MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de
master en mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

Par

RABHI YACINE

Thème

LES PROBLÈMES INVERSES MAL POSÉS & LA DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRE

Soutenu le 13 / 07 / 2022, devant le jury composé de :

M.F.BOUHMILA	MCA	U.A.M.Béjaia Président
Mme.H.BECHIR	Professeure	U.A.M.Béjaia Promotrice
Mme.TABTI	MCB	U.A.M.Béjaia Examinatrice

Promotion 2021/2022

Table des matières

Introduction

La SVD est un outil important pour la factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes. En 1907, Erhard Schmidt définit l'analogue des valeurs singulières pour les opérateurs intégraux (qui, à certaines conditions près, sont compacts), il semble qu'il ne connaissait pas les travaux parallèles sur les valeurs singulières des matrices de dimension finie. Cette théorie fut développée encore par le mathématicien français Émile Picard en 1910, qui est à l'origine du terme moderne de « valeurs singulières » qu'il notait σ_k.

La première preuve de la décomposition en valeurs singulières pour les matrices rectangulaires et complexes est attribuée à Eckart et à Young, en 1936.

La SVD est utile dans le cadre de recherche d'une solution numérique stable des problèmes inverses et problèmes inverses mal-posés.

La notion d'un problème mathématique mal-posé est apparu dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard en 1902 dans son ouvrage «Lectures on Cauchy's Prob-lem in Linear Partial Differential Equations» [1], [2], après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés :

- La solution du problème existe pour toute donnée,
- La solution du problème est unique,
- La stabilité, la solution dépend continûment des données.

La perte d'une des propriétés définit un problème dit mal-posé.

La non-existence et la non-unicité de la solution d'un problème mal-posé sont sans doute des difficultés sérieuses mais on peut les rétablir, s'il y a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles (voir section 3.1).

La question la plus difficile est, sans aucun doute, celle de la stabilité : si l'on change légèrement les données la solution varie-t-elle peu ou beaucoup ? C'est-à-dire, varie-t-elle continûment en fonction des données ?

Il y a des problèmes où, une petite différence dans les paramètres entraîne un comportement totalement différent de la solution.

Notre travail consacré à l'étude de la SVD des problème mal posés en dimension finie, dans un espace de Hilbert à lui-même.

Les travaux dans ce mémoire sont organisés en quatre chapitres :

Le premier chapitre, commence par quelques rappels et notions fondamentales, dans la première section nous rappelons quelques généralités sur les matrices, pour une meilleure compréhension de notre travail, la deuxième consacrée à présenter la notion d'un problème mal-posé illustrée par des exemples.

Le deuxième chapitre, consiste à définir les valeurs singulières (nous étudions comment décomposer une matrice rectangulaire (n'est pas forcement carrée comme pour les valeurs propres) en valeurs singulières avec quelques propriétés, puis on définit la notion de l'inverse généralisé).

Le troisième chapitre, consiste à la résolution d'un système linéaire, on cherche une solution unique et stable au problème des moindres carrés utilisant la méthode d'équation normale et la méthode de la SVD.

Le quatrième chapitre, il consiste en des applications numériques en Matlab, on compare les deux méthodes concernant la stabilité du solution.

L'objectif de ce travail est la résolution d'un système linéaires mal-conditionné avec soit autant de données que d'inconnues, soit plus de données que d'inconnues, soit plus d'inconnues que de données.

Un système linéaire est un ensemble de m équations linéaires à n inconnues. Il s'écrit sous forme matricielle

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ , tel que } Ax = b$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ sont donnés. Selon les cas, un tel système peut ne pas avoir de solution, avoir une solution unique, avoir une infinité de solutions. Pour étudier le cas général et pour définir des algorithmes de résolution, on reformule le système sous la forme d'un problème aux moindres carrés :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n\text{, tel que } \|Ax = b\|_2 \text{ soit minimum}$$

Ensuite, nous définissons une notion qui généralise celle de valeur propre. Cela permet de résoudre non seulement les problèmes aux moindres carrés, mais aussi beau-coup d'autres problèmes linéaires. Cette propriété, appelée la Décomposition en Valeurs Singulières SVD.

Il est bien connu qu'une matrice a un inverse, si elle est carrée de déterminant non nul. Cependant, dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées on a besoin de quelques types d'inverses partiels d'une matrice singulière, ou même rectangulaires.

Dans ce cas nous allons utiliser la SVD. Par exemple, les solutions d'un système linéaire peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière. Ce qui conduit à l'inverse ainsi nommé généralisé d'une matrice.

Nous nous intéressons à la résolution du problème aux moindres carrés d'un système linéaire mal-conditionné par la méthode décomposition en valeurs singulières. Nous obtenons une solution stable, ce qui n'est pas le cas par la méthode d'équation normale avec des exemples illustratifs.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Ce chapitre contient deux sections, dans la première section "Généralités sur les matrices" nous rappelons les concepts de base d'algèbre linéaire nécessaire relatives aux matrices.

La deuxième section "problèmes mal-posés" nous rappelons la notion d'un problème inverse et problème inverse mal-posé.

1.1 Généralités sur les matrices

Définition 1.1.1 Une matrice A de taille $m \times n$, est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, tel que :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est carrée d'ordre n si $n = m$.

La trace d'une matrice carrée A d'ordre n est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Définition 1.1.2 Soit A une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle matrice adjointe de A, notée A*, la matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\} \quad \begin{cases} A^* = A^t & \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ A^* = (\bar{A})^t & \text{si} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Une matrice A est symétrique si :

$$A^t = A$$

Elle est dite hermitienne ou auto-adjointe si $A^* = A$.

Définition 1.1.3 (Matrice normale) Une matrice carrée A est normale si et seulement si

$$A^*A = AA^*$$

1.1.1 Matrice orthogonale et matrice unitaire

Définition 1.1.4 Une matrice carrée est unitaire si et seulement si $U^{-1} = U^*$.

Une matrice A de $\mathbb{C}^{n\times n}$, est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1- $A^*A = I_n$,

2- $AA^* = I_n$,

3- A est inversible et $A^{-1} = A^t$

Proposition 1.1.1 La transposée et l'inverse d'une matrice orthogonale sont des matrices orthogonales.

1.1.2 Matrice définie positive

Définition 1.1.5 (Matrice définie positive) Soit A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique d'ordre n, alors A est définie positive si et seulement si :

$$\forall x, x \neq 0, x^tAx > 0$$

Elle est semi-définie positive si et seulement si :

$$\forall x, x^tAx \geq 0$$

Théorème 1.1.1 Si A est définie positive, alors A est non singulière.

Preuve. Nous allons prouver la forme contra-posée : Si A est singulière, alors A est non définie positive. Supposons A est singulière, et on a $\ker(A) = \{0\}$, alors il existe $y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ tel que $Ay = 0$, alors $y^t Ay = 0$, donc A n'est pas définie positive.

1.1.3 Image, noyau et rang d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et S_A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par ses colonnes,

$$S_A := \operatorname{span}(A_j)_{1\leq j\leq m}$$

L'image de A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ défini par :

$$\operatorname{Im}(A) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Le noyau de A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\ker(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \in \mathbb{R}^m\}$$

Le rang d'une matrice est la dimension de son image

Proposition 1.1.2 Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Nous avons

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}\left(A^t\right)$$

et

$$\operatorname{rang}(A) + \dim(\ker(A)) = n$$

Proposition 1.1.3 $\operatorname{Rang}(A) = n \Longleftrightarrow \ker(A) = \{0\}$.

