

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : **Génie Mécanique**

Spécialité : **Construction Mécanique**

Par :

BELAZRI Adel et MEZIANI Aïmed

Thème

Etude du comportement dynamique des rotors en flexion

Soutenu le 22/10/2022 devant le jury composé de :

Dr **K. YAYA**

Président

Dr **S. BOUZIDI**

Rapporteur

Dr **M. METHIA**

Examineur

Année Universitaire 2021-2022

Remerciements

Tout d'abord, nous dédions tous nos remerciements au Bon Dieu le tout Puissant de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail,

Nous tenons à adresser nos vifs remerciements et à exprimer nos profond gratitude à M^{me}: BOUZID. S, qui a humblement acceptée de nous diriger tous le long de ce travail, notamment grâce à : sa disponibilité, son ouverture d'esprit, sa patience, sa franchise, ses critiques et ses conseils d'ordre pédagogiques qui nous ont été d'une grande utilité.

Nos reconnaissance s'adresse à nos famille qui sont su nous apporter, sans relâche leur soutien durant toutes ces longues années d'études.

Nous sommes également reconnaissant à nos nombreux amis et collègues pour l'aide morale qu'ils nous ont accordé, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Merci

SOMMAIRE

Introduction générale	1
CHAPITRE I : Généralité sur les machines tournantes	
Introduction	2
<i>I.1 Définition d'un rotor</i>	2
<i>I.2 Historique de la dynamique des rotors</i>	3
<i>I.3 Classifications des rotors</i>	7
Conclusion	9
CHAPITRE II: Détermination des caractéristiques des éléments de rotor et équation de mouvement	
Introduction	10
<i>II.1 Détermination des caractéristiques des éléments de rotor</i>	10
<i>II.2 L'équations du mouvement</i>	19
<i>II.3 Modèle d'un rotor simple</i>	20
<i>II. 4.Exemple d'application</i>	22
Conclusion	28
CHAPITRE III :Modèle de rotor d'une turbine a gaz	
Introduction	29
<i>III.1 Description du modèle de rotor</i>	29
<i>III.2. Exemple numérique</i>	30
<i>III.2.1.Equation de mouvement</i>	31
<i>III.2.2.Cas étudie rotors non amorti</i>	33
<i>III.2.2.1.Cas symétrique</i>	34
<i>III.2.2.2.Cas dissymétrique</i>	38
Conclusion	43

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Modèle d'un rotor

Figure I.2. Rotor de Jeffcott ou de De Laval

Figure I.3: Exemple de diagramme de Campbell d'un rotor flexible

Figure I.4. Phénomènes de frottement-échauffement : effet de Newkirk

Figure I.5 : Historique de la dynamique des rotors

Figure II.1: Exemple de rotor

Figure II.2: Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

Figure II.3: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor.

Figure II.4: Amortissement et raideur des paliers

Figure II.5: Balourd

Figure II.6 : Diagramme de Campbell

Figure III.1 : Modèle de rotor étudié

Figure III.2. Diagramme de Campbell (rotor symétrique) $k_{xx} = k_{zz} = 0$.

Figure III.3. Diagramme de Campbell pour différentes valeurs de k_{xx} (rotor symétrique)

Figure III.4. Réponse au balourd (rotor symétrique)

Figure III.5. Réponse au balourd pour différentes valeurs de k_{xx} (Rotor symétrique)

Figure III.6. Réponse au balourd pour $k_{xx} = 10^7$ (Rotor symétrique), Vitesse critique : $N_c = 4790$ tr/mn,

Figure III.7. Diagramme de Campbell (rotor dissymétrique) $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^7$ N/m.

Figure III.8. Diagramme de Campbell pour différentes valeurs de k_{xx} et k_{zz} (rotor dissymétrique)

Figure III.9. Diagramme de Campbell pour $k_{xx} = 0$ et pour différentes valeurs de k_{zz} (rotor dissymétrique)

Figure III.10. Réponse au balourd Q_1 (rotor dissymétrique)

Figure III.11. Réponse au balourd Q_2 (rotor dissymétrique)

Figure III.12. Réponse au balourd (Q_1) pour $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^6 \text{N/m}$ (rotor dissymétrique),
Vitesses critiques : $N_c^{(1)} = 3880 \text{tr/mn}$, $N_c^{(2)} = 4020 \text{tr/mn}$

Figure III.13. Réponse au balourd (Q_2) pour $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^6 \text{N/m}$ (rotor dissymétrique),
Vitesses critiques : $N_c^{(1)} = 3880 \text{tr/mn}$, $N_c^{(2)} = 4020 \text{tr/mn}$,

Introduction Générale

L'étude de la stabilité des machines tournantes concerne particulièrement les rotors supportés par des paliers hydrodynamiques. Ces paliers sont influencés par des phénomènes internes. Quand la vitesse de rotation augmente, l'amplitude de vibration passe souvent par un maximum à une vitesse bien déterminée appelée vitesse critique. Cette amplitude est généralement excitée par un déséquilibre. En plus, les machines tournantes développent souvent des instabilités qui sont liés à la composition interne des rotors.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté un historique sur la dynamique des rotors, et sur les phénomènes de base spécifiques en dynamique des rotors.

Dans le deuxième chapitre, nous avons fait une étude théorique du comportement dynamique en flexion d'un rotor. La démarche commence par la détermination des caractéristiques des éléments de rotors : énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd, l'énergie de déformation de l'arbre et le travail virtuel des forces dus aux paliers. Nous avons utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange pour déterminer les équations de mouvement du rotor. Nous avons également présenté un exemple d'un modèle de rotor non amorti et symétrique dans ce chapitre.

Le troisième chapitre concerne une étude analytique de la réponse vibratoire d'un modèle simple du rotor d'une turbine à gaz. Plusieurs résultats numériques sont présentés : diagramme de Campbell, réponse au balourd, et l'effet de la dissymétrie.

Enfin, une conclusion générale résume l'essentiel de nos résultats.

Introduction

L'augmentation rapide des vitesses de fonctionnement des mécanismes et des machines au cours des dernières décennies a posé de nouveaux problèmes aux concepteurs. Les turbogénérateurs, turbines à gaz et à vapeur, arbres tournants, pompes haute capacité, et une multitude de machines spéciales sont soumis à des vibrations émanant des déformations causées par des forces dynamiques. Ces vibrations peuvent être dangereuses d'où la naissance de la discipline de la dynamique des rotors ou machines tournantes.

La dynamique des rotors des machines tournantes est une branche de la dynamique des systèmes tournants en particulier des ensembles mécaniques dans lesquels au moins une partie; généralement définie comme rotor; tourne à une vitesse angulaire autour d'une ligne de rotation. Elle a pour but l'étude du comportement dynamique, de la stabilité et la conception des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes. Les machines tournantes trouvent des applications industrielles et dans la vie courante très diverses : machines-outils, turbines, compresseurs, turbines d'avions, moteurs d'automobiles, propulsion marine, etc.

I.1. Définition d'un rotor [1]

Une machine est composée de parties tournant autour des axes fixes par le biais de paliers, l'ensemble des corps tournant autour d'un même axe avec leurs paliers constituent un rotor Les parties de la machine qui ne tournent pas sont désignées par la définition générale du stator. Les rotors de machines ont, pendant leur fonctionnement, une grande quantité d'énergie rotative et une faible quantité d'énergie vibratoire. Il est très évident du fait qu'une turbine relativement petite propulse un avion énorme. En fonctionnement, les rotors subissent des vibrations transversales (flexion), longitudinales (axiale) et de torsion; individuellement ou en combinaison.

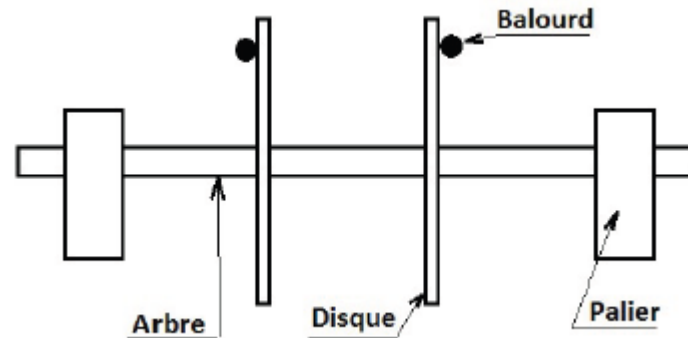


Figure I.1 : Modèle d'un rotor

I.2. Historique de la dynamique des rotors [1]

L'histoire de la dynamique des rotors s'étend sur au moins 140 ans. Elle commence avec l'apparition du premier article sur la dynamique des rotors publié en 1869 par William John Macquorn Rankine dans le journal 'The Engineer', dont l'intitulé est 'On the centrifugal force on rotating shafts'. Dans cet article, l'auteur tente d'expliquer le comportement des machines tournantes lors du passage de certaine vitesse dite vitesse critique.

La recherche a progressée de manière significative à la fin du 19^{ème} siècle avec des contributions de Carl Gustaf Patrik De Laval (1845-1913), ingénieur suédois qui fit fonctionner une turbine à vapeur en régime supercritique en 1889 en opérant à une vitesse de rotation d'environ sept fois la vitesse critique .

Au Début, la préoccupation majeure pour les chercheurs et les concepteurs des machines tournantes était de prédire les vitesses critiques pour éviter la résonance. Dunkerley en 1894 , dérive une formule empirique permettant de calculer la plus faible vitesse critique d'un système tournant à plusieurs disques, Il a été le premier qui a utilisé le terme " Vitesse critique " pour la vitesse de rotation de résonance.

Le premier papier entièrement consacré à la dynamique des rotors est celui de Henry Homan Jeffcott (1877-1965) , publié en 1919 dans "Philosophical Magazine", intitulé "The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a wirling speed : the effect of want of balance". Il a confirmé l'existence des vitesses supercritiques stables. Il proposa un modèle connu sous le non de rotor de Jeffcott mais aussi sur le continent européen de De Laval. Le modèle présenté par Jeffcott est constitué d'un arbre flexible de masse négligeable monté sur appuis simples (rigides) et d'un disque rigide placé en son milieu dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre géométrique (présence d'un balourd) (Figure I.2)

