pi(\underline{x}) = \arg \min_{d \in \mathcal{D}} R_\pi(d) = \arg \min_{d \in \mathcal{D}} \rho(\pi, d|\underline{x}), \forall \underline{x} \in \mathcal{X}.$$

On défini le risque de Bayes noté  $r(\pi)$ , comme étant le risque associé à la décision de Bayes  $\delta_B^\pi$  pour une loi a priori donnée  $\pi$  :

$$r(\pi) = R_\pi(\delta_B^\pi) = \min_{d \in \mathcal{D}} R_\pi(d).$$

### 1.2.5 L'estimateur de Bayes

On appelle estimateur de Bayes associé à une fonction de coût  $\omega$  et à une distribution  $\pi$ , toute décision  $\delta_B^\pi$  qui minimise le risque intégré.[19]

$$r_\pi(\delta_B^\pi) = \min_{\delta} R_\pi(\delta) = R_\pi(\delta_B^\pi).$$

D'où :

$$\delta_B^\pi = \arg \min_{d \in \mathcal{D}} r_\pi(d) = \arg \min_{d \in \mathcal{D}} \rho(\pi, d|\underline{x}).$$

### 1.2.6 Estimation MMSE (Minimum Mean Squar Error)

L'estimateur de Bayes MMSE noté  $\hat{\theta}_{MMSE}(\underline{x})$ , associé à la fonction de coût quadratique relativement à une loi à priori  $\pi$  est la moyenne a posteriori de  $\theta$  donné par :

$$\hat{\theta}_{MMSE}(\underline{x}) = \mathbb{E}(\theta|\underline{x}).$$

### 1.2.7 Médiane a posteriori

L'estimateur de Bayes associé à la fonction de coût  $L^1$  (coût absolu) et à la loi a priori  $\pi$  est le fractile d'ordre 1/2 de la loi a posteriori (médiane a posteriori). i.e.  $\hat{\theta}_{Me}(\underline{x})$  tel que :

$$\mathbb{P}(\theta < \hat{\theta}_{Me|\underline{x}}) = 1/2$$

### 1.2.8 Estimateur de maximum a posteriori(MAP)

On appelle estimateur de maximum a posteriori, noté  $\hat{\theta}_{MAP}$ , tout estimateur maximisant la loi a posteriori donné par :

$$\hat{\theta}_{MAP}(\underline{x}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} \pi(\theta|\underline{x}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ln(\pi(\theta|\underline{x})).$$

### 1.2.9 Estimation de Bayes généralisé

Soit  $\pi(\theta)$  une loi a priori impropre, on suppose que l'intégrale suivante est finie :

$$\int_{\Theta} L(\theta, \underline{x})\pi(\theta)d\theta < \infty.$$

Alors, la densité de la loi a posteriori existe :

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{L(\theta, \underline{x})\pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(\theta, \underline{x})\pi(\theta)d\theta}.$$

On appelle estimateur de Bayes généralisé de  $\theta$ , noté  $\hat{\theta}_G$ , la moyenne de la loi a posteriori relativement à la fonction de coût quadratique et à une loi a priori impropre. Il est donné par :

$$\hat{\theta}_G = \mathbb{E}(\theta|\underline{x}).$$

### 1.2.10 Propriétés des estimateurs de Bayes

- Les estimateurs de Bayes sont biaisés (biais  $\neq 0$ ) et convergent en probabilité.
- Le risque de Bayes est fini .
- Si la distribution a priori  $\pi$  est strictement positive sur  $\Theta$  de risque de Bayes fini et la fonction de risque  $R(\theta, \delta)$  est une fonction continue de  $\theta$  pour tout  $\delta$ , l'estimateur de Bayes  $\delta_B^\pi$  est admissible.
- La loi a posteriori est asymptotiquement normale  $\mathcal{N}(\mathbb{E}(\theta|\underline{x}), \mathbb{V}(\theta|\underline{x}))$ . [8]

### Région de confiance dans l'approche bayésienne

Dans l'approche classique, pour construire la région de confiance on utilise des stratégies ou des cas particuliers telle que la fonction pivotale. Par contre, dans l'approche bayésienne la construction est immédiate.

pour toute  $\alpha$   $0 < \alpha < 1$  l'intervalle de confiance (intervalle de crédibilité)  $I = [a, b]$ ,  $a < b$  de niveau  $1 - \alpha$ , est l'intervalle établi sur la distribution a posteriori telle que : [19]

$$\mathbb{P}(\theta \in [a, b]|\underline{x}) = 1 - \alpha.$$

Cette région est appelée la région plus forte densité a posteriori (PFDP).

On appelle région de confiance de niveau  $1 - \alpha$  (région  $\alpha$ - crédible) tout ensemble  $C_x$  telle que :

$$\mathbb{P}(\theta \in C_x|\underline{x}) \geq 1 - \alpha,$$

Où  $\mathbb{P}(\cdot)$  est la probabilité de densité a posteriori  $\pi(\theta|\underline{x})$ .

On dira qu'une région  $\alpha$  crédible PFDP si elle s'écrit :

$$C_x^\pi = \{\theta \in \Theta, \pi(\theta|\underline{x}) \geq k_\alpha\}$$

Où  $k_\alpha$  est la plus grande valeur telle que :

$$\mathbb{P}(\theta \in C_x^\pi) \geq 1 - \alpha.$$

### 1.2.11 Choix de la loi a priori

Les critiques contre l'approche bayésienne ont une certaine validité au sens où elles attirent l'attention sur le fait qu'il n'y a pas une façon unique de choisir une loi a priori, et que le choix de cette loi a un impact sur l'inférence résultante. Cet impact peut être négligeable, modéré ou énorme, puisqu'il est toujours possible de choisir une loi a priori qui donnera la réponse qu'on souhaite obtenir. Une difficulté majeure pour le choix de la loi a priori est obtenu lorsque l'espace des paramètres  $\Theta$  est non borné ou non dénombrable (cas des lois a priori impropres). La question qui se pose, comment peut-on choisir la loi a priori  $\pi(\theta)$  si aucune information spécifique sur les valeurs des paramètres n'est disponible ou si l'information préalable est plutôt vague ?

L'une des solutions les plus populaires consiste à prendre un priori conjuguée pour  $\pi(\theta)$ .

**Definition 1.2.2.** Soit  $\mathcal{F}$  la classe des fonctions densité de probabilité  $f(x, y|\theta)$  et  $\mathcal{P}$  la classe des lois a priori.

On dit que la classe  $\mathcal{P}$  est une famille conjuguée naturelle pour  $\mathcal{F}$  si la loi a posteriori appartient à la classe  $\mathcal{P}$ , pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}$  et  $\pi(\theta) \in \mathcal{P}$ .

L'avantage d'utilisation des lois a prioris conjuguées est qu'il donne lieu à des calculs mathématiques simples et les loi a posteriori appartient à la même classe que la loi a priori. [10] dans ce cas, on connaît la forme de l'estimateur bayésien à l'avance.

### Lois conjuguées des familles exponentielles

On appelle famille exponentielle, toute famille de loi de distribution  $\{P_\theta\}$  dont la densité a la forme suivante :

$$f(x|\theta) = \exp \left[ \sum_{i=1}^k C_i(\theta)T_i(x) - B(\theta)T(x) \right] h(x). \quad (1.1)$$

Où  $C_i(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont des fonctions du paramètre  $\theta$  et les  $T_i(\cdot)$  sont des statistiques.

Le tableau ci-dessous donne un exemple de lois a priori conjuguées naturelles pour quelques familles exponentielles.

$f(x \theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta x)$	$\hat{\theta} = \mathbb{E}(\theta x)$
Normale $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	Normale $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$	Normale $\mathcal{N}\left(\frac{\sigma^2\mu + \tau^2x}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2\tau}{\sigma^2 + \tau^2}\right)$	$\hat{\theta} = \frac{\sigma^2\mu + \tau^2x}{\sigma^2 + \tau^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\theta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha + x, \beta + 1)$	$\hat{\theta} = \frac{\alpha + x}{\beta + 1}$
Exponentielle $\mathcal{Exp}(\lambda)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha + k, \beta + t)$	$\hat{\theta} = \frac{\alpha + k}{\beta + t}$
Gamma $\mathcal{G}(\nu, \theta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha + \nu, \beta + x)$	$\hat{\theta} = \frac{\alpha + \nu}{\beta + x}$
Binomiale $\mathcal{B}(n, \theta)$	Bêta $\mathcal{Be}(\alpha, \beta)$	Bêta $\mathcal{Be}(\alpha + x, \beta + n - x)$	$\hat{\theta} = \frac{\alpha + x}{\alpha + \beta + n}$
Binomiale négative $\mathcal{Neg}(m, \theta)$	Bêta $\mathcal{Be}(\alpha, \beta)$	Bêta $\mathcal{Be}(\alpha + m, \beta + x)$	$\hat{\theta} = \frac{\alpha + m}{\alpha + m + \beta + x}$
Normale $\mathcal{N}(\mu, 1/\theta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{(\mu-x)^2}{2})$	$\hat{\theta} = \frac{2\alpha + 1}{(4-x)^2}$

TABLE 1.1 – Lois a priori conjuguées naturelle pour quelques familles exponentielles usuelles.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques méthodes d'estimations utilisées dans l'inférence statistiques telles que l'estimation classique (la méthode MLE, La méthode des moments) ainsi que l'estimation bayésienne. Nous aurons besoin de ces méthodes par la suite pour estimer le paramètre de la fiabilité  $R$ .

## Chapitre 2

---

# La fiabilité et les modèles stress-strength

---

### 2.1 Introduction

La fiabilité est un concept intéressant dans plusieurs domaines d'activité humaine : économique, scientifique, technique et industriel, etc ... Elle est liée à des notions de sécurité et de sûreté de fonctionnement, de qualité, d'efficacité et de performance. Cette théorie a comme objectif d'étudier l'aptitude des dispositifs techniques (machines, équipements, composants, éléments...) à accomplir une fonction requise, dans des conditions données et pendant une durée définie.

Nous admettons qu'au début du fonctionnement chaque dispositif est en état de fonctionnement. Les défaillances se produisant de façon aléatoire, il est logique de faire appel au calcul des probabilités pour résoudre des problèmes de fiabilité.

### 2.2 Notions préliminaires sur la fiabilité

#### 2.2.1 La durée de vie

La durée de vie d'un composant est le temps qui s'écoule entre la mise en service et la première défaillance. C'est le temps de bon fonctionnement.

#### 2.2.2 La fiabilité

La fiabilité (Reliability en anglais) d'un matériel (dispositif, équipement, composant ou un système) à l'instant  $t$ ,  $t > 0$  noté  $R(t)$ , est la probabilité que ce matériel fonctionne correctement sans panne jusqu'à l'instant  $t$  dans des conditions d'utilisation spécifique.

#### 2.2.3 La défaillance

La défaillance d'un dispositif (failure en anglais) est la perte partielle ou totale de ses propriétés, qui entraîne la perte totale de sa capacité de fonctionnement. On distingue quatre catégories de défaillance : défaillance mineure, significative, critique et catastrophique.

#### 2.2.4 La maintenabilité

La maintenabilité (maintainability en anglais) est la probabilité qu'un système en panne à l'instant initiale  $t = 0$  soit réparé dans l'intervalle  $[0, t]$ . La maintenabilité est la fonction de

répartition de la variable  $TTR$ , représentant le temps technique de réparation, noté  $M(\cdot)$  définie par :

$$M(t) = \mathbb{P}(TTR \leq t), t > 0.$$

### 2.2.5 La disponibilité

La disponibilité (Availability en anglais) du matériel à l'instant  $t$ ,  $t > 0$  est la probabilité pour que le matériel fonctionne à l'instant  $t$ , noté  $D(t)$ ,  $t > 0$ . La disponibilité d'un système réparable peut être mesurée :

- Sur un intervalle de temps donné, c'est la disponibilité moyenne.
- À un instant donné, c'est la disponibilité instantannée.
- À l'instant  $t$ , tel que  $t \rightarrow \infty$ , c'est la disponibilité asymptotique.[9]

## 2.3 Les indices de fiabilité

Considérons  $T$  la variable aléatoire représentant la durée de vie d'un équipement. La variable aléatoire est continue, positive, de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F$ .

### 2.3.1 La fonction de fiabilité

La fiabilité du composant à l'instant  $t$ , notée  $R(t)$ , est la probabilité de non défaillance dans l'intervalle de temps  $[0, t]$  définie par :

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx, t > 0.$$

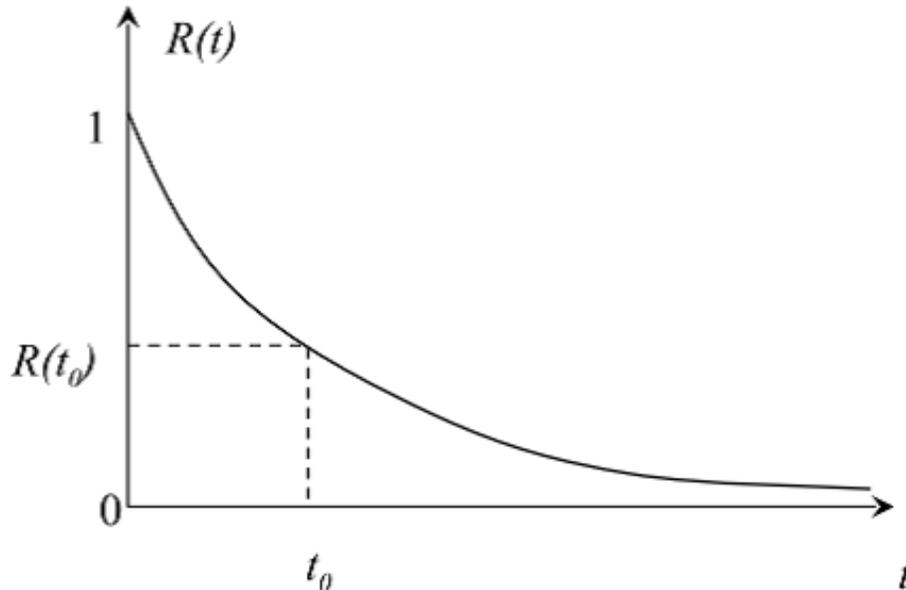


FIGURE 2.1 – La courbe de la fonction de fiabilité.[2]

La fonction de répartition  $F(t)$ , est la probabilité de panne ou de défaillance du composant sur l'intervalle  $[0, t]$ . On a les relations suivantes :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx, f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}, t > 0.$$

### 2.3.2 Le taux de défaillance

Il est appelé aussi le taux d'avarie ou de panne, c'est l'un des concepts les plus importants de la sûreté de fonctionnement. Le taux de défaillance noté  $\lambda(t)$  est la probabilité d'avoir une défaillance dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$  sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance dans l'intervalle  $[0, t]$ . [7] [18]

i.e.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t / T > t)}{\Delta t}, t > 0.$$

On peut aussi calculer la probabilité moyenne de défaillance sur l'intervalle  $[t; t + \Delta t]$  par :

$$\lambda_{[t; t + \Delta t]} = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t / T > t)}{\Delta t}, t > 0.$$

**Lien avec la fiabilité :**

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}, t > 0.$$

En effet, on a :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t / T > t)}{\Delta t}, t > 0,$$

D'où,

$$\begin{aligned} \lambda(t) \cdot \Delta t &\simeq P(t < T \leq t + \Delta t / T > t). \\ \Rightarrow \lambda(t) \cdot \Delta t &\simeq \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)}. \\ \Rightarrow \lambda(t) \cdot \Delta t &\simeq \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{R(t)}. \\ \Rightarrow \lambda(t) \cdot R(t) \cdot \Delta t &\simeq P(t < T \leq t + \Delta t). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lambda(t) \cdot R(t) \cdot \Delta t \simeq P(t < T \leq t + \Delta t).$$

Or,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} = f(t).$$

D'où,

$$\begin{aligned} \lambda(t) \cdot R(t) &= f(t). \\ \Rightarrow \lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)}. \end{aligned}$$

$R(t)$  est alors la solution de l'équation différentielle d'ordre 1, donnée par :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x) dx}, t > 0,$$

avec,  $R(0) = 1$ .