Sous l'hypothèse que A est de rang n, la matrice des équations normales $A^t A$ est définie positive.

1.1.4 Inverse d'une matrice

Définition 1.1.6 Une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$, où I_n est la matrice unité de dimension n. La matrice B est appelée matrice inverse de A et notée A^{-1}.

Théorème 1.1.2 Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) A est inversible : il existe une matrice notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = I$ (et $A^{-1}A = I$),

(b) $\det(A) \neq 0$

(c) $\mathrm{rang}(A) = n$,

(d) Le système $Ax = b$ a une solution pour tout b,

(e) Pour tout vecteur b, il existe un seul vecteur x tel que $Ax = b$.

(f) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$

(g) $\ker(A) = \{0\}$

Preuve.
$\mathrm{rang}(A) = n$ équivaut à $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$, ce qui équivaut aussi dire que le système $Ax = b$ a une solution pour tout b. D'autre part, $\mathrm{rang}(A) = n$ équivaut à $\ker(A) = \{0\}$, aussi à dire que si le système a une solution, elle est unique.

Si $\mathrm{rang}(A) = n$, soit Cb la solution unique du système $Ax = b$, alors $ACb = b, \exists b$ donc $AC = I$ et $CAx = Cb = x, \exists x$ donc $CA = I$ et A est inversible d'inverse C.

Réciproquement, si A est inversible alors $AA^{-1}b = b, \exists b$ donc le système $Ax = b$ a une solution pour tout b.

On admet que A inversible équivaut à $\det(A) \neq 0$.

Définition 1.1.7 Une matrice carrée non inversible est dite singulière. Une matrice inversible est dite non singulière.

Proposition 1.1.4 Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Si A est inversible, alors A^t est inversible et $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t = A^{-t}$.

Preuve. $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = I$ donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

$$A^t\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}A\right)^t = I$$

1.1.5 Les normes

A. Normes vectorielles :

Définition 1.1.8 Une norme d'un espace vectoriel E est une application $\| \ . \ \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$qui vérifie les propriétés suivantes :

Pour tout $x \in E, \|x\| \geq 0$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

Pour tout $x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dans $\mathbb{R}^n$, les trois normes les plus courantes sont la norme infinie, la norme 1 et la norme euclidienne.

— norme infinie : $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,..n} |x_i|,$

— norme 1 : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$

— norme 2 ou norme euclidienne : $\|x\|_2 = \sqrt{x^t x}$, où $x = (x_{1,\ldots,}x_n)^t$.

La norme euclidienne est donc définie par le produit scalaire $< x, y >= x^t y$.

B. Normes matricielles :

Définition 1.1.9 (Norme matricielle subordonnée) [9] On suppose que l'on a choisi une norme dans chacun des deux espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On définit alors la norme matricielle subordonnée dans l'espace des matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$ par :

$$\text{Pour tout } A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Lorsque les normes 1, 2 ou infinie sont respectivement choisies pour les deux ensembles à la fois, on note les normes subordonnées correspondantes de la même manière.

Définition 1.1.10 [9] Pour toute application linéaire $f de \mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ munis de n'importe quelle norme, étant continue, on définit

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \|A\widehat{x}\|_p$$

pour un $\widehat{x}$ de la sphère unité de $\mathbb{K}^n$. On obtient la relation

$$\|Ax\|_p \leq \|A\| \, \|x_p\| \,, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

Proposition 1.1.5 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.alors

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,..,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,..,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(AA^t\right)} \text{ avec } \rho\left(AA^t\right) = \max_{\lambda_i \in sp(AA^t)} |\lambda_i|$$

Remarque 1.1.1 La norme matricielle euclidienne n'est pas simple à calculer dans le cas général, contrairement aux autres normes.

Définition 1.1.11 Une norme matricielle de $\mathbb{R}^{n \times n}$ est une norme qui vérifie

$$\text{Pour tout } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Définition 1.1.12 (Norme de Frobenius) Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, on définit sa norme de Frobenius par :

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}, \\ &= \sqrt{\operatorname{tr}\left(A^t A\right)}, \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2 La norme de Frobenius est la norme prise au sens de l'espace vectoriel de dimension mn.

1.1.6 Conditionnement d'une matrice

En analyse numérique matricielle ainsi qu'en statistique, les données sont généralement entachées d'erreurs et parfois une légère perturbation sur les données peut entraîner une grande perturbation sur la solution du problème considéré. Le conditionnement mesure l'influence des erreurs d'arrondi sur la solution initial d'un problème donné. Il est met en évidence par une légère perturbation des données initiales.

Exemple 1.1.1 Prenons l'exemple de (R.S. Wilson) [8] du système linéaire :Ax $= b$

où

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \text{ de solution } \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on perturbe légèrement le second membre b d'une erreur relative de l'ordre de 1/200 pour obtenir $b = (32.1, 22.9, 33.1, 30.9)^t$ alors, la solution du nouveau système devient $x = (9.2, - \quad 12.6, 4.5, - \quad 1.1)^t$. Donc il y a une forte instabilité numérique vis à vis de petites perturbations des données.

Exemple 1.1.2 On considère le système linéaire $Ax = b$ suivant :

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 12 \\ 12 & 10 & 1 \\ 14 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 23 \\ 27 \end{pmatrix} \qquad (P)$$

qui admet la solution $(1, 1, 1)$. (La matrice A est inversible).

Considérons le problème suivant dans lequel le vecteur b est légèrement perturbé :

$$\begin{pmatrix} 23 & 9 & 12 \\ 12 & 10 & 1 \\ 14 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44,44 \\ 23,77 \\ 27,73 \end{pmatrix} \qquad (P_1)$$

La solution du système perturbé (P_1) est $(6, 895, 565, 40)$.

Considérons le problème suivant dans laquelle la matrice A perturbée :

$$\begin{pmatrix} 23,23 & 9,09 & 12,12 \\ 12,12 & 9,9 & 1,01 \\ 14,14 & -11,88 & 25,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 23 \\ 27 \end{pmatrix} \qquad (P_2)$$

La solution du système perturbé (P_2) est $(6,234,734,69)$.

On remarque que : bien que les systèmes (P_1) et (P) ou $(P2)$ et (P) soient voisins, leurs solutions sont très différentes. (i.e. une erreur de 1/100 sur les données provoque une grande variation sur la solution).

Si un élément du système linéaire $Ax = b$ est perturbé. On peut distinguer 3 cas :

1. A est exact, et b perturbé.
2. b est exact, et A perturbé.
3. A et b sont perturbés.

Théorème 1.1.3 Soit A une matrice inversible, b un vecteur non nul, x la solution du système linéaire $Ax = b$ et $\| \, . \, \|$ est une norme subordonnée.