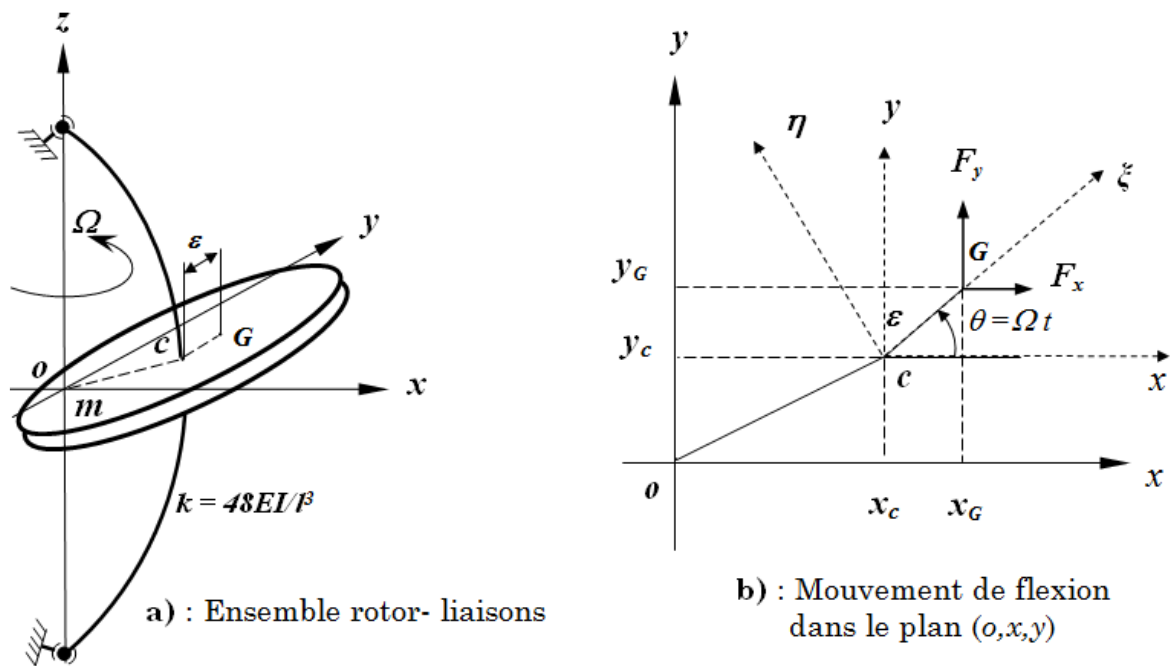
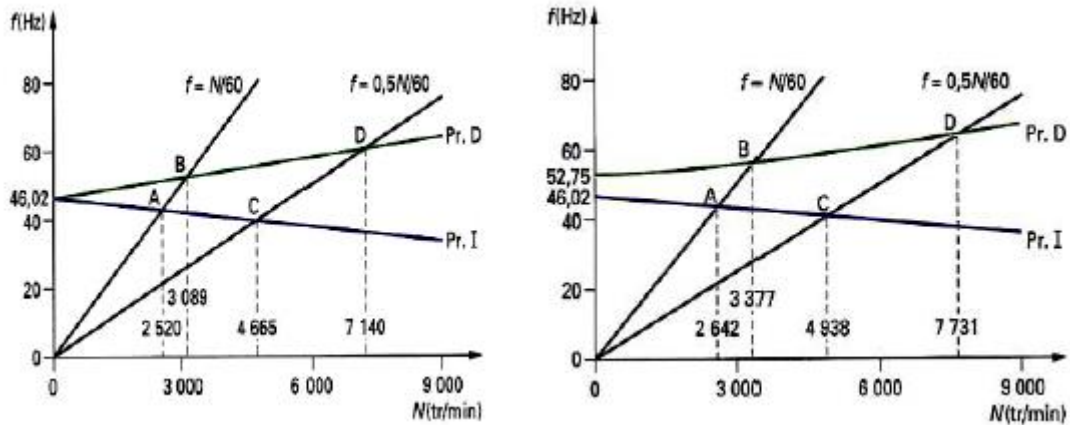


Figure I.2. Rotor de Jeffcott ou de De Laval [2]

Le modèle à deux degrés de liberté de Jeffcott (déplacements du centre du disque c), a été largement étendu par la suite pour prendre en compte l'amortissement interne, les paliers flexibles et l'effet gyroscopique. Ce type de modèle peut être représentatif pour des rotors courts, qui sont plus rigides, comme par exemple un banc d'essai en laboratoire pour exprimer clairement les phénomènes de bases, mais ne convient pas pour décrire le comportement vibratoire des turbines modernes, qui sont des structures élancées .

Après la deuxième guerre mondiale, le centre de recherche de l'Europe a été déplacé vers les États-Unis où la portée de la dynamique des rotors a été élargie pour tenir compte de divers autres phénomènes. Campbell en 1924 , a publié un article dans le journal "ASME" intitulé "The protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration", où il détailla les vibrations des turbines à vapeur. Leur diagramme représentant la vitesse critique par rapport aux points de croisement des courbes de fréquences naturelles et les lignes droites proportionnelles à la vitesse de rotation est maintenant largement utilisées et appelé le diagramme de Campbell (Figure.1.3).



Modèle à symétrie axiale (isotrope)

Modèle non-symétrique (anisotrope)

Figure I.3: Exemple de diagramme de Campbell d'un rotor flexible [3]

Comme la vitesse de rotation peut augmenter au dessus de la première vitesse critique, l'apparition des vibrations auto-excitées est devenue un problème grave. Dans certaines circonstances et sur un fonctionnement très particulier, il a été observé sur le comportement dynamique des machines tournantes le phénomène de "oil whip" chez les Anglo-saxons et le "fouet d'huile" chez les Français. Newkirk et Kimball, ont publiés deux articles intitulés "Shaft Whipping" et "Internal friction theory of shaft whirling" respectivement dans la revue "General Electric". Ils ont montré que le frottement interne des matériaux pourrait provoquer un mouvement instable. Ces phénomènes ; "oil whip" et "oil whirl", dans lequel le frottement qui amortit les vibrations provoque habituellement une vibration d'auto-excitation, ont attiré l'attention de nombreux chercheurs. En Aout 1925, Newkirk et Taylor, publient dans cette même revue un article intitulé "Shaft whipping due to oil action in journal bearings". Ils ont étudié une vibration instable appelée "fouet d'huile", due à un film d'huile dans les paliers. Hummel et Newkirk, ont confirmés à travers des études expérimentales, le rôle déstabilisant provoqué par les paliers à film d'huile. Ils ont observé par ailleurs qu'en dessous d'une certaine excentricité de fonctionnement; c'est à dire lorsque le palier est faiblement chargé; l'arbre est animé d'un mouvement de précession avec une fréquence proche de la moitié de la vitesse de rotation "half frequency whirl", alors que pour des excentricités plus importantes (i.e. charges importantes), le système redevient stable.

En 1926, Newkirk a observé un tourbillon en précession directe induite par un point chaud sur la surface du rotor, qui a été générée par le contact du rotor et du stator. Cette instabilité du point chaud "hot spot" est appelé l'effet de Newkirk (Figure.1.4).

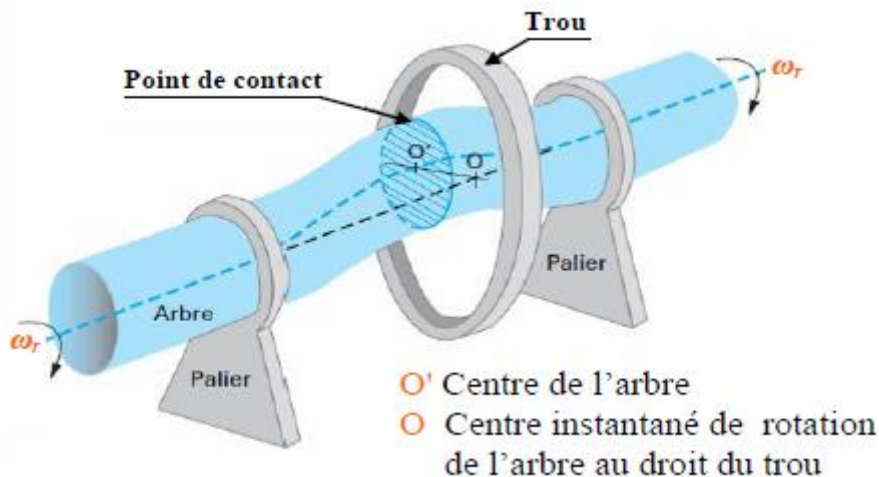


Figure I.4. Phénomènes de frottement-échauffement : effet de Newkirk [4]

Au milieu du 20^{ème} siècle, Hori en 1959, a réussi à expliquer les différentes caractéristiques fondamentales du fouet d'huile. Il a étudié la stabilité des mouvements de l'arbre en tenant en compte des forces de pression dues aux films d'huile. À peu près au même moment, d'autres types de vibrations induites ont attiré l'attention de nombreux chercheurs.

Traditionnellement, le nom "tourbillon / fouet d'huile" a été associée aux problèmes d'instabilité des paliers lubrifiés à huile qui historiquement, ont d'abord été reconnus et analysés. Au cours des dernières décennies, d'autres formes d'instabilités liées aux rotors à fluide ont été identifiées et signalés. C'est pourquoi le mot "huile" a été supprimé et remplacé par le mot générique "fluide", ce qui implique que non seulement l'huile comme un lubrifiant, a été responsable de l'instabilité du rotor. D'autres noms ont également été associés à des vibrations latérales asynchrones du rotor tel que le "tourbillon". Ces derniers temps, ce nom est devenu populaire pour les paliers à fluide (Ambrosch et al, Miller, Kirk et al, Wyssmann, Brown et al, Muszynska et al, Bently et al.). Comme les phénomènes rapportés ci-dessous, sont cependant très similaires à un tourbillon et/ou à un fouet de fluide, les modèles mathématiques sont similaires. Il semble donc plus logique de choisir un nom commun. C'est pourquoi les vibrations auto-excitées ; décrites ci-dessus ; sont appelés "tourbillon de fluide" et ou "fouet de fluide".

Actuellement, la dynamique des rotors est un domaine de recherche très actif. Plusieurs chercheurs travaillent non seulement sur la dynamique linéaire des rotors, mais aussi dans la dynamique non linéaire des rotors à vitesses variables et dans le contrôle actif des machines tournantes (Figure.I.5). Chaque année, de nombreuses conférences et séminaires scientifiques sur la dynamique des rotors sont déroulés. Ainsi que le nombre de documents publiés dans des revues scientifiques spécifiques et des livres augmente d'une manière importante

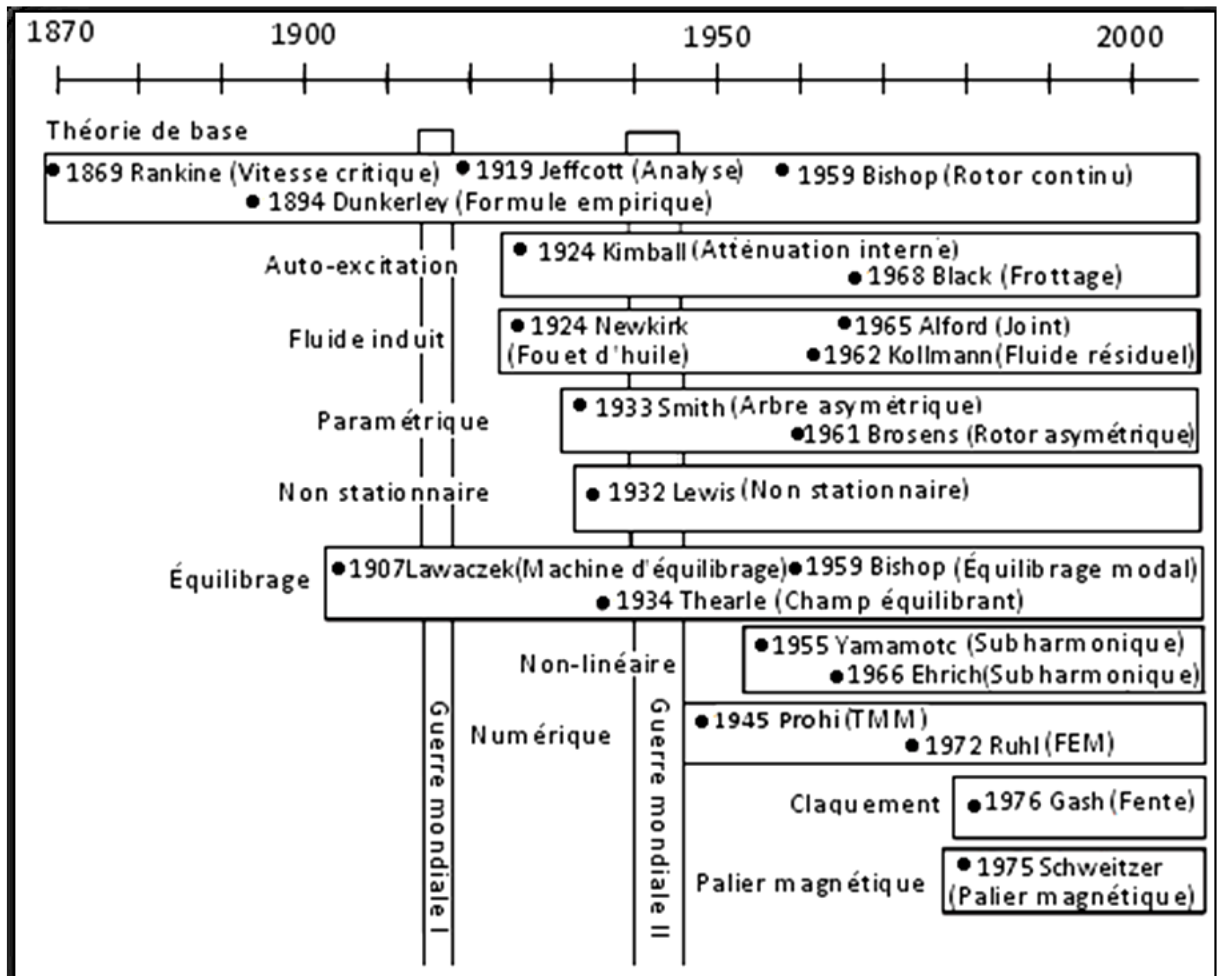


Figure I.5 : Historique de la dynamique des rotors [5]

I.3 Classifications des rotors [6]

Modèle usuel à long arbre

Les dimensions de l'arbre sont plus grandes que celle de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur, ...etc.). La majorité des travaux de recherche concernant l'étude de comportement vibratoire et dynamique des machines industrielles sont focalisées sur ce modèle.