### La courbe en baignoire

[2] Elle représente le cycle de vie globale des composants ou d'un système, elle décrit l'évolution du taux de défaillance en fonction de temps. Le taux de défaillance passe généralement par trois phases : il est élevé au début de la vie du composant et diminue assez rapidement dans la première phase, cette phase s'appelle phase de jeunesse ou de rodage. Après, il se stabilise à une valeur basse pendant une période appelée période de vie utile, durant cette phase les défauts surviennent de manière aléatoire. À la fin de vie, il remonte lorsque les pannes s'accroissent et le composant commence à vieillir, c'est la période de vieillissement.

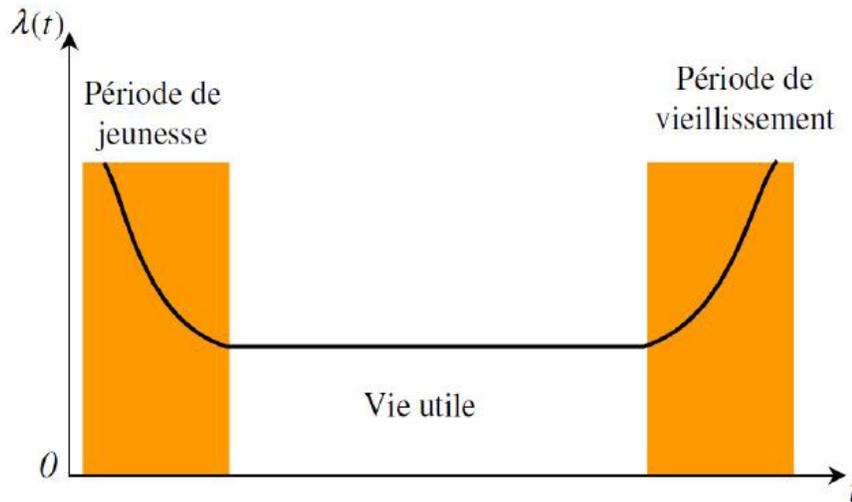


FIGURE 2.2 – La courbe en baignoire

### 2.3.3 Les temps moyens

Les indicateurs de fiabilité associés à la sûreté de fonctionnement représentent des durées moyennes : MTTF, MTTR, MUT, MDT et MTBF.

#### MTTF (Mean Time To Failure)

Représente la durée moyenne de bon fonctionnement jusqu'à la première défaillance, définie par :

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} P(T > t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt.$$

#### MTTR (Mean Time To Repair)

C'est la durée moyenne de réparation, définie par :

$$MTTR = \int_0^{\infty} (1 - M(t)) dt.$$

#### MUT (Mean Up Time)

C'est la durée moyenne de fonctionnement après réparation.

**MDT (Mean Down Time)**

C'est la durée moyenne d'indisponibilité après défaillance.

**MTBF (Mean Time Between Failure)**

C'est la durée moyenne qui sépare deux défaillances successives, définie par :[9]

$$MTBF = MUT + MDT.$$

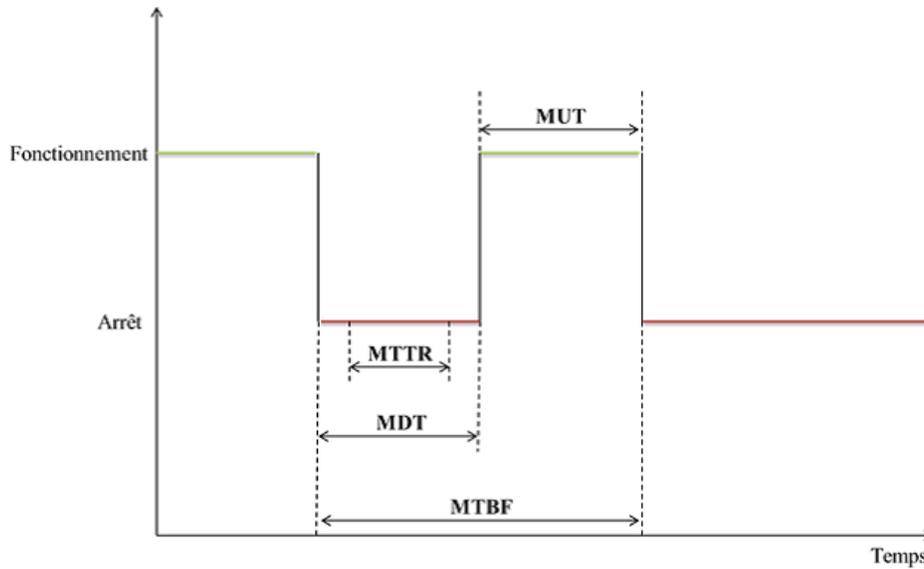


FIGURE 2.3 – Chronogramme lié à la fiabilité et à la disponibilité d'un composant.

## 2.4 Les lois de probabilité usuelles en fiabilité

Il existe plusieurs lois de fiabilité, les plus utilisées sont :

**La loi exponentielle** [5] : C'est la loi la plus couramment utilisée dans l'étude de la fiabilité des composants ayant une durée de vie utile, où le taux de défaillance est constant. Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance ou l'intervalle de temps entre deux défaillances successives. La loi exponentielle modélise les systèmes ayant une durée de vie qui ne s'améliore pas et qui ne vieillie pas pendant la période de vie utile. Une propriété importante de la loi exponentielle est l'absence de mémoire :  $P(T > t + s | T > t) = P(T > s), \forall t, s > 0$ , où  $T$  est une variable aléatoire non négative représentant la durée de vie du composant.

**La loi de Weibull** [20] : C'est une loi très utilisée en mécanique, elle caractérise le comportement du système dans les trois phases de vie : période de jeunesse, période utile et la période de vieillissement.

**La loi Log-Normale** [15] : En fiabilité, on utilise cette loi pour modéliser les défaillances par fatigue en mécanique. Elle possède deux paramètres positifs, la moyenne  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$ .

**La loi de Pareto** [8] : Cette loi s'applique à de nombreux phénomènes, en mécanique et en économie. Elle est utilisée pour modéliser la distribution de revenus supérieurs à un seuil donné, elle est caractérisée par deux paramètres strictement positifs.

**La loi de Poisson** [18] : La distribution de poisson est généralement utilisée pour évaluer les risques dans l'industrie, elle prend en compte les problèmes en temps et en espace. Elle sert à étudier des évènements rares tels que les accidents, les pannes, les défauts de fabrications, etc.

**La loi Gamma** [7] : La loi Gamma est une loi de probabilité moins répandue que les autres lois usuelles en fiabilité, vu ses domaines d'utilisation assez pointus, elle est utilisée beaucoup plus pour le calcul d'usure. Cette loi possède deux paramètres, le paramètre d'échelle  $\beta$  et le paramètre de forme  $\alpha$ .

Le tableau suivant résume les lois de probabilité citées ci-dessus.

La loi	densité $f(t)$	moyenne et variance $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$	fiabilité $R(t)$
Exponentielle $\mathcal{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda t}, t > 0$	$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$ $\mathbb{V}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$	$e^{-\lambda t}, t > 0$
Weibull $\mathcal{W}(\beta, \eta, \gamma)$	$\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}, t > \gamma$	$\mathbb{E}(T) = \gamma + \frac{\eta}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)$ $\mathbb{V}(T) = \eta^2 \left[ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]$	$\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}, t > \gamma$
log-normale $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}, t > 0$	$\mathbb{E}(T) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ $\mathbb{V} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$	$1 - \Phi\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right), t > 0$ $\phi(\cdot) = \text{f.r. } \mathcal{N}(0, 1)$
Pareto $\mathcal{Pa}(t_0, \alpha)$	$\frac{t_0}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{t_0+1}, t > 0$ si $\alpha > 0$	$\mathbb{E}(T) = \left(\frac{t_0-1}{t_0}\right) \alpha$ , si $t_0 > 1$ $\mathbb{V}(T) = \left(\frac{\alpha}{t_0-1}\right)^2 \frac{t_0}{t_0-2}$	$\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{t_0}, t \geq \alpha$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$	$\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{E}(T) = \lambda t$ $\mathbb{V}(T) = \lambda t$	$R(t) = P(0) = e^{-\lambda t}, t > 0$
Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}, t > 0$	$\mathbb{E}(T) = \frac{\alpha}{\beta}$ $\mathbb{V} = \frac{\alpha}{\beta^2}$	$\int_t^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx, t > 0$ $\alpha, \beta > 0.$

TABLE 2.1 – Les lois de probabilités usuelles en fiabilité

## 2.5 Les modèles stress-strength (St-St)

### 2.5.1 Historique

De nombreuses recherches ont été effectuées ces dernières années pour estimer et fournir des limites de confiance pour la fiabilité des composants en utilisant les arguments possibles d'un modèle physique de défaillance définie.

Plusieurs applications dans différents domaines scientifiques tels que la statistique, l'ingénierie, les structures et l'aviation tirent avantage en appliquant le modèle stress-strength (contrainte-résistance). En 1956, Birnbaum a été le premier à considérer le modèle stress-strength, il a trouvé un nombre croissant d'applications dans le génie civil. Après cela, Church et Harris en 1970 ont introduit l'estimation de la fiabilité dans le cas des variables aléatoires distribuées selon la loi normale.

À l'origine, les modèles stress-strength ne sont pas nés d'une configuration paramétrique mais plutôt non paramétrique dans les travaux novateurs de Wilcoxon (1945), Mann et Whitney (1947). L'objectif principal de ces recherches était de comparer deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  qui décrivent les résultats de deux traitements.[16]

Ils ont introduit la statistique qui est basée sur les rangs des observations sur  $X$  et  $Y$  dans l'échantillon conjoint. Ils ont également souligné le lien entre l'hypothèse  $F_X \equiv F_Y$  et  $\mathbb{P}(X < Y) = 1/2$ .

La première tentative d'étudier  $\mathbb{P}(X < Y)$  sous certaines hypothèses paramétriques sur  $X$  et  $Y$  a été entreprise par Owen et al (1964) qui ont construit des limites de confiance pour  $\mathbb{P}(X < Y)$  dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires dépendantes ou indépendantes normalement distribuées.

Dans les années soixante, très peu de choses ont été faites pour étudier une version paramétrique du modèle stress-strength, cependant, dans les années soixante-dix, l'étude du sujet a pris de l'ampleur. À la fin des années soixante-dix, l'estimation de  $\mathbb{P}(X < Y)$  a été effectuée pour les principales distributions telles que l'exponentielle (Kelley et al (1976), Tong (1974)), normale (Church et Harris (1970), Downton (1973), Woodward et Kelley (1977)), Pareto (Beg et Singh (1979)) et les familles exponentielles (Tong (1977)). De même, des progrès significatifs ont été réalisés dans l'estimation de Bayes de  $\mathbb{P}(X < Y)$  pour les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  distribuées selon la loi exponentielle ou la loi normale, ont été réalisées par Enis et Geisser (1971) et Geisser (1971).

À la fin des années quatre-vingt, des estimateurs de  $\mathbb{P}(X < Y)$  ont été obtenus pour la majorité des familles de distribution courantes pour les situations où  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, voir par exemple Awad et Gharraf (1986), Beg (1980 *a, b, c*), Constantine et al (1986), Ismail et al (1986), Iwase (1987), Reiser et Guttman (1986), Voinov (1984).

Il est devenu possible d'étudier les variables aléatoires exponentielles dépendantes avec différents types de dépendance. Des estimateurs de  $\mathbb{P}(X < Y)$  pour un vecteur aléatoire exponentiel à deux variables  $(X, Y)$  ont été dérivés par Abu-Salih et Shamseldin (1988), Awad et al. (1981), Klein et Basu (1985), entre autres. Pensky (1982) a construit des estimateurs pour  $\mathbb{P}(A'X + C > 0)$  pour un vecteur aléatoire  $X$  distribué selon la loi normale avec une matrice de variance-covariance générale.

Pour aller plus loin, Bilikam (1985), a proposé un estimateur de  $\mathbb{P}(A'X + C > 0)$  dépendant du temps. Bilikam (1985) a proposé un modèle dépendant du temps pour  $X$  et  $Y$ , et Raghava Char et al (1984) ont étudié les modèles de Markov de contrainte et de résistance pour la fiabilité des systèmes. D'autres avancées importantes des années quatre-vingt ont été les recherches d'extensions des modèles stress-strength "standard" tels que les modèles de stress-strength avec des données catégorisées.

Une autre réalisation majeure a été l'application de la théorie à une variété de problèmes du monde réel (voir par exemple Guttman et al (1988), Johnstone (1983), Halperin et al. (1987), (1989), Simonoff et al (1986), Ury et Wiggins (1979)). Certains des travaux mentionnés ci-dessus ont été résumés dans l'article de synthèse de Johnson (1988). Dans les années quatre-vingt-dix et 2000 – 2002, nous avons assisté à de nouveaux développements des modèles de stress-strength. Des probabilités plus diverses telles que  $\mathbb{P}(X_i < X_k)$  et  $\mathbb{P}(A_i X_i + A'_k X_k + C > 0)$  où  $X_i, X_k$  sont des vecteurs normaux indépendants ont été étudiées (voir par exemple Ivshin (1998), Ivshin andnLumelskii (1994), Hayter and Liu (1996), Miwa et al. (2000)), et certaines nouvelles distributions moins familières ont été considérées telles que le type  $X$  de Burr (Ahmad et al (1997), Surlis et Padgett (1998, 2000)), les mélanges de gaussiennes inverses (Akman et al (1999)), skew-normal (Azzalini et Chiogna (2002), Gupta et Brown (2001)), exponentiel multivarié de Wienman (Cramer et Kamps (1997 *a*), Cramer (2001)), Pareto bivarié (Hanagal (1997 *a*)), elliptique (Pensky (2002)), et gamma généralisé (Pham et Almhana (1995), Pensky et Takashima (2002)). Le domaine semble

avoir atteint sa maturité.[16]

### 2.5.2 Description des modèles stress-strength

Les modèles stress-strength prennent en compte le fait que le stress (contrainte) et le strength (résistance) peuvent être modélisés par des variables aléatoires. Dans l'analyse stress-strength le terme stress fait référence à la charge qui produit la défaillance, le strength fait référence à la capacité du composant à supporter la charge. Si le stress (contrainte) est supérieur au strength (résistance) du composant une défaillance se produit. Donc le modèle stress-strength considère qu'un composant devient défectueux dès que l'intensité de stress (contrainte) au quel il est soumis dépasse sa capacité à résister[4].

