

MINISTER DE L'ENSENEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUES  
UNIVERSITE ABDERRAHMENE MIRA BEJAIA  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de master en mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par :

KHALED Hassiba  
SEROUR Baya

## Thème

Existence et unicité de solution presque périodique  
positive pour un modèle proie-prédateur

Soutenu le 13 juillet 2022

devant le jury composé de :

Dr. L. BAICHE	U.A.M.Bejaia	Présidente
Pr. F. BOULAHIA-TALBI	U.A.M.Bejaia	Promotrice
Dr. M. S. M'HAMDI	U.A.M.Bejaia	Examineur

2021-2022.

## Remerciements

Nous commençons par remercier le Dieu tout puissant de nous avoir donné la force et la volonté pour mener ce travail à terme.

*Nous exprimons particulièrement notre profonde gratitude à notre promotrice Madame BOULAHIA-TALBI Fatiha de nous avoir proposé ce sujet, accompagné d'une documentation inestimable nous la remercions aussi pour son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité ainsi que son orientation tout au long de la réalisation de ce travail.*

*Nous tenons à remercier vivement les membres du jury Madame L. BAICHE et Monsieur M. S. M'HAMDI d'avoir accepté de juger et d'évaluer ce travail.*

*Nous tenons à exprimer notre reconnaissance et toute notre gratitude à l'administration et à l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques de l'université de Bejaïa pour leurs efforts et leur entière disponibilité, dans le but de nous transmettre leur savoir et leurs connaissances.*

*Nous remercions tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.*

✧ *Dédicaces* ✧

Je dédie ce modeste travail à :

**À l'âme de mon père SGHIRE**

*que Dieu le garde dans son paradis.*

**À ma mère Houa**

*La personne la plus chère dans ma vie, elle a oeuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, ses sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, merci maman.*

**À mes frères Mohamed , Cherif et Karim**

*Pour leurs encouragements et leurs aides, je leurs souhaite tout le bonheur et la réussite. En témoignage de leurs amours et de leurs affectations dont ils ont toujours fait preuve.*

***Mes tantes, mes oncles, mes cousins, mes cousines, leurs époux et épouses et tout la famille SEROUR et la famille MESSAFRI.***

*Sans oublier ma chère binôme **Hassiba** ainsi que toute sa famille .*

*Et finalement, mes amies et toute personne qui m'a aidé de loin ou de prés.*

*Baya*

✧ *Dédicaces* ✧

Je dédie ce modeste travail à :

**Mes chers parents et ma grande mère (Nouara, Saïd et Kelthoum)**

*qui m'ont appris le respect, la volonté, le courage et tant d'autres valeurs importantes.*

*Mes frères (Salim, Mouloud, Abdallah et Mourad), mes soeurs (Samia, Hassina et Karima) et leurs familles.*

*À l'âme de ma défunte soeur Noura, son mari (Salim) et leurs fils (Khalil, Amirouche).*

*Mes amies, mes camarades et toute personne qui m'a aidé de loin ou de près,*

*sans oublier ma chère binôme Baya.*

**Hassiba**

---

---

# Table des matières

Table des figures	iii
Notations	iv
Introduction générale	1

## Chapiter 1

### Préliminaires

1.1 Quelques notions en écologie des populations . . . . .	4
1.1.1 Ecologie . . . . .	4
1.1.2 Structure et dynamique des populations . . . . .	5
1.1.3 Les interactions entre les populations . . . . .	6
1.2 Les modèles proies-prédateurs . . . . .	8
1.2.1 Modèle de Lotka-Volterra . . . . .	9
1.2.2 Les modèles de Holling . . . . .	11
1.3 Rappels sur les équations différentielles ordinaires . . . . .	11

## Chapiter 2

### Généralités sur les fonctions presque périodiques

2.1 Différentes définitions des fonctions presque périodiques . . . . .	15
2.2 Les propriétés des fonctions presque périodiques . . . . .	19
2.2.1 Dérivation des fonctions presque périodiques . . . . .	20
2.2.2 Intégration des fonctions presque périodiques . . . . .	21
2.2.3 La valeur moyenne d'une fonction presque périodique . . . . .	23

---

**Chapiter 3****Existence et unicité de solution presque périodique positive d'un modèle proie prédateur**

3.1	Introduction . . . . .	26
3.2	Présentation du modèle . . . . .	28
3.3	Invariance positive et permanence du système étudié . . . . .	29
3.3.1	Invariance positive . . . . .	29
3.3.2	La permanace . . . . .	32
3.4	Existence et unicité de solution presque périodique positive . . . . .	33
3.5	Exemple et Simulations numériques . . . . .	42
3.5.1	Présentation de simulink de MATLAB . . . . .	42
3.5.2	Exemple d'application . . . . .	47

**Conclusion Générale****Annexe****Résumé**

---

---

## Table des figures

1.1	La prédation . . . . .	6
1.2	La compétition . . . . .	7
1.3	Le parasitisme . . . . .	7
1.4	La symbiose . . . . .	8
3.1	Les blocs utilisés pour dessiner le graphe de $\sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$ . . . . .	43
3.2	Graphe de la fonction $f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$ obtenu par Simulink . .	44
3.3	Exemple de blocs de la bibliothèque "source" . . . . .	44
3.4	Les blocs de la bibliothèque "Sinks" . . . . .	45
3.5	Les blocs de la bibliothèque "Signal Routing" . . . . .	45
3.6	Les blocs de la bibliothèque "Math Operations" . . . . .	46
3.7	Les blocs de la bibliothèque "Continuous" . . . . .	46
3.8	Les blocs de la bibliothèque "Discrete" . . . . .	46
3.9	Les blocs de la bibliothèque "Commonly used blocks" . . . . .	47
3.10	Diagramme Simulink de l'exemple (3.17) . . . . .	49
3.11	Le comportement de la proie et le prédateur pour $(G_0, B_0)^t = (3.7, 1.5)^t$	50
3.12	Le comportement de la proie et le prédateur pour $(G_0, B_0)^t = (3.3, 0.2)^t$	50

---

---

## Notations

- ◆  $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  : Espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  continues et bornées.
- ◆  $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  : L'ensemble des fonctions presque périodiques définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .
- ◆  $G(t)$  : La densité de la proie (Le Gardon) au temps  $t$ .
- ◆  $B(t)$  : La densité du prédateur (Brochet) au temps  $t$ .
- ◆  $R(t)$  : La fonction d'accessibilité, ou taux de prédation.
- ◆  $r_2$  : Le taux de prédation maximale.
- ◆  $r_1$  : Le taux de prédation minimale.
- ◆  $\gamma_G$  : Le taux de consommation maximale de la ressource par la proie.
- ◆  $\gamma_B$  : Le taux de consommation maximale de la ressource par le prédateur.
- ◆  $m_G$  : Le taux de consommation de la biomasse par le métabolisme de la proie.
- ◆  $m_B$  : Le taux de consommation de la biomasse par le métabolisme du prédateur.
- ◆  $e_B$  : Le taux de conversion.
- ◆  $D$  : Mesure les causes de mortalité autre que la prédation.
- ◆  $sign$  : désigne la fonction signe.
- ◆  $DV$  : La dérivée de la fonction  $V$ .
- ◆  $D^+V$  : La dérivée supérieure de la fonction (La dérivée de Dini).
- ◆  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  : Ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .
- ◆  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  : Ensemble des fonctions matricielles continues de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

---

---

## Introduction générale

Les modèles proies-prédateurs sont des modèles dominants en écologie en raison de leurs importances pour de nombreuses études biologiques [22]. Ces dernières années, les modèles classiques proie-prédateur ont été largement étudiés, voir [28,31] et les références qui y sont citées.

Le modèle mathématique proie prédateur de Lotka-Volterra a été imaginé en 1926 par Vito Volterra (1860-1940) pour modéliser l'évolution des sardines et des requins dans la mer Adriatique, il a remarqué que juste après la première guerre mondiale la proportion de requins et autres prédateurs impropres à la consommation que l'on pêchait parmi les poissons consommables était nettement supérieure à ce qu'elle était avant la guerre et à ce qu'elle redevint ensuite. Volterra commença alors une étude des modèles analytiques qui rendent compte des observations. Un modèle similaire à ce modèle a été développé en 1925 par Alfred Lotka (1880-1949). En conséquence les deux mathématiciens Alfred Lotka et Vito Volterra ont proposé indépendamment un modèle particulier de dynamique des populations. Ce modèle consiste en un couple d'équations différentielles décrivant l'évolution au cours du temps de deux populations : les proies et les prédateurs, les prédateurs se nourrissent des proies, leurs population va donc augmenter jusqu'au moment où la population proie ne sera plus suffisante pour nourrir les prédateurs.

Un modèle mathématique typique pour décrire cette interaction est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) - g(x,y)y, \\ \dot{y}(t) = eg(x,y)y - dy \end{cases} \quad (1)$$

où  $x$  et  $y$  représentent les densités des proies et des prédateurs à l'instant  $t$  respectivement,  $f(x)$  désigne le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateurs,  $g(x,y)$  taux moyen des proies tuées par un prédateur (la fonction réponse des prédateurs à la densité des proies). Le paramètre  $d$  représente le taux de mortalité du prédateur

et  $e$  est un paramètre représentant l'efficacité des prédateurs à convertir les proies consommées en nouvelles progénitures.

Le système (1) a été largement étudié pour différents choix de  $f(x)$  et  $g(x,y)$ . On suppose fréquemment une croissance logistique pour l'accroissement des proies, c'est-à-dire,  $f(x) = rx(1 - \frac{x}{K})$ , où  $r$  désigne le taux de croissance intrinsèque de la proie, et  $K$  la capacité de charge de la proie. Les réponses fonctionnelles de type Holling (définies en chapitre 1) sont les fonctions les plus couramment utilisées pour  $g(x,y)$ . Pour étudier le phénomène de défense de groupe, des réponses fonctionnelles non monotones sont également proposées. Un choix typique de réponse fonctionnelle non monotone est la réponse fonctionnelle de type IV de Holling, c'est-à-dire :

$$g(x,y) = \frac{mx}{x^2 + b_1x + a},$$

nous renvoyons les lecteurs à [19] pour plus de détails.

Dans ce mémoire, nous allons présenter un modèle proie-prédateur avec un choix de deux populations de poissons les plus importantes dans le lac de Parloup au sud de la France (Gardon comme proie et Brochet comme prédateur).

Notre travail est composé de trois chapitres organisés comme suit :

Dans le premier chapitre on a commencé par rappeler quelques notions nécessaires pour la compréhension de la suite de ce travail à savoir : quelques notions en écologie des populations, les modèles proies-prédateurs et les équations différentielles ordinaires.

Le second chapitre est dédié aux différentes définitions des fonctions presque périodiques au sens de Bohr et leurs propriétés fondamentales.

Le troisième chapitre est consacré aux résultats de l'article de M. A. Menouer et al. [28] concernant l'existence et l'unicité de solution presque périodique positive du modèle proies prédateurs suivant :

$$\begin{cases} \dot{G}(t) &= \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \frac{R(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) \\ \dot{B}(t) &= e_B \frac{R(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) - m_B B(t) \end{cases} \quad (2)$$

où  $G(t)$  et  $B(t)$  représentent les densités des proies (Gardon) et des prédateurs (Brochet) à l'instant  $t$  respectivement,  $\gamma_G$  désigne le taux de consommation maximale de la ressource par la proie et  $m_G$  le taux de consommation de la biomasse par le métabolisme de la proie et  $m_B$  le taux de consommation de la biomasse par le métabolisme

---

du prédateur.

$R(\cdot)$  : la fonction d'accessibilité, ou taux de prédation, cette fonction est supposée presque périodique.

Le terme  $\gamma_G G(t) - m_G G^2(t)$  est le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateurs, et  $D$  désigne les causes de mortalités autres que la prédation et le métabolisme. Le rapport  $\frac{R(t)G(t)}{B(t)+D}$  est le taux moyen de proies tuées par un prédateur, le paramètre  $e_B$  représente le taux de conversion.

---

## Préliminaires

La modélisation mathématique est un processus qui permet l'intervention des mathématiques dans des sciences basées sur l'expérience ou l'observation, comme par exemples l'écologie animale, l'épidémiologie, la physique, la chimie, l'économie...etc. Elle consiste à représenter une réalité physique en un modèle mathématique accessible à l'analyse et au calcul. Nous présentons dans ce chapitre plusieurs notions concernant la dynamique des populations et les équations différentielles nécessaires pour la compréhension des chapitres suivants [5].

### 1.1 Quelques notions en écologie des populations

#### 1.1.1 Ecologie

le mot "écologie" dérive des racines grecques "OIKOS" qui signifie "habitat" et "LOGOS" qui signifie "la science", donc il se traduit littéralement par "Science de l'habitat". Il a été introduit pour la première fois dans le langage scientifique par le biologiste allemand Ernest Haeckel en 1866. Haeckel a défini ce terme comme suit : " Par Ecologie nous entendons la science des relations des organismes avec le monde extérieur, dans lequel nous pouvons reconnaître d'une façon plus large les facteurs de la "lutte pour l'existence". Par la "lute pour l'existence", nous comprenons l'ensemble des relations des organismes les un avec les autres, relations soit favorables

soit défavorables.

### 1.1.2 Structure et dynamique des populations

Dans ce qui suit, on donnera quelques définitions concernant la structure des populations (voir [5]).

**Population** : on appelle population un groupe d'individus d'une même espèce vivant dans une aire géographique donnée à un moment précis, qui consomment les mêmes ressources alimentaires et qui sont influencés par les mêmes facteurs écologiques.

**Individu** : un ensemble autonome de cellules qui croît, entretient des relations avec son environnement, se reproduit seul ou avec un semblable, échange de la matière et de l'énergie avec son environnement, maintient un fonctionnement et une organisation stable à courte échelle de temps, et meurt.