Modèle de disque rotor [7]

Les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre. Ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement dynamique de quelques que machine

industrielle par exemple un disque dur d'un ordinateur, micro turbine, turbine hydraulique..etc. .

Modèle de rotor aubage [8]

Ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubage (hélicoptère, aérogénérateur, fan de turboréacteur, soufflerie industrielle...etc.). L'étude de comportement dynamique de ce modèle reste assez compliquée, car le mode vibratoire du rotor est liée aux différents phénomènes combinatoires(aérodynamique, aéroélasticité, hydrodynamique...etc.)

Modèle de rotor libre [9]

Ce modèle de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support). Il est bien attiré l'attention des chercheurs dans les dernières années pour développer et étudier le comportement dynamique des projectiles, satellites géostationnaire.

Suivant les paramètres mécaniques on distingue les modèles suivants :

Modèle de rotor rigide [10]

Un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critiques associées à la flexion de l'arbre. Outre la simplicité du modèle découlant d'une telle hypothèse, la réalisation de calculs pour un rotor rigide est intéressante d'un point de vue de dimensionnement de bâti. En effet, puisque les éléments tournants ne se déforment pas, la charge dynamique est entièrement transmise au palier. Ce modèle ne sera pas traité dans notre travail.

Modèle de rotor de Jeffcott [11]

C'est un modèle simple utilisé pour étudier le comportement dynamique en flexion des rotors industrielle, la configuration de ce modèle est caractérisée par des points matériels attachés dans un arbre non massique dans le but de négliger les effets gyroscopique. Ce modèle est très souvent utilisé par les chercheurs dans un but phénoménologique, car il permet une interprétation plus directe de l'influence de quelque phénomène sur le comportement dynamique de système.

Modèle de rotor réel

La combinaison entre le modèle de rotor rigide et le modèle de rotor de Jeffcott ne représente que de manière très approximative la dynamique d'un rotor réel, c'est le modèle de rotor flexible quand il tourne avec des vitesses supérieures à la première vitesse critique en flexion. Ce modèle a été l'objet d'étude de plusieurs chercheurs et l'objet de notre étude.

Conclusion

Dans le premier chapitre, nous avons fait une recherche bibliographique sur les machines tournantes, ainsi que sur l'histoire de la dynamique des rotors et la classification des rotors des machines tournantes.

Introduction

Les machines tournantes comme les pompes, les turbines (ou turbomachines) et les compresseurs sont devenues depuis nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Les progrès effectués dans la conception et la fabrication permettent aujourd'hui d'augmenter à la fois les performances et le rendement des machines en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesse de rotation de plus en plus élevées. Cependant, les efforts générés, de plus en plus importants, sollicitent fortement le comportement dynamique global de la machine et les amplitudes vibratoires deviennent souvent trop élevées pour que la structure puisse les supporter. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter qu'une trop grande vibration engendre un moindre rendement, un bruit trop important ; et cette vibration peut même aboutir à l'instabilité et à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

II-1 Détermination des caractéristiques des éléments de rotor [12]

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir un modèle analytique à usage général.

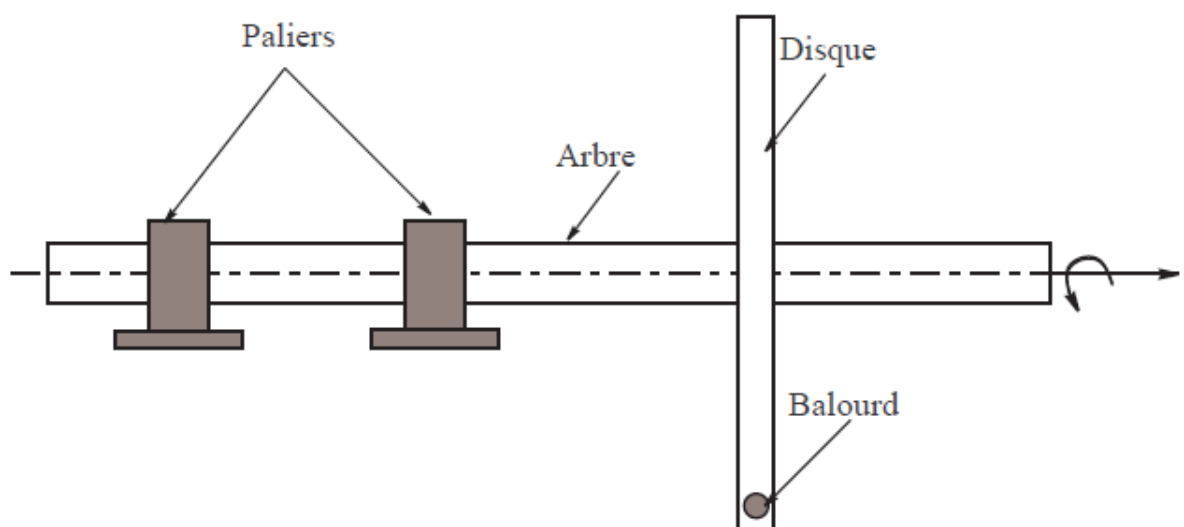


Figure II.1: Exemple de rotor

Les éléments de base d'un rotor sont : disque, arbre et palier. Le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte. Les expressions de l'énergie cinétique sont nécessaires pour caractériser disque, arbre et balourd. L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre. L'expression du travail virtuel des forces dues aux paliers permet de déterminer les forces généralisées. Les équations générales du mouvement d'un rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

-L'énergie cinétique T , l'énergie de déformation U et le travail virtuel des forces extérieures δW sont calculés pour tous les éléments du système.

-Une méthode numérique est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz pour mettre en évidence les phénomènes ou la méthode des éléments finis pour les applications industrielles.

II.1. Le disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient $R_0(X,Y,Z)$ un repère fixe et $R(x, y, z)$ un repère tournant lié au disque (figure 2.2). Le système de coordonnées (x,y,z) est relié au système de coordonnées (X,Y,Z) par l'intermédiaire des angles ψ , θ , et ϕ . Le vecteur de rotation instantané est :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \dot{\psi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\phi}\vec{y} \quad (2.1)$$

Ou \vec{z} , \vec{x}_1 et \vec{y} sont les vecteur unitaires des axes $O\vec{z}$, Ox_1 et $O\vec{y}$. L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse O est calculée dans le repère tournant R . Le vecteur de rotation instantané s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi \end{bmatrix}_R \quad (2.2)$$

ω_x , ω_y , ω_z étant les composants du vecteur de rotation instantané suivant x , y et z . Soient u et w les coordonnées du centre du disque O suivant OX , OZ dans R_0 ; la coordonnée suivant OY restant constante.

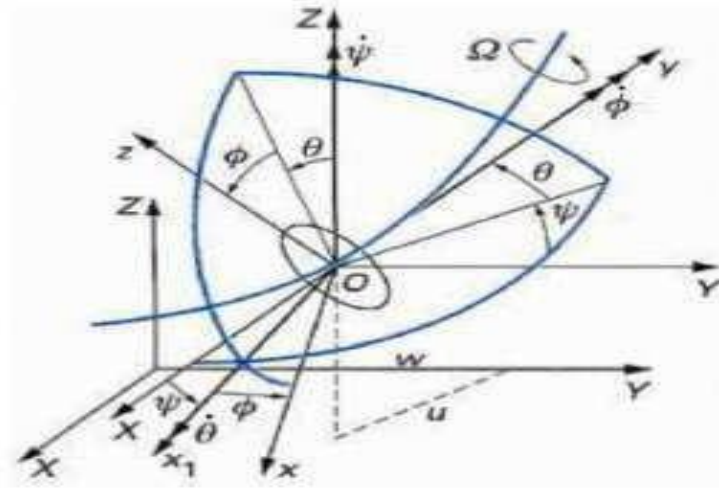


Figure II.2: Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

. La masse de disque est m_d Le tenseur d'inertie est noté :

$$I/O = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

I_{dx} I_{dy} I_{dz} Sont les moments d'inertie du disque suivant x, y et z. L'expression générale de l'énergie cinétique du disque T_d s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \tag{2.4}$$

Cette expression peut être simplifiée quand le disque est symétrique $I_{dy} = I_{dz}$. Lorsque les angles θ et ϕ sont petits et la vitesse angulaire constante ($\dot{\phi} = \Omega$), l'équation 2.4 devient :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_d(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (2.5)$$

Le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$, qui est constant, n'a pas d'influence. Le dernier terme ($I_{dy} \Omega \dot{\psi} \theta$) représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

II.2 L'arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par ses énergies cinétique et de déformation.

2.1. L'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque (équation 2.5). Pour un élément de longueur L , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit comme suit :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (2.6)$$

Où ρ est la masse volumique de l'arbre, S est l'aire de la section droite de l'arbre et est $I = \frac{\pi R^4}{4}$ le moment d'inertie diamétral.

2.2. L'énergie de déformation

Les notations suivantes sont utilisées (figure 2.3) : C est le centre géométrique de l'arbre, $B(x,z)$ est un point typique de section, E est le module d'Young du matériau, ε et σ représentent la déformation et la contrainte, u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes x et z (dans le repère mobile).

Le passage de « \mathbf{u} » et « \mathbf{w} » à « \mathbf{u}^* » et « \mathbf{w}^* » s'écrit :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \tag{2.7}$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \tag{2.8}$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est donné par :

$$U = \frac{1}{2} \int \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t [\boldsymbol{\sigma}] dv \tag{2.9}$$

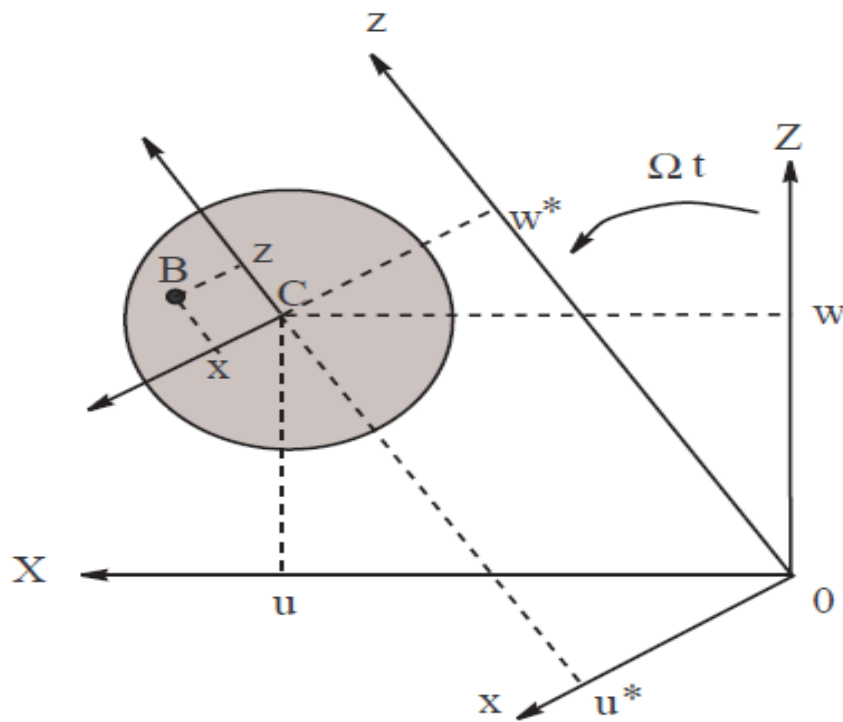


Figure II.3: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

Les inerties de la section droite de l'arbre par rapport à x et z sont données par :

