République Algérienne Démocratique Et Populaire.
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifiques.

Université Abderrahmane-Mira, Béjaia.
Faculté des Sciences Exactes.
Département de Mathématiques.

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Analyse Mathématique.

Par : Nesrine KHEBAT.

Méthode des sous sur-solutions

Devant le jury composé de :

Président	M. F. BOUHMILA	MCA	U. A. Mira Béjaia.
Encadreur	M^{elle} S. MEDJBAR	MCB	U. A. Mira Béjaia.
Examinatrice	Mme. H. BECHIR	Professeur	U. A. Mira Béjaia.
Examinatrice	M^{elle} L. BAICHE	MCB	U. A. Mira Béjaia.

Année universitaire : 2021/2022.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

• À la mémoire de mon père et de mon grand-père.
• À ma chère maman et mon adorable grand-mère que je remercie d'ailleurs pour leurs soutiens durant toutes ces années d'études, et leurs encouragements pour que je puisse atteindre mon objectif.
• À mes deux grands parents.
• À ma Diarène.
• À ma chère regretté Lydia qui nous a quitté ce mois-ci.
• À mon oncle "papi"
• À ma tante Souad pour sa pésence et son aide.
• À mes chèrs , embêtants amis Chicha, Noura, Hanane, Sara, Nabila, Wima, Imene, Sylia, Nassima, Moulou, winchou, Dadi qui m'ont accompagné, aidé, soutenue, encouragé et surtout supporté mes sauts d'hummeur.
• À mes cousins et mes cousines.
Enfin, Je le dédie également à toute ma famille et mes proches.

Remerciements

En guise de reconnaissance, je tiens à témoigner mes sincère remerciements à tous les enseignants du département mathématiques et à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

Tout d'abord, ce travail n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de M^{lle} S. MEDJBAR. Je la remercie pour sa patience, sa confiance et sa disponibilité durant l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier M^{r} F. BOUHMILA pour l'honneur qu'il a bien volu faire en acceptant de présider le jury.

Mes remerciements vont aussi à M^{me} H. BECHIR et M^{lle} L. BAICHE pour avoir accepté d'examiner ce mémoire, ce qui m'inspire un grand honneur.

Résumé

L'objet de ce mémoire consiste à mettre en évidence l'importance et l'utilité de la méthode des sous et sur solutions.
Cette dernière donne l'existence et la localisation d'une solution qui évolue entre une paire de sous et sur solutions.
En particulier ici, on a étudié l'existence en trois cas : Celui où la fonction f est de classe C^1, où f est L^p- Carathéodory et le cas où f est Carathéodory.
Puis, on a proposé des exemples et problème d'application.

Abstract

The object of this dessertation consists in putting in evidence the importance and the utility of the method of upper and lower solutions.
This method has been successfully applied to study and prove the existence and the localisation of a solution to a differential equation.
Here, we have study the existence on three cases : When the function f is C^1, when f is L^p Carathéodory and finally when f is just Carathéodory.
Then, we opted for some examples and application problem.

Table des matières

Notations

on donne ci-dessous l'ensemble des notations employé tout au long de ce mémoire :

• λ : un paramètre réel.

• Ω : désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

• $n \in \mathbb{N}$.

• $\partial\Omega$: la frontière de Ω.

• $\triangle u$: le laplacien de la fonction u tq $\triangle u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

• $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$: le gradient de u.

• $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

• $C(\overline{\Omega})$: l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

• $D(\Omega)$: l'espace vectoriel des fonctions tests sur Ω.

• $C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (avec $k \in \mathbb{N}^*$).

• $C_c(\Omega)$: l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

• $C_0^1(\overline{\Omega})$: le sous espace vectoriel de $C^1(\overline{\Omega})$ constitué de fonctions de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et nulle sur $\partial\Omega$.

• φ_1 : la fonction propre associée à λ_1.

• $C^k(\overline{\Omega})$: l'espace des fonctions u de $C^k(\Omega)$ tel que chaque multi-indice α, $|\alpha| \leq k$, l'application : $x \in \Omega \mapsto D^\alpha u(x)$ se prolonge continûment sur $\overline{\Omega}$.

Introduction générale

L'analyse fonctionnelle s'est développée pour résoudre divers problèmes, le plus souvent représentés par des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles.
Plusieurs techniques ont été développées dans ce sens.
La méthode des sous-solutions et sur-solutions pour les équations différentielles ordinaires fut initiée par Scorza [5] en 1931. Depuis lors, un grand nombre de contributions ont enrichi la théorie. Notamment, les extensions faites par Nagumo [9], Erbe [6], Mawhin [8], Adjé [1], De Coster et Habets [3].
Comme technique pour prouver l'existence de solution et sa localisation pour les équations différentielles non linéaires, la méthode des sous et sur solution est un outil intéressant par sa simplicité. Le résultat principal de la méthode est un genre de théorème des valeurs intermédiaires. Il prouve que si, nous pouvons trouver une sous-solution inférieure à une sur-solution, alors il existe une solution qui évolue entre les deux.

Dans ce travail, on s'interesse en particulier à la méthode de sous et sur solution sous certaines conditions, cette dernière donne l'existence et la localisation d'une solution d'un problème aux limites en présence d'un couple de fonctions, appelées sous et sur solutions, bien ordonnées.

Elle peuvent être considérées comme des approximations de la solution avec une erreur de signe constant.
Plusieurs questions se posent à propos de cette méthode parmis elles : Pour quel type de problèmes a-t-on ce genre de résultats ? Peut-on approcher la solution ainsi obtenue ? Dans les applications, comment fait-on pour trou-

ver ces sous- et sur-solutions ? Que se passe-t-il dans le cas où ce couple de fonctions n'est pas bien ordonné ? Quels sont les liens entre cette théorie et d'autres, telles que la théorie du degré ou les méthodes variationnelles qui permettent d'obtenir des résultats de multiplicité ? Autant de questions qui ont déjà donné lieu à de nombreuses publications ou qui font encore l'objet de recherche.

Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes intéressés à des problèmes aux limites de la forme

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(x, u(x)) & dans \;\; \Omega, \\ u(x) = 0 & sur \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous montrerons l'existence et l'unicité (ou la multiplicité de solutions) par le biais de la méthode des sous et sur solutions.

-Le plan que nous allons adopter dans ce mémoire est sous forme de deux chapitres : le premier chapitre est constitué de généralités qui seront données un certain nombre de rappels d'outils de l'analyse mathématiques auxquels nous aurons recours fréquemment.

Le deuxième chapitre est consacré aux différents théorèmes relatifs à la méthode des sous sur-solution avec quelques exemples d'applications.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des défintions, notations, propositions, ainsi que les théorèmes qui seront utilisés le long de ce mémoire.

1.1 Les espaces L^p

Définition 1.1 *voir [2]*
soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
• $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable}, \int_\Omega |f(x)|^2 < \infty\}$.
L'espace $L^2(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

• $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$
$= \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f|^p < \infty\}$.

L'espace $L^p(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

• $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f\ \textit{mesurable},\ \exists c > 0\ \ tq\ |f(x)| \leq c\ p.p\ sur\ \Omega\}$.
L'espace $L^\infty(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = inf\,\{c, |f(x)| \leq c\ p.p\ sur\ \Omega\}\,.$$

1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous regroupons un certain nombre de résultats concernant les espaces de Sobolev, qui nous seront utiles par la suite. Pour une présentation plus complète, ou pour la démonstration des résultats que nous énonçons juste après.

1.2.1 Définitions, propositions et théorèmes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.2 *voir [2]*
Pour $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^*$, $i = 1..n$ *avec* $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$

On définit la dérivée distributionnelle notée :

$$D^\alpha u = \frac{\partial|\alpha_1|}{\partial x_1^{|\alpha_1|}} \cdots \frac{\partial|\alpha_n|}{\partial x_n^{|\alpha_n|}} u$$

par

$$\langle \rho, D^\alpha u\rangle = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} u D^\alpha \rho \, dx \quad \forall \rho \in C_0^\infty(\Omega).$$

Définition 1.3

On appelle espace de Sobolev d'ordre un et on note $W^{1,p}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles premières au sens des distributions sont des fonctions de $L^p(\Omega)$, c-à-d :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega);\ \exists g_j \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega g_j \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), j = 1,..,N \right\}$$

avec $g_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Si $p = 2$ alors $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

et du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ et\ |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

et du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{\alpha \in N, |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

De façon générale, pour $1 \leq p < \infty$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$
On définit l'espace :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ avec\ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\right\}$$

Il n'admet pas de produit scalaire car on est dans L^∞ *mais parcontre il admet une norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, |\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Définition 1.4
Nous désignons par $W_0^{1,p}(\Omega)$ *l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.
En particulier pour $p = 2$,

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

l'adhérence de $D(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$, *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.1 *voir [2]*
• $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$.
• $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace reflexif (De toute suite bornée dans cet espace on peut extraire une sous suite faiblement convergente), pour* $1 < p < \infty$.
• $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < \infty$.
• $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert séparable.*
• $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

1.2.2 Les injections de Sobolev

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 1.5 *(Injection continue)*
On dit que E s'injecte continûment dans F et on note $E \hookrightarrow F$ *si les conditions suivantes sont vérifiées :*
(i) E est un sous-espace de F, autrement dit $\forall u \in E, u \in F$.
(ii) Toute suite convergente dans E est convergente dans F, autrement dit l'application identité est continue.