1. Si $(x + \delta x)$ la solution du système perturbé $A(x + \delta x) = b + \delta b$, alors :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \tag{1.1.1}$$

2. Si $(x + \delta x)$ la solution du système perturbé $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ alors :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \sigma x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \tag{1.1.2}$$

3. Si $(x + \delta x)$ la solution du système perturbé $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ alors :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|A\| \|\|x + \delta x\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right) \tag{1.1.3}$$

Preuve :

(a) on démontre l'inégalité (1.1.1) :

on a

$$A(x+\delta x) = Ax + \delta A(x) = b + A(\delta x) = b + \delta b$$

donc

$$A(\delta x) = b$$

alors

$$x = A^{-1}\delta b$$

donc

$$\|\delta x\| \leq \left\|A^{-1}\ |\right\|\delta b\| \tag{1.1.4}$$

Pour $Ax = b$, on trouve :

$$\|b\| = \|A\|\|x\| \tag{1.1.5}$$

On multiplie les inégalités (1.1.4) et (1.1.5) :

$$\|\delta x\|\|b\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \|\delta b\|\|x\|$$

alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

(b) on démontre l'inégalité (1.1.2) :

en effet : $(A+\delta A)(x+\delta x) = Ax + A(\delta x) + \delta A(x+\delta x) = \delta = b$

alors

$$A(\delta x) + vA(x+\delta x) = 0$$

On multiplie l'équation (1.1.4) par A^{-1}, on obtient

$$\delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x)$$

et alors

$$\|\delta x\| \leq \left\|A^{-1\|}\right\| \delta A\|\|x + \delta x\|$$

et

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta A\|$$

d'où

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

(c) On démontre l'inégalité (1.1.3) :

On a $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$, alors

$$A(\delta x) + \delta A(x + \delta x) = \delta b$$

d'où

$$\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A(x + \delta x))$$

alors

$$\|\delta x\| = \left\|A^{-1}\right\| \|\delta b - \delta A(x + \delta x)\|$$

On applique l'inégalité triangulaire pour $\|b - \delta A(x + \delta x)\|$

$$\|\delta x\| = \left\|A^{-1}\right\| (\|\delta b\| + \|\delta A\|\|(x + \delta x)\|)$$

Finalement

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|x + \delta x\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

Définition 1.1.13 (Le conditionnement d'une matrice inversible) Soit $\| \, . \, \|$ une norme matricielle, le conditionnement de la matrice A associé à cette norme, est le nombre

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

Remarque 1.1.3 On dira qu'une matrice est bien conditionnée si son conditionnement n'est pas beaucoup plus grand que 1 .

Proposition 1.1.6 Soit A une matrice inversible. Soient x et $(x + \delta x)$ les solutions des systèmes linéaires : $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$.

On a

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Proposition 1.1.7 Soit A une matrice inversible. Soient x et $(x + \delta x)$ les solutions des systèmes linéaires :

$$Ax = b \text{ et } (A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

On a

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

1.1.7 Dérivation matricielles

Dérivation d'une forme quadratique

Définition 1.1.14 Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque des variables :

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

On note $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, f s'écrit

$$f \quad : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^t Ax =< x, Ax >=< Ax, x >$$

Définition 1.1.15 On appelle dérivée directionnelle de f en x dans la direction d et on note $Df(x, d)$ la limite, quand elle existe

$$Df(x, d) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon d) - f(x)}{\epsilon}$$

Le calcul de la dérivée d'une forme quadratique s'obtient simplement à l'aide des dérivées directionnelles :

On considère

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

donc

$$Df(x, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$Df(x, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\langle A(x + \varepsilon d), x + \varepsilon d \rangle - \langle Ax, x \rangle}{\varepsilon}$$

$$Df(x, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\langle Ax, x \rangle + \varepsilon \langle Ax, d \rangle + \varepsilon \langle Ad, x \rangle + \varepsilon^2 \langle Ad, d \rangle - \langle Ax, x \rangle}{\varepsilon}$$

$$Df(x, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle Ax, d \rangle + \langle Ad, x \rangle + \varepsilon \langle Ad, d \rangle$$

$$Df(x, d) = \langle Ax, d \rangle + \left\langle A^t d, x \right\rangle$$

$$Df(x, d) = \left\langle \left(A + A^t\right) x, d \right\rangle$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in M_{nn}, \frac{\partial \left(x^t Ax\right)}{\partial x} = \left(A + A^t\right) x$$

Si A symétrique i.e. si $A = A^t$ on a

$$\frac{\partial\left(x^t A x\right)}{\partial x} = 2Ax$$

1.1.8 Valeurs et vecteurs propres

Définition 1.1.16 (Valeur et vecteur propre) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$Ax = \lambda x$$

On dit dans ce cas que $x \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A, noté $\lambda(A)$, est dit spectre de A.

Proposition 1.1.8 La fonction P_A de la variable complexe λ définie par :

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

est un polynôme de degré n, on l'appelle polynôme caractéristique de A.

Remarque 1.1.4 Les valeurs propres sont par définition les solutions de l'équation caractéristique :

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$$

Comme P_A est un polynôme de degré n, il admet précisément n racines complexes (non nécessairement distinctes).

Proposition 1.1.9 Toute matrice carrée A d'ordre n a n valeurs propres complexes, qui sont les racines du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$. On a

$$\det(A) = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$$

et

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

Définition 1.1.17 On appelle rayon spectral de A le nombre positif ou nul

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

1.1.9 Décomposition d'une matrice

Pour certaines matrices carrées, on pouvait faire une décomposition ou bien des factorisation.

Dans cette partie nous allons rappeler quelques décompositions les plus connues et importantes

1) Matrices diagonalisables

Définition 1.1.18 (Matrice diagonalisable) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est diagonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrice diagonale.

Lemme 1.1.1 (Diagonalisation d'une matrice normale) La matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est normale si et seulement s'il existe une matrice unitaire U telle que

$$U^{-1}AU = U^*AU = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valeurs propres de A.

2) Décomposition de Schur

Théorème 1.1.4 (Décomposition de Schur (DS)) Pour toute $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ il existe une matrice unitaire $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que

$$U^{-1}AU = U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} = T$$

Où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres de A.

On pourra remarquer que, si T et une matrice carrée triangulaire supérieure, sa décomposition de Schur s'obtient en posant $U = I_n$. Ceci implique, en particulier, que les valeurs propres de T sont ses éléments diagonaux. Ce résultat s'applique également aux matrices triangulaires inférieures.

Nous verrons aussi la décomposition en valeurs singulières, c'est une partie importante de notre travail , avec quelques détails supplémentaires dans le chapitre 3.

1.2 Problèmes mal posés

La notion d'un problème mathématique mal-posé est apparu dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard dans son ouvrage "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Différential Equations" [1].

Cette section est consacrée à la dénition d'un probléme inverse et probléme inverse mal poséavec des exemples illustratifs.

1.2.1 Problème inverse

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $A : X \to Y$ un opérateur, on appelle :

- problème direct : connaissant $x \in X$ évaluer la valeur Ax.
- problème inverse : connaissant $y \in Y$ résoudre $Ax = y$.

1.2.2 Problème inverse mal posé

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $A : X \to Y$ un opérateur. Le problème inverse $Ax = y$ est bien posé au sens de Hadamard si :

1. Existence : Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$ (surjectivité de A),
2. Unicité : Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$ (injectivité de A),
3. Stabilité : La solution x dépend continûment de la donnée $y(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|y - y'\|_Y < \delta \Rightarrow \|x - x'\|_X < \varepsilon$, avec $Ax' = y')$.

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit mal posé.

Remarque 1.2.1 La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible du fait des erreurs de mesures ou d'arrondis.

1.2.3 Exemples concernant les problèmes mal posés

On présente ici quelques exemples simples de problèmes mal-posés, pour plus de détails, on conseille de consulter les deux célèbres livres de H. W. Engl M. Hanke et A. Neubauer [3] et A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin [4].