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_s z^2 ds \\
 I_z &= \int_s x^2 ds \\
 I_{xz} &= \int_s xz ds = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Alors :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^l \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy
 \tag{2.11}$$

On remplace « u^* » et « w^* » par leurs valeurs :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^l \left(I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy
 \tag{2.12}$$

Pour le cas où l'arbre est symétrique « $I_x = I_z = I$ » on a :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^l I \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy
 \tag{2.13}$$

II.1.3. Paliers

Le travail virtuel δW des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta W = -k_{xx} \cdot u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - C_{xx} \dot{u} \delta u - C_{xz} \dot{w} \delta u - C_{zz} \dot{w} \delta w - C_{zx} - \dot{u} \delta w
 \tag{2.14}$$

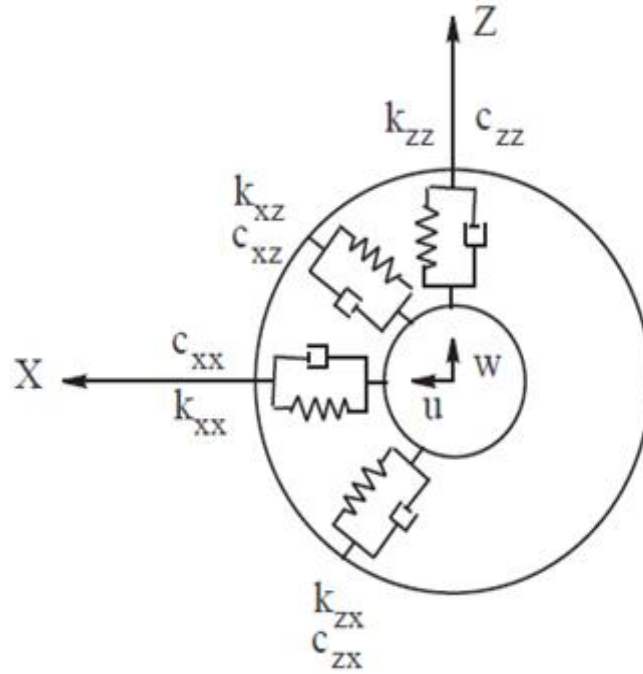


FIG II.4: Amortissement et raideur des paliers

Où :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \tag{2.15}$$

F_u et F_w sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (figure 2.4). En utilisant les deux équations (2.14) et (2.15), il vient :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

II.1.4. Le balourd

Le balourd dont une représentation géométrique est donnée (figure 2.5) peut être assimilé à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique de l'arbre. Son énergie cinétique doit être prise en compte.

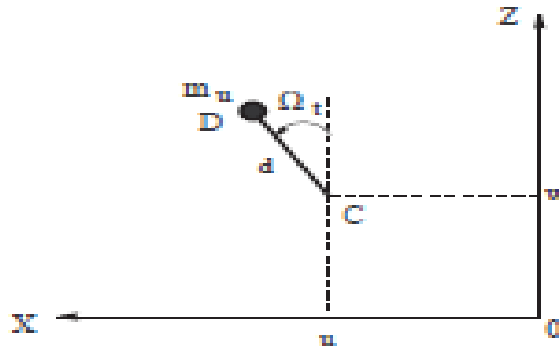


Figure II.5: Balourd

La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y , sa coordonnée selon cet axe dans le repère R_0 est donc constante :

$$\vec{OD} = \begin{vmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{vmatrix}_{R_0} \tag{2.17}$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OD}}{dt} = \begin{vmatrix} u' + d\Omega \cos \Omega t \\ \text{constante} \\ w' - d\Omega \sin \Omega t \end{vmatrix}_{R_0} \tag{2.18}$$

L'expression de l'énergie cinétique T_b du balourd devient :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} d \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (2.19)$$

Le terme $\Omega^2 d^2/2$ est constant et n'interviendra pas dans les équations. La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor, l'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (2.20)$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de déformation et du travail virtuel étant établies.

II.2. Équations du mouvement

Les équations du mouvement peuvent être déterminées à partir des équations de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = F_{qi} \quad (2.21)$$

Où T est l'énergie cinétique du système, U est l'énergie de déformation et δW est le travail virtuel des efforts extérieurs.

N est le nombre de degrés de liberté, q_i sont les coordonnées généralisées indépendantes, et F_{qi} sont les forces généralisées.

II.3. Modèle d'un rotor simple

3. 1. Représentation du modèle simple

Un modèle simple de rotor composé d'un arbre reposant sur des paliers rigides et non rigide, comportant un disque et balourd, le référentiel (O, X, Y, Z) est un repère

galiléen, l'axe du rotor est suivant l'axe Y et la vitesse de rotation de l'arbre est constante. Un seul degré de liberté est utilisé pour chaque déplacement dans les directions X et Z. Le rotor est supporté en appui aux deux extrémités (paliers rigides) avec un palier lisse situé à une longueur L_2 . Il est constitué :

- un arbre de longueur L et de section circulaire constante ;
- un disque symétrique comportant un balourd situé à $Y = L_1$
- un palier situé à $Y = L_1$.

II.3.2. Mise en équations

Les expressions des déplacements s'écrivent après séparation des variables (méthode de Rayleigh Ritz) :

$$\begin{aligned} X_0(y; t) &= u(y, t) = f(y) q_1(t) \\ Z_0(y; t) &= w(y, t) = f(y) q_2(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Où q_i ($i=1,2$) sont les coordonnées généralisées indépendantes et $F(y)$ est la déformée modale choisie.

les angles θ et ψ sont petits, alors :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial w}, \quad \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.23)$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et de travail virtuel sont données par :

$$\begin{aligned} T &= T_d + T_a + T_b \\ U &= U_a \\ \delta w &= F_u \delta u + F_w \delta w \end{aligned} \quad (2.24)$$

Et les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = F_{qi} \quad (2.25)$$

2.3. Fréquence propre et diagramme de Campbell

Le calcul des fréquences naturelles donne :

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$m^2 r^4 + (2km + a^2 r^2) r^2 + k^2 = 0$$

$$r_1^2 = - \left[\omega_{10}^2 + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2m\omega_{10}}{a\Omega} \right)^2} \right) \right] = j^2 \omega_1^2$$

$$\text{Et } r_2^2 = - \left[\omega_{10}^2 + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2m\omega_{10}}{a\Omega} \right)^2} \right) \right] = j^2 \omega_1^2$$

Où $\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{k/m}$ sont les pulsations naturelles à l'arrêt.

Ce qui donne :

$$\omega_1 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{(c\Omega)^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2m\omega_{10}}{c\Omega} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_2 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{(c\Omega)^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2m\omega_{10}}{c\Omega} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

La représentation des pulsations naturelles en fonction de la vitesse de rotation est le diagramme de Campbell.

3.4. Réponse aux forces d'excitation

Les solutions particulières des équations différentielles du mouvement peuvent être cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = A \sin \Omega t$$

$$q_2(t) = B \cos \Omega t$$

Ce qui donne :

$$A = B = \frac{n^* \Omega^2}{k + (a - m) \Omega^2}$$

où n^* dépend de la masse su balourd.

La vitesse critique correspond à la valeur de la vitesse qui rend les déplacements infinis, elle est donnée par :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m-a}}$$

II. 4. Exemple numérique

Le disque est un acier de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, de rayon intérieur $R_{d1} = 0.01 \text{ m}$ et de rayon extérieur $R_{d2} = 0.15 \text{ m}$, d'une épaisseur $h = 0.03 \text{ m}$. Le disque est situé à une distance sur l'arbre $L_1 = \frac{L}{3}$

$$m_d = \pi \rho (R_{d2}^2 - R_{d1}^2) h = 16.47 \text{ Kg}$$

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{m_d}{12} (3R_{d2}^2 + 3R_{d1}^2 + h^2) = 9,247 \cdot 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$$

$$I_{dy} = \frac{m_d}{2} (R_{d2}^2 + R_{d1}^2) = 0.1861 \text{ Kg.m}^2$$

-L'arbre est en acier de longueur $L = 0.4 \text{ m}$, de rayon $R_a = 0.01 \text{ m}$, et de module d'Young $E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2$.

$$\rho=7800\text{kg/m}^3 \quad S=\pi R_a^2 = 3.142 \times 10^{-4} \text{m}^2$$

$$I_s = \frac{\pi R_a^4}{4} = 7,854 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

-La masse du balourd $m_b=10^{-4}\text{kg}$, située à une circonférence distant de $d=0.15\text{m}$,

-Les raideurs sont nulles $k_{xx}=k_{xz}=0$, et $k_{zz}=0$

II.4.1 Équations du mouvement

L'énergie cinétique totale est donnée par :

$$T = T_d + T_a + T_b$$

$$T = \left[\frac{1}{2} \rho S \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^1 (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + 2 \rho I_s \int_0^1 \Omega \psi \dot{\theta} dy \right] + \\ + \left[\frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + I_{dy'} \Omega \psi \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \right] + m_b \left[u d \Omega \cos \Omega t - w d \Omega \sin \Omega t \right]$$

Alors :

$$T = 7.147 (q_1^2 + q_2^2) - 2.871 \Omega q_1 q_2 + 1.299 \cdot 10^{-5} \Omega (q_1 \cos \Omega t - q_2 \sin \Omega t)$$

Énergie de déformation

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy$$

On a : $f(y) = \sin(\pi y/L)$

$$U = 5.977 \cdot 10^{-5} (q_1^2 + q_2^2)$$

Travail virtuel des forces extérieures :

Dans ce cas on a : $\delta W = 0$

Détermination des équations du mouvement :

Équation de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = F_{qi}$$

Pour $i=1$

$$T = 7.147(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.871\Omega \dot{q}_1 q_2 + 1.299 \cdot 10^{-5} \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t)$$

$$\frac{d}{dt} (14.28 \dot{q}_1 - 2.871 \Omega q_2 + 1.299 \cdot 10^{-5} \Omega \cos \Omega t)$$

$$= 14.28 \ddot{q}_1 - 2.871 \dot{q}_2 - 1.299 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$\frac{dT}{dq_1} = 0$$

$$\frac{dU}{dq_1} = 11,954 \cdot 10^{-5} \dot{q}_1$$

$$f_{q1} = 0$$

Pour $i=2$

$$\frac{d}{dt} (14.28 \dot{q}_2 + 1.299 \cdot 10^{-5} \Omega \sin \Omega t)$$

$$= 14.28 \ddot{q}_2 - 1.299 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \cos \Omega t$$

$$\frac{dU}{dq_2} = -2,871 \cdot \Omega \dot{q}_1$$

$$\frac{dU}{dq_2} = 11,954 \cdot 10^{-5} \dot{q}_2$$

$$f_{q_2}=0$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 14.28\ddot{q}_1 - 2.871\Omega\dot{q}_2 + 1.195 \cdot 10^6 q_1 = 1.299 \cdot 10^{-5}\Omega^2 \sin\Omega t \\ 14.28\ddot{q}_2 + 2.871 \cdot \Omega\dot{q}_1 + 1.195 \cdot 10^6 q_2 = 1.299 \cdot 10^{-5}\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases}$$

II.4.2- Calcul des fréquences propres, et diagramme de Campbell

On pose :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = n\Omega^2 \sin\Omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = n\Omega^2 \cos\Omega t$$