Définition 1.6 *(Injection compacte)*
On dit que E s'injecte de façon compacte dans F et on note $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ *si les*

deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) E s'injecte continûment dans F.

(ii) L'application $I : E \to F$ est compacte.

à savoir que : Toute suite bornée de E est relativement compacte dans F.

Proposition 1.2 *(**Inégalité de Hölder** voir [2])*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \le p \le +\infty$ et p' l'exposant conjugué de p c-à-d :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

alors

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega) \\ \int_\Omega |fg|dx \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \end{cases}$$

Théorème 1.1 *(**Sobolev, Gagliardo, Nirenberg** voir [2])*

Soit $1 \le p < N$, on pose $p^* = \frac{Np}{N-p}$ ou d'une façon équivalente $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ (p^* est dit " exposant critique de Sobolev " de p).

Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Proposition 1.3 *voir [2]*

Si $1 \le p < N$ alors

$W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \qquad \forall q \in [p, p^*]$

Théorème 1.2 *(**Morrey** voir [2])*

Soit $p > N$ *alors*

$W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *on a*

$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}$ *p.p* $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Avec* $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *et* c *une constante qui dépend seulement de* p *et* N.

Théorème 1.3 *voir [2]*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *de classe* C^1, *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *borné.*

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, *on a*

(1) Si $1 \leq p < N$ *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [p, p^*]$$

(2) Si $p = N$ *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [N, +\infty[$$

(3) Si $p > N$ *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega).$$

Théorème 1.4 ***(Rellich, Kondrachov*** *[2])*

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, on a

(1) Si $p < N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[$$

(2) Si $p = N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$$

(3) Si $p > N$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\Omega).$$

Corollaire 1.1 *voir [2]*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ (où $N \geq 3$) et il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

pour tout $r \in [1, \frac{2N}{N-2}]$ et pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

De plus, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte pour $r \in [1, \frac{2N}{N-2}[$.

Proposition 1.4 ***(Inégalité de Poincaré*** *voir [2])*

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$(ou borné dans une direction).

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$

Théorème 1.5 *(**Théorème du point fixe de Shauder** voir [4])*
Soit X un espace de Banach et R un réel strictement positif.
Si $T : B(0,R) \to B(0,R)$ est un opérateur complètement continu (c'est-à-dire continu et tel que , pour toute partie bornée D de X, $\overline{T(D)}$ est compacte).
Alors T admet au moins un point fixe.

Théorème 1.6 *(**Une des formes du principe du maximum**)*
Si $w \in W^{2,p}(\Omega)$, avec $p > N$, vérifie $\forall p.p\ x \in \Omega, -\triangle w(x) \leq 0$, alors w ne peut pas atteindre un maximum $M \geq 0$ dans Ω sauf si w est constante.

Théorème 1.7 *(**Une forme du principe du maximum de Hopf**)*
On considère une fonction $w \in W^{2,p}(\Omega)$, avec $p > N$. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et B une boule ouverte contenue dans Ω et telle que $x_0 \in \partial B$.
Si $\forall p.p\ x \in B, -\triangle w(x) \geq 0$ et $w(x) > w(x_0)$, pour tout $x \in B$. Alors $\frac{\partial w}{\partial n}(x_0) < 0$, avec n qui désigne la normale sortante à Ω au point x_0.

1.3 Théorème de Lax Milgram

Théorème 1.8 *voir [2]*

Soit H un espace de Hilbert réel et H' son dual topologique.
Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur $H \times H$, continue et coercive, alors

(i) Pour tout $l \in H'$, $\exists! u \in H$ tel que $\forall v \in H : a(u,v) = \langle l, v \rangle$ ....(*)

(ii) Il existe une constante $c > 0$, indépendante de l, tq $\|u\|_H \leq c\|l\|_{H'}$

(iii) Si de plus $a(.,.)$ est symétrique, alors l'unique solution u de l'équation (*) est caractérisée par

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle l, v \rangle$$

la fonctionnelle associée.

Théorème 1.9 ***(Théorème de la convergence monotone ou Beppo-Levi*** *voir [**?**])*

Soit$(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives.
En notant

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x),$$

on a :

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

lemme 1.1 ***(Lemme de Fatou*** *voir [7])*
Soit$(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives.
Alors :

$$\int_\Omega \liminf_{n \to \infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Théorème 1.10 ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue*** *voir [7])*
Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que
(i) *f_n converge presque partout vers une fonction mesurable.*
(ii) *Il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout.*
Alors,

$$f \in L^p(\Omega) \ et \ \lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0, \ c - \grave{a} - d \ \lim_{n \to \infty} \int_\Omega |f_n - f| \, dx = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega \lim_{n \to \infty} f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Chapitre 2

Théorèmes relatifs à la méthode des sous sur-solutions

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions via la méthode des sous sur-solutions. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle\ u(x) = f(x, u(x)) & dans\ \Omega, \\ \quad u(x) = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

où f est une fonction définie de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Nous commençons par donner les définitions qui nous seront utiles dans ce chapitre.

Définition 2.1 *voir [4]*
(i) *On dit que $\underline{u}$ est une sous solution du problème* (2.1) *si :*
- *Pour presque tout $x \in \Omega$, $-\triangle \underline{u}(x) \leq f(x,\ \underline{u}(x))$.*
- *Pour tout $x \in \partial\Omega$, $\quad \underline{u}(x) \leq 0$.*

(ii) *On dit que $\overline{u}$ est une sur solution du problème (2.1) si :*

- *Pour presque tout* $x \in \Omega, -\triangle\overline{u}(x) \geq f(x, \overline{u}(x))$.
- *Pour tout* $x \in \partial\Omega, \quad \overline{u}(x) \geq 0$.

Remarque 2.1

Si u est une solution de(2.1), il est évident qu'elle est à la fois une sous-solution et une sur-solution.

Définition 2.2

*Une sous-solution ou une sur-solution de(2.1) est dite **propre**, si elle n'est pas une solution de (2.1).*

2.1 Cas où f est de classe C^1

Le théorème suivant montre que le problème (2.1) admet une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *quand* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^1 *par rapport à la variable u.*

Théorème 2.1 *voir [10]*

Soit $\underline{u}$ *(resp.,* $\overline{u}$*) une sous solution (resp., une sur solution) du problème (2.1) telle que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *dans* Ω*. Alors, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) *Il existe une solution u du problème (2.1) satisfaisant* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

(ii) *Ils existent des solutions minimales et maximales* u_{min} *et* u_{max} *du problème (2.1) dans l'intervalle* $[\underline{u}, \overline{u}]$.

La démonstration est basée sur la méthode monotone développée par Amman

<u>Preuve</u> *:*

(i) *Soit* $g(x, u) = f(x, u) + au$ *où a est une constante réelle.*

On peut choisir $a \geq 0$ suffisamment grand de sorte que $u \mapsto g(x,u) \in \mathbb{R}$ est croissante sur $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$.
Pour $x \in \Omega$, on choisit $a \geq 0$ tel que

$$a \geq max\left\{-f(x,u); x \in \overline{\Omega},\ u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]\right\}.$$

pour ce choix de a, nous définissons la suite de fonctions $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ comme suit :
$u_0 = \overline{u}$ et pour tout $n \geq 1$, u_n est la solution unique du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u_n + au_n = g(x, u_{n-1}) & dans \Omega \\ u_n = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

Montrons que $\underline{u} \leq ... \leq u_{n+1} \leq u_n \leq ... \leq u_0 = \overline{u}$.
Pour prouver que $u_1 \leq \overline{u}$, on utilise le principe du maximum. On a, par la définition de u_1 :

$$\begin{cases} -\triangle(\overline{u} - u_1) + a(\overline{u} - u_1) \geq g(x, \overline{u}) - g(x, \overline{u}) = 0 & dans\ \Omega \\ \overline{u} - u_1 \geq 0 & sur\ \partial\Omega \\ \end{cases}$$

Comme l'opérateur $-\triangle + aI$ est coercif, il s'en suit que $\overline{u} \geq u_1$ dans Ω.

Pour la preuve de $\underline{u} \leq u_1$, nous remarquons que $\underline{u} \leq 0 = u_1$ sur $\partial\Omega$.
Pour $x \in \Omega$, on a

$$-\triangle(\underline{u} - u_1) + a(\underline{u} - u_1) \leq f(x, \underline{u}) + a\underline{u} - g(x, \overline{u}) \leq 0.$$

La monotonie de g et le principe du maximum impliquent que $\underline{u} \leq u_1$.
Maintenant supposons que

$$\underline{u} \leq ... \leq u_n \leq u_{n-1} \leq ... \leq u_0 = \overline{u}.$$

On va montrer que

$$\underline{u} \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

Prenons en considération les équations satisfaites par u_n *et* u_{n+1} *on obtient :*

$$\begin{cases} -\triangle(u_n - u_{n+1}) + a(u_n - u_{n+1}) = g(x, u_{n-1}) - g(x, u_n) \geq 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \quad u_n - u_{n+1} \geq 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce qui implique que $u_n \geq u_{n+1}$ *dans* Ω.