### 2.5.3 Modélisation de la fiabilité

– Dans le cas continu :

Soit  $X$  le strength d'un système soumis à un stress  $Y$ ,  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires continues de densité de probabilité  $f$  et  $g$  respectivement et de fonctions de répartition  $F$  et  $G$  respectivement.  $h(x, y)$  est la densité de probabilité conjointe de  $X$  et de  $Y$ . La fiabilité du système est le paramètre  $R$ , défini par[4] :

– Si  $X$  et  $Y$  sont dépendentes :

$$R = \mathbb{P}(Y < X) = \int_0^{+\infty} \int_0^x h(x, y) dy dx,$$

– Si  $X$  et  $Y$  sont indépendentes :  $h(x, y) = f(x)g(y)$ , dans ce cas la fiabilité  $R$  est donnée par :

$$R = \mathbb{P}(Y < X) = \int_0^{+\infty} \int_0^x f(x)g(y) dy dx.$$

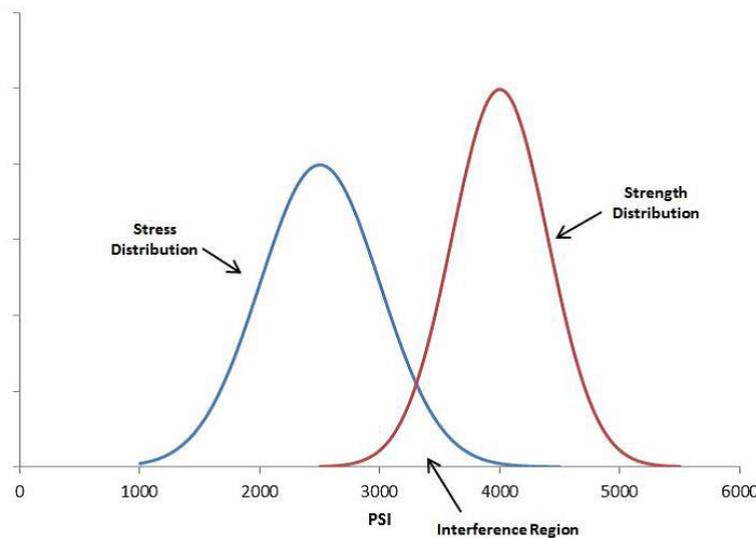


FIGURE 2.4 – Représentation de modèle stress-strength

– Dans le cas discret :

Dans l'ingénierie de la fiabilité des structures, on rencontre souvent des situations où le strength d'une structure est influencée par le stress, mais le stress est dépendant de strength.

Pour évaluer la fiabilité d'une structure dans tels cas, le stress d'une structure est proposé comme étant une variable aléatoire discrète et le strength dépendant de stress qui est aussi représenté par une variable aléatoire discrète.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes représentant le strength et le stress d'un système respectivement, de lois de probabilité définies par les probabilité de masse suivantes :

$$P_x = \mathbb{P}(X = x), x \in \mathcal{X}. \quad (2.1)$$

$$P_y = \mathbb{P}(Y = y), y \in \mathcal{Y}. \quad (2.2)$$

Conidérons un échantillon de taille  $n$  issu de  $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ , et soit  $P_x$  la loi de probabilité de l'échantillon et un échantillon de taille  $m$  issu de  $Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  et soit  $P_y$  la loi de probabilité de l'échantillon. On pose  $G_X$  et  $G_Y$  les fonctions génératrice de  $\bar{X}$  et de  $Y$  respectivement définies par :

$$G_X(z) = \sum_{i=1}^n P_{x_i} z^{x_i}. \quad (2.3)$$

$$G_Y(z) = \sum_{i=1}^m P_{y_i} z^{y_i}. \quad (2.4)$$

– **Si  $X$  et  $Y$  sont dépendentes :**

Soit  $P_{y|X=x_i}$  la loi de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire discrète  $y|X = x_i$  et de fonction génératrice  $G_{Y|X=x_i}$  suivante :[14]

$$G_{Y|X=x_i}(Z) = \sum_{j=1}^m P_{y|X=x_i} Z^{y_j}. \quad (2.5)$$

La loi conjointe  $S(X, Y)$  de strength  $X$  et de stress  $Y$  dont le stress  $Y$  dépend de strength  $X$  est définie par :

$$S(X, Y) = X - Y. \quad (2.6)$$

La fonction génératrice de la loi conjointe  $S(X, Y)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} G_S(z) &= \otimes (G_x(z), G_{y|X=x_i}(z)) \\ &= \otimes \left( \sum_{i=1}^n P_{x_i} z^{x_i}, \sum_{j=1}^m P_{y|X=x_i} z^{y_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n P_{x_i} \sum_{j=1}^m P_{Y|X=x_i} z^{S(x_i, y_j)} \\ &= \sum_{i=1}^k P_i Z^{S_i} \end{aligned}$$

Où,  $\otimes$  est un opérateur de composition sur la fonction génératrice d'une variable aléatoire. La fiabilité  $R$  est définie tele que la probabilité de strength  $X$  est supérieure au stress  $Y$ , alors :[14]

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{P}(X > Y) \\ &= \mathbb{P}(X - Y > 0) \\ &= \mathbb{P}(S(X, Y) > 0) \\ &= \sum_{i=1}^k P_i 1_{S_i} \end{aligned}$$

- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendentes :  $S(X, Y) = P_x P_y$  alors, La fonction génératrice de la loi conjointe  $S(X, Y)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 G_S(z) &= \otimes (G_x(z), G_Y(z)) \\
 &= \otimes \left( \sum_{i=1}^n P_{x_i} z^{x_i}, \sum_{j=1}^m P_{y_j} z^{y_j} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n P_{x_i} \sum_{j=1}^m P_{y_j} z^{S(x_i, y_j)} \\
 &= \sum_{i=1}^k P_i Z^{S_i}
 \end{aligned}$$

La fiabilité  $R$  est définie tele que la probabilité de strength  $X$  est supérieure au stress  $Y$ , alors :

$$\begin{aligned}
 R &= \mathbb{P}(X > Y) \\
 &= \mathbb{P}(X - Y > 0) \\
 &= \mathbb{P}(S(X, Y) > 0) \\
 &= \sum_{i=1}^k P_i 1_{S_i}
 \end{aligned}$$

## 2.6 Les lois de probabilité utilisés dans les modèles stress-strength

### Les lois exponentielles

On considère les variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  de lois exponentielles de paramètres  $\alpha, \beta$  respectivement, de densité de probabilité  $f, g$  et de fonction de répartition  $F, G$ , respectivement.  $X$  représente le strength d'un système (ou composant) soumis au stress  $Y$  [4]. Les densités de probabilités pour  $\alpha, \beta > 0$  sont données par :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x > 0,$$

$$g(y) = \beta e^{-\beta y}, y > 0.$$

les fonctions de répartition données par :

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, x > 0.$$

$$G(y) = 1 - e^{-\beta y}, y > 0.$$

La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 R(\alpha, \beta) &= \mathbb{P}(X > Y) \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^x f(x)g(y)dydx \\
 &= \int_0^{+\infty} f(x)G(x)dx \\
 &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha x}) \beta e^{-\beta x} dx \\
 &= \beta \int_0^{+\infty} (e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}) dx \\
 &= \beta \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx - \beta \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)x} dx \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.
 \end{aligned}$$

### Les distributions de Lindley

La distribution de Lindley a été proposée par Lindley (1958) dans le contexte des statistiques bayésiennes.  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de Lindley avec les paramètres  $\alpha, \beta$  respectivement, de densités de probabilité et fonctions de répartition données respectivement par [3] : pour  $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} (1 + x)e^{-\alpha x}, x > 0,$$

$$g(y) = \frac{\beta^2}{1 + \beta} (1 + y)e^{-\beta y}, y > 0,$$

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha}x\right) e^{-\alpha x},$$

$$G(y) = 1 - \left(1 + \frac{\beta}{1 + \beta}y\right) e^{-\beta y}, y > 0,$$

La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 R &= \mathbb{P}(X > Y) \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^x f(x)g(y)dydx \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^x \frac{\alpha^2}{1+\alpha} (1+x)e^{-\alpha x} \frac{\beta^2}{1+\beta} (1+y)e^{-\beta y} dydx \\
 &= \frac{\alpha^2}{1+\alpha} \left[ \int_0^{+\infty} (1+x)e^{-\alpha x} \int_0^x (1+y)e^{-\beta y} dy \right] dx \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \left[ (1+x) \left( \frac{\beta+1}{\beta} + x \right) e^{-(\alpha+\beta)x} \right] dx \\
 &= \alpha^2 \left[ \frac{(\beta+1)(\alpha+\beta)^2 + \beta(\alpha+\beta) + (\beta+1)(\alpha+\beta) + 2\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)^3} \right].
 \end{aligned}$$

### Les distributions de Pareto

La distribution de Pareto est assez populaire pour décrire la distribution de la richesse dans une population donnée. Récemment, la distribution de Pareto généralisée à été considérée par Rezaei et al (2010)[23].

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de Pareto avec les paramètres  $(\alpha, \beta)$  et  $(\alpha, \gamma)$  respectivement. de densités de probabilités  $f, g$  et fonctions de répartition  $F, G$  données respectivement par : pour  $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, x \geq \alpha,$$

$$g(y) = \frac{\gamma\alpha^\gamma}{y^{\gamma+1}}, y \geq \alpha,$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta,$$

$$G(y) = 1 - \left(\frac{\alpha}{y}\right)^\gamma,$$

La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 R &= \mathbb{P}(X > Y) \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^x f(x)g(y)dydx \\
 &= \int_{\alpha}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}} \frac{\gamma\alpha^{\gamma}}{y^{\gamma+1}} dydx \\
 &= \beta\alpha^{\beta}\gamma\alpha^{\gamma} \left[ \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}} \left( \int_x^{+\infty} \frac{1}{y^{\gamma+1}} dy \right) \right] dx \\
 &= \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\gamma x^{\beta+1}} x^{-\gamma} dx \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta+\gamma+1}} dx \\
 &= \frac{\beta}{\beta + \gamma}.
 \end{aligned}$$

### Les distributions Log-Normales

La distribution log-normale a été largement appliquée dans de nombreux aspects différents des sciences de la vie. Elle est définie comme la distribution d'une variable aléatoire dont le logarithme est normale distribué[4].

La distribution log-normale dans le modèle stress-strength a des applications dans plusieurs domaines de l'ingénierie. A l'origine, la distribution normale a été utilisée dans les modèles stress-strength d'ingénierie, mais elle a été de plus en plus remplacée par le modèle de distribution log-normale grâce à ces propriétés telles que la positivité de ces valeurs et l'asymétrie positive de sa forme.

Soit  $X$  le strength d'un système et  $Y$  le stress appliqué sur ce système.  $X \sim \ln(\mu_x, \sigma_x)$ ,  $Y \sim \ln(\mu_y, \sigma_y)$  alors,  $\ln X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$  et  $\ln Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y)$ .

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{x\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \\
 f(y) &= \frac{1}{y\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y)-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \\
 F(x) &= \Phi\left(\frac{\log(x)-\mu_x}{\sigma_x}\right); F(y) = \Phi\left(\frac{\log(y)-\mu_y}{\sigma_y}\right)
 \end{aligned}$$

Où,

$$\begin{aligned}
 \mu_x &= e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}} \\
 \sigma_x^2 &= e^{(2\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2})} e^{(\sigma_x^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

La fiabilité  $R(t)$  est donnée par :

$$R(t) = \Phi\left(\frac{\mu_x - \mu_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}\right), t > 0$$

Où  $\phi$  est la fonction de répartition centrée et réduite.

## Les distributions géométriques

La distribution géométrique est l'une des distributions discrètes les plus importantes pour des distributions discrètes. Elle concerne la modélisation du nombre d'échecs jusqu'au premier succès[22].

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques avec les paramètres  $p_1$  et  $p_2$ , respectivement. La loi de probabilité de masse et la fonction de répartition de  $X$  et  $Y$  sont données respectivement par :

$$\mathbb{P}(X = x) = (1 - p_1)^{x-1}p_1, x \in \mathbb{N}^*; \mathbb{P}(Y = y) = (1 - p_2)^{y-1}p_2, y \in \mathbb{N}^*$$

$$F(x) = 1 - (1 - p_1)^x, x \in \mathbb{N}^*; F(y) = 1 - (1 - p_2)^y, y \in \mathbb{N}^*$$

Où  $p_1, p_2 \in ]0, 1[$  sont les probabilités de succès. La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{P}(X > Y) \\ &= \sum_{x=1}^{+\infty} \sum_{y=1}^x (1 - p_1)^{x-1} p_1 (1 - p_2)^{y-1} p_2 \\ &= p_1 p_2 \sum_{x=1}^{+\infty} (1 - p_1)^{x-1} \left[ \sum_{y=1}^x (1 - p_2)^{y-1} \right] \\ &= \frac{p_1}{1 - p_1} \sum_{x=1}^{+\infty} [(1 - p_1)^x - ((1 - p_1)(1 - p_2))^x] \\ &= \frac{p_1}{1 - p_1} \frac{1 - p_1}{p_1} - \frac{p_1}{1 - p_1} \frac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)} \\ &= 1 - \frac{p_1(1 - p_2)}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)} \\ &= \frac{1 - (1 - p_2)}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)} \\ &= \frac{p_2}{p_2 + p_1 - p_1 p_2}. \end{aligned}$$

## Conclusion

Les modèles stress-strength jouent un rôle très important dans l'analyse de la fiabilité. Ces modèles ont été largement utilisés comme évaluation de divers domaines. Un rappel sur la théorie de la fiabilité a été consacré dans ce chapitre ainsi que les différents modèles stress-strength qui sont utilisés en fiabilité.

## Chapitre 3

---

# Estimation dans les modèles stress-strength

---

### Introduction

Il existe de nombreuses méthodes d'estimation et souvent les méthodes analytiques sont les plus précises parmi les autres méthodes. Nous allons étudier dans cette partie quelques méthodes d'estimation de paramètre  $R$  représentant la fiabilité dans le modèle Stress-strength, définie par  $R = \mathbb{P}(X > Y)$ , où  $X$  est le strength et  $Y$  le stress. Il s'agit de la méthode MLE (Maximum Likelihood Estimator), UMVUE (Uniform Minimum Variance Unbiased Estimator) et la méthode bayésienne.