La solution de l'équation homogène

$$m\ddot{q}_1 + kq_1 = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + kq_2 = 0$$

$$\text{est } q_i = Q_i e^{rt}$$

ce qui donne :

$$mr^2 Q_1 e^{rt} - a\Omega r Q_2 e^{rt} + k Q_1 e^{rt} = 0$$

$$mr^2 Q_2 e^{rt} + a\Omega r Q_1 e^{rt} + k Q_2 e^{rt} = 0$$

ou bien

$$(mr^2 + k) Q_1 - a\Omega r Q_2 = 0$$

$$(mr^2 + k) Q_2 + a\Omega r Q_1 = 0$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} (mr^2 + k) & -a\Omega r \\ a\Omega r & (mr^2 + k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{vmatrix} (mr^2 + k) & -a\Omega r \\ a\Omega r & (mr^2 + k) \end{vmatrix} = 0$$

Alors

$$(mr^2 + k)^2 + (a\Omega r)^2 = 0$$

$$m^2 r^4 + k^2 + 2mr^2 k + (a\Omega r)^2 = 0$$

On pose $r^2 = x$

$$m^2 x^2 + x(2mk + a^2 \Omega^2) + k^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4AC$$

$$\Delta = (2mk + a^2 \Omega^2)^2 - 4m^2 k^2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{2mk + a^2 \Omega^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2m^2}$$

$$r = j^2 \cdot w^2$$

$$\text{où } j^2 = -1$$

$$w_{1,2} = \sqrt{\frac{2mk + a^2 \Omega^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2m^2}}$$

Les fréquences naturelles sont données par :

$$f_{1,2} = \frac{w_{1,2}}{2\pi}$$

A L'arrêt, nous avons :

$$f_{1,2(0)} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi}$$

A.N :

$$f_{1,2(0)} = 46,02 \text{ Hz}$$

La figure ci-dessous montre le tracé du diagramme de Campbell.

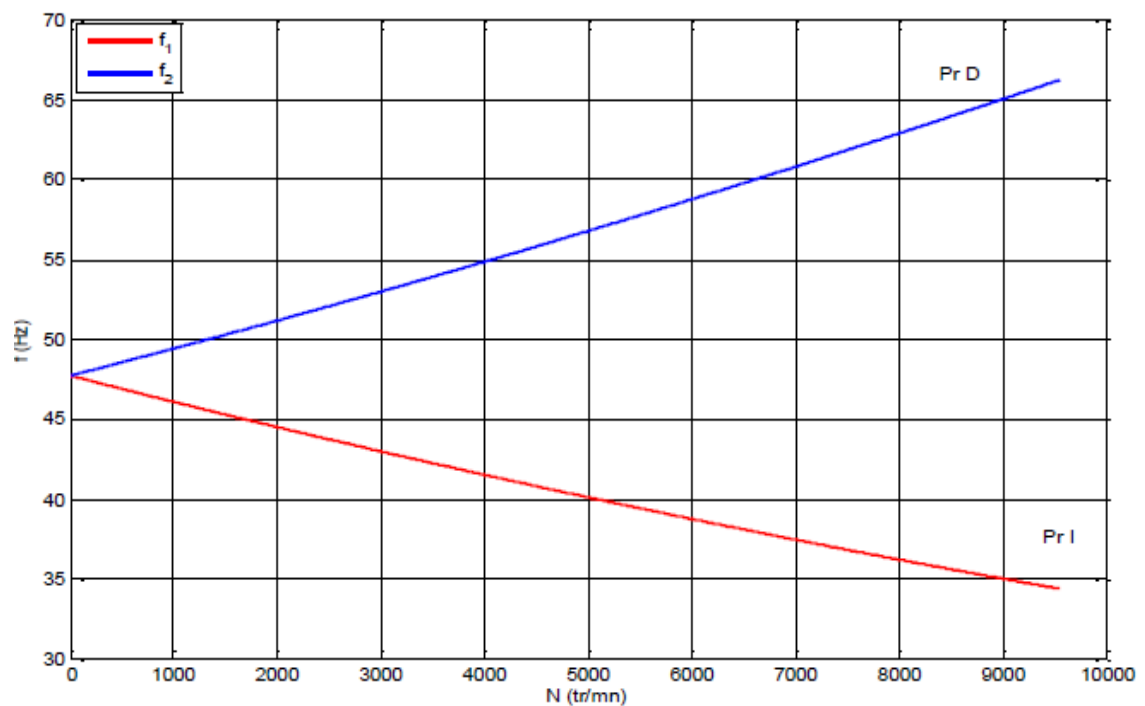


Figure II.6 : Diagramme de Campbell

II.4.3- Détermination de la réponse en régime permanent

C'est la solution de l'équation particulière, et elle donnée par :

$$q_1(t) = A \sin \Omega t \quad q'_1(t) = A \Omega \cos \Omega t \quad q''_1(t) = -A \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$q_2(t) = B \cos \Omega t \quad q'_2(t) = -B \Omega \sin \Omega t \quad q''_2(t) = -B \Omega^2 \cos \Omega t$$

On remplace dans les équations du mouvement, on obtient :

$$-Am\Omega^2 \sin\Omega t + aB\Omega^2 \sin\Omega t + k A \sin\Omega t = n\Omega^2 \sin\Omega t$$

$$- B\Omega^2 \cos\Omega t + aA\Omega^2 \cos\Omega t + k B \cos \Omega t = n\Omega^2 \cos\Omega t$$

$$-mA\Omega^2 + aB\Omega^2 + k A = n\Omega^2$$

$$- mB\Omega^2 + aA\Omega^2 + k B = n\Omega^2$$

$$-A(k - m\Omega^2) + aB\Omega^2 = n\Omega^2$$

$$(k - m\Omega^2) + aA\Omega^2 = n\Omega^2$$

$$(k - m\Omega^2 - a\Omega^2)A - (k - m\Omega^2 - a\Omega^2)B = n\Omega^2 - n\Omega^2$$

$$(k - m\Omega^2 - a\Omega^2)A = (k - m\Omega^2 - a\Omega^2)B$$

Donc $A = B = C$

Ce qui implique que :

$$C(k - m\Omega^2) + aC\Omega^2 = n\Omega^2$$

$$C(k - m\Omega^2 + a\Omega^2) = n\Omega^2$$

$$C = \frac{n\Omega^2}{k - m\Omega^2 + a\Omega^2}$$

La vitesse critique est calculée comme suit :

$$k - m\Omega^2 + a\Omega^2 = 0$$

$$\Omega_c^2 = \frac{k}{a-m} \quad \text{alors :} \quad \Omega_c = \sqrt{\frac{k}{a-m}}$$

A.N :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{1.195 \cdot 10^6}{2.871 - 14.29}} = 3,23 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons expliqué la méthode analytique de la détermination des énergies cinétiques et de déformations ainsi que le travail des forces extérieures. La détermination de la réponse vibratoire en régime libre nous permet de tracer la variation des fréquences naturelle en fonction de la vitesse de rotation. La détermination de la solution particulière des équations du mouvement nous donne la vitesse critique pour laquelle le déplacement est infini.

Introduction

Selon l'étude réalisée précédemment, nous avons expliqué la méthode de la détermination des équations du mouvement d'un modèle simple de rotor de type non amorti. Parmi les phénomènes importants qui sont souvent rencontrés dans les études de la dynamique des rotors sont le phénomène d'excentricité (dissymétrie) et le phénomène tournant (symétrique). Nous verrons plus particulièrement lors de résolution des équations de mouvement développées dans ce chapitre l'influence de ces phénomènes sur le tracé du diagramme de Campbell et sur les vitesses critiques.

Le modèle de rotor simple non amorti est bien adapté à l'étude du phénomène de la dissymétrie. Ici le support (paliers) est supposé parfaitement élastique donc son coefficient d'amortissement est nul ($C=0$) et les raideurs K_{xx} et K_{zz} sont égales pour le cas du modèle symétrique et différent pour le cas du modèle dissymétrique.

III.1 Description du modèle de rotor étudié

Le modèle de rotor illustré sur la figure 1 est un modèle réel d'un rotor d'une turbine à gaz, sa structure est composée d'un arbre symétrique de longueur L et deux disques symétriques, l'un des deux est balourdé et situé à une distance de $L_1 = \frac{L}{4}$

Pour bien étudier ce phénomène mis en jeu dans l'étude des vibrations de rotor, on assimile que les amortissements et les raideurs des paliers situés à l'extrémité des paliers sont concentrés au milieu de l'arbre c'est-à-dire à une position $L_p = \frac{L}{2}$ [13].

Les caractéristiques du rotor sont les suivantes :

Pour les disques:

- Rayon intérieur : R_1
- Rayon extérieur : R_2
- Épaisseur : h
- Positions : $L_1 = \frac{L}{4}, L_2 = \frac{3L}{4}$
- Masse volumique : ρ

Pour l'arbre :

- Longueur : L
- Rayon : R_1
- Masse volumique : ρ
- Module de Young : E

Pour le balourd :

- Masse : m_u
- Distance au centre : d

Pour le palier :

- La raideur : K_{xx} , K_{zz}
- L'amortisseur : c
- La position : 0 , L

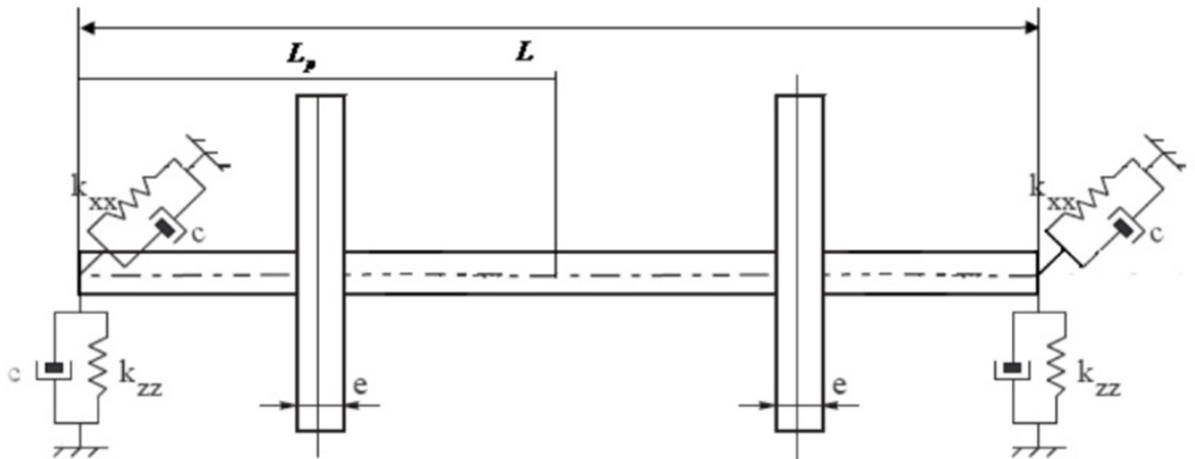


Figure III.1 : Modèle de rotor étudié.

III.2. Exemple d'application

Les valeurs numériques utilisées dans cet exemple d'application sont :

Pour le disque

$$R_1 = 0.06\text{m}$$

$$R_2 = 0.2\text{m}$$

$$h = 0.06\text{m}$$

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

Masse : $m_d = \pi \rho (R_2^2 - R_1^2) h$

Moments d'inerties $I_{dx} = I_{dz} = \frac{m_d}{12} (3R_2^2 + 3R_1^2 + h^2)$

$$I_{dy} = \frac{m_d}{2} (R_2^2 + R_1^2)$$

Pour l'arbre

Longueur $L = 1.8 \text{ m}$

Rayon de la section droite $R_1 = 0.06 \text{ m}$

$E = 2.47 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Aire de section droite $S = \pi R_1^2$

Moment d'inertie quadratique $I_s = \frac{\pi R_1^4}{4}$

Pour le balourd

$m_b = 10^{-4} \text{ kg}$

Pour les paliers :

La raideur : $K_{xz} = K_{zx} = 0$

L'amortissement est nul.