D'un autre côté, on a

$$\begin{cases} -\triangle\underline{u} + a\underline{u} \leq g(x, \underline{u}) & \textit{dans } \Omega, \\ \underline{u} \leq 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et d'après la définition de u_{n+1}*, nous avons*

$$\begin{cases} -\triangle(u_{n+1} - \underline{u}) + a(u_{n+1} - \underline{u}) \geq g(x, u_n) - g(x, \underline{u}) \geq 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \quad u_{n+1} - \underline{u} \geq 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Encore, par le principe du maximum, on déduit que $\underline{u} \leq u_{n+1}$ *dans* Ω.
Ce qui complète la preuve. D'après ce qui précède, il existe une fonction u *telle que, pour chaque* $x \in \Omega$ *fixé on a*

$$u_n(x) \to u(x) \textit{ quand } n \to \infty$$

Maintenant on doit montrer qu'on peut passer à la limite dans le problème (2.2).

Soit $g_n(x) = g(x, u_n(x))$*, remarquons que la suite* (g_n) *est bornée dans* $L^\infty(\Omega)$*,*

par conséquent elle est dans tout $L^p(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$.
En passant à la limite dans (2.2) et on a la suite (u_n) *est bornée dans* $W^{2,p}(\Omega)$ *pour tout* $1 < p < \infty$.
L'espace $W^{2,p}(\Omega)$ *s'injecte de façon continue dans l'espace de Hölder* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *pour* $\alpha = 1 - \frac{N}{2p}$ *condition que* $p > \frac{N}{2}$. *Donc* (u_n) *est bornée dans* $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Par les estimations dans les espaces de Hölder, nous déduisons que la suite (u_n) *est bornée dans* $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Comme l'injection de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *dans* $C^2(\overline{\Omega})$ *est compacte, il s'ensuit que*

$$u_n \to u \qquad dans \;\; C^2(\overline{\Omega}).$$

Puisque la suite est monotone, donc la suite converge vers u dans $C^2(\Omega)$.
Passons maintenant à la limite dans le problème (2.2) quand $n \to \infty$.
Par conséquent u est une solution du problème (2.1). Le point (i) est démontré.

(ii) On désigne par $\overline{u}$ *la solution obtenue par la technique ci-dessus et en choisissant* $u_0 = \overline{u}.u_{max}$ *est la solution maximale dans l'intervalle* $(\underline{u}, \overline{u})$.
En effet, soit $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ *une solution arbitraire. En utilisant les arguments précédents, on a trouvé que* $u \leq u_n$, *pour chaque* $n \geq 0$,
ce qui implique que $u \leq \overline{u}$. □

Exemple 2.1 *Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $N \geq 3$, et soit*

$$f(x,u) = \lambda f(x) + u^{p-1}$$

où $p = \frac{2N}{N-2}$, λ un paramètre positif et f une fonction continue sur Ω telle que $1 \leq f(x) \leq K < \infty$.
Soit u_f solution positive du problème :

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, $\underline{u} = \lambda u_f$ est une sous-solution du problème (2.1) pour tout $\lambda > 0$. Notons par e la solution positive du problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle e = 1 & \text{dans } \Omega, \\ e=0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le théorème de Lax Milgram, nous assure l'existence d'une unique solution.

On remarque que $\overline{u} = Ce$ est une sur solution du problème, car on peut trouver $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda \leq \lambda_0$, il existe $C = C(\lambda) > 0$ satisfaisant

$$C \geq \lambda f(x) + C^{p-1}e^{p-1}$$

En prenant λ suffisamment petit, on a

$$\lambda u_f \leq Ce.$$

D'après le théorème 2.1, le problème (2.1) admet au moins une solution u telle que

$$\lambda u_f \leq u \leq Ce.$$

2.2 f est L^p- Carathéodory

Dans cette partie, on s'intéresse à montrer l'existence de solutions lorsque f est une fonction L^p-Carathéodory, dont nous donnons la définition ci-dessous :

Définition 2.3 *voir [4]*
Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On dit que f est L^p-carathéodory si elle vérifie les conditions suivantes :

- *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y)$ est mesurable sur Ω.*

- *Pour p.p $x \in \Omega$, $f(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

- $\forall R > 0$, $\exists h_R \in L^p(\Omega)$ *telle que* $\forall$ *p.p* $x \in \Omega$, $\forall y \in [-R, R]$, $|f(x,y)| \leq h_R(x)$.

Définition 2.4 *voir [4]*
Soient a et b deux fonctions définies de Ω dans $\mathbb{R}$, bornées et telles que $a \leq b$.
On définit une partie E de $\mathbb{R}^{n+1}$, on pose

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}/a(x) \leq y \leq b(x)\}$$

Pour tout $y \in \Omega$, on note

$$A_y = \{x \in \Omega/a(x) \leq y \leq b(x)\}$$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, on dit que f est L^p-carathéodory si elle vérifie les conditions suivantes :

• *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $A_y \neq \emptyset$, *la fonction* $f(.,y)$ *définie sur* A_y *est mesurable.*

• *Pour p.p* $x \in \Omega$, $f(x,.)$ *est continue sur* $[a(x), b(x)]$.

• $\exists h \in L^p(\Omega)$ *telle que* $\forall (x,y) \in E$, $|f(x,y)| \leq h(x)$.

Remarque 2.2

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si f vérifie les conditions de la définition 2.1, alors f vérifie les conditions de la définition 2.2, pour toute partie E de $\Omega \times \mathbb{R}$ *définie comme dans la définition 1.2*

Exemple 2.2

Une fonction f définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ *par* $f(x,y) = g(x) + h(y)$

ou $f(x,y) = g(x)h(y)$, *avec* $g \in L^p(\Omega)$ *et* $h \in C(\mathbb{R})$, *est* L^p*-carathéodory.*

lemme 2.1

Si on désigne par g une fonction appartenant à $L^p(\Omega)$ *et que l'on considère le problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = g(x) & \textit{dans } \Omega, \\ u(x)=0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\blacktriangle)$$

Ce problème admet une seule solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$. *De plus,* $\exists C > 0$ *et* $\exists C' > 0$ *(C et C' constantes indépendantes de g) telles que* $\forall g \in L^p(\Omega)$ *la solution u de* $(\blacktriangle)$, *vérifie*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{et} \quad \|u\|_{C^1(\overline{u})} \leq C'\|g\|_{L^p(\Omega)} \ldots\ldots\ldots (\star)$$

Théorème 2.2

Soit $\underline{u}$ et $\overline{u}$ respectivement une sous-solution et une sur-solution de (2.1), vérifiant $\underline{u} \leq \overline{u}$.
Si $f : E \to \mathbb{R}$ est L^p-carathéodory avec $E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}/\underline{u}(x) \leq y \leq \overline{u}(x)\}$ et $p > n$, alors (2.1) admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Preuve *:*

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x, \gamma(x, u(x))) & \text{dans } \Omega, \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

avec γ définie par : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\gamma(x, z)=$ $\begin{cases} \underline{u}(x) & \text{si } z < \underline{u}(x), \\ z & \text{si } \underline{u}(x) \leq z \leq \overline{u}(x), \\ \overline{u}(x) & \text{si } z > \overline{u}(x). \end{cases}$

Notons d'abord que $\forall x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}$, $\underline{u}(x) \leq \gamma(x, z) \leq \overline{u}$ et $(x, \gamma(x, z)) \in E$.
D'après l'hypothèse sur f, nous avons $\exists h \in L^p(\Omega)/\forall p.p\ x \in \Omega$, $\forall z \in \mathbb{R}$,
$|f(x, \gamma(x, z))| \leq h(x)$.........$(*)$

Première étape *:*

Le problème a au moins une solution.

Appliquons le théorème du point fixe de Schauder à l'opérateur

$T_2 : C^1_B(\overline{\Omega}) \to C^1_B(\overline{\Omega})$, *où* $u = T_2(v)$ *est la solution du problème*

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x, \gamma(x, v(x))) \quad dans\Omega, \\ \qquad u=0 \qquad sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

• *Soit* $v \in C^1_B(\overline{\Omega})$.

Montrons que T_2 *est continu en* v.

Considérons une suite (v_n) *d'éléments de* $C^1_B(\overline{\Omega})$*qui converge vers* v *dans* $C^1_B(\overline{\Omega})$.

Pour tout $w \in C^1_B(\overline{\Omega})$, *notons* $g_w : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x, \gamma(x, w(x)))$.