**La communauté** : tous les organismes qui habitent dans une aire donnée et qui sont un assemblage de populations de différentes espèces. On y étudie la prédation, la compétition et d'autres interactions influant sur la structure et l'organisation de l'ensemble.

**L'espèce** : désigne l'ensemble des êtres vivants présentant un ensemble des caractéristiques communes : morphologique, anatomique, physiologique, biochimique, génétique. L'espèce est l'unité fondamentale de la classification, elle est capable d'inter-féconder.

**biotope** : en écologie, un biotope est un lieu de vie défini par des caractéristiques physiques ou chimiques déterminées relativement uniforme. Ce milieu héberge un ensemble de biocénose : flore, faune, fonge et des populations de micro-organismes.

**La biomasse** : est le terme qui désigne la masse totale d'organismes vivants dans un biotope ou un lieu déterminé à un moment donné, qu'il s'agisse de plantes, d'animaux, de champignons ou de microbes.

**Dynamique des populations** : La dynamique des populations est la spécialité de l'écologie qui étudie les changements subis par les populations biologiques en termes de taille, de dimensions physiques de leurs membres, de structure d'âge, de sexe et d'autres paramètres qui les définissent, ainsi que les facteurs qui causent ces changements et les mécanismes par lesquels ils surviennent.

**La croissance** : c'est la variation numérique par unité de temps des individus au sein de la population. Elle dépend essentiellement de la natalité et de la mortalité,

mais aussi de l'émigration et de l'immigration.

**Durabilité** : la survie à long terme de chaque espèce dépend d'une base de ressources limitée.

**la densité** : c'est le nombre d'individus d'une espèce donnée par unité de surface. On peut la mesurer par comptage direct des individus ou l'évaluer par comptage indirect sur toute la surface ou par échantillonnage sur une portion de celle-ci.

### 1.1.3 Les interactions entre les populations

Diverses interactions ont lieu entre les individus d'une même population, ou encore entre ceux de populations différentes. Ces interactions peuvent prendre diverses formes dont les plus importantes sont la compétition, la prédation, le parasitisme et la symbiose (voir [5])

**La Prédation** : Le prédateur est un organisme libre qui recherche une nourriture vivante, il tue sa proie pour s'en nourrir. Cette relation de type antagoniste entraîne à court terme la disparition de l'un des deux individus, seul le prédateur en tire bénéfice. Quelques exemples des prédateurs et des proies sont : lion et zèbre, ours et poissons, et renard et lapin. . . etc. Les mots " prédateur " et " proie " sont presque toujours employés pour signifier seulement les animaux qui mangent des animaux, mais le même concept s'applique également aux plantes.



FIGURE 1.1 – La prédation

**La compétition** : C'est l'usage commun d'une ressource limitée, dont l'abondance ne peut suffire aux deux populations concernées. Elle peut avoir deux formes : intra spécifique et interspécifique.

" La compétition intra-spécifique " est la concurrence s'exerçant entre plusieurs organismes lorsque la somme de leurs demandes en nourriture, en certains éléments minéraux, en eau, en sources énergétiques, en espace libre, etc, est supérieure à ce qui est réellement disponible.

" La compétition " n'est pas exclusivement du domaine des relations intra-spécifiques, elle peut également exister entre des individus d'espèces différentes (on l'appelle dans ce cas la compétition inter-spécifique).



FIGURE 1.2 – La compétition

**Parasitisme** : c'est le fait qu'un être-vivant vive aux dépens d'un autre être-vivant appelé hôte, sans chercher à le tuer. Exemple le parasite utilise son hôte pour se nourrir, se longer ou se reproduire.



FIGURE 1.3 – Le parasitisme

**Symbiose** : est un terme signifiant "vivre ensemble". Il décrit une relation écologique

entre deux ou plusieurs organismes d'espèces différentes qui sont en contact direct l'un avec l'autre.



FIGURE 1.4 – La symbiose

## 1.2 Les modèles proies-prédateurs

Les modèles proies-prédateurs sont sous forme de systèmes d'équations différentielles, décrivant l'évolution de deux (ou plusieurs) populations en interactions. Le premier modèle de ce type a été donné par A. Lotka et V. Volterra en 1926, il décrit l'évolution d'une population proie et d'une population prédateur en interaction. Ce modèle a été largement étudié du fait qu'il soit relativement simple, et considéré comme la base des systèmes d'interaction proies prédateurs. Depuis, on raffine ces systèmes afin qu'ils soient le plus représentatifs possible de la réalité des populations étudiées. Notamment, ils doivent tenir compte des caractéristiques particulières des espèces.

### 1.2.1 Modèle de Lotka-Volterra

Afin d'expliquer les variations dans les prises de poissons dans la mer Adriatique Volterra<sup>1</sup> proposa, en 1926, le modèle Proie-Prédateur suivant (voir [4] et [27]) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx - axy \\ \dot{y}(t) = -my + bxy \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x(t)$  et  $y(t)$  représentent la densité des proies et celle des prédateurs à l'instant  $t$  respectivement,  $r, m, a, b$  sont des constantes positives. Volterra remarqua que ce système pouvait osciller de façon périodique avec une période  $T$  qui dépend des conditions initiales  $(x_0, y_0)$ . Ces équations furent présentées en 1925 par Lotka<sup>2</sup> où il prit l'exemple d'une population d'herbivores se nourrissant sur des plantes. Pour poser ses équations il fit l'analogie avec le comportement de certaines réactions chimiques. De même, Lotka fera la même remarque que celle de Volterra sur l'oscillation permanente du système qu'il a posé. On peut réécrire le modèle précédent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(r - ay) \\ \dot{y}(t) = y(-m + bx) \end{cases} \quad (1.2)$$

où l'on pourra remarquer que si l'effectif  $x(t)$  augmente le terme  $(-m + bx)$ , dans la deuxième équation de (1.2) (équation du prédateur), augmentera et la croissance de la population  $y(t)$  est favorisée, ce qui correspond bien au prédateur, et si l'effectif  $y(t)$  augmente le terme  $(r - ay)$ , dans la première équation de (1.2) (équation de la proie), diminuera et la croissance de la population  $x(t)$  est défavorisée, ce qui correspond bien à la proie. On définit respectivement de l'équation de la proie et l'équation du prédateur du système (1.1) la fonction représentant la croissance de la proie et la fonction représentant la croissance du prédateur,

$$f(x) = rx, \quad g(y) = -my.$$

Le signe négatif dans la dernière égalité signifie qu'on a défini en réalité la mortalité du prédateur.

1. Vito Volterra 1860-1940, est un mathématicien et physicien italien. Un de ses domaines d'intérêt été la dynamique des populations sur lequel il publia en 1926 l'article [34], où il présenta les équations qui portent, en partie, son nom.

2. Alfred James Lotka 1880-1949, est un mathématicien et statisticien américain, il publia en 1920 le papier [26] où il exhiba les équations Proie-Prédateur qui portent aujourd'hui, en partie, son nom.

Pour les interactions entre les deux populations, on les a défini dans la première équation du système (1.1) par

$$h(x,y) = -axy \text{ et } k(x,y) = bxy.$$

Les interactions dans ce modèle n'ont lieu que s'il y a rencontre entre les deux populations et par conséquent la consommation de la proie par le prédateur. L'hypothèse qui est usuellement faite est que les proies et les prédateurs se déplacent en explorant leur milieu au hasard et le nombre moyen de rencontres entre les deux populations est proportionnel au produit des effectifs.

Le paramètre  $a$  dans  $h(x,y)$  est un paramètre positif qui rend compte de l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques. Bien sûr la prédation implique une diminution des proies, ce qui justifie le signe négatif. Une telle fonction de prédation  $h(x,y)$  est dite fonction de Lotka-Volterra. Le paramètre  $b$  dans  $k(x,y)$  est aussi un paramètre positif et puisque la prédation va favoriser le prédateur il n'y a donc pas de signe négatif.

Plus précisément, la quantité de proies ayant subi les attaques du prédateur, donnée par  $h(x,y)$ , se retrouvera consommée par le prédateur, mais avec une certaine efficacité qu'on notera par  $e$ . Nous avons donc

$$k(x,y) = -eh(x,y) = eaxy = bxy.$$

Le paramètre  $e$  est dit le rendement de conversion de la biomasse proie en biomasse prédateur.

La solution  $(x(t), y(t))$  du système (1.2) pour une condition initiale  $(x(0), y(0))$  est donnée par :

$$x(t) = x(0) \exp^{\int_0^t (r-ay(s))ds} \quad y(t) = y(0) \exp^{\int_0^t (-m+bx(s))ds}.$$

On déduit alors que  $\mathbb{R}_+$  est positivement invariant, c'est à dire des effectifs de départ strictement positifs  $x(0) > 0$ ,  $y(0) > 0$ , les effectifs suivants vont rester toujours positifs  $x(t) > 0$ ,  $y(t) > 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Ceci a un intérêt majeur dans la modélisation car des effectifs négatifs n'ont aucun sens biologique.

En posant  $\frac{dx}{dt} = 0$  et  $\frac{dy}{dt} = 0$ , on trouve que les points d'équilibre du système (1.1) sont  $(0,0)$  et le point non trivial  $(x^*, y^*) = (\frac{m}{b}, \frac{r}{a})$ . Le premier point signifie que les deux populations se dirigent vers l'extinction, alors que pour le second c'est vers la coexistence (survie) qu'elles se dirigent.

## 1.2.2 Les modèles de Holling

Holling<sup>3</sup> s'est intéressé à la fonction de prédation  $\Phi : x \mapsto axy$  dans le modèle de Lotka-Volterra. Ce terme représentant le nombre de proies  $ax(t)$  tuées par un seul prédateur par unité de temps, a le défaut d'être irréaliste du fait que si le nombre de proies  $x(t)$  est assez grand, un seul prédateur ne pourra pas tuer un nombre proportionnel de proies, vu que le paramètre "a" est constant. Il y aura plutôt un effet de saturation dans la prédation. Le nombre de proies tuées par un seul prédateur par unité de temps est appelé la fonction réponse du modèle proie-prédateur ou la réponse fonctionnelle du prédateur à la variation de densité de la proie. Dans le modèle de Lotka-Volterra, elle est donc donnée par :

$$\phi_I(x, y) = \frac{axy}{y} = ax,$$

appelée fonction réponse de Type I.

Holling a introduit en 1959, une nouvelle fonction réponse permettant d'avoir cet effet de saturation dans la prédation, il proposa la fonction :

$$\phi_{II}(x, y) = \frac{ax}{D + x},$$

appelé fonction de Holling ou fonction réponse de Type II. La fonction réponse de Type III, introduite aussi par Holling, est donnée par :

$$\phi_{III}(x, y) = \frac{ax^2}{D + x^2},$$

où D est une constante positive.

## 1.3 Rappels sur les équations différentielles ordinaires

La description mathématique des systèmes qui modélisent les interactions qui existent entre les différents éléments vivants conduit aux systèmes différentiels pour lesquels ils convient de rechercher les solutions périodiques ou presque périodiques et

---

3. Crawford Stanley Holling, né en 1930 à New York et d'origine canadienne, est un spécialiste en entomologie qui est une branche de la zoologie dont l'objet est l'étude des insectes. Il développa, en 1959, ce qu'il a appelé la réponse fonctionnelle de Type II qui coïncidait avec ses observations sur une expérience de laboratoire. Il proposa aussi une variante de sa réponse fonctionnelle, le Type III.

d'étudier leurs propriétés de stabilité.

Lorsque l'on connaît les lois régissant la variation d'un phénomène à chaque instant et que l'on s'intéresse à son évolution à long terme, on peut souvent modéliser le comportement de ce phénomène à l'aide d'une équation différentielle : la variable réelle représente alors le temps. Les solutions de cette équation peuvent alors être interprétées pour décrire l'état du phénomène à un instant donné.

Par exemple l'équation différentielle particulièrement simple  $y' = ay$ , où  $a$  est une constante réelle, peut modéliser la taille d'une population ayant un taux d'accroissement constant.

Elle suppose que pendant un laps de temps donné cette population subit un accroissement proportionnel à sa taille ; c'est bien entendu un modèle très fruste. Une vision un peu plus réaliste consiste à prendre en compte des contraintes spécifiques.

Par exemple, si on s'intéresse à une population de bactéries vivant dans un espace clos, on rajoute un taux de mortalité dû à l'étouffement ou à la compétition, qu'il est raisonnable de supposer à chaque instant proportionnel à la population : on remplace alors l'équation  $\frac{y'}{y} = a$  par  $\frac{y'}{y} = a - by$ , soit  $y' = ay - by^2$ .

L'objectif de cette section est de rappeler quelques notations concernant les équations différentielles

**Définition 1.1.** [33, Définition 1.2]

On appelle **équations différentielles**, les équations dont les inconnues sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables, ces équations comportant non seulement les fonctions elles mêmes, mais aussi leurs dérivées.

Si les fonctions inconnues dépendent de plusieurs variables, les équations sont dites aux dérivées partielles, dans le cas contraire, c'est-à-dire quand on considère des fonctions d'une seule variable indépendant, les équations sont appelées équations différentielles ordinaires.

**Définition 1.2.** [33, Définition 1.10]

L'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$  est dite **équation différentielle linéaire** si elle est de la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{1.3}$$

où  $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est une fonction matricielle continue de  $t$  et  $b(t)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , continu de  $t$ .

L'équation (1.3) est dite **homogène** si  $b(t) \equiv 0$ , et **non homogène** ou avec second membre

dans le cas contraire.

$\phi(t) \equiv 0$  est toujours une solution de l'équation homogène  $\dot{x} = A(t)x$ , on l'appelle **la solution triviale** de cette équation.