III.2. 1 Équations du mouvement

Énergie cinétique

L'énergie cinétique totale est donnée par :

$$T = T_d + T_a + T_b$$

Avec :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} [\Omega^2 + 2 \Omega \dot{\psi} \Theta]$$

$$T_a = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2) dy + \rho I_L \Omega^2 + 2 \rho I_s \Omega \int_0^L \Omega \dot{\psi} \Theta dy$$

$$T_b = m_b \Omega d [\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t]$$

$$T = \left[\frac{1}{2} \rho s \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_s \int_0^1 (\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2) dy + 2 \rho I_s \int_0^1 \Omega \psi \Theta dy \right] + \left[\frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2) + I_{dy} \Omega \psi \dot{\Theta} + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \right] + m_b \left[u d \Omega \cos \Omega t - w d \Omega \sin \Omega t \right]$$

Énergie de déformation

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy$$

Travail virtuel des forces extérieures

$$\delta w = -k_{xx} \cdot u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - C_{xx} \dot{u} \delta u - C_{xz} \dot{w} \delta u - C_{zz} \dot{w} \delta w - C_{zx} \dot{u} \delta w$$

Soit : $f(y) = \sin \frac{\pi y}{L}$

Alors :

$$f\left(\frac{L}{4}\right) = f\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{et } f'\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{L}\right), f'\left(\frac{3L}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{L}\right)$$

ce qui donne :

$$T_d = \frac{1}{2} \left[m_d + I_{dx} \frac{\pi^2}{L^2} \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{dy} \Omega \frac{\pi^2}{L^2} (q_1 q_2)$$

$$T_a = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho s L}{2} + \rho I \frac{\pi^2}{2L} \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \rho I \Omega \frac{\pi^2}{L} (q_1 q_2)$$

$$T_b = m_b \Omega d \frac{\sqrt{2}}{2} [q_1 \cos \Omega t - q_2 \sin \Omega t]$$

Donc :

$$T = \frac{1}{2} \left[m_d + I_{dx} \frac{\pi^2}{L^2} + \rho s \frac{L}{2} + \rho I \frac{\pi^2}{L} \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} \left[2 I_{dy} \Omega \frac{\pi^2}{L^2} + 2 \rho I \Omega \frac{\pi^2}{L} \right] (q_1 q_2) + m_b \Omega d \frac{\sqrt{2}}{2} [q_1 \cos \Omega t - q_2 \sin \Omega t]$$

Et :

$$U = \frac{EI}{2} \frac{\pi^4}{2L^3} (q_1^2 + q_2^2)$$

Équations de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = F_{q_i}, \quad i=1,2$$

Ce qui donne :

$$M\ddot{q}_1 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 = e \sin\Omega t$$

$$M\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 = e \cos\Omega t$$

avec :

$$M = m_d + I_{dx} \frac{\pi^2}{L^2} + \rho s \frac{L}{2} + \frac{\pi^2}{2L}$$

$$c_{11} = c_{xx} ; c_{12} = - \left(I_{dy} \Omega \frac{\pi^2}{L^2} + \rho I \Omega \frac{\pi^2}{L} \right) + c_{xz}$$

$$c_{21} = I_{dy} \Omega \frac{\pi^2}{L^2} + \rho I \Omega \frac{\pi^2}{L} + c_{zx}$$

$$c_{22} = c_{zz}$$

$$k_{11} = \frac{EI\pi^4}{2L^3} + K_{xx}$$

$$k_{12} = k_{xz} , k_{21} = k_{zx} , k_{22} = \frac{EI\pi^4}{2L^3} + K_{zz}$$

et :

$$e = m_b d \Omega^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \sin\Omega t \\ e \cos\Omega t \end{Bmatrix}$$

III.2.2 Cas étudié : rotor non amorti

Le rotor est supposé non amorti, alors : $c_{xx} = c_{zx} = c_{xz} = c_{zz} = 0$.

On a : $k_{xz} = k_{zx} = 0$

Alors les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega n \\ \Omega n & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_{xx} + k_0 & 0 \\ 0 & k_{zz} + k_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \sin \Omega t \\ e \cos \Omega t \end{Bmatrix}$$

Où :

$$n = I_{dy} \frac{\pi^2}{L^2} + \rho I \frac{\pi^2}{L}$$

$$\text{Et : } k_0 = \frac{EI\pi^4}{2L^3}$$

III.2.2.1 Cas symétrique

Dans ce cas, $k_{xx} = k_{zz}$. et on pose : $K = k_{xx} + k_0$

Le calcul des fréquences propres donne :

$$\omega_1 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{(n\Omega)^2}{2M^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2M\omega_{10}}{n\Omega} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_2 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{(n\Omega)^2}{2M^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2M\omega_{10}}{n\Omega} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Où : $\omega_{10}^2 = K/M$

La représentation des pulsations naturelles en fonction de la vitesse de rotation est le diagramme de Campbell.

Les figures suivantes montrent les tracés du diagramme de Campbell pour un rotor symétrique.

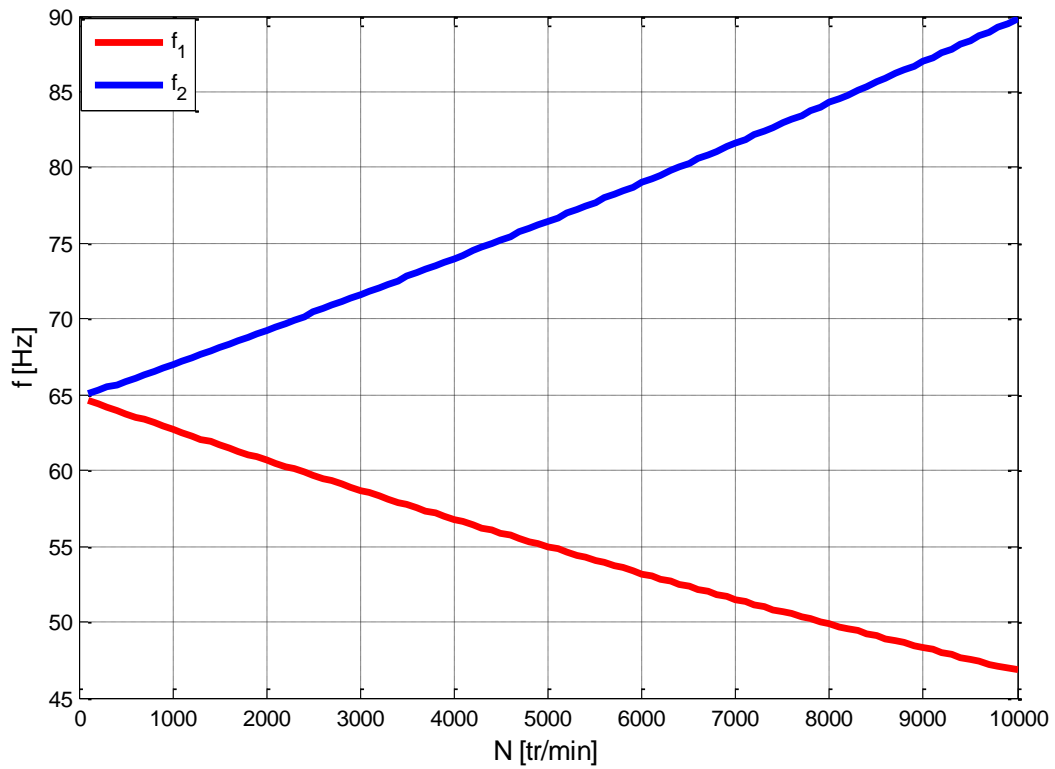


Figure III.2. Diagramme de Campbell (rotor symétrique) $k_{xx} = k_{zz} = 0$.

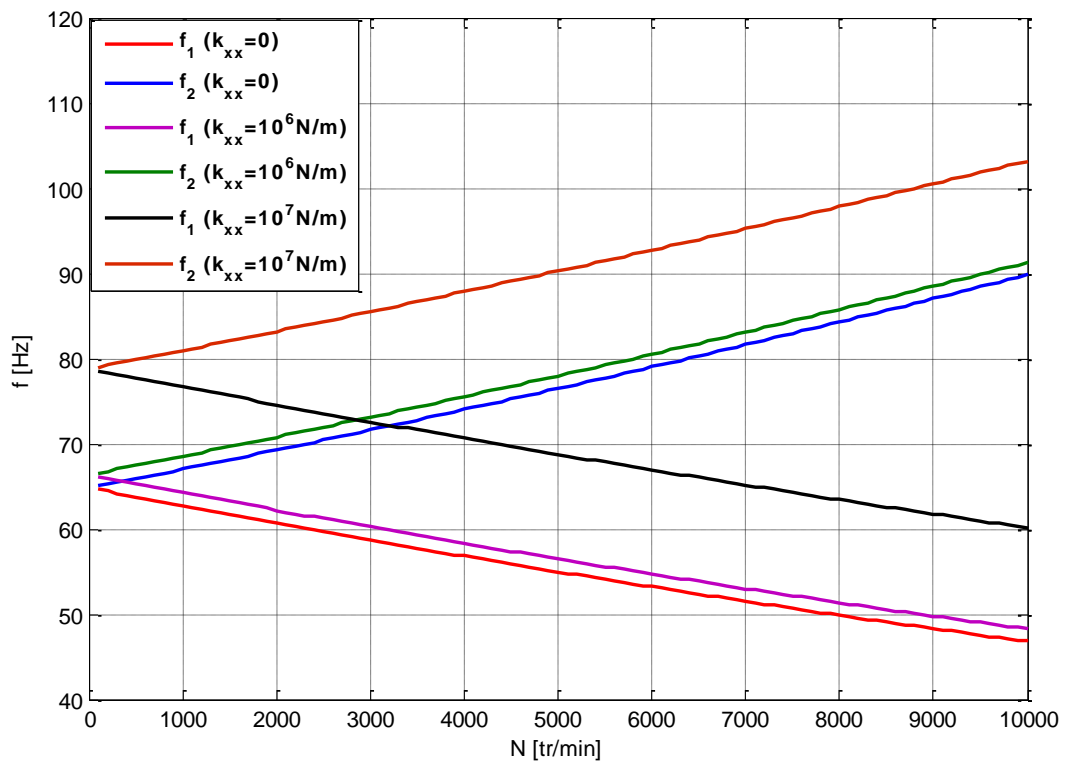


Figure III.3. Diagramme de Campbell pour différentes valeurs de k_{xx} (rotor symétrique)

Les solutions particulières des équations différentielles du mouvement peuvent être cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t$$

$$q_2(t) = Q_2 \cos \Omega t$$

Ce qui donne :

$$Q_1 = Q_2 = Q = \frac{m_b d \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega^2}{K + (n - M) \Omega^2}$$

Et la vitesse critique correspond à la valeur de la vitesse qui rend les déplacements infinis, elle est donnée par :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{K}{M-n}}$$