Exemple 1.2.1 (Système linéaire) Soit le système linéaire $Ax = y$ avec $A \in \mathbb{R}^{n\times m}(n > m)$ et $y \in \mathrm{Im}(A)$.

Le problème du calcul de $x \in \mathbb{R}^n$ à partir de $y \in \mathbb{R}^m$, en résolvant l'équation

$$Ax = y$$

Est un problème mal posé, puisque l'application linéaire associée à la matrice A n'est pas une bijection.

Dans ce cas, il y a une infinité de solutions puisqu'il suffit de rajouter un élément de $\ker(A)$ à une solution pour en obtenir une autre.

Exemple 1.2.2 (Equation intégrale de première espèce) Pour des fonctions $k(x, y) \in L^2([c, d] \times [a, b])$ et $f \in L^2([a, b])$, on peut considérer l'équation intégrale de première espèce associée au noyau $k(x, y)$ et à la donnée f :

trouver $\varphi \in L^2([a, b])$ telle que, pour tout $x \in [c, d]$

$$\int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{1.2.1}$$

L'équation (1.2.1) n'a pas toujours de solution. En effet, supposons $k(x, y)$ continûment dérivable par rapport à x sur $[c, d]$, alors le premier membre de (1.2.1) est continûment dérivable par rapport à x quel que soit $\varphi \in L^2([a, b])$ en raison du théorème de dérivation sous le signe intégral. Par suite (1.2.1) n'a aucune solution si le second membre f n'est pas dérivable sur $[c, d]$.

Exemple 1.2.3 Soient X et Y deux espaces de Hilbert, $A : X \to Y$ un opérateur Si A est compact et $\mathrm{Im}(A)$ non fermé alors, le problème

$$A\varphi = f$$

est mal posé.

$R(A)$ est non fermé $\Rightarrow$ A^{-1} non borné $\Rightarrow$ la troisième condition n'est donc pas vérifiée.

Exemple 1.2.4 Considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = y - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution

$$y(x) = e^x - 1$$

Si la condition initiale est donnée par $y(0) = \varepsilon$, la solution est alors :

$$y_1(x) = (1 + \varepsilon)e^x - 1$$

De sorte que la différence s'écrit :

$$y_1(x) - y(x) = \varepsilon e^x$$

Si x varie dans l'intervalle $[0, 30]$, on a

$$y_1(30) - y(30) = \varepsilon e^{30} \simeq 10^{13}\varepsilon$$

Si la précision des calculs est de 10^{10}, le problème est numériquement mal posé, bien que mathématiquement bien posé.

Chapitre 2
Les valeurs singulières

On a vu que pour certaines matrices carrées on pouvait faire une décomposition en valeurs propres.

$$A = PDP^{-1}$$

mais pour effectuer cette transformation, la matrice A doit être carrée et diagonalisable.

L'idée de la décomposition en valeurs singulières est similaire à la décomposition en valeurs propres, mais fonctionne pour n'importe quelle matrice de taille $m \times n$.

La décomposition en valeurs singulières est l'un des factorisations d'une matrice les plus importantes, car il n'y a aucune condition sur la matrice (rang, dimension).

Ce chapitre consiste à définir les valeurs singulières et la décomposition d'une matrice en valeurs singulières, avec quelques exemples illustratifs, puis dans la deuxième section, consiste à définir la notion d'inverse généralisé (pseudo-inverse).

2.1 Décomposition en valeurs singulières

Le rôle de la SVD est la factorisation de la matrice de taille $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$

Définition 2.1.1 Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, la décomposition en valeurs singulières de A s'écrit de la façon suivante :

$$A = U\Sigma V^t \tag{2.1.1}$$

avec U et V deux matrices orthogonales de taille $m \times m$ et $n \times n$ respectivement et Σ une matrice diagonale de taille $m \times n$ contenant les valeurs singulière de A notées $\sigma_1, \sigma_{2,}, ., \sigma_p$ et $p = \min(m, n)$ telles que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots \sigma_p = 0$$

avec

$$r = \mathrm{rang}(A)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 & .. & 0 \\ & \sigma_2 & & & 0 & ... & 0 \\ & & . & & & & 0 \\ & & & \sigma_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m \leq n$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & . & \\ & & & \sigma_n \\ 0 & & & 0 \\ . & & & \\ 0 & .. & .. & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m > n$$

Les r premières colonnes de V et U sont dénommées respectivement vecteurs singulièrs droit et gauche de A.

Si $A = U\Sigma V^t$ on a

$$A^t A = \left(U\Sigma V^t\right)\left(U\Sigma V^t\right) = V\Sigma^2 V^t \tag{2.1.2}$$

A^tA est une matrice réelle symétrique, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres

$$A^t A = PDP^{-1} = PDP^t \tag{2.1.3}$$

De plus A^tA est définie positive car

$$< A^t Ax, x >= \left(A^t Ax\right)^t x = x^t A^t Ax = (Ax)^t (Ax) = \|Ax\|^2 > 0$$

Donc les valeurs propres λ_i sont positives ou nulles.

Par comparaison des équations $(2.1.2)$ et $(2.1.3)$ il est donc possible de dire que $\Sigma^2 = D$ et $P = V$.

Donc (V, Σ^2) représentent la décomposition aux valeurs propres de $A^t A$, i.e.

$$\left(A^t A = V \Sigma^2 V^t\right)$$

En appliquant la même démarche à la matrice AA^t on obtient

$$\left(AA^t = U \Sigma^2 U^t\right) = PDP^t$$

D'où (U, Σ^2) représentent la décomposition aux valeurs propres de AA^t, i.e.

$$\left(AA^t = U \Sigma^2 U^t\right)$$

On retrouve ici une propriété des valeurs singulières de A

$$\Sigma^2 = D \Leftrightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Les valeurs singulières σ_i de A sont les racines carrées des valeurs propres de $A^t A$ ou AA^t

Théorème 2.1.1 Soit

$$A = U \Sigma V^T$$

Alors

$$\|A\|_2 = \sigma_1 \quad \text{et} \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}.$$

Preuve. On a U et V sont orthogonale, nous avons

$$\|A\|_2 = \left\|U \Sigma V^t\right\|_2 = \|\Sigma\|_2$$

Maintenant

$$\|\Sigma\|_2^2 = \max \|\Sigma x\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \left(\sigma_1^2 x_1^2 + \ldots.. + \sigma_n^2 x_n^2\right) \leq \sigma_1^2 \left(x_1^2 + \ldots. + x_n^2\right) = \sigma_1^2,$$

et le maximum est vérifié pour $x = e_1$ alors $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Pour la norme de Frobenuis, nous avons

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(A^t A\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2},$$

Comme la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres.

2.1.1 L'existence et l'unicité

Théorème 2.1.2 ([7]) Soit $A \in R^{m\times n}$ une matrice de rang r. Il existe deux matrices orthogonales $U \in R^{m\times m}, (U^tU = UU^t = I_m)$ et $V \in R^{n\times n}, (V^tV = VV^t = I_n)$ telles que :

$$A = U\Sigma V^t, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

ou

$$\Sigma \in R^{m\times n}, \Sigma_1 = \operatorname{diag}\left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_r\right)$$

et

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots\ldots \geq \sigma_r > 0$$

Composante par composante, l'identité matricielle (2.1.4) devient :

$$\begin{aligned} Av_j = \sigma_j u_j; \quad A^t u_j &= \sigma_j v_j, && \text{pour } j = 1, \ldots, n. \\ A^t u_j &= 0, && \text{pour } j = n+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Si l'on note $U = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m), V = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n)$ les colonnes des matrices U et V, les vecteurs u_j et v_j sont respectivement, les vecteurs singulières droits et gauches associés à les valeurs singulières σ_j.