**Définition 1.3.** [33, Définition 1.3]

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur un domaine  $D$  de l'espace  $\mathbb{R}^{n+2}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On appelle **équation différentielle scalaire d'ordre  $n$** , une équation

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0. \quad (1.4)$$

On appelle **solution** de cette équation, une fonction  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $t \mapsto \phi(t)$  définie et  $n$ -fois dérivable sur un intervalle  $I$ , borné ou non, de  $\mathbb{R}$  et telle que

1.  $\forall t \in I, (t, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n \phi(t)}{dt^n}) \in D,$
2.  $\forall t \in I, f(t, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n \phi(t)}{dt^n}) = 0.$

On présente dans ce qui suit un exemple d'équation différentielle qu'on va utiliser dans la démonstration d'un résultat au chapitre 3.

$$\dot{X}(t) = F(t, X)X(t)(A - X(t)), \quad A \neq 0.$$

### Problème de Cauchy

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  une application continue. Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.5)$$

On appelle **problème de Cauchy** relatif aux conditions initiales  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , la recherche des solutions  $x(t)$  de l'équation (1.5) telles que  $x(t_0) = x_0$ .

**Proposition 1.1.** [33, Proposition 2.1]

Pour qu'une fonction  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dont le graphe est dans  $\Omega$ , c'est-à-dire,  $(t, x(t)) \in \Omega, \forall t \in I$ , soit une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.6)$$

avec  $x(t_0) = x_0$ ;  $(t_0, x_0) \in \Omega$ ;  $t_0 \in I$ , où  $f$  est une fonction continue de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ , il faut

et il suffit qu'elle soit continue et que

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.7)$$

*Démonstration.*

**Condition nécessaire :**  $x(\cdot)$  étant solution de l'équation différentielle, elle est continue par hypothèses, donc la fonction composée  $f(\cdot, x(\cdot))$  est aussi continue et donc intégrable. L'équation (1.6) donne par intégration

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

d'où le résultat énoncé, puisque  $x(t_0) = x_0$ .

**Condition suffisante :**  $x(\cdot)$  étant continue par hypothèses, il en est de même de  $f(\cdot, x(\cdot))$ .

Le second membre de (1.7) est donc dérivable. Par conséquent il en va de même du premier. D'où par dérivation  $\dot{x}(t) = f(t, x)$ .  $\square$

**Lemme 1.1. (lemme de comparaison) [24]**

*Soit l'équation différentielle :*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

où  $f(t, x)$  une fonction continue en  $t$  et localement lipschitzienne en  $x$ , pour tout  $t \geq 0$  et tout  $x \in U \subset \mathbb{R}$ . Soit  $[t_0, T)$  ( $T$  pouvant être infini) l'intervalle d'existence maximal de la solution  $x(t)$ , et supposons que  $x(t) \in U$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . Soit  $y(t)$  une fonction continue dont la dérivée satisfait l'inégalité différentielle :

$$y'(t) \leq f(t, y(t)), \quad y(t_0) \leq x_0,$$

avec  $y(t) \in U$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . Alors  $y(t) \leq x(t)$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ .

---

## Généralités sur les fonctions presque périodiques

On présente dans ce chapitre les définitions et quelques propriétés fondamentales des fonctions presque périodiques.

### 2.1 Différentes définitions des fonctions presque périodiques

Commençons par rappeler la définition d'un ensemble relativement dense

**Définition 2.1.** [1, Définition 1. 2]

Un ensemble  $E \subset \mathbb{R}$  est dit **relativement dense**, s'il existe un nombre positif  $l$  tel que tout intervalle de longueur  $l$  contient au moins un élément de  $E$ . Autrement dit,

$$\exists l > 0, \text{ tel que } ]a, a + l[ \cap E \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Le nombre  $l$  est appelé **longueur d'inclusion** de la partie  $E$ .

**Exemples 2.1.** [9]

1. L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est relativement dense dans  $\mathbb{R}$ . Puisque tout intervalle de longueur 2 contient un élément de  $\mathbb{Z}$ .
2. Pour tout réel  $T$ , l'ensemble  $\{nT, n \in \mathbb{Z}\}$  est relativement dense dans  $\mathbb{R}$ .

3. L'ensemble  $\mathbb{N}$  n'est pas relativement dense puisque pour tout  $l > 0$ , il existe un  $\alpha = -2l$  tel que  $[-2l, -2l + l] \cap \mathbb{N} = \emptyset$ .

4. Toute partie  $A$  qui est dense dans  $\mathbb{R}$  au sens de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  est relativement dense.

En effet, par définition tout point de  $\mathbb{R}$  est limite d'une suite d'éléments, de  $A$ , c'est à dire tout intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  rencontre  $A$ .

Maintenant, nous pouvons énoncer la définition de la presque périodicité de Bohr, en utilisant les ensembles relativement denses.

**Définition 2.2. [13]**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue.

On dit que  $f$  est presque périodique au sens de **Bohr** si pour tout  $\varepsilon > 0$  l'ensemble  $E\{\varepsilon, f\}$  est relativement dense dans  $\mathbb{R}$ , où

$$E(\varepsilon, f) = \{T \in \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Autrement dit,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $l_\varepsilon > 0$ , tel que tout intervalle  $[a, a + l_\varepsilon]$  contient un nombre  $T$  satisfaisant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Un nombre  $T$  qui appartient à  $E(\varepsilon, f)$  est appelé  $\varepsilon$ -presque périodique ou  $\varepsilon$ -nombre de translation de la fonction  $f$ .

On note  $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'espace de toutes les fonctions presque périodiques au sens de Bohr, définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 2.1. [13]** Si  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , alors  $f$  est bornée et uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.*

**1. La bornitude de  $f$ .**

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $l_\varepsilon$  la longueur d'inclusion de  $E(\varepsilon, f)$

Comme par l'hypothèse  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors elle atteint ses bornes sur tout compact de  $\mathbb{R}$ . En particulier, il existe  $M > 0$ , tel que

$$\sup_{x \in [0, l_\varepsilon]} |f(x)| \leq M.$$

On prend  $T \in [-x, -x + l_\varepsilon]$  une  $\varepsilon$ -presque périodique.

Il vient que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x+T) + f(x+T)| \\ &\leq |f(x) - f(x+T)| + |f(x+T)| \leq M + \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

## 2. La continuité uniforme de $f$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , et  $l = l_\varepsilon$  la longueur d'inclusion de  $E(\frac{\varepsilon}{3}, f)$ . Comme  $f$  est uniformément continue sur  $[-1, -1 + l]$  alors il existe  $0 < \delta_\varepsilon < 1$ , tel que

$$\forall x, y \in [-1, -1 + l], |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, si  $T \in [-x, -x + l] \cap E(\frac{\varepsilon}{3}, f)$

On a

$$|f(x+T) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } T+x, T+y \in [-1, -1 + l] \text{ et } T+x \in [0, l] \subset [-1, -1 + l].$$

Par conséquent, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ , avec  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ , on aura

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) + f(x+T) - f(x+T) - f(y+T) + f(y+T) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(x+T)| + |f(x+T) - f(y+T)| + |f(y) - f(y+T)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

□

### Proposition 2.2. [9]

Si  $f$  est une fonction presque périodique, alors

$$Imf = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire  $\overline{Imf}$  est compact dans  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration.*

Comme  $\mathbb{C}$  est complet alors la compacité relative coïncide avec la **précompacité**.

Donc il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{C}$  telles que leurs réunion couvre l'ensemble  $\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ .

## 2.1. Différentes définitions des fonctions presque périodiques

---

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $l > 0$  la longueur d'inclusion associée à  $f$ . Comme  $f$  est continue sur  $[0, l]$ , on en déduit que l'ensemble  $\{f(x), x \in [0, l]\}$  est un compact dans  $\mathbb{C}$ .

C'est-à-dire :

$$\{f(x), x \in [0, l]\} \subset \bigcup_{p=1}^n B(x_p, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\tau$  un  $\varepsilon$ -nombre de translation dans l'intervalle  $[-x, -x + l]$ . Comme  $x + \tau \in [0, l]$ , alors il existe un entier  $p \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$f(x + \tau) \in B(x_p, \frac{\varepsilon}{2}).$$

On a

$$\begin{aligned} |f(x) - x_p| &= |f(x) - f(x + \tau) + f(x + \tau) - x_p| \\ &\leq |f(x) - f(x + \tau)| + |f(x + \tau) - x_p| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat. □

### Proposition 2.3.

Si une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions presque périodique converge uniformément dans  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ , alors  $f$  est aussi presque périodique.

*Démonstration.*

On a  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ . Alors, pour un  $\varepsilon$  donné, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

Soit maintenant un nombre  $T \in E(\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0})$ . Alors

$$|f(x + T) - f(x)| \leq |f(x + T) - f_{n_0}(x + T)| + |f_{n_0}(x + T) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que  $E(\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}) \subset E(\varepsilon, f)$ . Comme  $E(\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0})$  est relativement dense alors  $E(\varepsilon, f)$  est relativement dense.

Comme  $f$  est continue (limite uniforme d'une suite de fonctions continues) alors  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . □

*Dans ce qui suit on donnera la définition de la presque périodicité en utilisant les polynômes trigonométriques généralisés.*

### Définition 2.3. [16]

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , continue possède la propriété d'approximation si  $\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathcal{A}$  tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon.$$

où  $\mathcal{A} = \{P(x) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(i\lambda_k x) \text{ avec } a_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés.

**Théorème 2.1.** [12] Une fonction  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  si et seulement si, elle possède la propriété d'approximation polynomiale.

**Critère de Bochner :** ce critère utilise la compacité de l'ensemble des translatés de la fonction  $f$ . Il est souvent utilisé dans la démonstration du théorème d'existence dans le chapitre 3

**Définition 2.4.** [25, Définition 1.1]

Une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , continue est dite normale ou presque périodique au sens de Bochner si l'ensemble de ses translatés

$$\{f_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

où  $f_\alpha(x) = f(x + \alpha), \forall x \in \mathbb{R}$ , est relativement compact dans  $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

Autrement dit, pour toute suite de nombres réels  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire une sous suite  $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que la suite de fonctions  $(f(\cdot + h_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  soit uniformément convergente dans  $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

## 2.2 Les propriétés des fonctions presque périodiques

**Proposition 2.4.** [13]

1. L'espace  $(AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

2. Si  $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  avec  $f, g \neq 0$ , alors :

(a)  $fg \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

(b)  $\frac{f}{g} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

(c) Si  $\inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = m > 0$ , alors  $(\frac{1}{f}) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

(d) Si  $\inf_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| > 0$ , alors  $(\frac{f}{g}) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

(e)  $|f| \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

3. Si  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $g$  une fonction uniformément continue, alors

$$(g \circ f) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

4. Soit  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , si  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $(f * g) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

### 2.2.1 Dérivation des fonctions presque périodiques

**Théorème 2.2.** [16]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction presque périodique et dérivable. Si la dérivée  $f'$  est uniformément continue, alors elle est presque périodique.

*Démonstration.* Pour tout réel  $x$ , on a

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)).$$

Posons,

$$f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$$

il est clair que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Montrons que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x) - f_n(x)|) = 0.$$

On a  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f'(x) - f_n(x)| &= |f'(x) - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t) dt| \leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(x) - f'(t)| dt \\ &\leq \sup_{t \in [x, x+\frac{1}{n}]} |f'(x) - f'(t)|. \end{aligned}$$

Pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , la continuité uniforme de  $f'$  assure l'existence d'un  $\delta$  tel que si  $|u - v| \leq \delta$  alors,

$$|f'(u) - f'(v)| \leq \varepsilon.$$

D'où il existe un  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , on a  $\frac{1}{n} \leq \delta$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|f'(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ . □

## 2.2.2 Intégration des fonctions presque périodiques

**Théorème 2.3.** [16]

Soit  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $F$  une primitive de  $f$ .  $F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  si et seulement si elle est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.*

**La nécessité :** Elle découle des propriétés des fonctions presque périodiques. Si  $F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , alors elle est bornée.

**La suffisance :**

Supposons que  $F$  est bornée et montrons que  $F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On peut se restreindre au cas où  $f$  est à valeurs réelles car si

$$f = f_1 + if_2$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont à valeurs réelles alors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f_1(t)dt + i \int_0^x f_2(t)dt \\ &= F_1(x) + iF_2(x). \end{aligned}$$

$F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  si et seulement si  $F_1, F_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Supposons que  $F$  est bornée, notons par,

$$m = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x) \text{ et } M = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x)$$

On suppose que  $m \neq M$ , sinon  $F$  serait constante donc presque périodique. Donnons-nous un  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, il existe deux réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que

$$F(x_1) < m + \frac{\varepsilon}{6} \text{ et } F(x_2) > M - \frac{\varepsilon}{6}$$

On pose  $d = |x_1 - x_2|$

Puisque  $f$  est presque périodique, alors il existe  $l_1 > 0$  tel que tout intervalle de longueur  $l_1$  contient un  $\frac{\varepsilon}{6d}$ -nombre de translation pour  $f$ .

On montre ensuite qu'en posant  $l = l_1 + d$ , tout  $\frac{\varepsilon}{2l}$ -nombre de translation pour  $f$  est un  $\varepsilon$ -nombre de translation pour  $F$ .

Dans un premier temps, on montre que tout intervalle de longueur  $l$  contient deux points  $y_1$  et  $y_2$  tels que

$$F(y_1) < m + \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } F(y_2) > M - \frac{\varepsilon}{2}$$

En effet, posons  $\xi = \min\{x_1, x_2\}$ . Soit  $\tau$  un  $\frac{\varepsilon}{6d}$ -nombre de translation pour  $f$  tel que  $\xi + \tau \in [\alpha, \alpha + l_1]$ , où  $\alpha$  est un réel quelconque.