### 3.1 L'estimation classique de la fiabilité dans les modèles stress-strength

#### 3.1.1 L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance (MLE)

L'estimation de maximum de vraisemblance est l'une des méthodes d'estimation classique les plus importantes car elle possède une bonne caractéristique qui la distingue des autres méthodes à savoir, la propriété d'invariance.[16]

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires,  $X$  représente le stress appliqué sur un composant ou un système et  $Y$  le strength associé et considérant les échantillons de taille  $n$  et  $m$  issus de  $X$  et  $Y$  respectivement.

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } \underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m).$$

- **Si  $X$  et  $Y$  sont dépendants :**  $f(x, y|\theta)$  étant la fonction densité de probabilité, avec  $\theta$  est un paramètre inconnu à valeurs scalaire ou vectorielle à estimer, le nombre d'observations pour  $X$  et  $Y$  n'est pas nécessairement le même. La vraisemblance est donnée par :

$$L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta) = \prod_{j=1}^n f(X_j, Y_j|\theta). \text{ avec, } n = m$$

- **Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants :** Soit  $f(x|\theta)$ ,  $g(y|\theta)$  les fonctions densité de probabilité et  $F(x|\theta)$ ,  $G(x|\theta)$  les fonctions de répartition de  $X$  et de  $Y$ , respectivement de même paramètre inconnu  $\theta$ , à estimer. La densité de probabilité conjointe est donnée par :

$$L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \prod_{j=1}^m g(y_j|\theta).$$

**Théorème 3.1.1.** *Si  $\hat{\theta}$  est le MLE de  $\theta$ , alors pour toute fonction  $\varphi(\theta)$ , le MLE de  $\varphi(\theta)$  est  $\varphi(\hat{\theta})$  (voir Casella et Berger (1990), page 294).*

### La construction du MLE de $R$

Pour construire le maximum de vraisemblance de la fiabilité  $R$  on doit suivre les trois étapes suivantes :[16]

1. écrire la fiabilité  $R = R(\theta) = \mathbb{P}(X < Y)$  en fonction de  $\theta$ .
2. Construction du  $\hat{\theta}_{MLE}$  du paramètre  $\theta$ .
3. Calcul de  $\hat{R}_{MLE} = R(\hat{\theta})$  de la fiabilité  $R$ .

À partir de définition, la fiabilité  $R(\theta)$  peut être calculée par :

$$R(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y|\theta) 1_{(x < y)} dx dy.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants, la fiabilité  $R(\theta)$  peut être écrite comme suit :

$$R(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z|\theta)g(z|\theta)dz = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - G(z|\theta))f(z|\theta)dz.$$

Ayant calculé et dérivé l'expression de  $R(\theta)$ , la construction du MLE de  $\theta$  se fait par la maximisation de  $L(\theta|\underline{X}, \underline{Y})$  est équivalent à la maximisation du logarithme de la vraisemblance  $\ln L(\theta|\underline{X}, \underline{Y})$ , ie,

$$\ln L(\hat{\theta}|\underline{X}, \underline{Y}) = \max_{\theta} \ln L(\theta|\underline{X}, \underline{Y}).$$

Où :

$$L(\theta|\underline{X}, \underline{Y}) = \prod_{j=1}^n f(X_j, Y_j|\theta).$$

À partir de théorème (3.1.1) et en raison de la propriété de l'invariance des estimateurs du maximum de vraisemblance (EMV) l'estimateur de  $R$  est :

$$R_{MLE}^{\hat{}} = R(\hat{\theta}).$$

### 3.1.2 L'estimation non biaisé (UMVUE)

L'estimation du maximum de vraisemblance (MLE) est sans doute la procédure la plus populaire pour l'estimation de la fiabilité  $R = \mathbb{P}(X < Y)$ . Elle est universelle et permet d'obtenir un estimateur de  $R$  pour pratiquement n'importe quelle famille de distribution. Cependant, les estimateurs dérivés de la méthode MLE peuvent être biaisés. Ce qui n'est pas souhaitable, surtout si la taille de l'échantillon est petite. La solution est de construire un estimateur sans biais de  $R$ . Nous allons voir dans ce qui suit les concepts importants pour l'estimation non biaisée de  $R$ . Pour les démonstrations voir [16]

**Definition 3.1.1. La statistique exhaustive.** On dit qu'une statistique  $T = T(\underline{X}, \underline{Y})$  est exhaustive ou encours suffisante si la fonction de densité de probabilité conditionnelle de l'échantillon étant donnée la valeur  $T$  ne dépend pas du paramètre inconnu  $\theta$ . Si  $T$  est une statistique suffisante pour  $\theta$ , alors  $T$  capture toutes les informations sur le paramètre inconnu  $\theta$  que l'échantillon  $(\underline{X}, \underline{Y})$  contient.

**Théorème 3.1.2. Théorème de factorisation.** La statistique  $T$  est une statistique suffisante pour  $f(x, y|\theta)$  si et seulement s'il existe des fonctions  $g(\cdot|\theta)$  et  $h(\underline{X}, \underline{Y})$  pour tout  $\theta$  de  $\Theta$  possible et tous les points d'échantillon  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  telle que la fonction de densité conjointe de  $(\underline{X}, \underline{Y})$  s'écrit sous la forme suivante :

$$L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta) = g(T(\underline{X}, \underline{Y})|\theta)h(\underline{X}, \underline{Y}).$$

**Definition 3.1.2.** Soit  $\varphi(\theta)$  une fonction quelconque du paramètre  $\theta$ . L'estimateur non biaisé de  $\varphi(\theta)$  notée,  $V^*(\underline{X}, \underline{Y})$  s'appelle estimateur sans biais à variance minimale uniforme (Uniform Minimum Variance Unbiased Estimator), si pour n'importe quelle estimateur  $V(\underline{X}, \underline{Y})$  satisfaisant  $\mathbb{E}(V(\underline{X}, \underline{Y})) < \infty$  tel que :

$$Var(V^*(\underline{X}, \underline{Y})) < Var(V(\underline{X}, \underline{Y})), \forall \theta \in \Theta.$$

L'existence de l'UMVUE de  $R$  est basé sur le théorème suivant :

**Théorème 3.1.3. (Cramèr-Rao-Blackwell).** Si  $V(\underline{X}, \underline{Y})$  est un estimateur non biaisé de  $\varphi(\theta)$  et  $T$  est une statistique suffisante de  $\varphi(\theta)$ , alors  $\mathbb{E}(V(\underline{X}, \underline{Y})|T)$  est le UMVUE de  $\varphi(\theta)$ .

**Exemple d'estimateurs :**

Parmi les estimateurs non biaisés de la fiabilité  $R = \mathbb{P}(X < Y)$  basée sur l'échantillon  $(\underline{X}, \underline{Y})$ , on peut citer : voir [16]

$$V_1(\underline{X}, \underline{Y}) = 1_{X_1 < Y_1}, \quad V_2(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{1}{\min(n_1, n_2)} \sum_{i=1}^{\min(n_1, n_2)} 1_{X_i < Y_i}.$$

### La construction des estimateurs UMVUE

L'estimateur sans biais à variance minimale uniforme de la fiabilité  $R$  peut être obtenu comme  $\hat{R} = \mathbb{E}[1_{X_1 < Y_1}|T]$ , car  $V_1(\underline{X}, \underline{Y}) = 1_{X_1 < Y_1}$  est l'estimateur sans biais le plus simple.[16]

$$\hat{R} = \int 1_{X_1 < Y_1} \mathbb{P}(X_1, Y_1|T) dX_1 dY_1.$$

Où  $\mathbb{P}(X_1, Y_1|T)$  est la fonction densité de probabilité conditionnelle de  $(X_1, Y_1)$  sachant  $T$ , où  $T$  est une statistique exhaustive .

**Théorème 3.1.4.** Soit  $\theta_1 \in \Theta$  une valeur arbitraire de  $\theta$ .  $g(T|\theta_1)$  la fonction densité de probabilité de  $T(\underline{X}, \underline{Y})$  et  $h_{\theta_1}(T|\underline{x}, \underline{y})$  la densité conditionnelle de  $T$  sachant  $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k; Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_k = y_k)$ . Le UMVUE de  $L(\underline{x}, \underline{y}, \theta)$  est de la forme suivante :

$$\hat{L}(\underline{x}, \underline{y}) = \prod_{j=1}^k f(x_j, y_j|\theta_1) \frac{h_{\theta_1}(T|\underline{x}, \underline{y})}{g(T|\theta_1)}. \quad (3.1)$$

**Théorème 3.1.5.** Le UMVUE de  $R^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  est de la forme suivante :

$$\hat{R}^k = \int \hat{L}(\underline{x}, \underline{y}) \prod_{j=1}^k [1_{(x_j < y_j)}] dy_j dx_j. \quad (3.2)$$

**Théorème 3.1.6.** Le UMVUE  $\widehat{var}(\hat{R})$  de  $var(\hat{R})$  est donné par :

$$\widehat{var}(\hat{R}) = (\hat{R})^2 - \hat{R}^2. \quad (3.3)$$

Où,

$$\hat{R} = \int \int 1_{(x < y)} \hat{L}(x, y) dy dx. \quad (3.4)$$

$$\widehat{R}^2 = \int \int 1_{(x_1 < y_1)} 1_{(x_2 < y_2)} \hat{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2. \quad (3.5)$$

## 3.2 L'estimation bayésienne de la fiabilité dans les modèles stress-strength

### 3.2.1 La forme de l'estimateur $\hat{R}$

L'estimation bayésienne traite le paramètre  $\theta$  comme une variable aléatoire à laquelle on associe une loi de probabilité dite loi a priori  $\pi(\theta)$ . Cette loi de probabilité est basée sur certaines connaissances disponibles dont dispose le staticien et doit être formulée avant l'obtention des données.[16]

**Definition 3.2.1.** Soit  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n), \underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$  un échantillon et soit  $(X, Y) \sim f(x, y|\theta)$ . La loi a posteriori est donnée par :

$$\pi(\theta|\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta)\pi(\theta)}{m(\underline{X}, \underline{Y})}.$$

Où  $m(\underline{X}, \underline{Y})$  est la loi marginale de  $\underline{X}$  et de  $\underline{Y}$  donnée par :

$$m(\underline{X}, \underline{Y}) = \int_{\Theta} L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

et  $L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta)$  définie par :

$$L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta) = \prod_{j=1}^{n_1} f(X_j, Y_j|\theta).$$

Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont indépendants :

$$L(\underline{X}, \underline{Y}|\theta) = f_{\underline{X}}(x|\theta)f_{\underline{Y}}(y|\theta).$$

L'estimateur de Bayes  $R_{Bayes}$  de la fiabilité  $R = \mathbb{P}(X < Y)$  peut être obtenu comme la moyenne de la loi a posteriori  $\pi(\theta|\underline{X}, \underline{Y})$

$$R_{Bayes} = \int_{\Theta} R(\theta)\pi(\theta|\underline{X}, \underline{Y})d\theta. \quad (3.6)$$

Où,

$$R(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y|\theta)1_{(x < y)}dxdy.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants alors :

$$R(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z|\theta)f_y(z|\theta)dz = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_Y(z|\theta))f_x(z|\theta)dz.$$

**Remarque :**

Une autre façon de déterminer l'estimateur  $R_{Bayes}$ , est de déterminer (si possible) la loi a posteriori de  $R$  d'abord, puis de trouver l'estimateur  $R$  comme espérance par rapport à la loi a posteriori. La loi a posteriori de  $R$   $\pi_R(R|\underline{X}, \underline{Y})$  peut être obtenu en utilisant une transformation de la variable aléatoire :  $F : (\theta) \rightarrow (R, \theta_R)$ , avec la fonction inverse  $Q = F^{-1}$ . La loi a posteriori de  $(R, \theta_R)$  est donnée par  $\pi(Q(R, \theta_R))|J_Q(R, \theta_R)|$ , Où  $|J_Q(R, \theta_R)|$  est le Jacobien de la transformation  $Q$ . Alors,

$$\pi_R(R|\underline{X}, \underline{Y}) = \int \pi(Q(R, \theta_R))|J_Q(R, \theta_R)|d\theta. \quad (3.7)$$

Le Jacobien  $|J_Q(R, \theta_R)|$  est la valeur absolue de déterminant de la matrice des dérivés partielle de  $\theta$  par rapport à  $R$  et  $\theta_R$  respectivement.

L'estimateur de Bayes est donné par :

$$R_{Bayes} = \int R\pi_R(R|\underline{X}, \underline{Y})dR. \quad (3.8)$$

Cependant d'autres estimateurs de Bayes tels que la median de  $\pi_R(R|\underline{X}, \underline{Y})$ , la valeur du maximum a posteriori de  $R$  peuvent être utilisés.

### 3.2.2 L'inférence de la fiabilité de quelques modèles

#### La distribution exponentielle

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de loi exponentielle avec les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  respectivement. La densité de probabilité et la fonction de répartition de  $X$  et  $Y$  respectivement, sont données par :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \text{ avec, } x > 0, \alpha > 0.$$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \text{ avec, } x > 0, \alpha > 0.$$

et

$$g(y) = \beta e^{-\beta y} \text{ avec, } y > 0, \beta > 0.$$

$$G(y) = 1 - e^{-\beta y} \text{ avec, } y > 0, \beta > 0.$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres inconnus. La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta) &= \mathbb{P}(X > Y) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^x f(x)g(y)dydx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)G(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha x}) \beta e^{-\beta x} dx \\ &= \beta \int_0^{+\infty} (e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}) dx \\ &= \beta \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx - \beta \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

#### L'estimation MLE de $R$ :

Pour obtenir le *MLE* de  $R$  on doit d'abord obtenir le *MLE* des deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . [16]  
On utilisant les fonctions de vraisemblance de la loi conjointe de  $X$  et de  $Y$  on aura :

$$L(\alpha, \beta; \underline{x}, \underline{y}) = \alpha^n \beta^m e^{-\alpha \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\beta \sum_{i=1}^m y_i}. \quad (3.9)$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\ln L(\alpha, \beta; \underline{x}, \underline{y}) = n \ln \alpha + m \ln \beta - \alpha \sum_{i=1}^n x_i - \beta \sum_{i=1}^m y_i.$$

Par la résolution des équations suivantes :

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \underline{x}, \underline{y})}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \underline{x}, \underline{y})}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta} - \sum_{i=1}^m y_i = 0.$$

Le MLE de  $\alpha$  et  $\beta$  est défini par :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i.$$

D'après la propriété de l'invariance des estimateurs du maximum de vraisemblance *MLE* la fiabilité  $R_{1_{MLE}}$  a la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_{MLE} &= \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + \hat{\beta}} \\ &= \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \bar{Y}} \end{aligned}$$

**L'estimation UMVUE de  $R$  :**

Pour obtenir le UMVUE de  $R$ , on doit d'abord déterminer  $\hat{L}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$ ,  $k = 1, 2$ . La fonction de vraisemblance est donnée par , d'après le théorème de factorisation (3.1.2), les statistiques  $T_X = \sum_{j=1}^n X_j$  et  $T_Y = \sum_{j=1}^m Y_j$  sont suffisantes pour  $X$  et  $Y$ . On détermine d'abord  $\hat{L}(x_1, \dots, x_k)$  et on obtiendra après  $\hat{L}(y_1, \dots, y_k)$  en remplaçant  $x$  par  $y$  et  $n$  par  $m$  dans l'expression de  $\hat{L}(x_1, \dots, x_k)$ .