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur n.

Par définition de ce qu'est une norme matricielle subordonnée, il existe un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\|v_1\|_2 = 1, \quad \|Av_1\|_2 = \|A\| =_{déf} \sigma$$

Où σ est strictement positif (si $\sigma = 0$, alors $A = 0$, et il n'y a rien à démontrer). Posons $u_1 = 1/\sigma A v_1 \in R^m$.

Complétons le vecteur v_1 en une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$, et notons $V = (v_1, V_1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice formée par les vecteurs de base.

Faisons de même pour u_1 et $\mathbb{R}^m$, notant $U = (u_1, U_1) \in R^{m\times m}$.

Remarquons que les matrices U et V sont orthogonales par construction.

D'après notre choix de $U_1, U_1^t A v_1 = \sigma U_1^t u_1 = 0$, et donc le produit $U^t AV$ a la structure par blocs suivante :

$$A_{1_{déf}} = U^t AV = \begin{pmatrix} \sigma & w^t \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $w^t = u_1^t AV^1$ et $B = U_1^t AV_1 \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$

Comme U et V sont orthogonales, $\|A_1\|_2 = \|A\|_2 = \sigma$. Mais la double inégalité

$$\|A_1\|_2 \geq \left(\sigma^2 + w^t w\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left\| A_1 \begin{pmatrix} \sigma \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma^2 + w^t w \\ Bw \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \sigma^2 + w^t w$$

montre que $\|A_1\| \geq (s2 + w^t w)^{\frac{1}{2}}$. On doit donc avoir $w = 0$. On peut alors terminer la démonstration en appliquant l'hypothèse de récurrence à B.

Remarque 2.1.1 Σ est unique mais U et V ne sont pas unique. Les colonnes U sont appelées les vecteurs singulières à gauche, et les colonnes de V sont vecteurs singulières à droite.

2.1.2 Calcul de la SVD

On peut calculer la SVD de A de la façon suivante :

- Calculer $A^t A$

- Calculer une décomposition en éléments propres $A^t A = VDV^t$,

- Soit la Σ la matrice diagonale de taille $m \times n$ ayant dans la diagonale les matrices carrée de $D, A = U\Sigma V^t \Longleftrightarrow AV = U\Sigma, U$ orthogonale

$$A = U\Sigma V^t \Longleftrightarrow AV = A\left[v_1, v_2, \ldots, v_r\right] = \left[u_1, u_2, \ldots, u_r\right] \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & . & \\ & & & \sigma_r \\ & & & 0 \\ 0 & & & \\ . & & & \\ 0 & .. & .. & 0 \end{pmatrix}$$

d'ou

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

d'où

$$A = \Sigma\sigma_i u_i v_i^t \text{ et } A^t = \Sigma\sigma_i v_i u_i^t$$

tel que $r = \text{rang}(A), u_i$ et v_i sont respectivement les $i^{ème}$ colonne de U et V.

Remarque 2.1.2 Le rang de A est le nombre de SVD.

Exemple 2.1.1 Nous allons calculer la SVD de A telle que : $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Pas 1 :</u> la diagonalisation orthogonale A^tA :

$$A^tA = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres et vecteurs propres sont :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 360, & v_1 &= \left(\tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{2}{3}\right) \\
\lambda_2 &= 90, & v_2 &= \left(-\tfrac{2}{3}, \quad -\tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3}\right) \\
\lambda_3 &= 0, & v_3 &= \left(\tfrac{2}{3}, \quad -\tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Pas 2 : Construire V et Σ :

$$V = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 3 : Construire U :

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\{u_1, u_2\}$ est déjà une base de $\mathbb{R}^2$, donc Il n'est pas nécessaire de l'étendre.

Finalement :

$$A = U\Sigma V^T$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Le programme en MATLAB $[U, S, V] = \mathrm{svd}\left(\left[\begin{array}{cccccc} 4 & 11 & 14; 8 & 7 & -2 \end{array}\right]\right)$

$>> \mathrm{A} = \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 11 & 14; 8 & 7 & -2 \end{array}\right]$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$>> [\mathrm{U}, \mathrm{S}, \mathrm{V}] = \mathrm{svd}(\mathrm{A})$

$$U = \begin{pmatrix} -0.9487 & -0.3162 \\ -0.3162 & 0.9487 \end{pmatrix}$$
$$S = \begin{pmatrix} 18.9737 & 0 & 0 \\ 0 & 9.4868 & 0 \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} -0.3333 & 0.6667 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0.3333 & 0.6667 \\ -0.6667 & -0.6667 & -0.3333 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.1.2 Nous allons calculer la SVD de A tel que : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Pas 1 :</u> la diagonalisation orthogonal $A^t A$:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres et vecteur propres sont :

$$\lambda_1 = 18, v_1 = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$
$$\lambda_2 = 0, \quad v_2 = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$

<u>Pas 2 :</u> construire V et Σ :

$$V = v_1, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Pas 3 :</u> Construire U :

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\{u_1\}$ ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, donc Nous devons l'étendre, avec des vecteurs orthogonales. Tous les vecteurs orthogonaux à u_1 vérifiés :

$$u_1 \cdot u = 0 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 2x_3$$

Une base pour ce espace est $w_2 = (2, 1, 0)$ and $w_3 = (-2, 0, 1)$. Mais cette base n'est pas une base orthogonale.

Nous allons les mettre on forme orthogonale par le principe de Gram-Schmidt suivant :

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$
$$w_3' = w_3 - < w_3, v_2 > v_2 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$
$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

<u>Finalement :</u>

$$A = U\Sigma V^T$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Le programme en MATLAB $[U, S, V] = \mathrm{svd}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1; & -2 & 2; & 2 & -2 \end{bmatrix}\right)$

Exemple 2.1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$>> [U, S, V] = \mathrm{svd}(A)$

$$U = \begin{pmatrix} -0.3333 & 0.6667 & -0.6667 \\ 0.6667 & 0.6667 & 0.3333 \\ -0.6667 & 0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 4.2426 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1.1 On a les relations suivantes :

1. Le rang de A est égal au nombre des valeurs singulières non-nulles.
2. $\ker A = \mathrm{vect}\,(v_{r+1}, \ldots, v_n)$, $\quad \mathrm{Im}\, A = \mathrm{vect}\,(u_1, \ldots, u_r)$.
3. $\ker A^t = \mathrm{vect}\,(v_1, \ldots, v_r)$, $\quad \mathrm{Im}\, A^t = \mathrm{vect}\,(u_{r+1}, \ldots, u_m)$.
4. $\|A\|_2 = \sigma_1$.

2.2 L'inverse généralisé

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaines des mathématiques.

Deux matrices A et B sont inverses, si leur produit est égal à la matrice identité :

$$AB = I, BA = I \text{ alors } B = A^{-1}$$

Les matrices inverses, et plus généralement en utilisant la notion de l'inverse généralisé ou bien les pseudo-inverses, trouvent leurs applications à la résolution des systèmes

$$Ax = b$$

d'équation linéaires quelles que soient leurs dimentions : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur cherché $x \in \mathbb{R}^n$.