On pose,  $y_1 = x_1 + \tau$  et  $y_2 = x_2 + \tau$  de sorte que  $y_1, y_2 \in [\alpha, \alpha + l]$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} F(y_2) - F(y_1) &= \int_{y_1}^{y_2} f(t) dt + F(x_2) - F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \\ &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1 + \tau}^{x_2} f(t) dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \\ &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(t + \tau) - f(t)) dt \\ &\geq F(x_2) - F(x_1) - d \frac{\varepsilon}{6d} \\ &\geq M - \frac{\varepsilon}{6} - m - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} = M - m - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$F(y_2) - M > F(y_1) - m - \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme on a.

$$F(y_2) - M < 0 \text{ et } F(y_1) - m > 0$$

alors,

$$m + \frac{\varepsilon}{2} > F(y_1) \text{ et } F(y_2) - M > -\frac{\varepsilon}{2}$$

Prenons à présent  $\eta \in E\{\varepsilon, F\}$ , fixons un réel  $x$ , on peut trouver  $y_1 \in [x, x + l]$  tel que

$$F(y_1) < m - \frac{\varepsilon}{2}$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
 F(x + \eta) - F(x) &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{x+\eta} f(t)dt - \int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
 &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{x+\eta} f(t)dt - \int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
 &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt - \int_{x+\eta}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
 &= F(y_1 + \eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt - \int_x^{y_1} f(t + \eta)dt \\
 &> -(m + \frac{\varepsilon}{2}) + m - |\int_x^{y_1} f(u + \eta) - f(u)du| > -\frac{\varepsilon}{2} - l\frac{\varepsilon}{2l} = -\varepsilon
 \end{aligned}$$

Donc,

$$|F(x + \eta) - F(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

### 2.2.3 La valeur moyenne d'une fonction presque périodique

**Définition 2.5.** [13]

Soit  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et localement intégrable.

On définit la valeur moyenne de  $f$  notée par  $M(f)$ , par

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx.$$

On vérifie dans ce qui suit qu'un tel nombre existe.

**Proposition 2.5.** [13]

Pour toute fonction  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , le nombre  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$  existe indépendamment de  $\alpha \in \mathbb{R}$  et vaut  $M(f)$ .

*Démonstration.* **Premier cas :**

On suppose que  $f = P$  avec  $P$  un polynôme trigonométrique de la forme :

$$\sum_{k=1}^n c_k \exp(i\lambda_k x), \lambda_k \neq 0.$$

On suppose que,  $\lambda_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{R}$  alors

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+T} P(x)dx &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{\alpha}^{\alpha+T} \exp(i\lambda_k x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \frac{\exp(i\lambda_k(\alpha+T)) - \exp(i\lambda_k \alpha)}{i\lambda_k} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{T} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+T} P(x)dx \right| \leq \sum_{k=1}^n c_k \frac{2}{T|\lambda_k|} \rightarrow 0$$

quand  $T$  tend vers  $+\infty$  indépendamment de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si le polynôme trigonométrique  $P$  contient un exposant nul, alors  $P$  est de la forme :

$$c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \exp(i\lambda_k x) \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} P(x)dx = c_0.$$

**Deuxième cas :**

Soit  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$  il existe un polynôme trigonométrique  $P$  tel que

$$\|f - P\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

Pour tout  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} f(x)dx \right| &\leq \left| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} (f(x) - P(x))dx \right| \\ &+ \left| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} P(x)dx - \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} P(x)dx \right| \\ &+ \left| \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} (f(x) - P(x))dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} P(x)dx - \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} P(x)dx \right| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

D'après le premier cas il existe  $T_0$  tel que  $\forall T_1, T_2 \geq T_0$  on a

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} P(x)dx - \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} P(x)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui entraîne que

$$\left| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} f(x)dx \right| \leq \varepsilon$$

Comme  $\mathbb{C}$  est complet, le critère de Cauchy pour les fonctions permet de conclure que la limite existe.

Il reste à montrer que la limite ne dépend pas de  $\alpha$ .

Donnons  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $T > 0$ . On a  $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  donc elle est bornée c'est-à-dire  $\exists M > 0$  tel que  $|f(x)| \leq M$ . Par la relation de Chasles, on obtient

$$\frac{1}{T} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx - \int_0^T f(x) dx \right| = \frac{1}{T} \left| \int_T^{\alpha+T} f(x) dx - \int_0^{\alpha} f(x) dx \right| \leq \frac{2|\alpha|M}{T}.$$

Ce qui donne le résultat attendu lorsque  $T \rightarrow \infty$ .

---

## Existence et unicité de solution presque périodique positive d'un modèle proie prédateur

### 3.1 Introduction

La relation dynamique entre les prédateurs et leurs proies est donnée en générale par le modèle de type Lotka-Volterra [3, 18, 19] suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) - g(x,y)y \\ \dot{y}(t) = eg(x,y)y - dy \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x$  et  $y$  représentent les densités des proies et des prédateurs à l'instant  $t$  respectivement,  $f(x)$  désigne le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateurs,  $g(x,y)$  le taux moyen des proies tuées par un prédateur (la fonction réponse des prédateurs à la densité des proies). Le paramètre  $d$  représente le taux de mortalité du prédateur et  $e$  est un paramètre représentant l'efficacité des prédateurs à convertir les proies consommées en nouvelles progénitures.

Naturellement, la périodicité de l'environnement et ses fluctuations (alternances) ont une grande influence sur l'interaction entre les espèces (proies et prédateurs), cette caractéristique est modélisée en faisant des choix bien précis sur les fonctions et les paramètres du système (3.1). Plusieurs auteurs ont considéré des systèmes

différentiels de Lotka-Volterra pour étudier les modèles avec des paramètres à variation saisonnière, on peut citer par exemples Moussaoui et al. [29, 30] qui se sont intéressés à des perturbations environnementales importantes pour la communauté des poissons. Plus précisément, les auteurs de [29] ont montré l'existence de solutions périodiques et leurs stabilités pour une version à retard du système (3.1).

Dans [30] Moussaoui et Bouguima ont examiné une interaction plus complexe entre trois espèces vivantes dans un lac sous succession saisonnière.

En 2012, N. C. Fellah et al [15] ont considéré un modèle pour expliquer comment les variations saisonnières dans les niveaux des eaux affectent l'issue des interactions proie-prédateur dans le lac de Pareloup (1260 ha) dans le sud de la France.

Le niveau d'eau du lac de Pareloup est régulé, principalement dans le but de générer de l'électricité. Le niveau d'eau est abaissé par l'augmentation de la libération d'eau du barrage en hiver, quand la consommation d'électricité est au plus haut. Au printemps la fonte des neiges remplit à nouveau le lac, avec l'aide de la libération d'eau du barrage diminuée, et le niveau d'eau est généralement gardé quasiment constant pendant tout l'été.

La gestion de ce lac est d'une importance écologique considérable, des variations significatives du niveau d'eau peuvent avoir un impact très fort sur la persistance de certaines espèces [23]. En effet, quand le niveau d'eau est bas, pendant l'hiver, le contact entre le prédateur et la proie est plus fréquent, et la prédation croît. Inversement, quand le niveau d'eau est haut, pendant le printemps, il est plus difficile pour le prédateur de trouver une proie et la prédation décroît.

Dans le modèle proposé, les auteurs ont utilisé comme proie la population d'une espèce de poissons nommée le Gardon et comme prédateur une population d'espèce nommée le Brochet. Le Gardon et le Brochet sont les espèces les plus importantes dans ce lac.

Il est supposé que la fonction d'accessibilité (ou taux de prédation)  $R(\cdot)$  pour la proie est continue et 1-périodique, la valeur minimale  $r_1$  est atteinte pendant le printemps et la valeur maximale  $r_2$  est atteinte pendant l'hiver. Un prédateur a besoin d'une quantité  $\gamma_B$  comme nourriture, mais il n'a accès qu'à une quantité qui dépend du niveau d'eau :

$$g(x, y) = r(t)x.$$

On s'intéresse dans ce chapitre à l'existence et l'unicité de solution presque périodique positive du modèle proie-prédateur (3.2) présenté dans ce qui suit.

Les résultats développés dans ce chapitre sont ceux obtenus dans [28].

## 3.2 Présentation du modèle

Les auteurs de [28] ont choisi deux populations de poissons les plus importantes dans le lac de Parloup dans le sud de la France. Ils ont pris le Gardon comme une proie et le Brochet comme prédateur pour tirer le modèle proie-prédateur (Lotka-Volterra) suivant :

$$\begin{cases} \dot{G}(t) &= \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \frac{R(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) \\ \dot{B}(t) &= e_B \frac{R(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) - m_B B(t) \\ G(0) &= G_0 \\ B(0) &= B_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où :

$G(t)$  : la densité de la proie (Gardon) à l'instant  $t$ .

$B(t)$  : la densité de prédateur (Brochet) à l'instant  $t$ .

$\gamma_G$  : taux de consommation maximale de la ressource par la proie.

$m_G$  : taux de consommation de la biomasse par le métabolisme de la proie.

$R(t)$  : la fonction d'accessibilité, ou taux de prédation.

$\gamma_G G(t) - m_G G^2(t)$  : taux de croissance de la proie en l'absence de prédateurs.

$D$  : les causes de mortalités autres que la prédation et le métabolisme.

$\frac{R(t)G(t)}{B(t)+D}$  : taux moyen de proies tuées par un prédateur.

$e_B$  : taux de conversion.

$m_B$  : taux de consommation de la biomasse par le métabolisme du prédateur.

Dans ce qui suit, la fonction d'accessibilité  $R(\cdot)$  est une fonction presque périodique.

### Notation 3.1.

Pour  $\varepsilon \geq 0$ . Posons

$$M_1^\varepsilon = \frac{\gamma_G}{m_G} + \varepsilon, \quad M_2^\varepsilon = \frac{e_B r_2 M_1^\varepsilon - m_B D}{m_B},$$

et

$$m_1^\varepsilon = \frac{\gamma_G - r_2}{m_G} - \varepsilon, \quad m_2^\varepsilon = \frac{e_B r_1 m_1^\varepsilon - m_B D}{m_B}.$$

Alors  $M_i^\varepsilon > m_i^\varepsilon \quad \forall i = (1, 2)$ .

En effet,

$$M_1^\varepsilon = \frac{\gamma_G}{m_G} + \varepsilon \geq \frac{\gamma_G}{m_G} + \varepsilon - 2\varepsilon$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{\gamma_G - r_2}{m_G} - \varepsilon \\ &\geq m_1^\varepsilon \end{aligned}$$

on utilisant  $M_1^\varepsilon \geq m_1^\varepsilon$  on aura :

$$\begin{aligned} M_2^\varepsilon &= \frac{e_B r_2 M_1^\varepsilon - m_B D}{m_B} \geq \frac{e_B r_2 m_1^\varepsilon - m_B D}{m_B} \\ &\geq m_2^\varepsilon \end{aligned}$$

On suppose les hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>) :  $r_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} R(t)$  (le taux de prédation maximal) et

$$r_2 < \min \left( \frac{\gamma_B (B_0 + D)}{G_0}, \frac{4m_G \gamma_B m_B D}{(\gamma_G + m_B)^2} \right)$$

(H<sub>2</sub>) :  $r_1 = \inf_{t \in \mathbb{R}} R(t)$  (le taux de prédation minimale) et

$$\frac{m_B D}{e_B m_1^0} < r_1 < r_2 < \gamma_G$$

(H<sub>3</sub>) :  $\mu_1 > 0$  où :

$$\mu_1 = m_G - \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2}$$

(H<sub>4</sub>) :  $\mu_2 > 0$  où :

$$\mu_2 = \frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D}$$

## 3.3 Invariance positive et permanence du système étudié

### 3.3.1 Invariance positive

**Définition 3.1.** Un ensemble  $M \subset \mathbb{R}^2$  est dit positivement invariant pour le système (3.2) si pour tout point  $a \in M$  la solution  $x$  du système (3.2) telle que  $x(0) = a$  vérifie

$$x(t) \in M, \forall t \geq 0.$$

**Théorème 3.1.** [27, Théorème 14]

Si les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont vérifiées, alors pour  $\varepsilon \geq 0$  (suffisamment petit), tel que  $m_i^\varepsilon > 0$  ( $i = 1, 2$ ) l'ensemble

$$\Gamma_\varepsilon = \{(G(t), B(t))^t, m_1^\varepsilon \leq G(t) \leq M_1^\varepsilon, m_2^\varepsilon \leq B(t) \leq M_2^\varepsilon\}$$

est positivement invariant pour le système (3.2).