Nous avons alors, g_w *mesurable et pour p.p* $x \in \Omega$, $|g_w(x)| \leq h(x)$, *et de ce fait,* $g_w \in L^p(\Omega)$.

Notons $\psi : C^1_B(\overline{\Omega}) \to L^p(\Omega), w \mapsto g_w$.

D'après (1.3) nous avons :

$$\exists\ C' > 0\ tq\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|T_2(v_n) - T_2(v)\|_{C^1_B(\overline{\Omega})} \leq C'\|\psi(v_n) - \psi(v)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour montrer que T_2 *est continu en* v, *il nous suffit de montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \psi(v_n) = \psi(v)\ dans\ L^p(\Omega).$$

Une disjonction de cas (selon les positions relatives respectives de $v_n(x)$ *et* $v(x)$ *par rapport à* $\underline{u}(x)$*et* $\overline{u}(x)$*) montre que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \Omega$,

$$|\gamma(x, v_n(x)) - \gamma(x, v(x))| \leq |v_n(x) - v(x)|.$$

En outre, $f(x, .) = [\underline{u}(x), \overline{u}(x)] \to \mathbb{R},\ y \mapsto f(x, y)$ *est continue pour p.p* $x \in \Omega$.

Il en résulte par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p.p\ x \in \Omega,\ |\psi(v_n(x)| \leq h(x)$.

Par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous déduisons que $\psi(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(v)$ *dans* $L^p(\Omega)$.

• *Justifions le fait que* T_2 *soit complètement continue.*

Soit D *une partie bornée de* $C^1_B(\overline{\Omega})$. *Puisque* f *est* L^p*-Carathéodory,* $\psi(D)$ *est borné dans* $L^p(\Omega)$ *et d'après* $(\star), T_2(D)$ *est borné dans* $W^{2,p}(\Omega)$.

L'injection compacte de $W^{2,p}(\Omega)$ *dans* $C^1(\overline{\Omega})$ *fait que* $\overline{T_2(D)}$ *est un compact de* $C^1_B(\overline{\Omega})$.

• *L'hypothèse de stabilité d'une boule par* T_2.

D'après $(\star) et (*), \exists R > 0$ *tq* $T_2(C^1_B(\overline{\Omega})) \subset B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)$.

Par exemple, $R = C'\|h\|_{L^p(\Omega)}$, *où* C' *et* h *sont respectivement la constante qui apparait dans* $(*)$ *et la fonction qui apparait dans* $(*)$ *convient.*

Nous avons donc, a fortiori, $T_2(B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)) \subset B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)$.

Les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder sont toutes remplies. Donc (2.4) admet un point fixe , ce qui revient à dire que (2.3) admet une solution.

Deuxième étape *:*

Toute solution u *de (2.3) vérifie* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Montrons que $\underline{u} \leq u$. *Si tel n'était pas le cas, nous aurions* $\max_{\Omega}(\underline{u} - u) = M > 0$.

Nous avons sur le bord $\partial\Omega$, $\underline{u} \leq u$. *Donc* $\exists x_0 \in \Omega$ *tel que* $\underline{u}(x_0) - u(x_0) = M$, *et par continuité de* $\underline{u} - u$, $\exists x_1 \in \Omega$ *tel que* $\underline{u}(x_1) - u(x_1) < M$.

On déduit que :

$$\exists\Omega_1,\ -\triangle(\underline{u}-u)(x) \leq f(x,\underline{u}(x)) - f(x,\gamma(x,u(x))) = f(x,\underline{u}) - f(x,\underline{u}) = 0.$$

Ce qui contredit le principe du maximum.
$u \leq \overline{u}$ *se démontre de manière analogue.*

Conclusion *:*
De $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*, il en résulte que* $\forall x \in \Omega, \gamma(x,u(x)) = u(x)$ *et que finalement, si u est une solution de (2.4) alors elle est une solution de (2.3) et elle vérifie la localisation annoncée.* □

Exemple 2.3
Considérons le probleème aux limites unidimontionnel :

$$\begin{cases} -u'' = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 \quad sur \quad]0,\pi[, \\ \quad u(0)=u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Il est clair que la fonction constante $B = 1$ *est une sur-solution de ce problème.*

Par ailleurs, des calculs simples montrent que si on choisit le réel strictement positif c suffisamment petit, la fonction $\underline{u} : x \mapsto cx^{\frac{3}{2}}(\pi - x)^{\frac{3}{2}}$ *est une sous-solution de (2.5), et si on choisit c suffisamment petit, on a* $\underline{u} \leq \overline{u}$*.*
La fonction $f_1 :]0,\pi[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $(x,u) \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}} - 1$ *ne vérifie pas les conditions de la Définition 2.3 , puisqu'elle n'est même pas définie pour* $u \leq 0$*.*
En revanche, si l'on pose $E = \{(x,y) \in]0,\pi[\times\mathbb{R}/\underline{u}(x) \leq y \leq \overline{u}(x)\}$*, la fonction* $f_2 : E \to \mathbb{R}$, $(x,u) \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}} - 1$ *est* L^p*-Carathéodory.*

En effet, la fonction f_2 vérifie à l'évidence les axiomes (i) et (ii) de la définition 2.4, la vérification de l'axiome (ii) par f_2 résultant de l'inégalité $\forall (x,u) \in E,\ 0 < \underline{u}(x) \leq u$.
Quant à l'axiome (iii) de la définition 2.4 , il est vérifié par f_2 graâce à la majoration $\forall (x,y) \in E, |f_2(x,y)| \leq h(x) = \frac{1}{\sqrt{c}x^{\frac{3}{4}}(\pi-x)^{\frac{3}{4}}} + 1$ et au fait que la fonction h définie dans cette majoration appartient à $L^p\ (0,\pi)$pour tout $p \in]1, \frac{4}{3}[$.
Toutes les conditions sont donc réunies pour que l'on puisse appliquer le théorème 2.2.
Cet exemple montre toute la pertinence de la définition 2.4 et ce qu'elle apporte de plus que la définition 2.3 dans la théorie de sous-solution et sur-solution.
Il montre, en effet, l'intérêt de supposer que la fonction f, qui est au second membre du problème(2.1), est L^p-Carathéodory en tant que la fonction de E dans $\mathbb{R}$(c'est-à-dire au sens de la définition 2.4 avec a une sous-solution de (2.1) et b une sur-solution du problème (2.1)) plutôt qu'on tant que fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (C'est-à-dire au sens de la définition 2.3).

Le théorème suivant, qui sera admis, généralise le théorème 2.2. Nous serons amenés à l'appliquer souvent.

Théorème 2.3

On désigne par q et r, deux entiers naturels non nuls.
Soient $\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_q$, des sous-solutions de (2.1) et $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_r$, des sur-solutions de (2.1).
Notons $\underline{u} = max\left(\underline{u}_1, \underline{u}_2, ..., \underline{u}_q\right)$ et $\overline{u} = min\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_r\right)$.
Si $\underline{u} \leq \overline{u}$, et si $f : E \to \mathbb{R}$ est L^p-Carathéodory avec
$E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} / \underline{u}(x) \leq y \leq \overline{u}(x)\}$ et $p > n$, alors (2.1) admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Remarque 2.3

Notons que la fonction $\underline{u}$ (resp $\overline{u}$), définie dans le théorème 2.3, n'est pas nécessairement une sous-solution (resp une sur-solution) de (2.1), au sens de la définition 2.1 , parcequ'il peut lui manquer la régularité qui y requise.
Remarquons cependant que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont continues.
On pourait adopter une définition plus large des notions de sous-solution et sur-solution, qui généraliserait la définition 2.1 et qui ferait $\underline{u}$ et $\overline{u}$, telles qu'elles sont définies dans le théorème 2.3, respectivement, une sous-solution et une sur-solution du problème (2.1)

Exemple 2.4 *Etant donné un paramètre réel $\epsilon > 0$, on considère le problème aux limites unidimensionnel :*

$$\begin{cases} -\epsilon^2 u''(x) = \varphi(|x|) - \varphi(u(x)) \quad si \quad x \in]-1,1[, \\ \qquad\qquad u(\text{-}1)=u(1)=1. \end{cases} \tag{2.6}$$

où $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ et vérifie pour tout $x \in [-1,1]$, $\varphi'(x) \geq a^2 > 0$, avec a un réel > 0.

Première idée *:*

Il est facile de vérifier que les fonctions $\underline{u}$ et $\overline{u}$ constantes, définies par $\underline{u} = 0$ et $\overline{u} = 1$, sont respectivement sous-solution et sur-solution de (2.6).
En effet,

$$-\epsilon^2 \underline{u}''(x) = 0 \leq \varphi(|x|) - \varphi(0), \underline{u}(-1) \leq 1, \underline{u}(1) \leq 1.$$

$$-\epsilon^2 \overline{u}''(x) = 0 \geq \varphi(|x|) - \varphi(1), \overline{u}(-1) \geq 1, \overline{u}(1) \geq 1.$$

Comme $\underline{u} \leq \overline{u}$, nous déduisons par le théorème 2.2 l'existence d'une solution $u_\epsilon \in [\underline{u}, \overline{u}]$.
Mais cet encadrement par deux constantes ne nous renseigne pas sur le comportement de la solution u_ϵ lorsque $\epsilon \to 0$.