On pose  $\theta_1 = \alpha = 1$ , on a  $T_X$  est la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle alors,  $T_X$  suit la loi Gumma  $(n, 1)$ , i.e.  $g(T_X|1) = \frac{T_X^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-T_X}$ . [16]

Puisque  $X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k$  on peut écrire  $T_X$  sous la forme suivante :  $T_X = \sum_{j=1}^k x_j + \sum_{j=k+1}^n X_j$

donc  $T_X - \sum_{j=1}^k x_j$  est la somme de  $n - k$  variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle.

alors,  $T_X - \sum_{j=1}^k x_j$  suit une Gumma  $(n - k, 1)$  et

$$g_\alpha(T_X|X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{\left(T_X - \sum_{j=1}^k x_j\right)^{n-k-1}}{\Gamma(n-k)} e^{-T_X + \sum_{j=1}^k x_j} 1_{\left(T_X - \sum_{j=1}^k x_j\right) > 0}.$$

En substituant  $g(T_X|1)$  et  $g_\alpha(T_X|X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)$  dans l'expression de  $\hat{L}(x_1, \dots, x_k)$  on aura :

$$\hat{L}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\Gamma(n) \left(n\bar{X} - \sum_{j=1}^k x_j\right)^{n-k-1}}{\Gamma(n-k)n^{n-1}\bar{X}^{n-1}} 1_{\left(\sum_{j=1}^k x_j \leq n\bar{X}\right)}.$$

de la même façon on obtiendra  $\hat{L}(y_1, \dots, y_k)$ , le UMVUE de  $R$  est donnée par :

$$\hat{R} = \frac{(n-1)(m-1)}{nm\bar{X}^{n-1}\bar{Y}^{m-1}} \int \int_W \left(\bar{X} - \frac{x}{n}\right)^{n-2} \left(\bar{Y} - \frac{y}{m}\right)^{m-2} dydx.$$

Où,

$$W = \{ (x, y) : 0 < x < n\bar{X}, 0 < y < m\bar{Y}, x < y \}.$$

Puisque  $W = \{ (x, y) : x < y < m\bar{Y}, 0 < x < \min(n\bar{X}, m\bar{Y}) \}$  et  $\int_x^{m\bar{Y}} (\bar{Y} - \frac{y}{m})^{m-2} dy = \frac{m(\bar{Y})^{m-1}}{m-1} \left(1 - \frac{x}{m\bar{Y}}\right)^{m-1}$ , et après substitution dans  $\hat{R}$  on obtiendra :

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-i-1)\Gamma(m+i+1)} \left(\frac{m\bar{Y}}{n\bar{X}}\right)^{i+1}, \text{ si } m\bar{Y} < n\bar{X}.$$

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+i)\Gamma(m-i)} \left(\frac{n\bar{X}}{m\bar{Y}}\right)^i, \text{ si } m\bar{Y} > n\bar{X}.$$

**L'estimation bayésienne de  $R$  :**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres  $\alpha, \beta > 0$  et de densités  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ,  $g(y) = \beta e^{-\beta y}$  respectivement.

On utilisant la loi a priori conjuguée naturelle gamma pour les variables aléatoires  $\alpha$  et  $\beta$  avec les paramètres  $\mu, \gamma$  et  $\nu, \lambda$  respectivement, de sorte que :

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \alpha^{\mu-1} e^{-\gamma\alpha} \beta^{\nu-1} e^{-\lambda\beta}, \text{ avec, } \mu, \gamma, \nu, \lambda > 0.$$

On appliquant la formule de Bayes pour obtenir la loi a posteriori et on aura :

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta | \underline{X}, \underline{Y}) &\propto f(\underline{X}, \underline{Y} | \alpha, \beta) \pi(\alpha, \beta) \\ &\propto \alpha^{n+\mu-1} e^{-\alpha(n\bar{X}+\gamma)} \beta^{m+\nu-1} e^{-\beta(m\bar{Y}+\lambda)}. \end{aligned}$$

donc, la loi a posteriori est une loi gamma avec les paramètres :

$\mu^* = n + \mu$ ,  $\gamma^* = \gamma + n\bar{X}$ ,  $\nu^* = m + \nu$ ,  $\lambda^* = \lambda + m\bar{Y}$  Pour déterminer la loi a posteriori de  $R$  on considère la transformation suivante :

$F : R = \alpha / (\alpha + \beta)$ ,  $\theta_R = \alpha\beta$  avec l'inverse  $Q : \alpha = R\theta_R$ ,  $\beta = R(1 - \theta_R)$ .

Le jacobien  $|J_{Q(R, \theta_R)}|$  est donné par :

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial R} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_R} \\ \frac{\partial \beta}{\partial R} & \frac{\partial \beta}{\partial \theta_R} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \theta_R & R \\ -\theta_R & 1 - R \end{bmatrix} = \theta_R$$

La loi a posteriori de  $R$  et de  $\theta_R$  sera :

$$\pi^*(R, \theta_R | \underline{X}, \underline{Y}) \propto R^{\mu^*-1} (1-R)^{\nu^*-1} \theta_R^{\mu^*+\nu^*-1} e^{-\theta_R \lambda^* (1-BR)}, \text{ avec, } 0 < R < 1, \theta_R > 0 \text{ et } B = (\lambda^* - \gamma^*) / \lambda^* < 1.$$

On intégrant la loi a posteriori de  $R$  et de  $\theta_R$  :

$$\pi_R(R | \theta_R | \underline{X}, \underline{Y}) = C_R R^{\mu^*-1} (1-R)^{\nu^*-1} (1-BR)^{-\mu^*+\nu^*}, \quad 0 < R < 1.$$

L'estimateur de Bayes de  $R$  correspond à la loi conjuguée naturelle gamma. on obtiendra :

$$R_{Bayes} = \begin{cases} \frac{\mu^*}{\mu^*+\nu^*} \left(\frac{\gamma^*}{\lambda^*}\right)^{-\mu^*} F_1(\mu^* + \nu^*, \mu^* + 1, \mu^* + \nu^* + 1, B), & |B| < 1, \\ \frac{\mu^*}{\mu^*+\nu^*} \left(\frac{\lambda^*}{\gamma^*}\right)^{-\nu^*} F_1(\mu^* + \nu^*, \nu^*, \mu^* + \nu^* + 1, \frac{B}{1-B}), & B \leq -1, \end{cases} \quad \text{Où } F_1 \text{ est une série hypergéométrique définie par : [16]}$$

$$F_1(a, b, c, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+j-1)b(b+1)\dots(b+j-1)}{c(c+1)\dots(c+j-1)} \frac{z^j}{j!}.$$

### La distribution de Lindley

La distribution de Lindley a été proposée à l'origine par Lindley (1958) dans le contexte des statistiques bayésiennes.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de Lindley avec les paramètres  $\theta_1, \theta_2$  respectivement. La densité de probabilité et la fonction de répartition de  $X$  et  $Y$  respectivement, sont données par : [3]

$$f(x|\theta_1) = \frac{\theta_1^2}{1+\theta_1}(1+x)e^{-\theta_1 x} \text{ avec, } x > 0, \theta_1 > 0.$$

$$F(x|\theta_1) = 1 - \left(1 + \frac{\theta_1}{1+\theta_1}x\right) e^{-\theta_1 x} \text{ avec, } x > 0, \theta_1 > 0.$$

et

$$g(y|\theta_2) = \frac{\theta_2^2}{1+\theta_2}(1+y)e^{-\theta_2 y} \text{ avec, } y > 0, \theta_2 > 0.$$

$$G(y|\theta_2) = 1 - \left(1 + \frac{\theta_2}{1+\theta_2}y\right) e^{-\theta_2 y} \text{ avec, } y > 0, \theta_2 > 0.$$

L'objectif est de développer la procédure inférentielle du paramètre de la fiabilité  $R = \mathbb{P}(X > Y)$  lorsque  $X$  et  $Y$  sont indépendants. La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{P}(X > Y) \\ &= \int_0^{\infty} F(z|\theta_1)g(z|\theta_2)dz \\ &= \int_0^{\infty} \left[1 - \left(1 + \frac{\theta_1}{1+\theta_1}z\right) e^{-\theta_1 z} \frac{\theta_2^2}{1+\theta_2}(1+z)e^{-\theta_2 z}\right] dz. \\ &= 1 - \frac{\theta_1^2[\theta_1(\theta_1+1) + \theta_2(\theta_1+1)(\theta_1+3) + \theta_2^2(2\theta_2+3) + \theta_2^3]}{(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_1+\theta_2)^3}. \end{aligned}$$

**L'estimation MLE de  $R$  :** Soient  $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$  et  $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$  deux échantillons de variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , qui suivent la loi de Lindley de paramètre  $\theta_1, \theta_2$  respectivement.  $\bar{x}, \bar{y}$  est la moyenne des échantillons  $\underline{X}$  et  $\underline{y}$ . Ghitany et al (2008) ont montré que les MLE de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= -\frac{(\bar{x}-1) + \sqrt{(\bar{x}-1)^2 + 8\bar{x}}}{2\bar{x}}. \\ \hat{\theta}_2 &= -\frac{(\bar{y}-1) + \sqrt{(\bar{y}-1)^2 + 8\bar{y}}}{2\bar{y}}. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de d'invariance de *MLE*, le *MLE*  $\hat{R}$  de  $R$  peut être obtenu en substituant  $\hat{\theta}_k$  à la place de  $\theta_k$  dans l'expression de la fiabilité  $R$  pour  $k = 1, 2$ . Ghitany et al ont également montré que :

$$\sqrt{n_k}(\hat{\theta}_k - \theta_k) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sigma_k^2}\right), \quad \sigma_k^2 = \frac{\theta_k^2 + 4\theta_k + 2}{\theta_k^2(\theta_k + 1)^2}, \quad k = 1, 2$$

Pour  $n_1 \rightarrow \infty$  et  $n_2 \rightarrow \infty$  :

$$\frac{\hat{R} - R}{\sqrt{\frac{d_1^2}{n_1 \sigma_1^2} + \frac{d_2^2}{n_2 \sigma_2^2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Où,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\partial R}{\partial \theta_1} = -\frac{\theta_1 \theta_2^2 [\theta_1^3 + 2\theta_1^2(\theta_2 + 3)\theta_1(\theta_2 + 2)(\theta_2 + 6) + 2(\theta_2^2 + 3\theta_2 + 3)]}{(\theta_1 + 1)^2(\theta_2 + 1)(\theta_1 + \theta_2)^4}. \\ d_2 &= \frac{\partial R}{\partial \theta_2} = \frac{\theta_1^2 \theta_2 [6 + \theta_1^2(\theta_2 + 2) + 2\theta_1(\theta_2 + 1)(\theta_2 + 3) + \theta_2(\theta_2^2 + 6\theta_2 + 12)]}{(\theta_1 + 1)(\theta_2 + 1)^2(\theta_1 + \theta_2)^4}. \end{aligned}$$

**L'estimation UMVUE de  $R$**

**Théorème 3.2.1.** *Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Lindley( $\theta$ ), alors la densité de probabilité de  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  est donnée par :*

$$g(z, n, \theta) = \sum_{k=0}^n P_{k,n}(\theta) f_{GA}(z, 2n - k, \theta).$$

Où  $P_{k,n}(\theta) = \binom{n}{k} \frac{\theta^k}{(1+\theta)^n}$  et  $f_{GA}(z, m, \theta) = \frac{\theta^m}{\Gamma(m)} z^{m-1} e^{-\theta z}$ ,  $z > 0$ . C'est la loi gamma de paramètre  $m$  et  $\theta$ .

*Démonstration.* Soit  $X_1$  une variable aléatoire de Lindley de paramètre  $\theta$ , sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_{X_1}(x, \theta) = \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+x) e^{-\theta x} = \frac{\theta}{1+\theta} f_{GA}(x, 1, \theta) + \frac{1}{1+\theta} f_{GA}(x, 2, \theta).$$

la fonction génératrice pour  $|t| < \theta$  est :

$$M_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) = \frac{\theta}{1+\theta} \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-1} + \frac{1}{1+\theta} \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-2}.$$

Donc, la fonction génératrice de  $z$  pour  $|t| < \theta$  est :

$$\begin{aligned} M_{X_z}(t) &= \mathbb{E}(e^{tz}) = \left\{ \frac{\theta}{1+\theta} \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-1} + \frac{1}{1+\theta} \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-2} \right\}^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\theta^k}{(1+\theta)^n} \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-(2n-k)}. \end{aligned}$$

D'où le résultat, en utilisant le fait que  $\left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-(2n-k)}$  est la fonction génératrice d'une loi gamma de paramètre  $2n - k$  et  $\theta$ . □

**Théorème 3.2.2.** *Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Lindley( $\theta$ ), alors la loi conditionnelle de  $X_1$  étant donné  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$  est donnée par :*

$$f_{X_1|Z=z}(x) = \frac{1+x}{A_n(z)} \sum_{k=0}^{n-1} C_{k,n} (z-x)^{2n-3-k}, 0 < x < z.$$

Où  $C_{k,n} = \frac{\binom{n-1}{k}}{\Gamma(2n-2-k)}$  Et  $A_n(u) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{u^{2n-j-1}}{\Gamma(2n-j)}$ .