Autrement dit,  $\forall \varepsilon \geq 0$ , si  $(G(t), B(t))^t$  est une solution de (3.2) tel que  $(G_0, B_0) \in \Gamma_\varepsilon$  alors

$$(G(t), B(t))^t \in \Gamma_\varepsilon, \forall t \geq 0.$$

*Démonstration.*

On aura besoin d'utiliser dans cette démonstration que la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X)X(t)(A - X(t)), A \neq 0, \\ X(0) = X_0, \end{cases},$$

est donnée par [27]

$$X(t) = \frac{AX_0 e^{\int_0^t (AF(s, X(s))) ds}}{X_0 [e^{\int_0^t (AF(s, X(s))) ds} - 1] + A} \quad (3.3)$$

Soit  $(G(t), B(t))^t$  une solution du système (3.2) avec  $(G_0, B_0) \in \Gamma_\varepsilon$ . De la première équation du système (3.2) on aura :

d'une part,

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \left( \frac{R(t)G(t)}{B(t) + D} \right) B(t) \\ &= G(t) \left( \gamma_G - m_G G(t) - \frac{R(t)}{B(t) + D} B(t) \right) \\ &\leq G(t) (\gamma_G - m_G G(t)) \leq m_G G(t) \left( \frac{\gamma_G}{m_G} - G(t) \right) \\ &\leq m_G G(t) \left( \frac{\gamma_G}{m_G} - G(t) \right) \leq m_G G(t) (M_1^0 - G(t)). \end{aligned}$$

D'après le Lemme (1.1) et l'équation (3.3)

$$G(t) \leq \frac{M_1^0 G_0 e^{\gamma_G t}}{G_0 (e^{\gamma_G t} - 1) + M_1^0} \leq \frac{M_1^\varepsilon G_0 e^{\gamma_G t}}{G_0 (e^{\gamma_G t} - 1) + M_1^\varepsilon} \leq M_1^\varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (3.4)$$

D'autre part,

$$\dot{G}(t) = \gamma_G G(t) - m_G G^2(t) - \left( \frac{R(t)G(t)}{B(t)+D} \right) B(t) = G(t) \left( \gamma_G - m_G G(t) - \frac{R(t)}{B(t)+D} B(t) \right).$$

Comme  $R(t) \leq r_2$  et  $m_2^\varepsilon \leq M_2^\varepsilon$  on aura

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &\geq G(t)(\gamma_G - m_G G(t) - r_2) \geq m_G G(t) \left( \frac{\gamma_G}{m_G} - G(t) - \frac{r_2}{m_G} \right) \\ &\geq m_G G(t) \left( \frac{\gamma_G - r_2}{m_G} - G(t) \right) \geq m_G G(t) (m_1^0 - G(t)). \end{aligned}$$

Comme  $G_0 \geq m_1^0$ , en appliquant le Lemme 1.1 on aura :

$$G(t) \geq \frac{m_1^0 G_0 e^{(\gamma_G - r_2)t}}{G_0 [e^{(\gamma_G - r_2)t} - 1] + m_1^0} \geq m_1^\varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (3.5)$$

De la seconde équation du système (3.2) on a :

d'une part,

$$\dot{B}(t) = e_B \frac{R(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) - m_B B(t) = \frac{B(t)}{B(t)+D} (e_B R(t)G(t) - m_B D - m_B B(t)).$$

Par hypothèse :  $R(t) \leq r_2$  et  $G(t) \leq M_1^\varepsilon$  alors,

$$\begin{aligned} \dot{B}(t) &\leq \frac{B(t)}{B(t)+D} (e_B r_2 M_1^\varepsilon - m_B D - m_B B(t)) \leq \frac{m_B B(t)}{B(t)+D} \left( \frac{e_B r_2 M_1^\varepsilon}{m_B} - D - B(t) \right) \\ &\leq \frac{m_B B(t)}{B(t)+D} \left( \frac{e_B r_2 M_1^\varepsilon - m_B D}{m_B} - B(t) \right) \leq \frac{m_B B(t)}{B(t)+D} (M_2^\varepsilon - B(t)). \end{aligned}$$

Toujours par le Lemme 1.1 on obtient :

$$B(t) \leq \frac{M_2^\varepsilon B_0 e^{\int_0^t M_2^\varepsilon \frac{m_B}{B(s)+D} ds}}{B_0 [e^{\int_0^t M_2^\varepsilon \frac{m_B}{B(s)+D} ds} - 1] + M_2^\varepsilon} \leq M_2^\varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

D'autre part :

$$\dot{B}(t) = e_B \frac{R(t)G(t)}{B(t)+D} B(t) - m_B B(t) = \frac{B(t)}{B(t)+D} (e_B R(t)G(t) - m_B D - m_B B(t)),$$

comme  $R(t) \geq r_1$  et  $G(t) \geq m_1^\varepsilon$  alors,

$$\begin{aligned} \dot{B}(t) &\geq \frac{B(t)}{B(t)+D} (e_B r_1 m_1^\varepsilon - m_B D - m_B B(t)) \geq \frac{m_B B(t)}{B(t)+D} \left( \frac{e_B r_1 m_1^\varepsilon}{m_B} - D - B(t) \right) \\ &\geq \frac{m_B B(t)}{B(t)+D} \left( \frac{e_B r_1 m_1^\varepsilon - m_B D}{m_B} - B(t) \right) \geq \frac{m_B B(t)}{B(t)+D} (m_2^\varepsilon - B(t)). \end{aligned}$$

Par le Lemme 1.1 on aura :

$$B(t) \geq \frac{m_2^\varepsilon B_0 e^{\int_0^t m_2^\varepsilon \frac{m_B}{B(s)+D} ds}}{B_0 [e^{\int_0^t m_2^\varepsilon \frac{m_B}{B(s)+D} ds} - 1] + m_2^\varepsilon} \geq m_2^\varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.7)$$

Par les inégalités (3.4) jusqu'à (3.7), on en déduit que  $\Gamma_\varepsilon$  est positivement invariant pour le système (3.2).  $\square$

### 3.3.2 La permanence

#### Définition 3.2.

Le système (3.2) est dit permanent s'il existe deux constantes strictement positives  $\delta_1$  et  $\delta_2$  telles que :

$$\begin{aligned} \min\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} G(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} B(t) \} &\geq \delta_1 \\ \max\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} G(t), \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} B(t) \} &\leq \delta_2 \end{aligned}$$

#### Proposition 3.1.

Sous l'hypothèse  $(H_2)$  le système (3.2) est permanent.

*Démonstration.*

La preuve découle des inégalités (3.4)-(3.7) de la preuve du Théorème (3.1).  $\square$

#### Théorème 3.2.

Si  $r_2 < \frac{m_B D}{e_B M_1}$  ( $H_2$  n'est pas vérifiée) alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ , c'est à dire que le prédateur se dirige vers l'extinction.

*Démonstration.*

On a  $r_2 < \frac{m_B D}{e_B M_1}$ . Alors, par l'équation du prédateur dans le système (3.2), il est facile de voir que

$$\dot{B}(t) \leq \left( \frac{e_B r_2 M_1 - m_B D}{D} \right) B(t)$$

$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} \leq \left( \frac{e_B r_2 M_1 - m_B D}{D} \right)$$

Par passage à l'intégrale on aura

$$\ln |B(t)| \leq \left( \frac{e_B r_2 M_1 - m_B D}{D} \right) t.$$

Donc

$$B(t) \leq B_0 e^{\left( \frac{e_B r_2 M_1 - m_B D}{D} \right) t}$$

Ce qui implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ .

## 3.4 Existence et unicité de solution presque périodique positive

**Théorème 3.3.**

Supposons que les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$  et  $(H_4)$  sont satisfaites, alors le système (3.2) admet une unique solution presque périodique positive.

*Démonstration.*

**Première étape :**

Montrons que l'ensemble

$$S = \{H(t) = (G(t), B(t))^t, \text{ solution de (3.2) tq } m_1 \leq G(t) \leq M_1, m_2 \leq B(t) \leq M_2, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

n'est pas vide.

Par hypothèse la fonction  $R$  est presque périodique, alors d'après la définition de Bochner des fonctions presque périodiques, il existe une suite réelle  $(t_n)_n$  telle que  $(R(t + t_n))_n$  converge vers  $R(t)$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $H(t) = (G(t), B(t))^t$  une solution de (3.2) qui vérifie les conditions suivantes :

$$m_1 \leq G(t) \leq M_1 \text{ et } m_2 \leq B(t) \leq M_2, \forall t > T \text{ pour un certaine } T > 0.$$

La suite  $H(t + t_n) = (G(t + t_n), B(t + t_n))$  est uniformément bornée et équicontinue sur chaque sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}$  car la solution  $(G(t), B(t))$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $H(t + t_n) = (G(t + t_n), B(t + t_n))$  converge uniformément sur tout sous ensemble compact de  $\mathbb{R}$ .

Les conditions du Théorème d'Ascoli-Arzelà sont vérifiées,  $H(t + t_n)$  est uniformément bornée et équicontinue, alors il existe une sous-suite  $(H(t + t_k))_k$  qui converge vers une fonction continue  $p(t) = (p_1(t), p_2(t))^t$  uniformément sur chaque sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $T_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $t_k + T_1 > T, \forall k \in \mathbb{N}$ .

En intégrant les deux équations de (3.2) sur  $[t_k + T_1, t + t_k + T_1]$ , on obtient

$$\begin{aligned} G(t + t_k + T_1) - G(t_k + T_1) &= \int_{t_k + T_1}^{t + t_k + T_1} \left( \gamma_G G(s) - m_G G^2(s) - \frac{r(s)G(s)}{B(s) + D} B(s) \right) ds \\ &= \int_{T_1}^{t + T_1} (\gamma_G G(s + t_k) - m_G G^2(s + t_k)) ds \\ &\quad - \int_{T_1}^{t + T_1} \left( \frac{r(s + t_k)G(s + t_k)}{B(s + t_k) + D} B(s + t_k) \right) ds. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} B(t + t_k + T_1) - B(t_k + T_1) &= \int_{t_k + T_1}^{t + t_k + T_1} (e_B \frac{r(s)G(s)}{B(s) + D} B(s) - m_B B(s)) ds \\ &= \int_{T_1}^{t + T_1} \left( e_B \frac{r(s + t_k)G(s + t_k)}{B(s + t_k) + D} B(s + t_k) - m_B B(s + t_k) \right) ds. \end{aligned}$$

D'après le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue on aura  $\forall t \geq 0$ ,

$$p_1(t + T_1) - p_1(T_1) = \int_{T_1}^{t + T_1} (\gamma_G p_1(s) - m_G p_1^2(s) - \frac{r(s)p_1(s)}{p_2(s) + D} p_2(s)) ds,$$

$$p_2(t + T_1) - p_2(T_1) = \int_{T_1}^{t + T_1} (e_B \frac{r(s)p_1(s)}{p_2(s) + D} p_2(s) - m_B p_2(s)) ds.$$

Comme  $T_1 \in \mathbb{R}$  est arbitrairement donné,  $p(t) = (p_1(t), p_2(t))^t$  est une solution du système (3.2) sur  $\mathbb{R}$ .

De la convergence uniforme  $H(t + t_k)_k$  vers  $p(t)$  on aura

$$m_1 \leq p_1(t) \leq M_1, m_2 \leq p_2(t) \leq M_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi  $p(t) \in S$ .

**Deuxième étape :**

D'après la première étape

$S = \{H(t) = (G(t), B(t))^t, \text{ solution de (3.2) tq } m_1 \leq G(t) \leq M_1, m_2 \leq B(t) \leq M_2, \forall t \in \mathbb{R}\}$  est non vide. C'est à dire le système (3.2) admet au moins une solution positive bornée

$$(G^*(t), B^*(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il nous reste à montrer qu'elle est presque périodique et unique. Pour cela il suffit de montrer qu'elle est limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques.

Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$  comme suit :

$$f_1(t, G, B) = \gamma_G G(s) - m_G G^2(s) - \frac{R(t)G(s)}{B(s) + D} B(s),$$

et

$$f_2(t, G, B) = e_B \frac{R(t)G(s)}{B(s) + D} B(s) - m_B B(s).$$

Par la presque périodicité de la fonction  $R$ , les fonctions  $f_1, f_2$  sont presque périodiques en  $t$  uniformément par rapport à  $(G, B) \in \Gamma$  ( $\Gamma = \Gamma_\varepsilon, \varepsilon = 0$ ).

Alors, si  $(\alpha_k)_k$  est une suite de nombre réels quelconque, on peut extraire de  $(\alpha_k)_k$  une sous suite  $(\tau_k)_k$  telle que la suite de fonctions  $(f_1(t + \tau_k, G, B), f_2(t + \tau_k, G, B))_k$  converge uniformément sur  $\mathbb{R} \times F$ , où  $F$  est un compact quelconque de  $\Gamma$ .

Si on montre que  $(G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k))$ , où  $(G^*(t), B^*(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  une solution positive bornée, converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ , quand  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = \tau$ , ( $\tau$  fini ou infini), alors  $(G^*(t), B^*(t))$  serait une solution presque périodique positive du système (3.2).

Deux cas peuvent se présenter :

**Premier cas :**  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ .

D'après le Théorème des accroissement finies appliqué aux fonctions  $G^*, B^*$  sur l'intervalle  $[t + \tau, t + \tau_k]$  il va exister  $\theta_k, \tilde{\theta}_k \in ]0, 1[$  tels que :

$$|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau)| = |\dot{G}^*(t + \tau + \theta_k(\tau_k - \tau))| |\tau_k - \tau| \leq \lambda |\tau_k - \tau|$$

et

$$|B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau)| = |\dot{B}^*(t + \tau + \tilde{\theta}_k(\tau_k - \tau))| |\tau_k - \tau| \leq \lambda |\tau_k - \tau|,$$

où  $(G^*), (B^*)$  désignent respectivement les dérivées de  $G^*, B^*$  et  $\lambda$  est une constante positive.

Ainsi  $(G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k))$  converge uniformément vers  $(G^*(t + \tau), B^*(t + \tau))$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Donc  $(G(t + \tau), B(t + \tau))$  est presque périodique. Par l'invariance par translation de l'espace des fonctions presque périodiques,  $(G(t), B(t))$  est presque périodique.

**Deuxième cas :**  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = +\infty$

Pour montre que  $(G^*(t + \tau), B^*(t + \tau))^t$  est une solution presque périodique positive du système (3.2) il suffit de montrer que

$$|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)| < \varepsilon. \quad (3.8)$$

Pour cela, on défini

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s), \quad s \in [t, t + \tau_k]$$

avec

$$V_1(s) = |\ln G^*(s) - \ln G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \text{ et } V_2(s) = |\ln B^*(s) - \ln B^*(s + \tau_n - \tau_k)|.$$

Pour avoir (3.15), on va montrer que,

$$V(t + \tau_k) < \frac{\varepsilon}{\max(M_1, M_2)} \quad (3.9)$$

où  $M_1 = M_1^\varepsilon$  et  $M_2 = M_2^\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 0$ , voir les notations (3.1) .