Le système linéaire possède une solution unique, lorsque la matrice A est inversible.

Malheureusement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible.

L'inverse généralisé d'un tel système est noté A^+.

L'inverse généralisé A^+satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} AA^+A &= A \\ A^+AA^+ &= A^+ \\ (AA^+)^t &= AA^+ \qquad\qquad \text{Condition de système} \\ (A^+A)^t &= A^+A \end{aligned}$$

La solution d'un système linéaire à partir de la pseudo-inverse A^+s'écrit alors :

$$x = A^+b$$

On distingue trois cas (pour plus de détails, on conseille de voir [6]) :

a) Si $m = n$, cas d'une matrice carrée

Si A une non singulière $\det(A) \neq 0)$ solution unique et

$$A^+ = A$$

b) $m < n$, matrice rectangulaire, on a une infinité des solutions et

$$A^{+} = A^{t}\left(AA^{t}\right)^{-1}$$

c) $m > n$, pas de solution, il existe une solution approchée aux moindres carrés et

$$A^{+} = \left(A^{t}A\right)^{-1}A^{t}$$

2.2.1 L'inverse généralisé et SVD

Définition 2.2.1 Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice de rang r, ainsi que sa décomposition en valeurs singulières

$$A = U\Sigma V^{t}$$

La matrice

$$A^{+} = V\Sigma^{+}U^{t}$$

est appelée matrice pseudo-inverse ou inverse généralisée de A, avec :

$$\Sigma^{+} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right)$$

- $A^{+}A = I_r$ (matrice identité de $\mathrm{rang}\, r$),
- Si $\mathrm{rang}(A) = n < m$, alors $A^{+} = \left(A^{t}A\right)^{-1}A^{t}$,
- Si $\mathrm{rang}(A) = n = m$, alors $A^{+} = A^{-1}$.

Chapitre 3

Résolution d'un système linéaire

Ce chapitre est consacré à la résolution des systèmes d'équations linéaires non réguliers. Les matrices prises en compte peuvent être carrées non inversibles ou rectangulaires.

Nous allons rappeler dans le cadre théorique des solutions au sens des moindres carrés, nous allons appliquer ce problème par la méthode de décomposition en valeurs singulières, qui fournit, d'une part, un outil de régularité du système mal conditionné et d'autre part, nous donnons une solution stable à notre système contrairement à la méthode d'équations normales.

3.1 Problème de moindres carrés linéaires

Étant donnée une matrice réelle A d'ordre $m \times n$ et un vecteur b élément de $\mathbb{R}^m$, nous considérons le problème de la détermination d'un vecteur x élément de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie le système linéaire suivant :

$$Ax = b \tag{3.1.1}$$

Il est bien connu ([5] p. 9) que ce système admet une, et une seule solution, pour tout b élément de $\mathbb{R}^m$ sous les conditions nécessaires et suffi santes qu'il soit équi-contraint $(m = n)$ et que sa matrice A soit régulière. Aussi, l'investigation des cas $(m \geq n)$ et sur-contraint $(m \leq n)$ nous confrontera à l'une des trois cas suivantes :

1. Le système linéaire (3.1.1) admet une solution et une seule,
2. Le système linéaire (3.1.1) n'admet pas de solution,
3. Le système linéaire (3.1.1) admet une infinité de solutions.

Corollaire 3.1.1 Si A est définie positive, le système linéaire $Ax = b$ a une solution unique.

Dans la pratique, le cas 2 se rencontre en général dans le cas d'un système sur-contraint alors que les systèmes équi-contraints singuliers et sous-contraints conduisent en général à le cas 3 .

Pour résoudre un système linéaire du type (3.1.1), il nous faut d'abord définir ce que nous appellerons solution aux sens de moindres carrés et sur l'optimisation différentiable pour définir, quel que soit le type de système, une solution qui est toujours unique.

3.1.1 Formulation matricielle

On suppose que l'on a à résoudre un système linéaire

$$Ax = b$$

où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$ non nul, et on suppose que $m > n$ (le nombre d'équations est supérieur strictement au nombre d'inconnues).

Dans la plupart des cas, ce système n'a pas de solution. On cherche alors une approximation de la solution qui réduise la différence

$$Ax - b$$

Un des choix possible est de minimiser

$$\|Ax - b\|_2$$

3.1.2 Problème de moindres carrés

Définition 3.1.1 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés. On appelle problème de moindres carrés le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

i.e. trouver x telle que $\|Ax - b\|_2^2$, soit la plus petite.

On notera $\widehat{x}$ la solution de ce problème.

3.1.3 Les équations normales

On pose $E(x) = \|Ax - b\|_2^2$, on a

$$E(x) = (Ax - b)^t(Ax - b),$$
$$E(x) = x^tA^tAx - 2b^t(Ax) + \|b\|_2^2.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial x}E(x) = \frac{\partial\left(x^tA^tAx\right)}{\partial x} - 2\frac{\partial\left(b^t(Ax)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(b^tb\right)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}E(x) = 2A^tAx - 2A^tb$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial x}E(x)(\widehat{x}) = 0 \Leftrightarrow A^tA\widehat{x} = A^tb \tag{3.1.2}$$

$\widehat{x}$ vérifiant un extrémum de $E(x)$;

Donc on montre que $\widehat{x}$ vérifiant le minimum de $E(x)$.

L'existence de solution de problème de moindres carrés

Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$

Soit $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, on montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|A\widehat{x} - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2 \Leftrightarrow A^tA\widehat{x} = A^tb$$

On notera $\widehat{b}$ la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im} A$, on a donc par définition $\widehat{b} \in \operatorname{Im}(A)$ et $b - \widehat{b} \in (\operatorname{Im}(A))^\perp$

$$1 - \|A\widehat{x} - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \|A\widehat{x} - b\|_2^2 \leq \|z - b\|_2^2, \forall z \in \operatorname{Im}(A) \Leftrightarrow A\widehat{x} = \widehat{b}$$
$$A\widehat{x} = \widehat{b} \Leftrightarrow A^tA\widehat{x} = A^t\widehat{b}$$
$$2 - A^tA\widehat{x} = A^t\widehat{b} \Leftrightarrow A^t(A\widehat{x} - \widehat{b}) = 0 \Leftrightarrow A\widehat{x} - \widehat{b} \in \ker\left(A^t\right) = (\operatorname{Im}(A))^\perp$$
$$\text{or } \widehat{b} \in \operatorname{Im}(A) \text{ donc } A\widehat{x} - \widehat{b} \in \operatorname{Im}(A)$$
$$A\widehat{x} - \widehat{b} \in \operatorname{Im}(A) \cap (\operatorname{Im}(A))^\perp \Rightarrow A\widehat{x} - \widehat{b} = 0 \Leftrightarrow A\widehat{x} = \widehat{b}$$

Montrons maintenant que

$$A^tA\widehat{x} = A^t\widehat{b} \Leftrightarrow A^tA\widehat{x} = A^tb$$

On a $b - \widehat{b} \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \ker A^t$ donc $A^t(b - \widehat{b}) = 0 \Leftrightarrow A^tb = A^t\widehat{b}$ donc

$$\|A\widehat{x} - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A^tA\widehat{x} = A^tb \tag{3.1.3}$$

de (3.1.2) et (3.1.3), $\widehat{x}$ vérifiant le minimum de $E(x)$.