**Théorème 3.2.3.** *On suppose que  $U = \sum_{i=1}^{n_1} x_i$  et  $V = \sum_{j=1}^{n_2} y_j$ .*

1. Pour  $u \leq v$  le UMVUE de  $R$  est :

$$\hat{R}_{UMVUE} = \frac{1}{A_{n_1}(u)A_{n_2}(v)} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} C_{m,n_1} C_{n,n_2} I_1(u, v, 2n_1 - 3 - m, 2n_2 - 3 - n).$$

Où,

$$\begin{aligned} I_1(u, v, k, l) &= \sum_{t=0}^l \binom{l}{t} (v-u)^{(l-t)} u^{(k+t+2)} \\ &\quad \frac{(k+2)(k+t+3)(k+t+4)(k+t+4+u)(3k+t+6)u}{(k+1)(k+2)(k+t+2)(k+t+3)(k+t+4)}. \end{aligned}$$

2. Pour  $u > v$  le UMVUE de  $R$  est :

$$\hat{R}_{UMVUE} = \frac{1}{A_{n_1}(u)A_{n_2}(v)} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} C_{m,n_1} C_{n,n_2} I_2(u, v, 2n_1 - 3 - m, 2n_2 - 3 - n),$$

Où,

$$I_2(u, v, k, l) = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} (u-v)^{(k-s+1)} v^{(l+s+1)} \frac{(l+s+3)[(l+s+2)(k+u+2) + (2k+u+3)v] + 2(k+1)v^2}{(k+1)(k+2)(l+s+1)(l+s+2)(l+s+3)}.$$

*Démonstration.* On note par  $U = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$  et  $V = \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$ . Puisque  $U$  et  $V$  sont des statistiques exhaustives pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement, le  $UMVUE$  de  $R$  peut être obtenu par :

$$\hat{R}_{UMVUE} = \mathbb{E}[\Phi(X_1, Y_1) | U = u, V = v].$$

Où

$$\Phi(X_1, Y_1) = \begin{cases} 1, & \text{si } Y_1 < X_1, \\ 0, & \text{si } Y_1 > X_1, \end{cases}$$

Donc le  $UMVUE$  de  $R$  est donnée par :

$$\hat{R}_{UMVUE} = \int_0^{\min(u,v)} \int_y^u f_{X_1} | U = u(x) f_{Y_1} | V = v(y) dx dy$$

À partir du théorème 3.1.6, on a :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{UMVUE} &= \int_0^{\min(u,v)} \int_y^u f_{X_1} | U = u(x) f_{Y_1} | V = v(y) dx dy = \\ &= \frac{1}{A_{n_1}(u)A_{n_2}(v)} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} C_{m,n_1} C_{n,n_2} I(u, v, 2n_1 - 3 - m, 2n_2 - 3 - n), \end{aligned}$$

Par substitution  $z = u - x$ ,

$$\begin{aligned} I(u, v, k, l) &= \int_0^{\min(u,v)} \int_y^u (1+x)(u-x)^k dx (1+y)(v-y)^l dy. \\ &= \int_0^{\min(u,v)} \int_0^{u-y} (1+u+z)z^k dz (1+y)(v-y)^l dy. \\ &= \int_0^{\min(u,v)} \left[ \frac{1+u}{k+1} - \frac{u-y}{k+2} (u-y)^{k+1} \right] (1+y)(v-y)^l dy. \end{aligned}$$

□

### La distribution de Gompertz

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de Gompertz avec les paramètres  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$ , respectivement. La densité de probabilité et la fonction de répartition de  $X$  et  $Y$  respectivement, sont données par : [24]

$$\begin{aligned} f(x) &= \beta_1 e^{\alpha_1 x} e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}(e^{\alpha_1 x} - 1)} \text{ avec } x > 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0. \\ F(x) &= 1 - e^{-\beta_1 \alpha_1^{-1}(e^{\alpha_1 x} - 1)}. \end{aligned}$$

et

$$g(y) = \beta_2 e^{\alpha_2 y} e^{-\beta_2 \alpha_2^{-1} (e^{\alpha_2 y} - 1)} \text{ avec } y > 0, \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0.$$

$$G(y) = 1 - e^{-\beta_2 \alpha_2^{-1} (e^{\alpha_2 y} - 1)}.$$

Où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des paramètres connus,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des paramètres inconnus. La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{P}(X > Y) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y < x) f(x) dx \\ &= 1 - e^{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^k \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\left(\frac{k\alpha_2}{\alpha_1}\right)}}{k!} \left[ \Gamma\left(\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)(k+1)\right) - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)(k+i+1)i!} \right]. \end{aligned}$$

si  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  la fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{P}(X > Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y < x) f(x) dx. \\ &= \int_0^{\infty} \left[1 - e^{-\frac{\beta_2}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1)}\right] \beta_1 e^{\alpha x} e^{-\frac{\beta_1}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1)} dx. \\ R &= \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}. \end{aligned}$$

**– L'estimation MLE de  $R$  :**

Pour obtenir le *MLE* de  $R$  on doit d'abord obtenir le *MLE* des deux paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

On utilisant les fonctions de vraisemblance de la loi conjointe de  $X$  et de  $Y$  on aura :

$$L(\beta_1, \beta_2, \underline{x}, \underline{y}) = \beta_1^n \beta_2^m e^{\left(\alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i\right)\right)} e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\beta_1 \sum_{i=1}^n (e^{\alpha x_i} - 1) + \beta_2 \sum_{i=1}^m (e^{\alpha y_i} - 1)\right)}.$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\ln L(\beta_1, \beta_2, \underline{x}, \underline{y}) = n \ln \beta_1 + m \ln \beta_2 + \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i \right) - \frac{1}{\alpha} \left[ \beta_1 \sum_{i=1}^n (e^{\alpha x_i} - 1) + \beta_2 \sum_{i=1}^m (e^{\alpha y_i} - 1) \right].$$

Par la résolution des équations suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\beta_1, \alpha, \underline{x}, \underline{y})}{\partial \beta_1} &= \frac{n}{\beta_1} - \frac{\sum_{i=1}^n (e^{\alpha x_i} - 1)}{\alpha} = 0. \\ \frac{\partial \ln L(\beta_2, \alpha, \underline{x}, \underline{y})}{\partial \beta_2} &= \frac{m}{\beta_2} - \frac{\sum_{i=1}^m (e^{\alpha y_i} - 1)}{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Le MLE de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  est défini par :

$$\beta_{1_{MLE}} = \frac{1}{n\alpha} \sum_{i=1}^n (e^{\alpha x_i} - 1).$$

et

$$\beta_{2_{MLE}} = \frac{1}{m\alpha} \sum_{i=1}^m (e^{\alpha y_i} - 1).$$

D'après la propriété de l'invariance des estimateurs du maximum de vraisemblance  $MLE$  la fiabilité  $R_{1_{MLE}}$  a la forme suivante :

$$R_{1_{MLE}} = \frac{\beta_{2_{MLE}}}{\beta_{1_{MLE}} + \beta_{2_{MLE}}}. \quad (3.10)$$

– **L' estimation  $UMVUE$  de  $R$  :**

Soit  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  et  $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  deux échantillons indépendants de Gompertz avec les paramètres  $(\alpha, \beta_1)$  et  $(\alpha, \beta_2)$  respectivement.  $\alpha$  est un paramètre connu.

Pour trouver le  $UMVUE$  de  $R$ , on doit trouver d'abord le  $UMVUE$  de  $\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$  qui est le  $UMVUE$  de  $f(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$ .

On pose :

$$W = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (e^{\alpha x_i} - 1). \quad (3.11)$$

$$V = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m (e^{\alpha y_i} - 1). \quad (3.12)$$

$W$  et  $V$  sont des statistiques exhaustive complète de distribution Gamma avec les paramètres  $(n, \beta_1)$  et  $(m, \beta_2)$  car si  $\alpha$  est connu la famille Gompertz est une famille exponentielle. La densité de probabilité de  $W$  et  $V$  est donnée par :

$$f_W(w) = \frac{\beta_1^n}{\Gamma(n)} w^{n-1} e^{-\beta_1 w}, w > 0, \beta_1 > 0. \quad (3.13)$$

$$f_V(v) = \frac{\beta_2^m}{\Gamma(m)} v^{m-1} e^{-\beta_2 v}, v > 0, \beta_2 > 0. \quad (3.14)$$

Puisque  $X$  et  $Y$  son indépendants alors,

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \hat{f}(x_1, \dots, x_k) \hat{f}(y_1, \dots, y_k). \quad (3.15)$$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \prod_{j=1}^k f(x_j) \frac{g(w|X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)}{g(w)} \prod_{j=1}^k f(y_j) \frac{g(v|X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)}{g(v)}. \quad (3.16)$$

avec :

$$g(w|X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{\beta_1^{n-k}}{\Gamma(n-k)} \left( w - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha x_i} - 1}{\alpha} \right) \right)^{n-k-1} e^{-\beta_1 \left( w - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha x_i} - 1}{\alpha} \right) \right)} \mathbf{1}_{\left( w - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha x_i} - 1}{\alpha} \right) \geq 0 \right)}. \quad (3.17)$$

$$g(v|Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k) = \frac{\beta_1^{m-k}}{\Gamma(m-k)} \left( v - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha y_i} - 1}{\alpha} \right) \right)^{m-k-1} e^{-\beta_2 \left( v - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha y_i} - 1}{\alpha} \right) \right)} \mathbf{1}_{\left( v - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha y_i} - 1}{\alpha} \right) \geq 0 \right)}. \quad (3.18)$$

Par substitution de l'équation ??, 3.2.2, 3.17 et 3.18 dans 3.16,  $\hat{f}(\underline{x}; \underline{y})$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\underline{x}, \underline{y}) &= \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-k)\Gamma(m-k)w^{n-1}v^{m-1}} e^{\alpha \left( \sum_{i=1}^k x_i \sum_{i=1}^k y_i \right)} \left( w - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha x_i} - 1}{\alpha} \right) \right)^{n-k-1} \\ &\quad \left( v - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha y_i} - 1}{\alpha} \right) \right)^{m-k-1} \mathbf{1}_{\left( w - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha x_i} - 1}{\alpha} \right) \geq 0 \right)} \mathbf{1}_{\left( v - \sum_{i=1}^k \left( \frac{e^{\alpha y_i} - 1}{\alpha} \right) \geq 0 \right)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

alors,

$$\begin{aligned} R_{UMVUE} &= \int \int_G f(x_1, y_1 | w, v) dx_1 dy_1 \\ &= \frac{(n-1)(m-1)}{w^{n-1}v^{m-1}} \int \int_G e^{\alpha(x+y)} \left( w - \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \right)^{n-2} \left( v - \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha} \right)^{m-2} dy dx, \end{aligned}$$

Où,

$$G = \left\{ (x, y) : 0 < x < \frac{\ln(\alpha w + 1)}{\alpha}, 0 < y < \frac{\ln(\alpha v + 1)}{\alpha}, y < x \right\}.$$

Alors,

$$R_{UMVUE} = \frac{(n-1)(m-1)}{w^{n-1}v^{m-1}} \int_{x=0}^{\frac{\ln(\alpha v + 1)}{\alpha}} \int_{y=0}^x e^{\alpha(x+y)} \left( w - \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \right)^{n-2} \left( v - \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha} \right)^{m-2} dy dx. \quad (3.20)$$

$$= 1 - \frac{(n-1)}{w^{n-1}v^{m-1}} \int_{u=0}^w (v-u)^{m-1} (w-u)^{n-2} du. \quad (3.21)$$

$$(v-u)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} v^{m-1-k}. \quad (3.22)$$

Alors, l'UMVUE de  $R$  est donné par :

$$R_{UMVUE} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+k)\Gamma(m-k)} \left( \frac{w}{v} \right)^k, \quad w < v. \quad (3.23)$$

Pour  $v < w$  l'UMVUE de est donné par :

$$\begin{aligned} R_{UMVUE} &= \frac{(n-1)(m-1)}{w^{n-1}v^{m-1}} \int_{y=0}^{\frac{\ln(\alpha v + 1)}{\alpha}} \int_{x=y}^{\frac{\ln(\alpha w + 1)}{\alpha}} e^{\alpha(x+y)} \left( w - \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \right)^{n-2} \left( v - \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha} \right)^{m-2} dy dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n-k)\Gamma(m+k)} \left( \frac{v}{w} \right)^k, \quad v < w. \end{aligned} \quad (3.24)$$

#### - L'estimation bayésienne de $R$

Soit  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  et  $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  deux échantillons indépendants de Gompertz avec les paramètres  $(\alpha, \beta_1)$  et  $(\alpha, \beta_2)$  respectivement.  $\alpha$  est un paramètre connu.

Les fonctions de vraisemblance sont données par :

$$L_1(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \alpha) = \beta_1^n e^{\alpha \sum_{i=1}^n x_i} e^{-\frac{\beta_1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (e^{\alpha x_i} - 1)}. \quad (3.25)$$

$$L_2(y_1, \dots, y_m) = \prod_{i=1}^m f(y_i|\alpha) = \beta_2^m e^{\alpha \sum_{i=1}^m y_i} e^{\left(-\frac{\beta_2}{\alpha} \sum_{i=1}^m (e^{\alpha y_i} - 1)\right)}. \quad (3.26)$$

Soit  $\beta_1, \beta_2$  deux variables aléatoires indépendantes avec, les lois a priori sont données respectivement par :

$$\pi(\beta_1) = \frac{\lambda_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1-1} e^{-\lambda_1 \beta_1}, \lambda_1, \beta_1, c_1 > 0.$$

$$\pi(\beta_2) = \frac{\lambda_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_2^{c_2-1} e^{-\lambda_2 \beta_2}, \lambda_2, \beta_2, c_2 > 0.$$

La loi a posteriori de  $\beta_1, \beta_2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi(\beta_1, \beta_2 | \underline{X}, \underline{Y}) &= \frac{f(\underline{x}, \underline{y} | \beta_1, \beta_2) \pi(\beta_1, \beta_2)}{\int_{\beta_1} \int_{\beta_2} f(\underline{x}, \underline{y} | \beta_1, \beta_2) \pi(\beta_1, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2} \\ &= \frac{(\lambda_1 + k_1)^{n+c_1} (\beta_2 + k_2)^{m+c_2} \beta_1^{n+c_1-1} \beta_2^{m+c_2-1} e^{(-\beta_1(\lambda_1+k_1) - \beta_2(\lambda_2+k_2))}}{\Gamma(n+c_1)\Gamma(m+c_2)}. \end{aligned}$$

Où,

$$k_1 = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (e^{\alpha x_i} - 1).$$

$$k_2 = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m (e^{\alpha y_i} - 1).$$

Soit  $r = \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}$  et  $u = \beta_1 + \beta_2, u > 0, 0 < r < 1$  et

$$\begin{aligned} \pi(r, u | \underline{X}, \underline{Y}) &= S(k_1, k_2, r) u^{n+m c_1 + c_2 - 1} \times e^{(-u(1-r)(\lambda_1+k_1) - ru(\lambda_2+k_2))}. \\ &= \frac{S(k_1, k_2, r) \Gamma(n+m+c_1+c_2)}{[(1-r)(\lambda_1+k_1) + r(\lambda_2+k_2)]^{n+m c_1 + c_2}}. \end{aligned}$$

Où,

$$S(k_1, k_2, r) = \frac{(\lambda_1 + k_1)^{n+c_1} (\lambda_2 + k_2)^{m+c_2} r^{m+c_2-1} (1-r)^{n+c_1-1}}{\Gamma(n+c_1)\Gamma(m+c_2)}$$

Par conséquent, l'estimateur de Bayes  $R_{Bayes}$  de  $R$  par rapport rapport à la fonction de perte de l'erreur quadratique moyenne est la moyenne a posteriori. L'estimateur de Bayes est donné par :

$$\begin{aligned} R_{Bayes} &= \int_{r=0}^1 r \pi_R(r | \underline{x}, \underline{y}) dr \\ &= \frac{v_1^{\delta_1} v_2^{\delta_2} \Gamma(\delta_1 + \delta_2)}{\Gamma(\delta_1)\Gamma(\delta_2)} \int_{r=0}^1 \frac{r^{\delta_2(1-r)^{\delta_1-1}}}{[(1-r)v_1 + rv_2]^{\delta_1+\delta_2}} dr. \end{aligned}$$