(i) Montrons maintenant que

$$V(t + \tau_k) < \frac{\varepsilon}{\max(M_1, M_2)}$$

On a

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s), \quad s \in [t, t + \tau_k]$$

et  $(G^*(s), B^*(s))$  est une solution bornée du système (3.2), alors

$$m_1 \leq G^*(s) \leq M_1 \text{ et } m_2 \leq B^*(s) \leq M_2.$$

Le Théorème des accroissement finies appliqué à la fonction logarithme népérien sur l'intervalle  $[s + \tau_n - \tau_k, s]$  donne l'existence d'une constante  $C \in [s + \tau_n - \tau_k, s]$  tel que

$$|\ln G^*(s) - \ln G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \leq \frac{1}{C} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)|.$$

Comme  $m_1 \leq C \leq M_1$ , par la bornitude de  $G^*$  et  $B^*$  on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_1} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| &\leq |\ln G^*(s) - \ln G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\ &\leq \frac{1}{m_1} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

D'où :

$$\frac{1}{M_1} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \leq V_1(s) \leq \frac{1}{m_1} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)|. \quad (3.11)$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| &\leq \frac{1}{C} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\ &\leq \frac{1}{m_2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

D'où,

$$\frac{1}{M_2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \leq V_2(s) \leq \frac{1}{m_2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)|. \quad (3.13)$$

Calculons maintenant, la dérivée de Dini de  $V_1(s)$  :

$$\begin{aligned} D^+ V_1(s) &= \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\dot{G}^*(s)}{G^*(s)} - \frac{\dot{G}^*(s + \tau_n - \tau_k)}{G^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right) \\ &= \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\dot{G}^*(s)}{G^*(s)} \right) \\ &\quad - \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\dot{G}^*(s + \tau_n - \tau_k)}{G^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant  $\dot{G}^*(s)$  et  $\dot{G}^*(s + \tau_n - \tau_k)$  par la première équation du système (3.2) on obtient :

$$\begin{aligned} D^+V_1(s) &= \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\gamma_{G^*} G^*(s) - m_{G^*} G^{*2}(s) - \frac{R(s)G^*(s)}{B^*(s)+D} B^*(s)}{G^*(s)} \right) \\ &- \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\gamma_{G^*} G^*(s + \tau_n - \tau_k) - m_{G^*} G^{*2}(s + \tau_n - \tau_k)}{G^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right) \\ &+ \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\frac{R(s+\tau_n-\tau_k)G^*(s+\tau_n-\tau_k)}{B^*(s+\tau_n-\tau_k)} B^*(s + \tau_n - \tau_k)}{G^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right). \end{aligned}$$

Après simplification on aura :

$$\begin{aligned} D^+V_1(s) &= \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( m_{G^*} (G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) - \frac{R(s)B^*(s)}{B^*(s)+D} \right) \\ &+ \text{sign}(G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{R(s + \tau_n - \tau_k)B^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D} \right) \\ &\leq -m_G^* |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\ &+ \left| \frac{-(R(s) - R(s + \tau_n - \tau_k))B^*(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k) - R(s)B^*(s)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right| \\ &- m_G^* |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\ &\times \left| \frac{R(s + \tau_n - \tau_k)B^*(s + \tau_n - \tau_k)D + R(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k)D - R(s)B^*(s + \tau_n - \tau_k)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \right| \\ &\leq -m_G^* |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| + \frac{R(s)D}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} \\ &\times |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| + \frac{(B^*(s + \tau_n - \tau_k)(B^*(s) + D)}{(B^*(s) + D)(B^*(s + \tau_n - \tau_k) + D)} |R(s) - R(s + \tau_n - \tau_k)| \end{aligned}$$

Par les majorations  $R(s) \leq r_2$  et  $m_1 \leq G^*(s) \leq M_2$  on aura :

$$\begin{aligned} D^+V_1(s) &\leq -m_G |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| + \frac{r_2}{D} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\ &+ \frac{M_2(M_2 + D)}{D^2} |R^*(s) - R^*(s + \tau_n - \tau_k)| \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de Dini de  $V_2$

$$D^+V_2(s) = \text{sign}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\dot{B}^*(s)}{B^*(s)} - \frac{\dot{B}^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{sign}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\dot{B}^*(s)}{B^*(s)} \right) \\
 &- \text{sign}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{\dot{B}^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right).
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $\dot{B}^*(s)$  et  $\dot{B}^*(s + \tau_n - \tau_k)$  par la première équation du système (3.2) on obtient :

$$\begin{aligned}
 D^+V_2(s) &= \text{sign}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{e_B^* \frac{R(s)G^*(s)}{B^*(s)+D} B^*(s) - m_B^* B^*(s)}{B^*(s)} \right) \\
 &- \text{sign}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{e_B^* \frac{R(s+\tau_n-\tau_k)G^*(s+\tau_n-\tau_k)}{B^*(s+\tau_n-\tau_k)+D} B^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right) \\
 &+ \text{sign}(B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)) \left( \frac{m_B^* B^*(s + \tau_n - \tau_k)}{B^*(s + \tau_n - \tau_k)} \right).
 \end{aligned}$$

Après les simplification et en utilisant les majorations

$$r_1 \leq R(s), m_1 \leq G^*(s) \leq M_1, m_2 \leq B^*(s) \leq M_2$$

on aura :

$$\begin{aligned}
 D^+V_2(s) &\leq -\frac{e_B^* r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
 &+ \frac{e_B^* r_2 (M_2 + D)}{(D)^2} |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
 &+ \frac{e_B^* r_2 (M_2 + D)}{(D)^2} |R(s) - R(s + \tau_n - \tau_k)|.
 \end{aligned}$$

Puisque

$$D^+V(s) = D^+V_1(s) + D^+V_2(s).$$

On aura

$$\begin{aligned}
 D^+V(s) &\leq -\left( m_G - \frac{e_B r_2 (M_2 + D)}{D^2} \right) |G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
 &- \left( \frac{e_B r_1 m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} \right) |B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\
 &+ \left( \frac{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)}{D^2} \right) |R^*(s) - R^*(s + \tau_n - \tau_k)|
 \end{aligned}$$

D'après les hypothèses ( $H_3$  et  $H_4$ ) on aura

$$D^+V(s) \leq -\mu_1|G^*(s) - G^*(s + \tau_n - \tau_k)| - \mu_1|B^*(s) - B^*(s + \tau_n - \tau_k)| \\ + \left( \frac{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)}{D^2} \right) |R^*(s) - R^*(s + \tau_n - \tau_k)|$$

Si on pose  $\sigma = s - \tau_k$ , on aura

$$|R(s) - R(s + \tau_n - \tau_k)| = |R(\sigma + \tau_k) - R(\sigma + \tau_n)|$$

On a  $R$  est presque périodique donc la suite  $(R(s + \tau_k))_k$  converge uniformément alors,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq k \geq n_0$ , on a :

$$|R(\sigma + \tau_k) - R(\sigma + \tau_n)| < \varepsilon' = \mu \frac{D^2}{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)} \frac{\varepsilon}{\max(M_1, M_2)}$$

D'où :

$$\frac{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)}{D^2} |R(s) - R(s + \tau_n - \tau_k)| < \mu \frac{\varepsilon}{\max(M_1, M_2)}$$

En utilisant le fait que  $m_i^\varepsilon < M_i^\varepsilon$  pour  $i = 1, 2$  on aura :

$$\mu_1 M_1 V_1(s) + \mu_2 M_2 V_2(s) > \mu V(s)$$

D'où :

$$-\mu_1 M_1 V_1(s) - \mu_2 M_2 V_2(s) < -\mu V(s)$$

Ainsi,

$$D^+V(s) \leq -\mu V(s) + \mu \frac{\varepsilon}{\max(M_1, M_2)},$$

En intégrant cette dernière équation sur l'intervalle  $[t, t + \tau_k]$  et comme  $(\frac{2M_1}{m_1} + \frac{2M_2}{m_2}) \exp(-\mu \tau_k)$  et en utilisant les inégalités gauches de (3.11) et (3.13) on aura :

$$V(t + \tau_k) \leq V(t) \exp(-\mu \tau_k) + \frac{\varepsilon}{2 \max(M_1, M_2)} \\ \leq \left( \frac{2M_1}{m_1} + \frac{2M_2}{m_2} \right) \exp(-\mu \tau_k) + \frac{\varepsilon}{2 \max(M_1, M_2)} \leq \frac{\varepsilon}{2 \max(M_1, M_2)}.$$

(ii) On utilisant les inégalités précédentes on obtint

$$V(t + \tau_k) \geq \frac{1}{\max(M_1, M_2)} |G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)| \quad (3.14)$$

Ainsi

$$|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)| < \varepsilon$$

Donc la suite  $(G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k))_k$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  lorsque

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = +\infty.$$

D'où  $(G^*(s), B^*(s))$  est une solution presque périodique du système (3.2).

**Troisième cas :**  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = -\infty$

De la même manière, pour montrer que  $(G^*(t + \tau), B^*(t + \tau))^t$  est une solution presque périodique positive du système (3.2) il suffit de montrer que

$$|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)| < \varepsilon. \quad (3.15)$$

Pour cela, on suppose que  $\tau_k < 0$ ,  $\forall k$  et nous définissons  $V(s)$  par :

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s), \quad s \in [t, t - \tau_k]$$

avec

$$V_1(s) = |\ln G^*(s + 2\tau_k) - \ln G^*(s + \tau_n + \tau_k)| \text{ et } V_2(s) = |\ln B^*(s + 2\tau_k) - \ln B^*(s + \tau_n + \tau_k)|.$$

De façon similaire aux calculs ci-dessus, la dérivée de Dini de  $V(s)$  vérifie :

$$\begin{aligned} D^+V(s) \leq & - \left( m_G - \frac{e_{Br_2}(M_2 + D)}{D^2} \right) |G^*(s + 2\tau_k) - G^*(s + \tau_n + \tau_k)| \\ & - \left( \frac{e_{Br_1}m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} \right) |B^*(s + 2\tau_k) - B^*(s + \tau_n + \tau_k)| \\ & + \left( \frac{(e_B M_1 + M_2)(M_2 + D)}{D^2} \right) |R^*(s + 2\tau_k) - R^*(s + \tau_n + \tau_k)| \end{aligned}$$

on pose  $\sigma = s + \tau_k$ .

En plus, de la presque périodicité de  $R$  les inégalités gauches des équations (3.10) et (??) donnent :

pour tout  $n \geq k \geq n_1(\varepsilon)$

$$D^+V(s) \leq -\mu V(s) + \mu \frac{\varepsilon}{2 \max(M_1, M_2)} \quad (3.16)$$

En intégrant (3.16) sur l'intervalle  $[t, t - \tau_k]$  en utilisant (3.13) et le fait que

$$\left( \frac{2M_1}{m_1} + \frac{2M_2}{m_2} \right) \exp(\mu \tau_k) < \frac{\varepsilon}{2 \max(M_1, M_2)}$$

on aura

$$V(t - \tau_k) < \frac{\varepsilon}{2 \max(M_1, M_2)}$$

En utilisant les équations (3.10) et (??) on aura

$$V(t - \tau_k) \geq \frac{1}{\max(M_1, M_2)} (|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)|)$$

D'où :

$$|G^*(t + \tau_k) - G^*(t + \tau_n)| + |B^*(t + \tau_k) - B^*(t + \tau_n)| < \varepsilon$$

Donc la suite  $(G^*(t + \tau_k), B^*(t + \tau_k))_k$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  lorsque

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = -\infty.$$

D'où  $(G^*(s), B^*(s))$  est une solution presque périodique du système (3.2).  $\square$

## 3.5 Exemple et Simulations numériques

### 3.5.1 Présentation de simulink de MATLAB

Le contenu de cette section est tiré de [8] SIMULINK est un logiciel muni d'une interface graphique, intégré à l'environnement MATLAB, permettant de représenter les fonctions mathématiques et les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires sous forme de schémas en blocs (diagramme structurel). Il permet de modéliser, simuler (en temps continus ou discrets) et analyser les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Le diagramme structurel permet la représentation graphique d'un système d'équations linéaires et non linéaires. Il met en évidence la structure du système et permet de visualiser les interactions entre les différentes grandeurs internes et externes sous forme de graphiques ou de valeurs numériques en cours de simulation. Les paramètres régissant le fonctionnement des systèmes peuvent être modifiés en ligne,

c'est à dire en cours de simulation, et l'on peut observer leur effet immédiatement. Les éléments qui composent le diagramme structurel représentent les fonctions et les opérations mathématiques, à savoir : l'addition, la soustraction, la multiplication, l'intégration et la différentiation. SIMULINK est largement utilisé dans différents domaines tels que les mathématiques, les énergies renouvelables, l'aérospatial, l'automatique, les communications, l'électronique et traitement de signal, système de contrôle, l'instrumentation médicale ...etc.