Deuxième idée :
Posons $\underline{u}(x) = |x|$ et $\overline{u}_\epsilon(x) = |x| + \frac{\epsilon}{a}e^{\frac{a}{\epsilon}|x|}$, pour tout $x \in [-1, 1]$.
Chacune des fonctions définies sur [-1,1] par $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ est une sous-solution se (2.6). Et pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $|x| = max(x, -x)$.
D'autre part, on vérifie aisément que $\overline{u}_\epsilon$ est une fonction de classes C^2 sur [-1,1].

Montrons que $\overline{u}_\epsilon$ est une sur-solution de (2.6).
Nous avons :

$$-\epsilon^2\overline{u}_\epsilon''(x) = \begin{cases} -\epsilon a e^{-\frac{a}{\epsilon}x} & si \;\; x \in [0, 1], \\ \text{-}\epsilon a e^{\frac{a}{\epsilon}x} & si \;\; x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

$$et \;\; \varphi(|x|) - \varphi(\overline{u}_\epsilon(x)) = \begin{cases} \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{a}{\epsilon}x}\right) & si \;\; x \in [0, 1], \\ \varphi(-x) - \varphi\left(-x + \frac{\epsilon}{a}e^{\frac{a}{\epsilon}x}\right) & si \;\; x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Soit $x \in [0, 1]$.
D'après le théorème des acroissements finis, il existe un réel c compris entre x et $x + \frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{a}{\epsilon}x}$ tel que

$$\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{a}{\epsilon}x}\right) = -\frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{a}{\epsilon}x}\varphi'(c).$$

Compte tenu de la condition $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) \geq a^2$, nous avons,
pour tout $x \in [0,1]$,

$$-\frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{a}{\epsilon}x}\varphi'(c) \leq -\epsilon a e^{-\frac{a}{\epsilon}x} = -\epsilon^2 \pi''_\epsilon(x).$$

De manière analogue, on montre que pour tout $x \in [-1,0]$,

$$\varphi(-x) - \varphi(-x + \frac{\epsilon}{a}e^{\frac{a}{\epsilon}x}) \leq -\epsilon^2 \pi''_\epsilon(x).$$

Comme $\underline{u} \leq \overline{u}_\epsilon$, pour tout réel $\epsilon > 0$, nous pouvons appliquer le théorème 2.3 qui nous permet d'affirmer que :
Il existe u_ϵ solution de (2.6) telle que $u_\epsilon \in [\underline{u}, \overline{u}_\epsilon]$ et vérifie donc $\forall x \in [-1,1]$, $|u_\epsilon(x) - |x|| \leq \frac{\epsilon}{a}e^{-\frac{a}{\epsilon}|x|}$. Nous pouvons en déduire que la famille de solutions $\{u_\epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}^*_+\}$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto |x|$, lorsque $\epsilon \to 0$.

Remarque 2.4 *:*
On pourrait se poser la question de savoir, si on peut se passer de la condition $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans le théorème 2.2 pour assurer l'existence d'une solution de (2.1). Et la réponse est : ***Non****.*

En effet, si $\underline{u} \nleq \overline{u}$, le problème (2.1) peut ne pas admettre de solution, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda_k u + \varphi_k & \textit{dans } \Omega, \\ u=0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

où λ_k est une valeur propre de l'opérateur $-\triangle$ sur $H^1_0(\Omega)$, autre que la première, et φ_k une fonction propre qui lui est associée.

Le problème(2.7) n'a pas de solution, car s'il admettait une solution u, elle vérifierait d'après la formule de Green-Riemann :
$\int_\Omega -\triangle u\varphi_k = \int_\Omega -\triangle \varphi_k u = \int_\Omega \lambda_k\varphi_k u.$
Et si l'on intègre sur Ω la première égalité du problème(2.7), après l'avoir multipliée par φ_k, on obtient : $\int_\Omega \varphi_k^2 = 0$. Or cette intégrale n'est pas nulle. Donc le problème (2.7) n'a pas de solution.
Si on prend $\underline{u} = K\varphi_1$, avec K une constante réelle positive suffisamment grande, on a $\underline{u}(x) = 0$ sur $\partial\Omega$ et $-\triangle\underline{u} = \lambda_1\underline{u} = \lambda_k\underline{u} + (\lambda_1 - \lambda_k)K\varphi_1 \leq \lambda_k\underline{u} + \varphi_k$,
parceque $\lambda_1 - \lambda_k < 0$ et que $\varphi_1 >> 0$. Si on prend $\overline{u} = -K'\varphi_1$, avec K' une constante réelle positive suffisamment grande, on obtient de manière similaire $\overline{u}(x) = 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$-\triangle\overline{u} \geq \lambda_k\overline{u} + \varphi_k.$$

$\underline{u}$ et $\overline{u}$ donc, respectivement, une sous-solution et une sur-solution de (2.7). Mais $\underline{u} > \overline{u}$!

2.3 f est une fonction de Carathéodory

Maintenant , on va s'intéresser au théorème relatif lorsque f est une fonction de Carathéodory.

Définition 2.5 *(Fonction de Carathéodory voir [4])*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $\Omega\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite Carathéodory, si elle vérifie :

• *L'application*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(x,t)$$

est continue pour presque tout $x \in \Omega$.

• *L'application*

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x,t)$$

est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u = g(x,u) & dans\ \Omega, \\ u{=}u_0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Dans certains cas, on peut faire appel à la définition de sous et sur solutions au sens faible.

Définition 2.6

• *On dit que* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *est une sur solution faible pour le problème* (2.8), *si* $\overline{u} \geq u_0$ *sur* $\partial\Omega$ *et*

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla v dx \geq \int_\Omega g(x,\overline{u}(x))v(x)dx,\ \forall v \in C_0^\infty(\Omega),\ v \geq 0.$$

• *On dit que* $\underline{u} \in H^1(\Omega$ *est une sous solution faible pour le problème* (2.8), *si*

$\underline{u} \leq u_0$ *sur* $\partial\Omega$ *et*

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla v dx \leq \int_\Omega g(x,\underline{u}(x))v(x)dx,\ \forall v \in C_0^\infty(\Omega),\ v \geq 0.$$

On peut énoncer le Théorème :

Théorème 2.4 *voir [12]*
Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory telle que* $|g(x,u(x))| \leq C(R)$, *pour tout* $R > 0$ *et pour tout* u *telle que* $|u(x)| \leq R$ *presque partout.*
Supposons que $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *une sous sur-solution du problème* (2.8).
Supposons qu'il existe $\underline{c}$ *et* $\overline{c} \in \mathbb{R}$ *tel que* $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c} < +\infty$ *presque partout dans* Ω.
Alors le problème (2.8) *admet une solution* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

2.4 Le théorème du degré

Notation 2.1 *:*
On suppose connues une sous-solution $\underline{u}$ *et une sur-solution* $\overline{u}$ *de (2.1), telles que* $\underline{u} \ll \overline{u}$.
Notons Θ *l'ouvert de* $C^1_B(\overline{\Omega})$ *définie par :*

$$\Theta = \{v \in C^1_B(\pi)/\ \underline{u} \ll v \ll \overline{u}\ et \|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < R\}.......(\star\star)$$

où la constante R *est celle qui a été définie, en association avec* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$, *dans la preuve du Théorème 2.2.*
Nous savons que l'opérateur complètement continu $\mathcal{T}_1 : C^1_B(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^1_B(\overline{\Omega})$, $v \ \to T_1(v)$, *admet un point fixe* u *et nous voulons montrer que* $u \in \Theta$ *sous une hypothèse que nous précisons.*

Commençons par énoncer un certain nombre de propriétés de la notion de ***degré de Leray-Schauder*** *[11].*

Proposition 2.1

On se place dans un espace vectoriel normé X.

On désigne par I l'opérateur identité de X.