Où,  $\delta_1 = n + \alpha_1, \delta_2 = m + \alpha_2, v_1 = \lambda_1 + k_1, v_2 = \lambda_2 + k_2$

### La distribution de Rayleigh-Half-Normale

La distribution Rayleigh-half-normale est notée  $RHN(\theta)$  par Abd El-Monsef et Abd El-Raouf.[1]

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes, le strength  $X$  et le stress  $Y$  suivent la loi Rayleigh-half-normale de paramètre  $\theta$  et  $\alpha, \theta, \alpha > 0$  respectivement. Les densité de probabilité et les fonctions de répartitions sont données respectivement par :

$$f(x, \theta) = \frac{2\theta(x+1)e^{\theta x^2}}{1 + \sqrt{\pi\theta}}, \text{ avec, } x > 0.$$

$$g(y, \alpha) = \frac{2\alpha(y+1)e^{\alpha y^2}}{1 + \sqrt{\pi\alpha}}, \text{ avec, } Y > 0.$$

$$F(x, \theta) = \frac{1 - e^{\theta x^2 + \sqrt{\pi\theta} \operatorname{erf}(\sqrt{\theta}x)}}{1 + \sqrt{\pi\theta}}, \text{ avec, } x > 0.$$

$$G(x, \alpha) = \frac{1 - e^{\alpha x^2 + \sqrt{\pi\alpha} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha}x)}}{1 + \sqrt{\pi\alpha}}, \text{ avec, } Y > 0.$$

Où  $\operatorname{erf}(u)$  est la fonction de l'erreur de Gauss définie par :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt.$$

La fiabilité  $R(t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbb{P}(X > Y) = \int_0^{+\infty} \int_0^x f(x)g(y)dydx. \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^x \left( \frac{2\theta(x+1)e^{\theta x^2}}{1 + \sqrt{\pi\theta}} \right) \left( \frac{2\alpha(y+1)e^{\alpha y^2}}{1 + \sqrt{\pi\alpha}} \right). \\ &= \frac{4\theta\alpha}{(1 + \sqrt{\pi\theta})(1 + \sqrt{\pi\alpha})} \int_0^{+\infty} (x+1)e^{-\theta x^2} \int_0^x (y+1)e^{-\alpha y^2} dydx. \\ &= \frac{4\theta\alpha}{(1 + \sqrt{\pi\theta})(1 + \sqrt{\pi\alpha})} \int_0^{+\infty} (x+1)e^{-\theta x^2} \left( \int_0^x ye^{-\alpha^2} dy + \int_0^x e^{-\alpha y^2} dy \right) dx. \\ &= \frac{(1 + \sqrt{\pi\alpha} + 2\sqrt{\theta\alpha} \tan^{-1}(\sqrt{\theta/\alpha}) + (\sqrt{\pi}(\theta - \alpha)/\sqrt{\theta + \alpha}) - (\alpha/(\theta + \alpha)))}{1 + \sqrt{\pi\theta} + \sqrt{\pi\alpha} + \pi\sqrt{\theta\alpha}}. \end{aligned}$$

**- L'estimation MLE de la fiabilité  $R$**

Pour obtenir le *MLE* de  $R$  on doit d'abord obtenir le *MLE* des deux paramètres  $\theta$  et  $\alpha$ .  
On utilisant les fonctions de vraisemblance de la loi conjointe de  $X$  et de  $Y$  on aura :

$$L(\theta, \alpha; \underline{x}, \underline{y}) = 2^{n+m} \theta^n \alpha^m - (1 + \sqrt{\pi\theta})^n - (1 + \sqrt{\pi\alpha})^m \prod_{i=1}^n (x_i + 1) e^{-\theta x_i^2} \prod_{j=1}^m (y_j + 1) e^{-\alpha y_j^2}.$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} \ln L(\theta, \alpha, \underline{x}, \underline{y}) &= (m+n) \ln(2) + n \ln(\theta) + m \ln(\alpha) - n \ln(1 + \sqrt{\pi\theta}) - m \ln(1 + \sqrt{\pi\alpha}) \\ &= -\theta \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \sum_{j=1}^m y_j^2 + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + 1) + \sum_{j=1}^m \ln(y_j + 1). \end{aligned}$$

Par la résolution des équations suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta, \alpha, \underline{x}, \underline{y})}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} - \frac{n\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\theta}(1 + \sqrt{\pi\theta})} - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \\ \frac{\partial \ln L(\theta, \alpha, \underline{x}, \underline{y})}{\partial \alpha} &= \frac{m}{\alpha} - \frac{m\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}(1 + \sqrt{\pi\alpha})} - \sum_{j=1}^m y_j^2 = 0. \end{aligned}$$

Le MLE de  $\theta$  et  $\alpha$  est défini par :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{6\pi A^2} \left( B + 2A(A + n\pi) + \frac{A^2(n^2\pi^2 + 4A(A - 4n\pi))}{B} \right).$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{6\pi C^2} \left( D + 2C(C + m\pi) + \frac{C^2(m^2\pi^2 + 4C(C - 4m\pi))}{D} \right).$$

Où,

$$A = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad C = \sum_{j=1}^m y_j^2$$

$$B = \left( 8A^6 - 48\pi n A^5 + 51\pi^2 n^2 A^4 - \pi^3 n^3 A^3 + 3\sqrt{3}\pi^{3/2} \sqrt{n^3 A^7 (-16A^2 + 71\pi n A - 2\pi^2 n^2)} \right)^{1/3}$$

$$D = \left( 8C^6 - 48\pi m C^5 + 51\pi^2 m^2 C^4 - \pi^3 m^3 C^3 + 3\sqrt{3}\pi^{3/2} \sqrt{m^3 C^7 (-16C^2 + 71\pi m C - 2\pi^2 m^2)} \right)^{1/3}$$

Alors, le MLE de la fiabilité  $R$  est donnée par :

$$R_{MLE} = \frac{(1 + \sqrt{\pi\hat{\alpha}} + 2\sqrt{\hat{\theta}\hat{\alpha}} \tan^{-1}(\sqrt{\hat{\theta}/\hat{\alpha}}) + (\sqrt{\pi}(\hat{\theta} - \hat{\alpha})/\sqrt{\hat{\theta} + \hat{\alpha}}) - (\hat{\alpha}/(\hat{\theta} + \hat{\alpha})))}{1 + \sqrt{\pi\hat{\theta}} + \sqrt{\pi\hat{\alpha}} + \pi\sqrt{\hat{\theta}\hat{\alpha}}}$$

### La distribution de Rayleigh et Half-Normale

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes, le strength  $X$  suit la loi Rayleigh-half-normale et le stress  $Y$  suit la loi Rayleigh de paramètre  $\theta$  et  $\alpha$ ,  $\theta, \alpha > 0$  respectivement. Les densité de probabilité et les fonctions de répartition sont données respectivement par :

$$f(x, \theta) = \frac{2\theta(x+1)e^{\theta x^2}}{1 + \sqrt{\pi\theta}}, \quad \text{avec, } x > 0.$$

$$g(y) = \frac{y}{\alpha^2} e^{-(y^2/2\alpha^2)}, \quad \text{avec, } y > 0.$$

La fiabilité  $R$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{P}(X > Y). \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^x \left( \frac{2\theta(x+1)e^{\theta x^2}}{1 + \sqrt{\pi\theta}} \right) \left( \frac{y}{\alpha^2} e^{-(y^2/2\alpha^2)} \right) dy dx. \\ &= \frac{2\theta}{(1 + \sqrt{\pi\theta})} \int_0^{+\infty} (x+1)e^{-\theta x^2} \left( 1 - e^{-(x^2/2\alpha^2)} \right) dx. \\ &= \frac{\theta}{1 + \sqrt{\pi\theta}} \left( \frac{1}{\theta} + \frac{\sqrt{\pi}}{\theta} - \frac{2}{2\theta + (1/\alpha^2)} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\theta + (1/\alpha^2)}} \right). \end{aligned}$$

Pour obtenir le MLE de paramètre  $R$  on suit exactement les mêmes étapes que dans la distribution précédent et on aura :

$$R_{MLE} = \frac{\hat{\theta}}{1 + \sqrt{\pi\hat{\theta}}} \left( \frac{1}{\hat{\theta}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\hat{\theta}} - \frac{2}{2\hat{\theta} + (1/\hat{\alpha}^2)} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\hat{\theta} + (1/\hat{\alpha}^2)}} \right).$$

## 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'estimation de paramètre de la fiabilité  $R$  dans quelques modèles stress-strength par les méthode d'estimation classique (MLE, UMVUE) et l'estimation bayésienne vu dans le premier chapitre.

## Chapitre 4

---

# Application

---

### 4.1 Introduction

La simulation est l'une des applications les plus importantes, elle est utilisée dans de nombreux domaines scientifiques, y compris les mathématiques appliquées, la finance, l'économie et de nombreuses applications, la simulation est considérée comme l'une des applications de l'informatique, il existe de nombreux types de simulation tels que la simulation ordinaire, la simulation de contraintes et la simulation contaminée. D'un point de vue statistique, la simulation est un processus de génération de données artificielles qui simule la réalité et qui est piloté par les paramètres et la conception du modèle.

Dans ce chapitre, la simulation a été utilisée pour comparer les méthodes d'estimations de la fiabilité du système dans les modèles stress-strength (St-St). Les résultats ont été obtenus à l'aide de programme écrite en Matlab version 2009b.

### 4.2 La simulation de la loi exponentielle

#### 4.2.1 L'algorithme de simulation

La simulation est écrite en utilisant le programme Matlab pour estimer la fiabilité  $R$  du système passant par les étapes suivants :

- **Étape 1** : Générer une suite de variables aléatoires  $U$  de loi uniforme continue sur  $(0, 1)$ ,  $U_1, U_2, \dots, U_n$ .
- **Étape 2** : Générer une suite de variables aléatoires  $V$  de loi uniforme continue sur  $(0, 1)$ ,  $V_1, V_2, \dots, V_m$ .
- **Étape 3** : Transformer les échantillons aléatoires uniforme de l'étape 1 en appliquant la méthode inverse qui utilise la fonction de répartition inverse comme ci-dessous :

$$F(X) = (1 - e^{-\alpha x_i})$$

$$u_i = (1 - e^{-\alpha x_i})$$

$$X_i = -\log(u_i)$$

De la même façon, à partir de l'étape 2 on obtiendra  $Y_j$  où,  $v_j = -\log(v_j)$ .

- **Étape 4** : Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $R$ .
- **Étape 5** : Appliquer la méthode UMVUE .
- **Étape 6** : Calculer l'estimateur de Bayes de la fiabilité  $R$ .

### 4.3 Les résultats de la simulation :

#### 4.3.1 L'estimateur MLE de $R$ :

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.6962	0.6926	0.6904	0.6892	0.6885	0.6881	0.6877	0.6875
2	0.6885	0.6871	0.6867	0.6864	0.6863	0.6862	0.6861	0.6861
3	0.6724	0.6790	0.6812	0.6823	0.6830	0.6835	0.6838	0.6840
4	0.6851	0.6854	0.6855	0.6856	0.6856	0.6856	0.6856	0.6856
5	0.6882	0.6870	0.6866	0.6864	0.6862	0.6862	0.6861	0.6860
6	0.6597	0.6714	0.6759	0.6782	0.6796	0.6806	0.6813	0.6819
7	0.6877	0.6868	0.6864	0.6862	0.6861	0.6861	0.6860	0.6860
8	0.6282	0.6556	0.6653	0.6703	0.6703	0.6754	0.6768	0.6779

TABLE 4.1 – La variation dans  $R$  pour  $n = 15$  et  $m = 10$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.3303	0.3224	0.3197	0.3184	0.3176	0.3370	0.3166	0.3163
2	0.4255	0.3753	0.3563	0.3464	0.3402	0.3360	0.3330	0.3307
3	0.3571	0.3369	0.3296	0.3259	0.3236	0.3221	0.3210	0.3202
4	0.3456	0.3304	0.3252	0.3225	0.3209	0.3198	0.3190	0.3184
5	0.3617	0.3391	0.3311	0.3270	0.3245	0.3228	0.3216	0.3207
6	0.3228	0.3186	0.3172	0.3165	0.3160	0.3157	0.3135	0.3154
7	0.3090	0.3115	0.3124	0.3128	0.3131	0.3133	0.3135	0.3136
8	0.3563	0.3161	0.3290	0.3254	0.3232	0.3217	0.3207	0.3199

TABLE 4.2 – La variation dans  $R$  pour  $n = 10$  et  $m = 15$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.5079	0.5040	0.5026	0.5020	0.5016	0.5013	0.5011	0.5010
2	0.5026	0.5013	0.5009	0.5007	0.5005	0.5004	0.5004	0.5003
3	0.5094	0.5048	0.5032	0.5024	0.5019	0.5016	0.5014	0.5012
4	0.5215	0.5110	0.5074	0.5056	0.5045	0.5037	0.5032	0.5028
5	0.5005	0.5002	0.5002	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001	0.5001
6	0.5075	0.5038	0.5025	0.5019	0.5015	0.5013	0.5011	0.5010
7	0.5049	0.5025	0.5016	0.5012	0.5010	0.5008	0.5007	0.5006
8	0.5002	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

TABLE 4.3 – La variation dans  $R$  pour  $n = 30$  et  $m = 30$

4.3.2 L'estimateur bayésienne de  $R$  :

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.6593	0.6567	0.6501	0.6511	0.6685	0.6677	0.6681	0.6771
2	0.6744	0.6763	0.6887	0.6790	0.6830	0.6835	0.6838	0.6840
3	0.6844	0.6851	0.6855	0.6853	0.6857	0.6847	0.6835	0.6839
4	0.6804	0.6811	0.6836	0.6846	0.6863	0.6863	0.6874	0.6882
5	0.6871	0.6863	0.6859	0.6848	0.6857	0.6859	0.6861	0.6860
6	0.6590	0.6773	0.6764	0.6782	0.6796	0.6818	0.6817	0.6819
7	0.6857	0.6868	0.6864	0.6862	0.6861	0.6863	0.686	0.6887
8	0.6238	0.6555	0.6665	0.6703	0.6713	0.6733	0.6768	0.6787

TABLE 4.4 – La variation dans  $R$  pour  $n = 15$  et  $m = 10$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.3309	0.3228	0.3159	0.3186	0.3196	0.3384	0.3177	0.3161
2	0.4254	0.3750	0.3564	0.3468	0.3414	0.3364	0.3333	0.3310
3	0.3585	0.3374	0.3288	0.3285	0.3246	0.3235	0.3218	0.3228
4	0.3477	0.3303	0.3262	0.3248	0.3218	0.3197	0.3187	0.3184
5	0.3619	0.3389	0.3312	0.3274	0.3235	0.3239	0.3228	0.3219
6	0.3235	0.3138	0.3148	0.3165	0.3167	0.3175	0.3182	0.3186
7	0.3091	0.3136	0.3124	0.3128	0.3114	0.3133	0.3135	0.3141
8	0.3568	0.3168	0.3274	0.3278	0.3233	0.3245	0.3215	0.3128