Toute représentation sous Simulink se fait au moyen de blocs, caractérisés par leurs fonctions et leurs entrées/sorties :

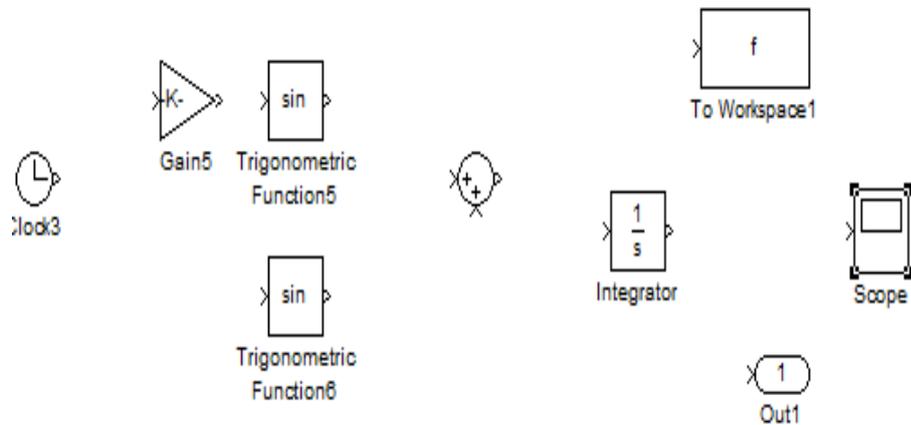


FIGURE 3.1 – Les blocs utilisés pour dessiner le graphe de  $\sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$

Les blocs sont reliés entres eux par des signaux temporels :

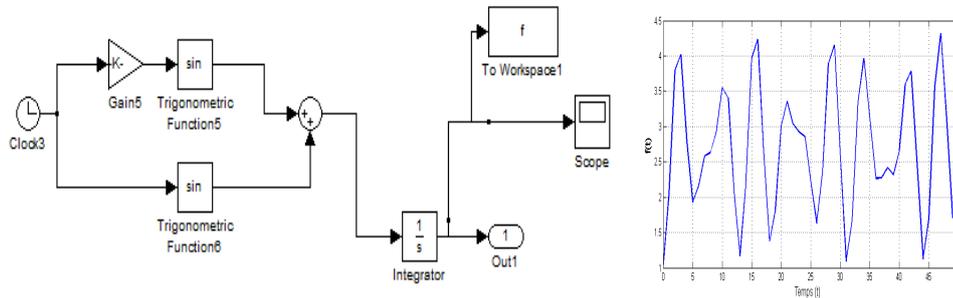


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction  $f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$  obtenu par Simulink

Les bibliothèques sont des ensembles de blocs répartis selon la catégorie de fonctions réalisées. Parmi ces bibliothèques les plus utilisées sont :

- **Sources** : les blocs sources possèdent une ou plusieurs sorties et aucune entrée, elle contient les blocs (Onde sinusoïdale, Nombre aléatoire). Il sont utilisés pour la génération de signaux et la lecture dans les fichiers de données à partir de MATLAB.

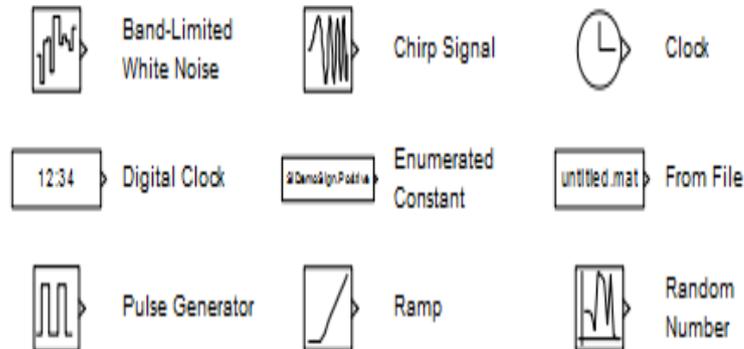


FIGURE 3.3 – Exemple de blocs de la bibliothèque "source"

- **Sinks** : sont des blocs possédant une ou plusieurs entrées et aucune sortie, cette bibliothèque contient les blocs (Afficheur(Display), Enregistreur(Record), Oscilloscope(Scope) et (X Y Graph). Il sont utilisés pour afficher les résultats de la simulation dans des fichiers de données.

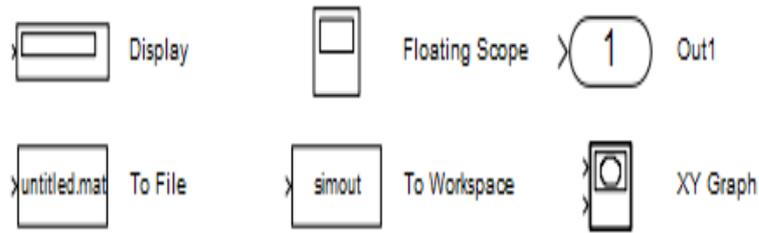


FIGURE 3.4 – Les blocs de la bibliothèque "Sinks"

- **Signal Routing** : sont les blocs utilisés pour l'aiguillage de signaux ou la connection des blocs et cette librairie contient les blocs (Mux, Dwich, demux).

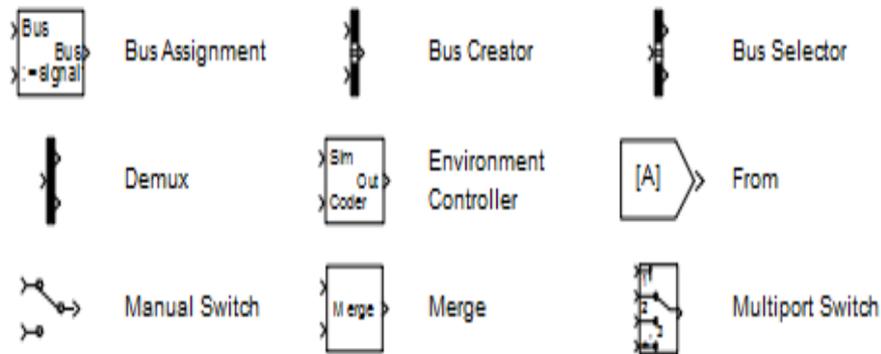


FIGURE 3.5 – Les blocs de la bibliothèque "Signal Routing"

- **Math operations** : sont des blocs réalisant des opérations mathématiques pour transformer le signal entrant. Cette bibliothèque contient les blocs (Produit (Product), Diviser (Divide), Ajouter (Add), Valeur absolue (Abs), Multiplicateur (Gain)).

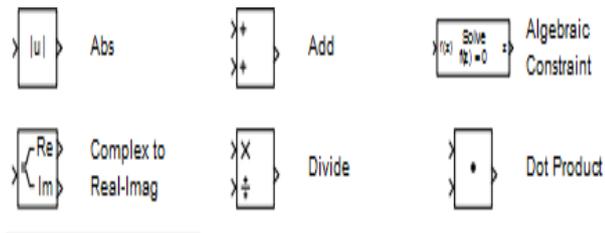


FIGURE 3.6 – Les blocs de la bibliothèque "Math Operations"

– **Continuous** : Blocs continus.

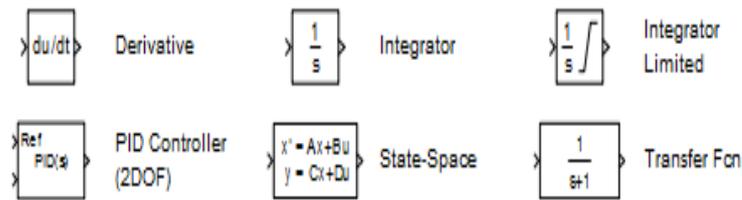


FIGURE 3.7 – Les blocs de la bibliothèque "Continuous"

– **Discrete** : Blocs discrets

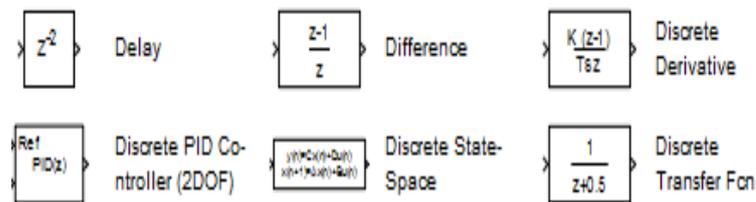


FIGURE 3.8 – Les blocs de la bibliothèque "Discrete"

- **Commonly used blocks** : Contient les blocs les plus fréquents (Constant, Intégrateur, Sommateur, Multiplicateur, Switch).
- **Logic and Bit Opération** : Blocs d'opérations logiques et binaires.
- **Discontinuities** : Blocs discontinus (hystérésis, seuil, etc. ).
- **Blocs additionnels** d'opérations mathématiques et de systèmes discrets.

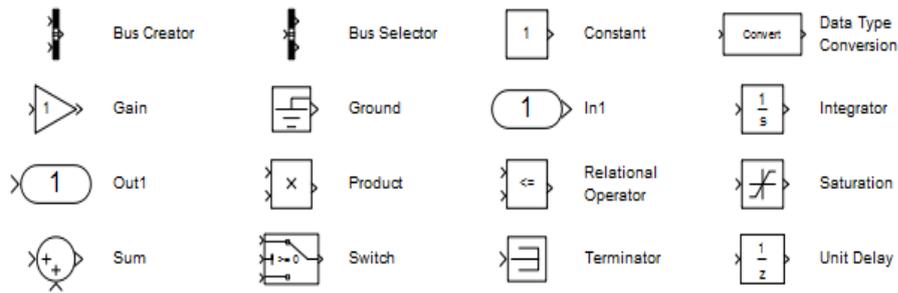


FIGURE 3.9 – Les blocs de la bibliothèque "Commonly used blocks"

### 3.5.2 Exemple d'application

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{G}(t) = 25G(t) - 7G^2(t) - \left( \frac{(2+0.2(\sin(t)+\sin(\sqrt{2}t))G(t)}{B(t)+2} \right) B(t), \\ \dot{B}(t) = 3.2 \left( \left( \frac{(2+0.2(\sin(t)+\sin(\sqrt{2}t))G(t)}{B(t)+2} \right) B(t) - 8B(t) \right) \end{cases} \quad (3.17)$$

avec deux conditions initiales différentes :  $(G_0, sB_0)^t = (3.7, 1.5)^t$ ,  $(G_0, B_0)^t = (3.3, 0.2)^t$ .

Dans cet exemple on a :

$$\gamma_G = 25, m_G = 7, m_B = 8, R(t) = (2 + 0.2(\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t))), D = 2, e_B = 3.2$$

$$r_1(t) = \min_{t \in \mathbb{R}} R(t) = 1.6 \quad \text{et} \quad r_2(t) = \max_{t \in \mathbb{R}} R(t) = 2.4$$

$$m_1 = \frac{\gamma_G - r_2}{m_G} = \frac{25 - 2.4}{7} = 3.229 \quad \text{et} \quad M_1 = \frac{\gamma_G}{m_G} = \frac{25}{7} = 3.571$$

$$m_2 = \frac{e_B r_1 m_1 - m_B D}{m_B} = \frac{3.2 \times 1.6 \times 3.229 - 8 \times 2}{8} = 0.066$$

$$M_2 = \frac{e_B r_2 M_1 - m_B D}{m_B} = \frac{3.2 \times 2.4 \times 3.571 - 8 \times 2}{8} = 1.429$$

$$\text{et} \quad \frac{4m_G \gamma_B m_B D}{(\gamma_G + m_B)^2} = 4.113.$$

$$\text{Pour } (G_0, B_0)^t = (3.7, 1.5)^t \text{ on a } \frac{\gamma_B (B_0 + D)}{G_0} = 9.459.$$

$$\text{Pour } (G_0, B_0)^t = (3.3, 0.2)^t \text{ on a } \frac{\gamma_B (B_0 + D)}{G_0} = 6.667.$$

Ainsi dans les deux cas on a :

$$r_2 = 2.4 < \min \left( \frac{\gamma_B (B_0 + D)}{G_0}, \frac{4m_G \gamma_B m_B D}{(\gamma_G + m_B)^2} \right) = \min \left( \frac{\gamma_B (B_0 + D)}{G_0}, 4.113 \right) = 4.113.$$

Par conséquent l'hypothèse  $(H_1)$  est vérifiée pour les deux conditions initiales.

On a

$$\gamma_G = 25 > r_2 = 2.4 > r_1 = 1.6 > \frac{m_B D}{e_B m_1} = 1.548,$$

d'où l'hypothèse  $(H_2)$  est vérifiée.

Enfin les hypothèses  $(H_3)$  et  $(H_4)$  sont réalisées. En effet,

$$\mu_1 = m_G - \frac{e_{Br_2}(M_2 + D)}{D^2} = 0.416 > 0$$

et

$$\mu_2 = \frac{e_{Br_1}m_1}{(M_2 + D)^2} - \frac{r_2}{D} = \frac{3.2 \times 1.6 \times 3.229}{(1.429 + 2)^2} - \frac{2.4}{2} = 0.206 > 0.$$

Par conséquent d'après le Théorème (3.3), le système (3.17) admet une seule solution positive presque périodique.