*Un **degré** est une application qui à tout ouvert borné Θ de X et à tout opérateur $\mathcal{T} : \Theta \to X$, complètement continue et tel que $\forall u \in \partial\Theta$, $\mathcal{T}u \neq u$, associe le nombre entier relatif $deg(I - \mathcal{T}, \Theta)$ qui a les propriétés suivantes :*

(P_1) ***Normalisation*** : $deg(I, \Theta) = \begin{cases} 1 & si \quad 0_X \in \Theta, \\ 0 & si \quad 0_X \notin \Theta. \end{cases}$

(P_2) ***Additivité*** : *Si Θ_1 et Θ_2 sont deux ouverts bornés dijoincts de X tels que $\forall u \in \partial\Theta_1 \cup \partial\Theta_2$, $u \neq \mathcal{T}u$, alors*

$$deg(I - \mathcal{T}, \Theta_1 \cup \Theta_2) = deg(I - \mathcal{T}, \Theta_1) + deg(I - \mathcal{T}, \Theta_2).$$

(P_3) ***Invariance par rapport à une homotopie*** :

Si $H : [0,1] \times \overline{\Theta} \to X$ est complètement continu et tel que $0_x \notin (I - H)$ $([0, 1] \times \partial\Theta)$, alors, pour tout $t \in [0, 1]$

$$deg(I - H(0, .), \Theta) = deg(I - H(t, .), \Theta)$$

(P_4) *Si $0_X \in (I - \mathcal{T})(\overline{\Theta})$, alors $deg(I - \mathcal{T}, \Theta) = 0$.*

(P_5) *Si $deg(I - T, \Theta) \neq 0$, alors $\exists u \in \Theta$ telle que $u = \mathcal{T}u$.*

(P_6) ***Excision*** : *Si une partie A de Θ est telle que $0_X \notin (I - \mathcal{T})(\overline{A})$ alors*

$$deg(I - \mathcal{T}, \Theta) = deg(I - \mathcal{T}, \Theta \backslash \overline{A}).$$

Définition 2.7

Une sous-solution $\underline{u}$ *de (2.1) est dite* ***stricte****, si pour toute solution* u *de (2.1), on a :* $u \geq \underline{u} \Rightarrow u \gg \underline{u}$.

Une sur-solution $\overline{u}$ *de (2.1) est dite* ***stricte****, si pour toute solution* u *de (2.1), on a :* $u \leq \overline{u} \Rightarrow u \ll \overline{u}$.

Remarque 2.5

Une sous-solution (resp. une sur-solution) stricte de (2.1) est une sous-solution(resp.sur-solution) propre de (2.1).

Théorème 2.5

On suppose qu'il existe une sous-solution stricte $\underline{u}$ *de (2.1) et une sur-solution stricte* $\overline{u}$ *de (2.1) telles que* $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Si $f : E \to \mathbb{R}$ *est* L^p*-Carathéodory avec* $E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : \underline{u}(x) \leq y \leq \overline{u}(x)\}$ *et* $p > n$*, alors il n'y a pas de solution de (2.1) sur* $\partial\Theta$*, où* Θ *est défini par* $(\star\star)$.

De ce fait, deg$(I - \mathcal{T}_1, \Theta)$ *est bien défini.*

De plus deg$(I - \mathcal{T}_1, \Theta) = 1$.

Enfin, si u *est un point fixe de l'opérateur* $\mathcal{T}_1$ *tel que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*, alors* $\underline{u} \ll u \ll \overline{u}$.

Remarque 2.6

Il est facile de voir que sous l'hypothèse d'existence d'une sous-solution stricte $\underline{u}$ *de (2.1) et d'une sur solution stricte* $\overline{u}$ *de (2.1), la propriété* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *équivaut à la propriété* $\underline{u} \ll \overline{u}$.

En effet, d'après le théorème 2.2, si $\underline{u} \leq \overline{u}$*, il existe une solution* u *de (2.1) telle que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*, comme* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *sont strictes, nous avons* $\underline{u} \ll u \ll \overline{u}$.

Par conséquent, sous les hypothèses du théorème 2.5, Θ *est bien définie et est bien un ouvert de* $C^1_B(\overline{\Omega})$.

<u>Preuve du Théorème :</u>

La première affirmation et la dernière affirmation du théorème 2.5 sont évidentes.

Il reste à montrer l'égalité $deg(I - \mathcal{T}_1, \Theta) = 1$.

Rappelons que l'opérateur $\mathcal{T}_2 : C^1_B(\overline{\Omega}) \to C^1_B(\overline{\Omega})$, *qui a été défini dans la preuve du théorème 2.1, vérifie les trois propriétés suivantes :*

(P_7) $\forall u \in$, $\mathcal{T}_2(u) = T_1(u)$.

(P_8) $\mathcal{T}_2(C^1_B(\overline{\Omega})) \subset B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)$.

(P_9) *Si* $u = \mathcal{T}_2(u)$, *alors* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *et, comme* $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *sont strictes,* $u \in \Theta$.

Considérons maintenant $v \in \partial B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)$.

D'après (P_8), *nous avons* $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda \mathcal{T}_2(v) \in B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)$ *et par suite,* $\forall \lambda \in [0,1]$, $v \neq \lambda \mathcal{T}_2(v)$.

Ce qui montre que l'opérateur $H(t,.) = t\mathcal{T}_2(.)$ *vérifie toutes les conditions qui permettent de lui appliquer la propriété d'invariance par rapport à une homotopie (Proposition 2.1,*(P_3)*). Appliquons donc* (P_3) *avec* $\Theta = B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)$, $H(t,.) = t\mathcal{T}_2(.)$ *et* $t = 1$.

Il vient $deg(I, B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)) = deg(I - \mathcal{T}_2, B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R))$. *D'autres part, on a par* (P_1) : $deg(I, B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)) = 1$.

Appliquons (P_6) *à* $A = B(0_{C^1_B}(\overline{\Omega}), R) \backslash \Theta$, *sachant que par* (P_9) *nous avons* $0_{C^1_B}(\overline{\Omega}) \notin (I - \mathcal{T}_2)(\overline{A})$.

Nous obtenons $deg(I - \mathcal{T}_2, B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)) = deg(I - \mathcal{T}_2, \Theta)$.

Enfin par (P_7)*, on a* $deg(I - \mathcal{T}_2, \Omega) = deg(I - \mathcal{T}_1, \Theta)$.

En associant toutes les égalités que nous venons de mettre en évidence, nous avons :

$$deg(I - \mathcal{T}_1, \Theta) = deg(I - \mathcal{T}_2, \Theta) = deg(I - \mathcal{T}_2, B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)) = deg(I, B(0_{C^1_B(\overline{\Omega})}, R)) = 1.$$

Remarque 2.7

S'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ *de* $C^1_B(\overline{\Omega})$*, qui contient* Θ *et tel que* $deg(I-\mathcal{T}_1,\mathcal{U})=0$*, alors* $0 = deg(I-\mathcal{T}_1,\mathcal{U}\backslash\overline{\Theta}) + deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta)$*, d'après l'additivité du degré.*
Il existe donc une solution de (2.1) dans $\mathcal{U}\backslash\Theta$ *, ce qui est un moyen d'obtenir un résultat de multiplicité.*
Un autre résultat de multiplicité est le théorème suivant, qui est connue sous le nom du ***Théorème des trois solution d'Amann****.*

Théorème 2.6

Supposons que nous ayons deux sous-solutions strictes $\underline{u}_1$ *et* $\underline{u}_2$ *de (2.1) et deux sur-solutions strictes* $\overline{u}_1$ *et* $\overline{u}_2$ *de (2.1) qui vérifient :*

- $\underline{u}_1 \ll \overline{u}_1$.
- $\underline{u}_2 \ll \overline{u}_2$.
- $\underline{u}_2 \nleq \overline{u}_1$.
- $\underline{u}_1 \leq \underline{u}_2$.
- $\overline{u}_1 \leq \overline{u}_2$.

Si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* L^p*-Carathéodory avec* $E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} / \underline{u}(x) \leq y \leq \overline{u}(x)\}$ *et* $p > n$*, alors (2.1) admet au moins trois solutions* u_1*,* u_2 *et* u_3 *qui vérifient :*

- $\underline{u}_1 \ll u_1 \ll \overline{u}_1$.
- $\underline{u}_2 \ll u_2 \ll \overline{u}_2$.
- $\underline{u}_1 \ll u_3 \ll \overline{u}_2$.

avec $u_3 \nleq \overline{u}_1$ *et* $u_3 \ngeq \underline{u}_2$

Preuve *:*

Pour$(i,j) \in \{(1,1);(1,2);(2,2)\}$.
Notons $\Theta_{ij} = \{v \in C^1_B(\overline{\Omega}) / \underline{u}_i \ll v \ll \overline{u}_j$ *et* $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < R\}$*, où* R *est la constante qui a été associée à la paire* $\underline{u}_1, \overline{u}_2$ *dans la preuve du Théorème 2.5.*

Par le théorème 2.5 on a : $deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{11})=1$ *et* $deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{22})=1$.

Ce qui nous fournit l'existence de deux solutions u_1 *et* u_2 *de (2.1) qui vérifient :* $\underline{u}_1 \ll u1 \ll \overline{u}_1$ *et* $\underline{u}_2 \ll u_2 \ll \overline{u}_2$.

D'autre part, par le théorème 2.5 combiné avec la propriété d'excision du degré, nous avons :

$$\begin{aligned}1 &= deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{12})\\ &= deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{11})+deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{22})+deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{12}\backslash\overline{\Theta}_{11}\cup\overline{\Theta}_{22})\\ &= 1+1+deg(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{12}\backslash\overline{\Theta}_{11}\cup\overline{\Theta}_{22}).\end{aligned}$$

On en déduit que $de(I-\mathcal{T}_1,\Theta_{12}\backslash\overline{\Theta}_{11}\cup\overline{\Theta}_{22})=-1$.