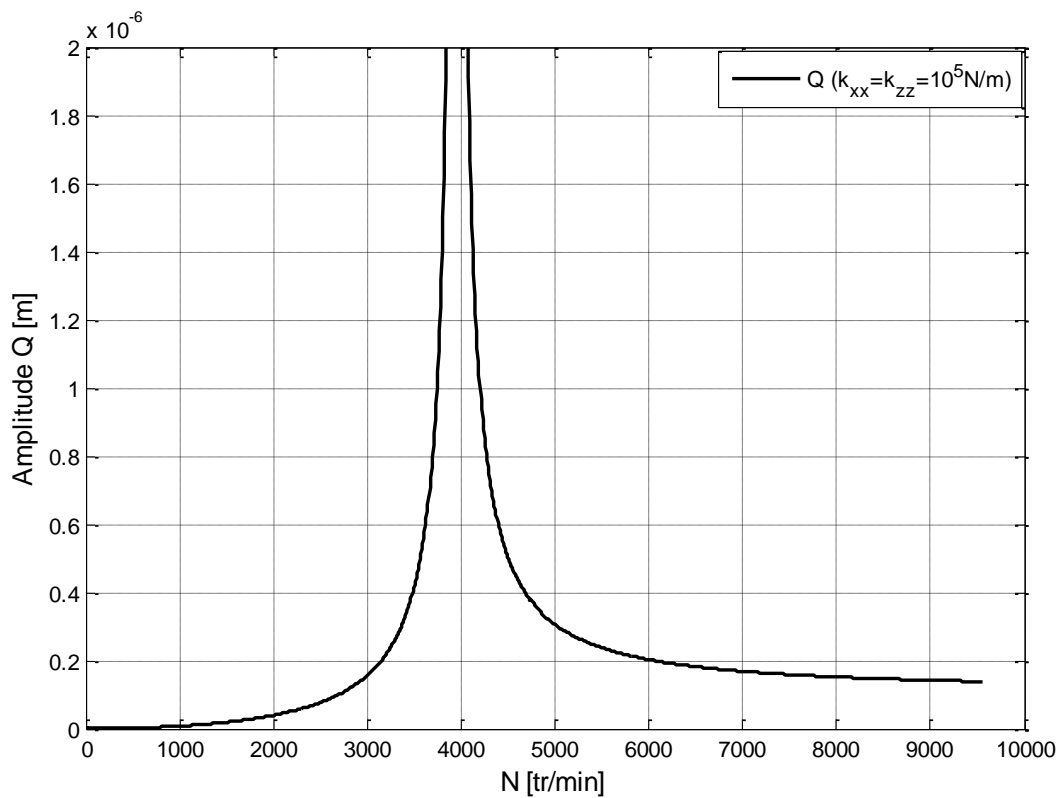


Figure III.4. Réponse au balourd (rotor symétrique)

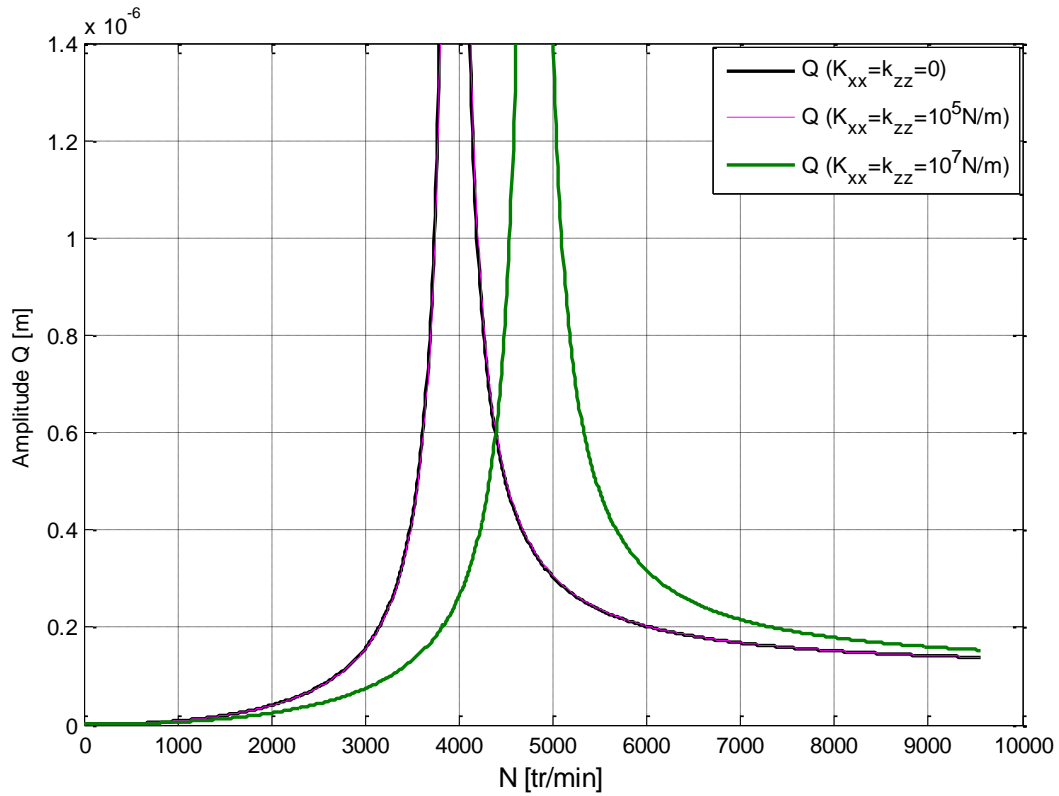


Figure III.5. Réponse au balourd pour différentes valeurs de k_{xx} (Rotor symétrique)

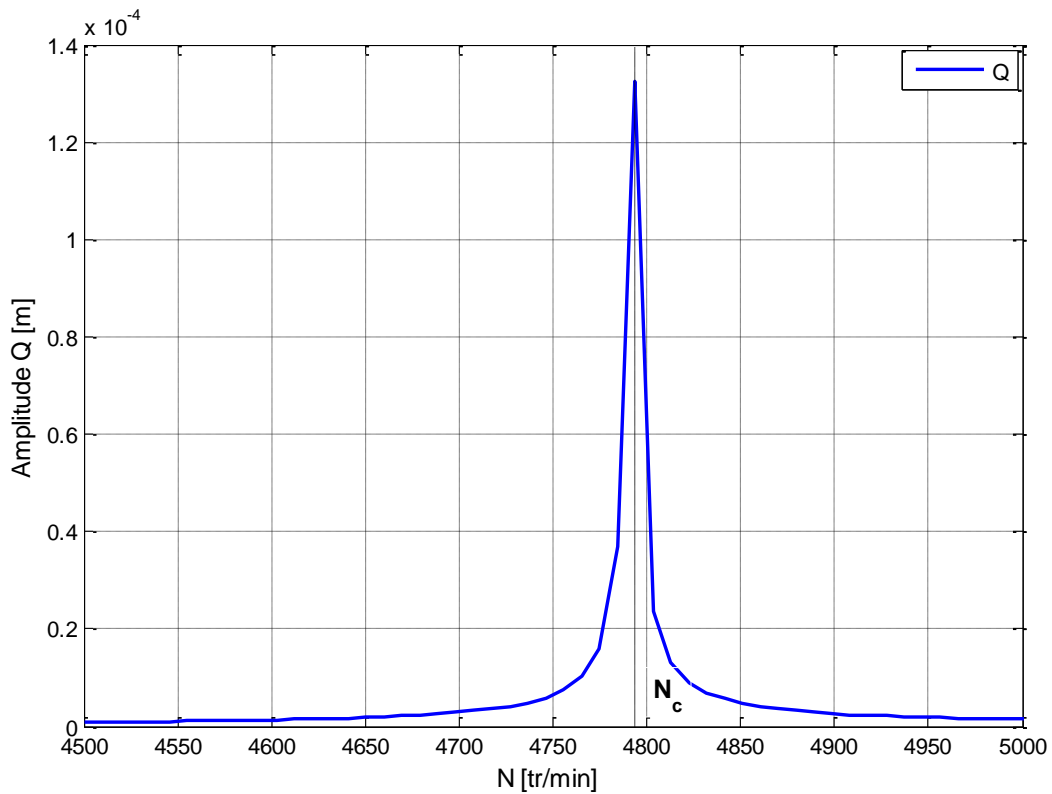


Figure III.6. Réponse au balourd pour $k_{xx} = 10^7$ (Rotor symétrique), Vitesse critique : $N_c = 4790 \text{ tr/mn}$,

Le diagramme de Campbell [$f_1 = f_1(N)$, $f_2 = f_2(N)$] est présenté sur la figure (III.2) où $N = 30\Omega/\pi$ et $f_i = \frac{1}{2\pi} \omega_i$; $i = 1,2$.

A l'arrêt, on a : $f_{10} = \frac{1}{2\pi} \omega_{10} = f_{20} = \frac{1}{2\pi} \omega_{20}$.

Le diagramme de Campbell tracé pour trois valeurs de k_{xx} est illustré sur la figure (III.3). Il est clair que la fréquence propre (f_i ; $i = 1,2$) croît avec la valeur de la raideur k_{xx} , et que les deux fréquences propres sont égales à l'arrêt.

La figure (III.4) montre la variation de l'amplitude de la réponse Q en fonction la vitesse de rotation N pour $k_{xx} = k_{zz} = 10^5$ N/m. La vitesse critique correspond à la valeur de la vitesse qui rend les déplacements infinis, cette vitesse augmente avec l'augmentation de la raideur k_{xx} . (voir Fig. III.5).

Pour $k_{xx} = k_{zz} = 10^7$ N/m, nous avons calculé la vitesse critique qui correspond à l'annulation du dénominateur de la fonction Q , $N_c = 4790$ tr/min. (voir Fig. III.6).

III.2.2.1 Cas dissymétrique

Dans ce cas, $k_{xx} \neq k_{zz}$. et on pose : $K_1 = k_{xx} + k_0$, $K_2 = k_{zz} + k_0$

Le calcul des fréquences propres donne :

$$\omega_1 = \left[\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{(n\Omega)^2}{2M^2} - \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{(n\Omega)^2}{2M^2} \right)^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_2 = \left[\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{(n\Omega)^2}{2M^2} + \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{(n\Omega)^2}{2M^2} \right)^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Où :

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{K_1}{M}}$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{K_2}{M}}$$

La représentation des pulsations naturelles en fonction de la vitesse de rotation est le diagramme de Campbell.

Les figures suivantes montrent les tracés du diagramme de Campbell pour un rotor dissymétrique.

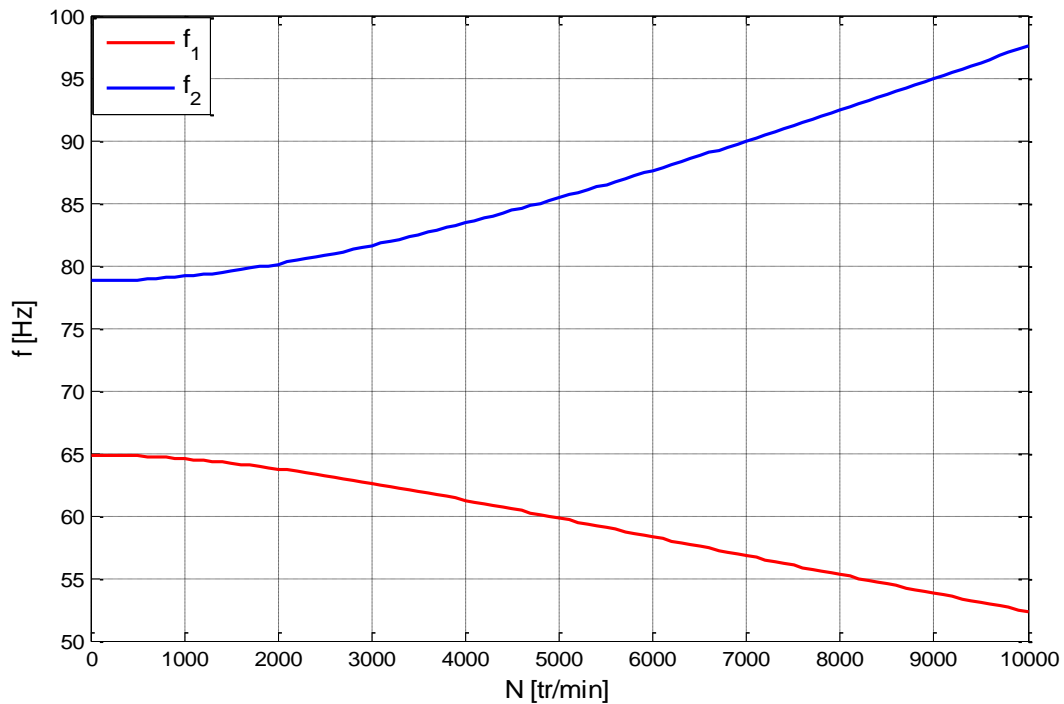


Figure III.7. Diagramme de Campbell (rotor dissymétrique) $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^7 \text{N/m}$.