### **Simulation numérique**

Dans cette partie on va présenter un diagramme de simulation suivant :

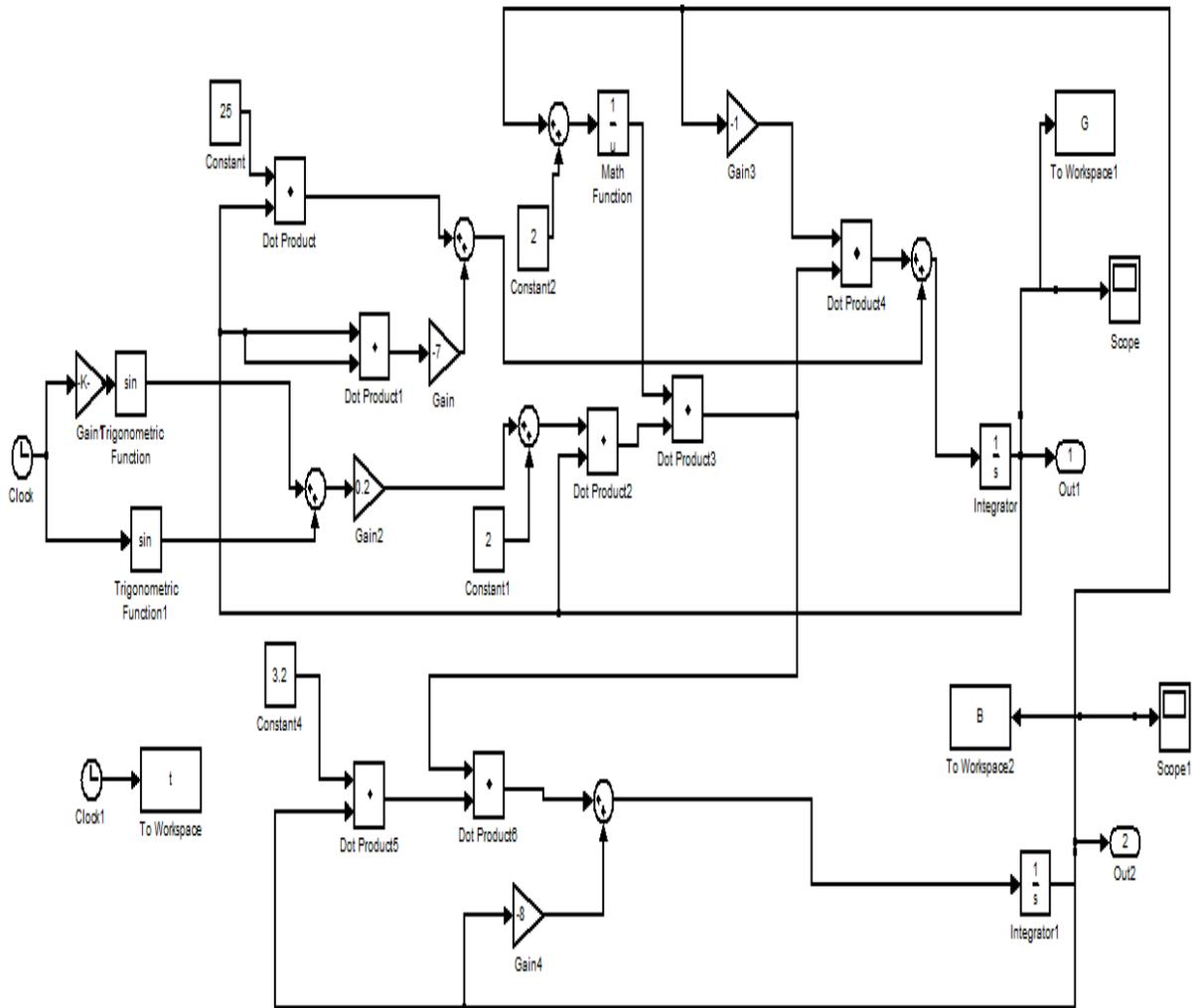


FIGURE 3.10 – Diagramme Simulink de l'exemple (3.17)

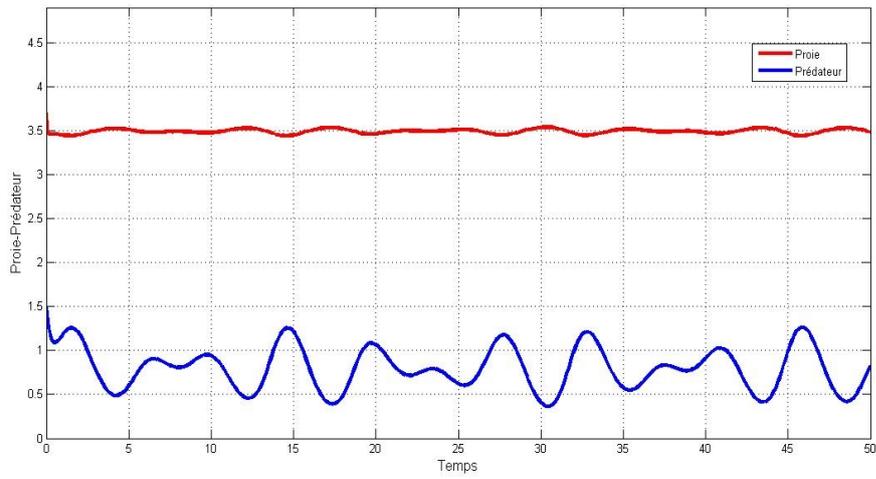


FIGURE 3.11 – Le comportement de la proie et le prédateur pour  $(G_0, B_0)^t = (3.7, 1.5)^t$

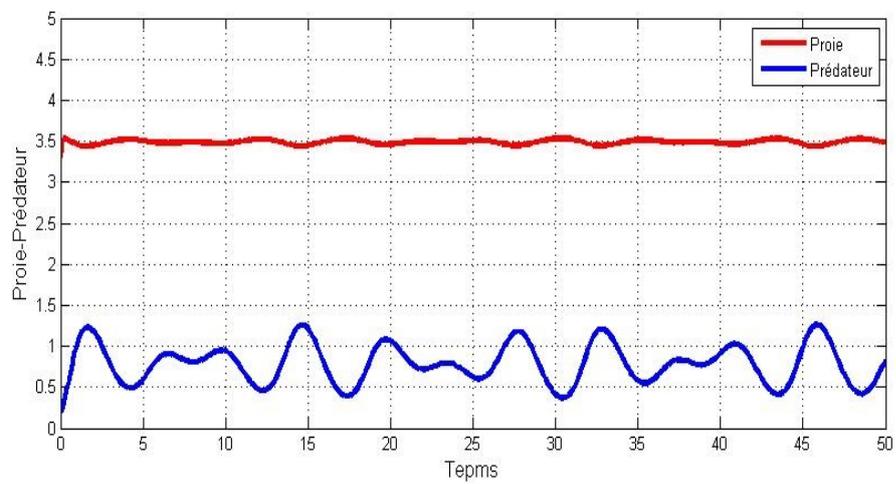


FIGURE 3.12 – Le comportement de la proie et le prédateur pour  $(G_0, B_0)^t = (3.3, 0.2)^t$

---

---

## Conclusion Générale

On a montré dans ce mémoire l'existence et l'unicité de solutions presque périodiques positives d'un modèle proie prédateur qui modélise la dynamique de deux populations de poissons (le Gardon et le Brochet). Le modèle explique comment les variations saisonnières dans les niveaux des eaux affectent l'issue des interactions entre les proies et les prédateurs.

Comme perspective il serait intéressant de considérer ce modèle dans les cas où la fonction d'accessibilité est pseudo presque périodique.

---

---

## Annexe

### **Théorème 3.4. (Théorème des accroissements finis)**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $]a, b[$  alors il existe  $C \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Autrement dit, il existe un  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a).$$

### **Définition 3.3.**

Dans un espace séparé, une partie est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.

### **Théorème 3.5. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) [10]**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{L}^1$ . On suppose que :

1.  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  presque partout sur  $\Omega$
2. il existe une fonction positive  $g \in \mathcal{L}^1$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  presque positive sur  $\Omega$ .

Alors  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \rightarrow 0$ .

### **Définition 3.4. l'équicontinuité**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que la suite  $(f_n)$  est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \forall x \in I$$

---

**Théorème 3.6. (Ascoli-Arzelà)**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle fermé borné  $I$ , on suppose que  $f_n, n \in \mathbb{N}$  est équicontinue et il existe un réel  $M > 0$  tel que  $|f_n(x)| < M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in I$ . Alors on peut extraire une sous suite  $(f_{n_k})$  qui converge uniformément sur  $I$  vers une fonction continue  $f$ .

**Définition 3.5. [24]**

Soit  $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ . On définit la dérivée de Dini (la dérivée à droite supérieure) de  $V$  en un point  $t$ , par :

$$D^+V(t) = \text{sing}V(t) \frac{dV(t)}{dt}$$

---

## Bibliographie

- [1] J. Andres, A.M. Bersani et R.F. Grande. *Hierarchy of almost-periodic function spaces*, *Rendiconti di Mathematica*, vol. 26, 2006, 121-188.
- [2] L. Amerio et G. Prouse. *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, Van Nostrand Reinhold. New York, 1971.
- [3] P. Auger, C. Lett et J. C. Pggiale. *Modélisation Mathématique en Écologie, cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2015.
- [4] N. Bacaër. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer-Verlag, London, 2011.
- [5] N. Beroual. *Modèles mathématiques appliqués à la dynamique des populations*, Thèse de doctorat, 2015.
- [6] A. S. Besicovitch. *Almost periodic functions*. Neudruck. New York : Dover Publications, Inc. XIII, 1954.
- [7] H. Bohr. *Zur theorie der fastperiodischen Funktionen I, II, III*. *Acta Math.* **45** (1924), 29–127; **H6** 1925, 101–214; **HT** 1926, 237–281.
- [8] A. Bouhelal et S. Arezki. *Introduction à l'utilisation de MATLAB Simulink*, National polytechnic school of Algiers livre, 2022
- [9] F. Boulahia-Talbi. *Fonctions presque périodiques*, Cours Master Analyse Mathématique, Département de Mathématique , Université A. Mira de Béjaia.
- [10] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [11] N. F. Britton. *Reaction-Diffusion Equations and Their Application to Biology*, School of Mathematics Bath Uni Bathj, UK, 1986.
- [12] C. Corduneau. *Almost periodic oscillations and Waves*, Springer, Berlin, 2010.
- [13] T. Diagana. *Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces*, Springer, Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2010.
- [14] J. Favard. *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Paris, vol. 299, 1933.
- [15] N. C. Fellah, S. Bouguima et A. Moussaoui. *The effect of water level in a prey-predator interactions, A nonlinear analysis study*, *Chaos, solitons Fractals* 2012, no. 45, p. 205-212.

- 
- [16] A. M. Fink. *Almost periodic differential equations. Lecture Notes Mathematics, Springer-Verlag. 377, 1974, 298-304.*
- [17] E. Fricain. *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, cours et exercices, Cours Master, Département Mathématiques pures, Université des Sciences et Technologies Lille, vol. 2009.*
- [18] H. I. Freedman. *Deterministic mathematical models in population ecology, Marcel Dekker, New York, 1980.*
- [19] H. I. Freedman et G. S. K. Wolkowicz. *Predator-prey systems with group defence, the paradox of enrichment revisited, Bull. Math. Bio. 1986, no. 27, p. 346–360.*
- [20] E. Goncalvés. *Introduction aux systèmes dynamiques et chaos, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique De Grenoble, 2014.*
- [21] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations, Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1980.*
- [22] C. S. Holling. *The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the european pine sawfly, Can. Entomol 1959, no. 91, p. 293–320.*
- [23] U. Kahl, S. Hlsmann, R. J. Radke et J. Benndorf. *The impact of water level fluctuations on the year class strength of roach, Implications for fish stock management, Limnologica 2008, no. 38, p. 258–268.*
- [24] H. K Khalil. *Nonlinear systems, third edition, prentice Hall, upper saddle river, new jersey 07458, 2002.*
- [25] D. Lassoued. *Fonctions presque périodiques et équations différentielles, thèse de doctorat, Université Panthéon-Sorbonne-Paris I, 2013.*
- [26] A. J. Lotka. *Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 6, 1920, p. 410–415.*
- [27] M. A. Menouer. *Solutions périodiques et presque-périodiques de quelques modèles de dynamiques des populations, Thèse de doctorat, Université Abou-Bekr Belkaid-Tlemcen, 2018.*
- [28] A. Moussaoui, M. A. Menouer et E. H. Aït Dads. *Existence and global asymptotic stability of positive almost periodic solution for a predator-prey system in an artificial lake, Chaos, Solitons and Fractals 2017, no. 103, p. 271-278.*

- 
- [29] A. Moussaoui, S. Bassaid et E. A. Dads. *The impact of water level fluctuations on a delayed prey-predator model*, *Nonlinear Analysis, Real World Applications* 2015, no. 21, p. 170–184.
- [30] A. Moussaoui et S. M. Bouguima. *A prey-predator interaction under fluctuating level water*, *Math. Methods Appl. Sci.* 2014, no. 38, p. 123–137.
- [31] A. Moussaoui et S. M. Bouguima. *Seasonal influences on a prey-predator model*, *J. Appl. Math. Comput.* (2012), no. 50, p. 39–57.
- [32] J. M. T. Thompson et H. B. Stewart. *Nonlinear dynamics and chaos*, John Wiley Sons, England, 2002.
- [33] P. Volkmann. *Cinq cours sur les équations différentielles dans les espaces de Banach*, *Topological methods in differential equations and inclusions*, Springer, 1995, 501–520.
- [34] V. Volterra. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, *Memorie della R. Accademia dei Lincei S.VI* 1926, no. II, p. 31–113.

---

---

## Résumé

*L'objectif principal de ce mémoire concerne un résultat d'existence et d'unicité de solution presque périodique positive d'un modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra issu d'un problème réel. Ce modèle introduit pour étudier l'effet des niveaux d'eau sur la persistance ou l'extinction de populations de poissons vivant dans un lac artificiel. Il est connu que lorsque la fonction d'accessibilité est continue et 1-périodique, ce modèle admet une unique solution positive et 1-périodique.*

*Afin de rendre le système du modèle plus réaliste, la fonction d'accessibilité est remplacée par une fonction presque périodique. On a montré dans ce mémoire que sous certaines conditions le problème considéré admet une seule solution presque périodique. Les arguments utilisés sont essentiellement basés sur les propriétés des fonctions presque périodiques. Afin de rendre la compréhension des résultats énoncés possible, on a commencé par exposer quelques définitions concernant la dynamique des populations, les modèles proies-prédateurs et les équations différentielles ordinaires. Par la suite, plusieurs notions concernant les fonctions presque périodiques sont données à savoir : leurs différentes définitions, leurs propriétés fondamentales et un théorème de superposition construit avec une fonction presque périodique à paramètre.*

### Abstra

*The main objective of this Master thesis concerns a result of existence and uniqueness of a positive almost periodic solution of a Lotka-Volterra prey-predator model obtained from a real problem. This model is introduced to study the effect of water level on the persistence or extinction of fish populations living in an artificial lake. It is known that when the accessibility function is continuous and 1-periodic this model has a unique positive 1-periodic solution. In order to make the model system more realistic, the accessibility function is replaced by an almost periodic function. It is shown in this Master thesis that under some conditions the considered problem admits a unique almost periodic solution.*

---

*The arguments used are essentially based on the properties of almost periodic functions. To understand the given results, we first recall some definitions and results including : definitions about population dynamics, prey-predator models, and ordinary differential equations. Then, several concepts related to almost periodic functions are discussed, including : their various definitions, their fundamental properties, and a superposition theorem built on parameter almost periodic function.*