Théorème 3.1.1 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m > n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $x \in \mathbb{R}^n$ réalise le minimum de

$$E(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

est que

$$A^tA\widehat{x} = A^tb \tag{3.1.4}$$

Les équations (3.1.4) sont appelées équations normales.

Ce système admet toujours au moins une solution.

Si la matrice A^tA est régulière, i.e. si $\mathrm{rang}(A) = n$, alors la solution est unique.

Preuve. Nous montrons que les équations normales ont toujours au moins une solution, c'est à dire que $A^tb \in \mathrm{Im}\,(A^t)$. Pour cela, commençons par remarquer que

$$\mathrm{Im}\left(A^t\right) = \mathrm{Im}\left(A^tA\right)$$

En effet,

$$\mathrm{Im}\left(A^tA\right) = \ker\left(A^tA\right)^{\perp} = \ker(A)^{\perp} = \mathrm{Im}\left(A^t\right)$$

Il suffit donc de vérifier que

$$A^Tb \in \ker(A)^{\perp}$$

or c'est immédiat, puisque, si

$$x \in Ker(A)^{\perp}, \left\langle A^t b, x \right\rangle = \langle b, Ax \rangle = 0$$

L'unicité de la solution du problème de moindres carrés

On suppose qu'il existe deux solutions de problème de moindres carrés x_1, x_2

Si x_1 est une solution de problème de moindres carrés, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax_1 - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2$$

En cas particulier $x = x_2$, d'où

$$\|Ax_1 - b\|_2^2 \leq \|Ax_2 - b\|_2^2 \tag{3.1.5}$$

Si x_2 est une solution de problème de moindres, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax_2 - b\|_2^2 \leq \|Ax - b\|_2^2$$

En cas particulier $x = x_1$, d'où

$$\|Ax_2 - b\|_2^2 \leq \|Ax_1 - b\|_2^2 \tag{3.1.6}$$

de (3.1.5) et (3.1.6) il vient

$$\|Ax_1 - b\|_2^2 = \|Ax_2 - b\|_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

3.2 Problème de moindres carrés et SVD

La SVD permet de résoudre les problèmes aux moindres carrés, ce que nous allons voir dans cette section.

3.2.1 Résolution du problème de moindres carrés par décompo- sition en valeurs singulières

La solution du problème de moindres carrés x donnée par

$$x = \left(A^t A\right)^{-1} A^t b$$

pour

$$A = U\Sigma V^t$$

on a

$$\begin{aligned}
x &= \left((U\Sigma V^t)^t (U\Sigma V^t)\right)^{-1} (U\Sigma V^t)^t b & \\
x &= (V\Sigma^2 V^t)^{-1} (U\Sigma V^t)^t b & \text{puisque } U^tU = I \\
x &= (V\Sigma^{-2} V^t)(V\Sigma U^t) b & \text{puisque } V^tV = I \\
x &= V\Sigma^{-1}U^t b & \Sigma^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \\
x &= \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i &
\end{aligned}$$

où $r = \operatorname{rang}(A)$,et u_i et v_i sont respectivement le $i^{\text{ème}}$ colonne de U et V dans le problème de moindres carrés :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \left\|U\Sigma V^t x - b\right\|_2^2 = \left\|\Sigma V^t x - U^t b\right\|_2^2$$

puisque U est orthogonale. Notons $w = U^t b$ ($\|w\|_2 = \|b\|_2$), et posons $y = V^t x$ ($\|y\|_2 = \|x\|_2$), puisque V est orthogonale, ce qui sera important pour calculer la solution de norme minimale. Comme Σ est diagonale, ce problème est découplé, et se résout composante par composante dans les bases $(u_1, \ldots, u_m)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$.

Nous avons donc :

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|\Sigma y - w\|_2^2 = \sum_{i=1}^{p} |\sigma_i y_i - w_i|^2$$

On obtient donc toutes les solutions du problème (2.1.1) en posant

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{w_i}{\sigma_i} \text{ pour } i = 1, \ldots, p \\ \text{quelconque pour } i = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

Pseudo-inverse et solution au sens des moindres carrés

Une autre application de la décomposition en valeurs singulières consiste en la notion de pseudo-inverse au sens de moindres carrés

$$\Sigma^{+}=\begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & 0 & 0 & 0\\ \vdots & 1/\sigma_2 & & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & \ddots & & & \\ & & & 1/\sigma_r & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0\\ & & & & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m \leq n$$

$$\Sigma^{+}=\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & \sigma_r & & & & \\ 0 & & & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & & & & & & \vdots\\ 0 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m > n$$

où

$$\Sigma_r^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1},\frac{1}{\sigma_2},\ldots\ldots,\frac{1}{\sigma_r}\right)$$

Ceci étant, nous utilisons la décomposition (2.1.1) de la matrice A pour définir sa pseudo-inverse A^{+}par

$$A^{+}=U\Sigma^{+}V^{t} \tag{3.2.1}$$

De même, de la décomposition (2.1.1) de la matrice A nous tirons

$$A^{t}A=U\Sigma^{t}\Sigma U^{t}$$

De sorte que la pseudo-inverse $(A^{t}A)^{+}$ de la matrice A^{t} A est définie par :

$$\left(A^{t}A\right)^{+}=U\Sigma^{+}\left(\Sigma^{t}\right)^{+}U^{t}$$

Nous sommes maintenant en mesure de fournir une interprétation simple de la solution au sens des moindres carrés définie par (3.1.4) est :

$$x=\left(A^{t}A\right)^{+}A^{t}b$$

Nous retrouvons le fait que, pour tout b élément de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur solution de :

$$A^t A x = A^t b$$

Soit l'existence et l'unicité de la solution au sens des moindres carrés (3.1.4) du système

$$Ax = b$$

Remarque 3.2.1 La pseudo-inverse d'une matrice est définie à partir de la décomposition SVD de cette matrice.

Alors, comme la décomposition SVD n'est pas unique, la matrice pseudo-inverse n'est pas unique.

3.2.2 La SVD et la stabilité du système $Ax = b$

On a

$$A = U \Sigma V^t = \Sigma \sigma_i u_i v_i^t$$
$$\widehat{x} = \left(A^t A\right)^{-1} A^t b = \Sigma \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i$$

Si σ_1 (la plus grande valeur singulière de A) est petite, alors un petit changement dans A ou b entraîne un changement significatif dans x, tel que :

$$\operatorname{cond} \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$
$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}} = \sigma_1 \text{ tel que } \lambda_{\max} \text{ est la valeur propre de } A^t A.$$

Chapitre 4

Applications numériques

La méthode SVD donne une méthode numérique ayant d'excellentes propriétés de stabilité au niveau de l'algorithme [7].