TABLE 4.5 – La variation dans  $R$  pour  $n = 10$  et  $m = 15$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.4909	0.5031	0.5048	0.5052	0.5018	0.5023	0.5011	0.5007
2	0.5034	0.5041	0.5019	0.5028	0.5035	0.5036	0.5048	0.5047
3	0.5081	0.5085	0.5073	0.5035	0.5058	0.5010	0.5012	0.5018
4	0.5327	0.5034	0.5075	0.5082	0.5068	0.5069	0.5071	0.5031
5	0.5008	0.5009	0.5004	0.5002	0.5002	0.5003	0.5002	0.5001
6	0.5075	0.5048	0.5032	0.5028	0.5017	0.5048	0.5025	0.5015
7	0.5051	0.5025	0.5016	0.5012	0.5010	0.5008	0.5007	0.5006
8	0.5003	0.5001	0.5000	0.5001	0.5001	0.5002	0.5005	0.5008

TABLE 4.6 – La variation dans  $R$  pour  $n = 30$  et  $m = 30$

### 4.3.3 L'estimateur UMVUE de $R$ :

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.6004	0.6005	0.6014	0.6015	0.6014	0.6011	0.6013	0.6010
2	0.6035	0.6033	0.6018	0.6069	0.6063	0.6062	0.6061	0.6061
3	0.6024	0.6092	0.6018	0.6023	0.6035	0.6035	0.6038	0.6040
4	0.6051	0.6054	0.6052	0.6056	0.6055	0.6056	0.6056	0.6057
5	0.6082	0.6070	0.6066	0.6064	0.6064	0.6062	0.6061	0.6060
6	0.6097	0.6014	0.6059	0.6082	0.6098	0.6006	0.6013	0.6019
7	0.6077	0.6068	0.6064	0.6062	0.6062	0.6061	0.6061	0.6060
8	0.6082	0.6056	0.6053	0.6703	0.6003	0.6054	0.6068	0.6079

TABLE 4.7 – La variation dans  $R$  pour  $n = 15$  et  $m = 10$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.3001	0.3022	0.3097	0.3084	0.3076	0.3070	0.3065	0.3063
2	0.3355	0.3153	0.3163	0.3164	0.3202	0.3160	0.3131	0.3107
3	0.3071	0.3068	0.3096	0.3059	0.3036	0.3021	0.3010	0.3024
4	0.3056	0.3014	0.3052	0.3025	0.3009	0.3098	0.3090	0.3084
5	0.3017	0.3091	0.3011	0.3070	0.3045	0.3028	0.3016	0.3007
6	0.3028	0.3086	0.3072	0.3065	0.3060	0.3057	0.3035	0.3054
7	0.3090	0.3015	0.3024	0.3028	0.3031	0.3033	0.3035	0.3036
8	0.3063	0.3061	0.3090	0.3054	0.3032	0.3017	0.3017	0.3099

TABLE 4.8 – La variation dans  $R$  pour  $n = 10$  et  $m = 15$

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.4858	0.4040	0.4028	0.4031	0.4036	0.4051	0.4051	0.4020
2	0.4026	0.4063	0.4061	0.4068	0.4075	0.4074	0.4078	0.4081
3	0.4594	0.4048	0.4032	0.4024	0.4019	0.4016	0.5014	0.4012
4	0.4215	0.4059	0.4074	0.4056	0.5045	0.4037	0.4032	0.4028
5	0.4078	0.4076	0.40068	0.4063	0.4065	0.4067	0.4067	0.4071
6	0.4075	0.4058	0.4025	0.4019	0.4015	0.4013	0.4011	0.4028
7	0.4049	0.4025	0.4016	0.4012	0.4010	0.4008	0.4007	0.4006
8	0.4089	0.4086	0.4068	0.4071	0.4074	0.4089	0.4085	0.4087

TABLE 4.9 – La variation dans  $R$  pour  $n = 30$  et  $m = 30$

## 4.4 La simulation de la loi de Gompertz

### L'algorithme de simulation :

La simulation est écrite en utilisant le programme Matlab pour estimer la fiabilité  $R$  du système passant par les étapes suivants :

- **Étape 1** : Générer une suite de variables aléatoires  $U$  de loi uniforme continue sur  $(0, 1)$ ,  $U_1, U_2, \dots, U_n$ .
- **Étape 2** : Générer une suite de variables aléatoires  $V$  de loi uniforme continue sur  $(0, 1)$ ,  $V_1, V_2, \dots, V_m$ .
- **Étape 3** : Transformer les échantillons aléatoires uniforme de l'étape 1 en appliquant la méthode inverse qui utilise la fonction de répartition inverse comme ci-dessous :

$$F(X) = 1 - e^{-\lambda c^{-1}(e^{cx} - 1)}$$

$$u_i = 1 - e^{-\lambda c^{-1}(e^{cx} - 1)}$$

$$X_i = \frac{1}{c} \log \left( 1 - \frac{c}{\lambda_1} \log(u_i) \right)$$

De la même façon, à partir de l'étape 2 on obtiendra  $Y_j$  où,  $v_j = \frac{1}{c} \log \left( 1 - \frac{c}{\lambda_2} \log(v_j) \right)$ .

- **Étape 4** : Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $R$ .

#### 4.4.1 L'estimateur MLE de $R$

Les résultats de la simulation sont donnée dans le tableau suivant :

$n$	$m$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$R$	$R_{MLE}$
7	4	2	1	0.3333	0.3433
7	7	2	3	0.6000	0.6265
7	10	2	4	0.3333	0.6019
25	4	6	4	0.3333	0.4189
25	4	4	3	0.3333	0.4441
25	10	4	4	0.3333	0.5012
60	60	5	3	0.3333	0.3361

TABLE 4.10 – La variation de  $R$  avec la méthode MLE

**Conclusion** : On conclue que la valeur de la fiabilité  $R$  est petite dans l'estimation de  $UMVUE$ , par contre elle presque la même valeur dans l'estimation  $MLE$  et bayésienne.

---

# Conclusion

---

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés au problème d'estimation de la fiabilité dans les modèles stress-strength. L'objet de ce travail est d'estimer le paramètre  $R$  de la fiabilité dans les modèles stress-strength, en utilisant quelques méthodes d'estimation de l'inférence classique telles que la méthode de maximum de vraisemblance, UMVUE et celle de l'inférence bayésienne.

Dans un premier lieu, nous avons présenté les notions de base de l'inférence statistique à savoir l'inférence classique et l'inférence bayésienne. Par la suite, nous nous limitons à un rappel bref sur la théorie de la fiabilité, les lois usuelles utilisées en fiabilité, les modèles stress-strength ainsi que la modélisation de ces modèles.

Différents cas de modèles stress-strength pour l'analyse de la fiabilité ont été examinés, nous avons présenté les modèles stress-strength pour traiter le comportement de différentes variables, incluant des distributions telles que Exponentielle, Gompertz, Lindley, Rayleigh-Half-Normal et l'importance de ces modèles pour l'estimation de la fiabilité d'un composant qui est soumis à un stress.

En termes de perspectives, il est souhaitable d'envisager plusieurs voies de développement : utiliser d'autres lois de fiabilité dans les modèles stress-strength telles que la loi de Poisson, Weibull, Gamma, Guembel, inverse Weibull..., traiter le cas de stress et strength avec plusieurs lois différentes, comparer entre les différentes estimations, voir l'impact de l'information a priori sur l'estimation de la fiabilité, s'intéresser au cas dépendant.

---

# Bibliographie

---

- [1] ABDULAZIZ ALAMRI, O ; ABD EL-RAOUF, M.M ; AHMED ISMAIL, E ; ALMASPOOR, Z ; Alsaedi, B.S.O ; KHAN KHOSA,S et YOUSUF,M. *Estimate Stress-Strength Reliability Model Using Rayleigh and Half-Normal Distribution*. Computational intelligence and neuroscience, 2021, 10 pages.
- [2] ALIN, G.M. *Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques : application sur système embarqué*. Thèse de doctorat en sciences de l'ingénieur. Université D'angers, France, 2007, 188 pages.
- [3] AL-MUTAIRI, D.K ; GHITANY,M.E et KUNDU,D. *Inferences On Stress-Strength Reliability From Lindley Distributions*. Communications in statistics -Theory and Methods, 2013, V(42), no.8, p 1443 – 1463.
- [4] BARO, M et DURAN,G. *Stress/Strength Models to Estimate Systems Reliability  $R(t) = P(X < Y)$* . IJERT, 2018, V(1), 356 – 361. 2278 – 0181.
- [5] BEZAZ, M et MECHAAR, M. *Estimation Bayésienne de paramètre et des caractéristiques de la loi de Rayleigh sous différentes fonctions de perte*. Mémoire en master mathématiques, Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel, 2019. 46 pages.
- [6] BOGAERT,P. *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs : introduction au calcul des probabilités*. De Boeck Supérieur, 2020.
- [7] BOUHAREB, Y et BOUKABOUR, S. *Sur la fonction génératrice des moments universelle*. Mémoire en master mathématiques, Université Frères Mentouri Constantine, 2017, 52.
- [8] BOUHDOU, S et BRAHAM, H. *Application de l'inférence bayésienne en fiabilité*. Master en Mathématiques. Université A.MIRA de Béjaïa, Béjaïa, 2013, 66 pages.
- [9] Coccozza-Thivent, C. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Springer Since and Business Media, 1997.
- [10] DJERIDI, Z. *Choix de l'a priori en statistique Bayésienne dans les essais expérimentaux*. Thèse Doctorat en Probabilités et Statistique. Université Frères Mentouri Constantine 1, Constantine, 2019. 118 pages.
- [11] GODBOUT, M-H. *Comparaison entre l'approche classique et l'approche bayésienne dans le cadre de l'estimation de modèles a choix discrets*. Mémoire en science économique. Université Laval Québec, Canada, 2005. 74 pages.
- [12] HADI SAIL, F. *On Reliability Estimation of Stress-Strength Model*. Mémoire master en science mathématique, Baghdad University College of Education Ibn AL-Haitham, 2017. 114 pages.

- [13] HANECHÉ, N. *Application de quelques méthodes bayésiennes en fiabilité*. Mémoire de master en Mathématiques Appliquées, Université de L'arbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi, 2021. 67 pages.
- [14] HONG-ZHONG, H et ZONG-WEN, A. *A Discrete Stress-Strength Interference Model With Stress Dependent Strength*. IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY, 2009, V(58), NO.1, 118 – 122.
- [15] KHEMISSA, N et GUENOUN, A. *Estimation de la fiabilité par les essais accélérés*. Mémoire en master mathématiques, Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel, 2019. 32 pages.
- [16] KOTZ, S, LUMELSKY, Y et PENSKEY, M. *The Stress-Strength Model and its Generalizations : Theory and Applications*. Singapore : World Scientific, 2003, 253. 981 – 238 – 057 – 4.
- [17] Krishnaiah, P. R. et Rao, C. R. *Stress-Strength Models for Reliability*. Handbook of Statistics, 1998, Vol(7), 27 – 54.
- [18] LAGHA, K. *Fiabilité et Analyse des données de Survie*. Cours Master 1 PSA, Université A.MIRA, Béjaia. 2021.
- [19] LAGHA, K. *Statistique Bayésienne*. Cours Master 1 PSA, Université A.MIRA, Béjaia. 2021.
- [20] LARONDE, R. *Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables - Application à un système photovoltaïque*. These de doctorat en Sciences de l'ingénieur, Ecole doctorale science et technologies de l'information et mathématiques, 2011. 167.
- [21] LEJEUN, M. *Statistique : La théorie et ses applications*. Springer Science and Business Media, 2004.
- [22] MOHAMED, M. *Inference for Reliability and Stress-Strength for Geometric Distribution*. Mathematical Department, Faculty of Science, Zagazig University, Zagazig, Egypt. 2020, 281 – 289.
- [23] RAHMATH, M.J et ANILKUMAR, P. *ESTIMATION OF STRESS-STRENGTH RELIABILITY FOR THE PARETO DISTRIBUTION BASED ON UPPER RECORD VALUES*. STATISTICA, 2018, anno LXXVIII, no.4. 397 – 409.
- [24] SARACOĞLU, B et FEDAI KAYA, M. *Maximum Likelihood Estimation and Confidence Intervals of System Reliability for Gompertz Distribution in Stress-Strength Models*. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 2007, V(8), NO.2, pp, 25 – 36.
- [25] SALMAN, A.N et AMEEN, M.M. *Estimate the shape parameter of generalized Rayleigh distribution using Bayésienne- Shrinkage technique*. International journal of innovation science, engineering and technology. 20015, Vol(2), p 675-683.
- [26] SPRENGER, J. *Bayésianisme versus fréquentisme en inférence statistique*. Le Bayésianisme aujourd'hui, 2016, p. 167 – 192.
- [27] SABAH-KARAM, N. *System Reliability estimation of models using exponentiated exponential distribution*. Journal of science. 2013, V(54), NO.3 ,p 828 – 835.
- [28] TIJERINA, M et Medrano, G. *stress/ strength models to estimate system reliability  $R(t) = \mathbb{P}(X > Y)$* . International journal of engineering research. 2018, Vol (7). p 356-361.

---

**Résumé :**

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressé au problème d'estimation de la fiabilité des systèmes ST-ST(stress strength). L'estimation considérée est l'estimation classique (Méthodes MLE et UMVUE) ainsi que l'estimation bayésienne. Etant donné que la fiabilité de ces modèles est la probabilité  $R = P(X > Y)$  où  $X$  représente la variable strength et  $Y$  la variable stress, nous avons estimé la fiabilité  $R$  à partir de différents modèles paramétriques tels que ( Exponentielle, Gompertz, Rayleigh-Half-Normal et Lindley) dans le cas de variables  $X$  et  $Y$  indépendantes. Des simulations ont été conduites afin de calculer la valeur des estimateurs ainsi qu'une application aux données réelles est proposée.

Mots clef : Fiabilité - Modèle Stress-Strength - MLE - UMVUE - Estimation Bayésienne - Simulation.

**Abstract :**

In this thesis we are interested in the problem of estimating the reliability of ST-ST (stress-strength) systems. The estimation considered is the classical estimation (MLE and UMVUE methods) as well as the Bayesian estimation. Given that the reliability of these models is the probability  $R = P(X > Y)$  where  $X$  is the strength variable and  $Y$  is the stress variable, we estimated the reliability  $R$  from different parametric models such as (Exponentielle, Gompertz, Rayleigh-Half-Normal et Lindley) in the case of independent variables  $X$  and  $Y$  are independent. Simulations have been conducted to calculate the value of the estimators and an application to real data is proposed. real data is proposed.

Key words : Reliability - Stress-Strength Model - MLE - UMVUE - Bayesian Estimation - Simulation.