Ce qui signifie qu'il existe une troisième solution u_3 *de (2.1) située entre* $\underline{u}_1$ *et* $\overline{u}_2$ *qui vérifie* $u_3 \not\leq \overline{u}_1$ *et* $u_3 \not\geq \underline{u}_2$.

Remarque 2.8

Dans le théorème 2.6, les hypothèses $\underline{u}_1 \ll \overline{u}_1$ *et* $\underline{u}_2 \ll \overline{u}_2$ *peuvent être remplacées respectivement par* $\underline{u}_1 \leq \overline{u}_1$ *et* $\underline{u}_2 \leq \overline{u}_2$*, par la remarque 2.6.*

Corollaire 2.1

Nous reprenons exactement les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.6. Alors (2.1) admet au moins 3 solution u_1*,*u_2 *et* u_3 *qui vérifient :* $\underline{u}_1 \ll u_1 \ll \overline{u}_1$, $\underline{u}_2 \ll u_2 \ll \overline{u}_2$ *et* $u_1 \not\leq u_3 \not\leq u_2$*, avec* $u_3 \not\leq \overline{u}_1$ *et* $u_3 \not\geq \underline{u}_2$.

Remarque 2.9

Il n'y a que la double inégalité $u_1 \not\leq u_3 \not\leq u_2$ *qui soit nouvelle par rapport à la conclusion du théorème 2.6.*

Elle constitue d'ailleurs un raffinement par rapport à la double inégalité $\underline{u}_1 \ll u_3 \ll \overline{u}_2$ *du théorème 2.6, dans la mesure où l'on a, par ailleurs,* $\underline{u}_1 \ll u_1$ *et* $u_2 \ll \overline{u}_2$.

Preuve du corollaire :

Montrons l'existence de trois solutions u_1, u_2 *et* u_3 *de(2.1) qui vérifient* $u_1 \nleq u_3 \nleq u_2$, *en plus des autres conditions figurant dans la conclusion du théorème d'Amann.*

Pour le montrer on a besoin du théorème suivant :

Théorème :

Soient $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$ *respectivement une sous-solution et une sur-solution du problème (2.1), telles que* $\underline{u} \leq \overline{u}$ *et supposons que* $f : E \to \mathbb{R}$ *soit* L^p*-Carathéodory avec* $p > n$ *et* $E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}/\underline{u}(x) \leq y \leq \overline{u}(x)\}$.

Si le problème(2.1) admet au moins deux solutions situées entre $\underline{u}$ *et* $\overline{u}$, *alors :*

i) $\exists\ u_{min}, u_{max}$ *solutions de (2.1) telles que* $\underline{u} \leq u_{min} \leq u_{max} \leq \overline{u}$.

ii) *Si* u *est une solution de (2.1) qui vérifie* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, *alors* $u_{min} \leq u \leq u_{max}$.

Dans ce cas, u_{min}*(resp.* u_{max}*) est appelée* ***la solution minimale*** *(resp.* ***la solution maximale****)du problème (2.1) par rapport à la paire de sous-solution et sur-solution(*$\underline{u}$, $\overline{u}$*).*

L'application de ce dernier théorème permet de dire qu'il existe u_{min} *(resp* u_{max}*) solution minimale (resp solution maximale) de (2.1) par rapport à la paire de sous-solution et sur-solution (*$\underline{u}_1$,$\overline{u}_2$*). Le théorème 2.6 indique que* $\underline{u}_1 \ll u_{min} \ll \overline{u}_1$, $\underline{u}_2 \ll u_{max} \ll \overline{u}_2$.

Nous avons évidemment $u_{min} \nleq u_3 \nleq u_{max}$, *où* u_3 *est la troisième solution donnée par le théorème 2.6.*

Il suffit donc de poser $u_1 = u_{min}$ *et* $u_2 = u_{max}$ *pour avoir le résultat annoncé.*

Théorème 2.7

Nous avons le même résultat que dans le théorème d'Amann, à condition de remplacer les inégalités strictes concernant $\underline{u}_1$ et $\overline{u}_2$, par des inégalités larges, sans exiger de la sous-solution $\underline{u}_1$ de (2.1) et de la sur-solution $\overline{u}_2$ de (2.1) d'être strictes.

Preuve :

Considérons le problème modifié :

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = \overline{f}(x, u(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u(x)=0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

avec $\overline{f}$ définie par :

$\forall$ *p.p* $x \in \Omega$, $\forall\ z \in \mathbb{R}$,

$$\overline{f}(x,z)= \begin{cases} f(x, \underline{u}_1(x)) & \text{si } z < \underline{u}_1(x), \\ f(x,z) & \text{si } \underline{u}_1(x) \leq z \leq \overline{u}_2(x), \\ f(x, \overline{u}_2(x)) & \text{si } z > \overline{u}_2(x). \end{cases}$$

Notons $\overline{\underline{u}_1} = \underline{u}_1 - 1$ *et* $\overline{\overline{u}_2} = \overline{u}_2 + 1$.

Nous avons : $\forall x \in \Omega$, $-\triangle\overline{\underline{u}_1}(x) = -\triangle\underline{u}_1(x) \leq f(x, \underline{u}_1(x)) = \overline{f}(x, \overline{\underline{u}_1})$ *et* $\forall x \in \partial\Omega$, $\overline{\underline{u}_1} < \underline{u}_1(x) \leq 0$.

De même, $\forall x \in \Omega$, $-\triangle\overline{\overline{u}_2}(x) = -\triangle\overline{u}_2(x) \geq f(x, \overline{u}_2) = \overline{f}(x, \overline{\overline{u}_2}(x))$.

Et $\forall\ x \in \partial\Omega$, $\overline{\overline{u}_2}(x) > \overline{u}_2(x) \geq 0$. *Les fonctions* $\overline{\underline{u}_1}$ *et* $\overline{\overline{u}_2}$ *sont donc respectivement une sous-solution et une sur-solution du problème* (2.9) *et elles vérifient* $\overline{\underline{u}_1} \ll \overline{\overline{u}_2}$.

D'autre part, si u est une solution de (2.9), *elle vérifie* $\underline{u}_1 \leq u \leq \overline{u}_2$ *(voir la démonstration du théorème 2.2), et on a donc* $\overline{\underline{u}_1} \ll u \ll \overline{\overline{u}_2}$.

Nous en déduisons que $\overline{\underline{u}_1}$ *et* $\overline{\overline{u}_2}$ *sont respectivement, une sous-solution stricte et une sur-solution stricte du problème*(2.9).

En outre, le fait que $\underline{u}_2 \in [\underline{u}_1, \overline{u}_2]$, *conduit à :* $\forall \in \Omega$, $f(x, \underline{u}_2(x)) = \overline{f}(x, \underline{u}_2(x))$.

Nous en déduisons que $\underline{u}_2$ *est une sous-solution de* (2.9) *et elle est stricte, puisque toute solution de*(2.9) *est une solution de (2.1). De la même façon,* $\overline{u}_1$ *est une sur-solution stricte de* (2.9).

Enfin, nous avons :

- $\overline{\underline{u}_1} \ll \overline{u}_1$.
- $\underline{u}_2 \ll \overline{\overline{u}_2}$.
- $\underline{u}_2 \not\leq \overline{u}_1$.
- $\overline{\underline{u}_1} \leq \underline{u}_2$.
- $\overline{u}_1 \leq \overline{\overline{u}_2}$.

Le théorème d'Amann nous permet de dire qu'il existe trois solutions u_1, u_2 *et* u_3 *de* (2.9) *telles que :*

- $\overline{\underline{u}_1} \ll u_1 \ll \overline{u}_1$.
- $\underline{u}_2 \ll u_2 \ll \overline{\overline{u}_2}$.
- $\overline{\underline{u}_1} \ll u_3 \ll \overline{\overline{u}_2}$.

avec $u_3 \not\leq \overline{u}_1$ *et* $u_3 \not\geq \underline{u}_2$.

Mais, comme nous avons par construction, $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\underline{u}_1 \leq u_i \leq \overline{u}_2$, *nous en déduisons que* u_1,u_2 *et* u_3 *vérifient :* $\underline{u}_1 \leq u_1 \ll \overline{u}_1$, $\underline{u}_2 \ll u_2 \leq \overline{u}_2$, $\underline{u}_1 \leq u_3 \leq \overline{u}_2$, $u_3 \not\leq \overline{u}_1$ *et* $u_3 \not\geq \underline{u}_2$.