4.1 Algorithme pour résoudre le système par l'équation normale

$$x = inv\,(A' * A) * A' * b$$

$$k = \mathrm{cond}(A)$$

$$err = Ax - b$$

4.1.1 Application en Matlab

$$A = [1\ 274\ 2450\,;1\ 180\ 3254\,;1\ 375\ 3802\,;1\ 205\ 2838\,;1\ 86\ 2347]$$

$$b = \begin{bmatrix} 162 & 120 & 223 & 131 & 67 \end{bmatrix}'$$

$$k = \mathrm{cond}(A)$$

$$x = inv\,(A' * A) * A' * b$$

$$err = (A * x) - b$$

4.1.2 Résultat d'algorithme

$$x = \begin{pmatrix} 7.0325 & 0.5044 & 0.0070 \end{pmatrix}$$

$$k = 1.757597019990381e + 004$$

$$err = \begin{pmatrix} 0.4043 & 0.6153 & 0.1807 & 0.6860 & 0.1529 \end{pmatrix}$$

4.2 Algorithme pour résoudre le système par SVD

$[U, S, V] = svd(A)$;

$\%$ Calcul de $inv(S) = S1$

$[m,n] = size(A)$;

for $i = 1 : n$

for $j = 1 : m$

if $i^{\sim} = j$

$S1(i, j) = 0$;

end

end

$S1(i, i) = 1/S(i, i)$

end

$S1$;

$y = S1 * U\prime * b$

$z = V * y$

$\mathrm{err1} = \mathrm{abs}((z - xex))$

4.2.1 Application en Matlab

$A = [10\ 7\ 8\ 7; 7\ 5\ 6\ 5; 8\ 6\ 10\ 9; 7\ 5\ 9\ 10]$

$b = \begin{bmatrix} 32 & 23 & 33 & 31 \end{bmatrix}'$

$xex = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$

$[U, S, V] = \mathrm{svd}(A)$

$\%$ Calcul de $inv(S) = S1$

$[m, n] = \mathrm{size}(A)$;

for $i = 1 : n$

for $j = 1 : m$

if $i^{\sim} = j$

$S1(i, j) = 0$

end

end

$S1(i, i) = 1/S(i, i)$

end

$S1$

$y = S1 * U\prime * b$

$z = V * y$

$\text{err1} = abs((z - xex))$

4.2.2 Résultat d'algorithme

$A = [10787; 7565; 86109; 75910]$

$b = \begin{bmatrix} 32 & 23 & 33 & 31 \end{bmatrix};$

$\text{xex} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

$\text{k} = 2.984092701675780 \quad e003$

$\text{z} = \begin{pmatrix} 1.00000000000005 & 0.99999999999992 & 1.00000000000002 & 0.99999999999999 \end{pmatrix}$

$\text{err1} = 1.0e{-}013 \begin{pmatrix} 0.51292303737682 & 0.84376949871512 & 0.21760371282653 & 0.11768364061027 \end{pmatrix}$

4.3 Comparaison entre la méthode de l'équation normale et la méthode de SVD

4.3.1 L'algorithme

$x = inv\,(A' * A) * A' * b$

$k = \text{cond}(A)$

$err = abs((A * x) - b)$

$[U, S, V] = \text{svd}(A)$

$[U, S, V] = \text{svd}(A)$

$\%$ Calcul de $\text{inv}(S) = S1$

$[m, n] = \text{size}(A)\,;$

for $i = 1 : n$

for $j = 1 : m$

if $i\tilde{} = j$

$S1(i, j) = 0\,;$

end

end

$S1(i, i) = 1/S(i, i)$

end

$S1$

$y = S1 * U\prime * b$

$z = V * y$

$\text{err}\,1 = abs((z - xex))$

Exemple 4.3.1

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7; & 5 & 6 & 5; 8 & 6 & 10 & 9; 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix};$$
$$b = \begin{bmatrix} 32 & 23 & 33 & 31 \end{bmatrix}$$
$$\text{xex} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.2 Résultat d’algorithme

$\text{k} = 2.984092701675780e + 003$

$x = \begin{pmatrix} 0.99999999996453 & 0.99999999942065 & 1.00000000000909 & 0.99999999999454 \end{pmatrix}$

$\text{err} = 1.0e - 008 * \begin{pmatrix} 0.43755790102296 & 0.31177478376776 & 0.37180143408477 & 0.31177478376776 \end{pmatrix}$

$z = \begin{pmatrix} 1.00000000000005 & 0.99999999999992 & 1.00000000000002 & 0.99999999999999 \end{pmatrix}$

$\text{err1} = 1.0e - 013 * \begin{pmatrix} 0.51292303737682 & 0.84376949871512 & 0.21760371282653 & 0.11768364061027 \end{pmatrix}$

$\text{A} = [400 - 201; -800401]$

$b = [200 - 200]$

$\text{xex} = [-100 - 200]$

$x = \text{inv}(A\prime * A) * A\prime * b$

$x = 1.0e + 002 * (-1.00000000008708 - 2.00000000017326)$

$\text{k} = 2.503004600480942e + 003$

$\text{err} = 1.0e - 007 * \begin{pmatrix} 0.00865838956088 & 0.19048457033932 \end{pmatrix}$

$\text{z} = 1.0e + 002 * (-1.00000000000031 - 2.00000000000063)$

$\text{err1} = 1.0e - 010 * \begin{pmatrix} 0.31334934647020 & 0.62556182456319 \end{pmatrix}$

Remarque 4.3.1 Résultat final :

Dans les deux sections précédentes, nous venons de constater numériquement que la méthode de décomposition en valeurs singulières est plus générale que la méthode des équations normales, nous avons remarqué que la méthode décomposition en valeurs singulière donne une solution stable aux système mal conditionné alors que ce n'est pas toujours le cas par la méthode d'équation normale.

Conclusion

Nous avons tout au long de ce travail étudié la meilleure approximation de la solution du problème $Ax = b$, lorsque A n'est pas inversible par le moyen de deux méthodes.

La SVD qui est une technique de régularisation, ainsi que la méthode des moindres carrées par la méthode d'équation normale, nous avons constaté que la SVD permettait de garantir l'obtention d'une solution stable, ce qui n'est pas toujours le cas par la méthode d'équation normale. Cela prouve l'importance de l'utilisation des valeurs singulières pour l'approximation numérique.

Bibliographie

[1] Marc. Bonnet, Problèmes inverses, Master recherche-Ecole Centrale de Paris Mention Matière, Structures, Fluides, Rayonnement Spécialité Dynamique des Structures et Systémes Couplés.

[2] Jean-Francois. Durand, Eléments de Calcul Matriciel et d'Analyse Factorielle de Données, Université Montpellier II, Novembre 2002.

[3] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. Regularization of Inverse Problems. Kluwer, Dordrecht, 1996.

[4] J. ERHEL, cours MAP : Mathématiques Appliquées DIIC 1ere année, April 12, 2006.

[5] Jocelyne Erhel. Nabil Nassif. Bernard Philippe, Calcul matriciel et systèmes linéaires, DEA Informatique et modélisation, Beyrouth, Liban , Année 2004.

[6] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, Bull. Un. V. Princeton, V.B. 1902.

[7] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in linear Partial Differential Equations. Yale University Press. 1923. En mathématiques, le procédé d'algèbre linéaire.

[8] M. Kern, Problèmes inverses. Syllabus du cours à l'Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2002.

[9] P. Lascaux, R. Theodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 et 2 _ MASSON (1986).

[10] J. PELLET, Résolution de systèmes non réguliers par une méthode de décomposition en valeurs singulières, http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html.

[11] A.N. Tikhonov And V.Y. ArSenin, Solution of Ill-posed Problems, Winston & Sons Washington, DC, (1977).

[12] P. Wira, un rappel sur les matrices, Université de Haute-Alsace, Faculté des sciences et Techniques, 2000-2001.