Remarque 2.10

Si une sous-solution propre $\underline{u}$ *de(2.1) vérifie :*

$\exists \epsilon > 0$ *tq* $\forall p.p\ x \in \Omega$, $\forall z \in [\underline{u}(x), \underline{u}(x) + \epsilon]$,

$$\begin{cases} -\triangle \underline{u}(x) \leq f(x, z) & sur\ \Omega, \\ \underline{u}(x) \leq 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $\underline{u}$ *est stricte, comme nous allons le montrer.*

Soit u une solution de (2.1) telle que $u \geq \underline{u}$. Comme u est une sous-solution propre, nous aurons $u \neq \underline{u}$. Ce qui signifie qu'il existe au moins un point x de Ω tel que $u(x) > \underline{u}(x)$.
Supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $(u - \underline{u})(x_0) = 0$.
Le point x_0 serait un minimum global de $u - \underline{u}$.
Commençons par examiner le cas où $x_0 \in \Omega$. Dans ce cas, il existerait un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $x_0 \in \Omega$ et $\forall x \in \Omega_1$, $0 \leq (u - \underline{u})(x) \leq \epsilon$.
Il est toujours possible de choisir Ω_1 suffisamment grand pour qu'il contienne un point x_1 tel que $u(x_1) - \underline{u}(x_1) > 0$.
Nous aurions alors $\forall p.p\ x \in \Omega_1$, $-\triangle(u-\underline{u})(x) \geq f(x, u(x)) - f(x, u(x)) = 0$.
Le principe du maximum(cf. Rappel 1.1) s'applique et il indique que cette situation là est impossible.
Ce qui signifie que $\forall p.p\ x \in$, $(u - \underline{u})(x) > 0$.
Dans le cas où $x_0 \in \partial\Omega$, on aurait de même l'existence d'une boule ouverte $B \subset \Omega$ telle que $x_0 \in \partial\Omega$ et $\forall x \in B$, $0 < (u - \underline{u})(x) \leq \epsilon$.
On aurait alors $\forall p.px \in B$, $-\triangle(u - \underline{u})(x) \geq 0$.
On applique le principe du maximum de Hopf qui indique dans ce cas que : $\frac{\partial}{\partial n}(u - \underline{u})(x_0) < 0$. Ce qui montre que $u \gg \underline{u}$.
On en conclut que la sous solution $\underline{u}$ est stricte.

Application à un problème quasi linéaire

Dans cette partie, on montre l'existence de solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda u^q + u^p & \textit{dans } \Omega, \\ u¿0 & \textit{dans } \ \Omega, \\ u=0 & \textit{sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

où $0 < q < 1 < p < 2* -1 = \frac{N+2}{N-2}(N \geq 3)$ *et* λ *un paramètre positif. La fonctionnelle d'énergie associé au problème (2.10) est définie par :*

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx$$

Ce problème à été traité dans l'article d'Ambrossetti, Brézis and cerami.
La particularité de ce problème, réside dans le fait qu'il ya un terme concave $(q < 1)$ *et un terme convexe* $(p > 1)$.
Ambrosetti-Brézis-Cerami ont fait appel à la notion de sous-sur solutions qui leur permis de prouver le résultat suivant :

Théorème 2.8

Pour tout $0 < q < 1 < p$, *il existe* $\Lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda > 0$ *tel que :*

i) *Pour tout* $\lambda \in (0, \Lambda)$, *le problème* (2.10) *admet une solution minimale* u_λ *tel que* $I_\lambda(u_\lambda) < 0$.

ii) *Pour* $\lambda = \Lambda$, *le problème* (2.10) *admet au moins une solution faible* $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$.

iii) *Pour tout* $\lambda > \Lambda$ *le problème* (2.10) *n'admet aucune solution.*

Remarque 2.11

La solution minimale pour ce problème est dans le sens que u_λ *est une solution à énergie minimale.*

Avant d'entamer la démonstration du théorème 2.8. Définissons $\Lambda = sup\{\lambda > 0,\ le\ problème(2.10)\ admet\ une\ solution\}$

Nous établissons le lemme suivant :

lemme 2.2 *On a,* $0 < \Lambda < \infty$.

<u>Preuve :</u>

Soit e solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle e = 1 & dans\ \Omega, \\ e=0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

e est la solution unique du problème (2.11)*, ceci d'après le lax-Milgram*

$\overline{u} = Me$ *une sur-solution du problème* (2.10) *où M est une constante positive.*

En effet, $\overline{u}$ *satisfait*

$$-\triangle Me \geq \lambda(Me)^q + (Me)^p.$$

alors

$$M \geq \lambda M^q e^q + M^p e^p$$

Comme $0 < q < 1 < p$*, on peut trouver* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour tout* $0 < \lambda \leq \lambda_0$*, il existe* $M = M(\lambda) > 0$ *satisfaisant* $M \geq \lambda M^q \|e\|_\infty^q + M^p \|e\|_\infty^p \geq \lambda M^q e^q + M^p e^p$.

On a pour tout $x \in \partial\Omega$, $\overline{u}(x) = 0$*. Donc,* $\overline{u}(x) = Me$ *est une sur-solution de* (2.10)*.*

Soit $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ *où* $\epsilon > 0$, φ_1 *est la fonction propre associée au problème suivant :*

$$\begin{cases} -\triangle\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & dans\ \Omega, \\ \varphi = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

$\underline{u}$ *est une sous-solution du problème* (2.10). *En effet*

$$-\triangle\epsilon\varphi_1 \leq \lambda(\epsilon\varphi_1)^q + (\epsilon\varphi_1)^p,$$

Ceci implique que

$$\epsilon(-\triangle\varphi_1) \leq \lambda(\epsilon\varphi_1)^q + (\epsilon\varphi_1)^p$$

Donc

$$\epsilon\lambda_1\varphi_1 \leq \lambda(\epsilon\varphi_1)^q + (\epsilon\varphi_1)^p$$

Pour ϵ *assez petit, pour tout* $\lambda > 0$ *et pour tout* $x \in \partial\Omega$, $\underline{u}(x) = 0$ *car* $\varphi_1 = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Ainsi* $\underline{u}(x) = \epsilon\varphi_1$ *est une sous-solution du problème* (2.10).
Par conséquent

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) \quad c - \grave{a} - d \quad \epsilon\varphi_1 \leq Me$$

Donc le problème (2.10) *admet une solution* $\epsilon\varphi_1 \leq u \leq Me$, *pour tout* $\lambda \leq \lambda_0$ *et* $\Lambda \geq \lambda_0$.
Soit $\overline{\lambda}$ *tel que*

$$\overline{\lambda}t^q + t^p > \lambda_1 t \qquad \forall t \in \mathbb{R}t > 0..........\textbf{(1)}$$

Si λ *est telle que le problème* (2.10) *admet une solution u, nous allons multiplier le problème*(2.10) *par* φ_1 *et nous allons intégrer sur* Ω *on obtient :*

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \lambda \int_\Omega u^q\varphi_1 dx + \int_\Omega u^p\varphi_1 dx............\textbf{(2)}$$

De ***(1)*** *et* ***(2)*** *on conclut que* $\lambda < \overline{\lambda}$ *et on a montrer que* $\Lambda \leq \overline{\lambda}$.

Conclusion

L'idée c'était d'exploiter certaines propriétées afin de trouver la solution recherchée. Plus précisèment, on a montré que si on pouvait trouver une sous-solution $\underline{u}$ *et une sur-solution* $\overline{u}$ *d'un problème aux limites bien particulier, et si de plus* $\underline{u} \leq \overline{u}$*, alors il existe une solution qui satisfait*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

On a présenté et démontré le théorème des trois solutions d'Amann qui permet d'obtenir l'existence de trois solutions en présence de deux paires de sous sur-solutions vérifiant certaines realtions d'ordre.

Bibliographie

[1] A. Adjé, Sur et sous-solutions dans les équations différentielles discontinues avec conditions aux limites és non linéaires, dissertation doctorale, Univ. Cath. de Louvain, Mars 1987, Belgique.

[2] Haïm Brézis, "Analyse fonctionnelle, théorie et application", Université Pierre et Marie Curie, 1999.

[3] De coster and P.Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems : Classical and recent results, C.I.S.M. Courses and lectures 371, Springer-Verlag, New-York, 1996, 1-79.

[4] C.De Coster, J.Tapka, Introduction à la théorie des sous et sur solution Institut des Sciences et Techniques de Valenciennes (2010), 1-32.

[5] S.Dragoni, Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziali del secondo ordine, Math.Ann.105, 1931, 133-143.

[6] L.H. Erbe, Nonlinear boundary value problems for second order differential equations, G. Differential Equations 7, 1970, 459-472.

[7] L.Ljusternick et L.Schnirelmann, "Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels", Hertmann, Editeur, Paris, (1934).

[8] J. Mawhin, Nonlinear perturbations of freedholm mappings in normed spaces and applications to differential equations, Univ. de Brasilia, Tra-

balho de Mathematica no 61, 1974.

[9] *M. Nagumo, Uber die differentialgleichung $y'' = f(t, y, y')$, Proc, Physi-Maths. Soc. Jopan(3) 19, 1937, 861-866.*

[10] *V.D.Raduleseu, Qualitative analusis of non linear elleptic partial differential equations : monotonocity analytic, and Variational Methods, Hindawi, Vol.6(2008).*

[11] *N. Rouche et J. Mawhin, Equations différentielles ordinaires, vol. 2, Masson, Paris, 1973.*

[12] *M.Struwe, Variational Methods, applications to non linear partial differential equations and hamiltonian systems Fourth Edition, Springe Vol.34(2008).*