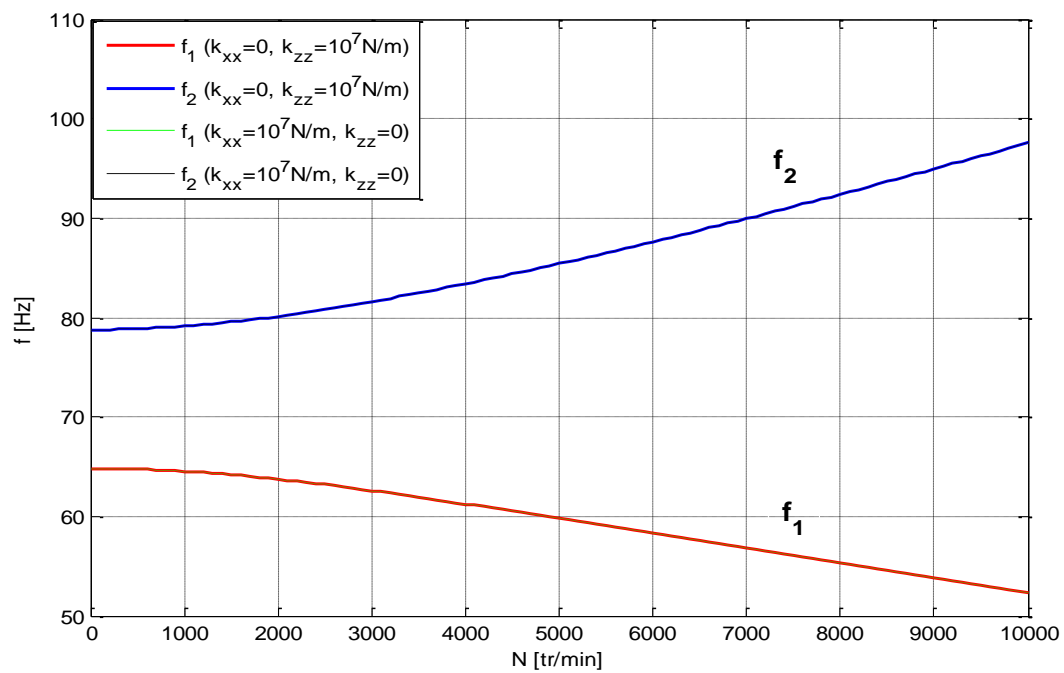


Figure III.8. Diagramme de Campbell pour différentes valeurs de k_{xx} et k_{zz} (rotor dissymétrique)

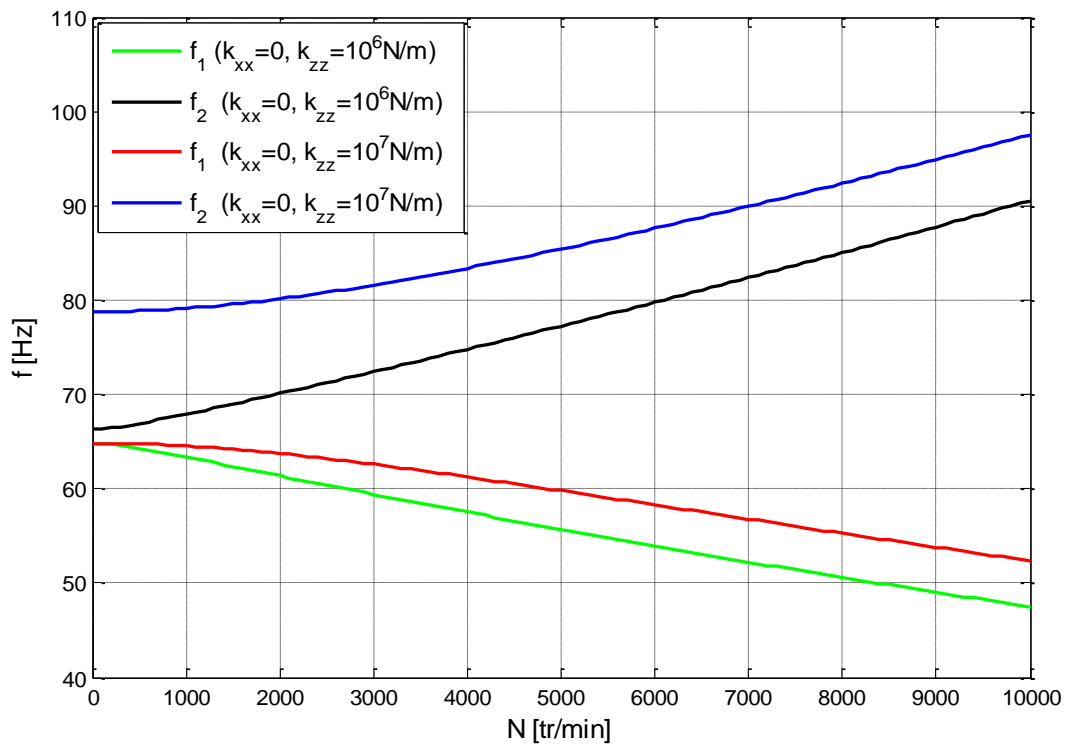


Figure III.9. Diagramme de Campbell pour $k_{xx} = 0$ et pour différentes valeurs de k_{zz} (rotor dissymétrique)

Les solutions particulières des équations différentielles du mouvement peuvent être cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t$$

$$q_2(t) = Q_2 \cos \Omega t$$

Ce qui donne :

$$Q_1 = \frac{(K_2 - (M + n)\Omega^2) \left(m_b \frac{\sqrt{2}}{2} d \right) \Omega^2}{(K_1 - n\Omega^2)(K_2 - M\Omega^2) - n^2\Omega^4}$$

$$Q_2 = \frac{(K_1 - (M + n)\Omega^2) \left(m_b \frac{\sqrt{2}}{2} d \right) \Omega^2}{(K_1 - M\Omega^2)(K_2 - M\Omega^2) - n^2\Omega^4}$$

Et les vitesses critiques correspondent à l'annulation du dénominateur des expressions du déplacement Q_1 ou Q_2 , c'est-à-dire :

$$(K_1 - M\Omega^2)(K_2 - M\Omega^2) - n^2\Omega^4 = 0$$

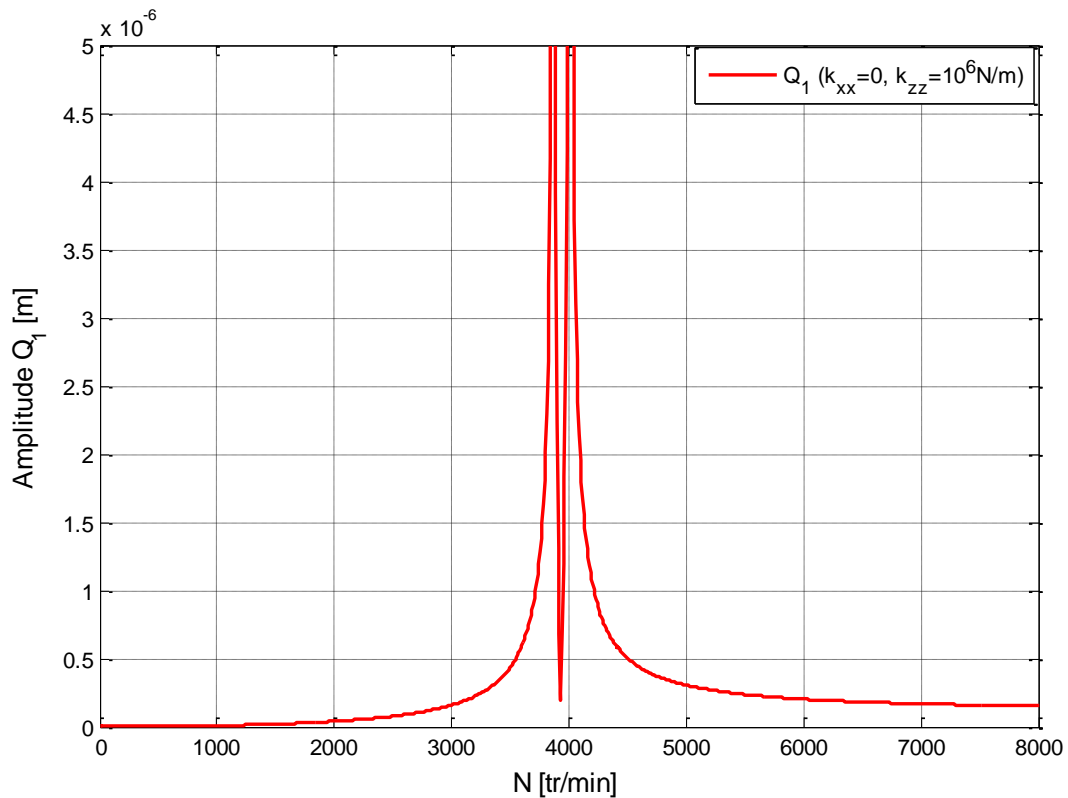


Figure III.10. Réponse au balourd Q_1 (rotor dissymétrique)

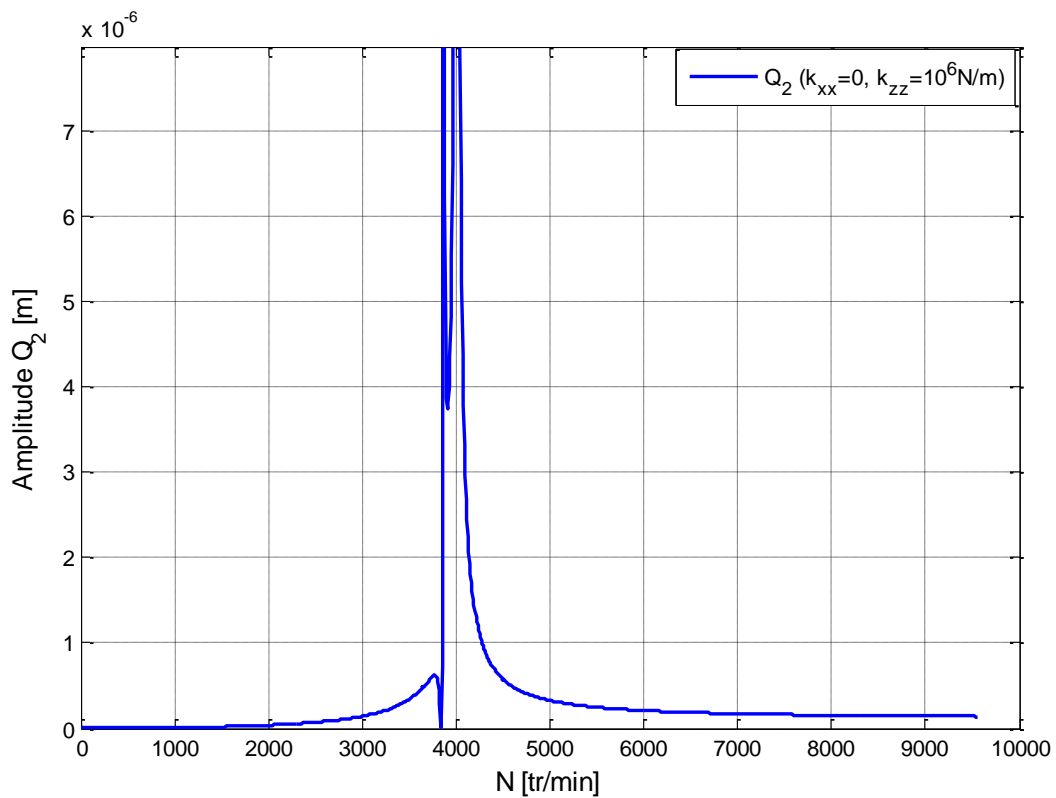


Figure III.11. Réponse au balourd Q_2 (rotor dissymétrique)

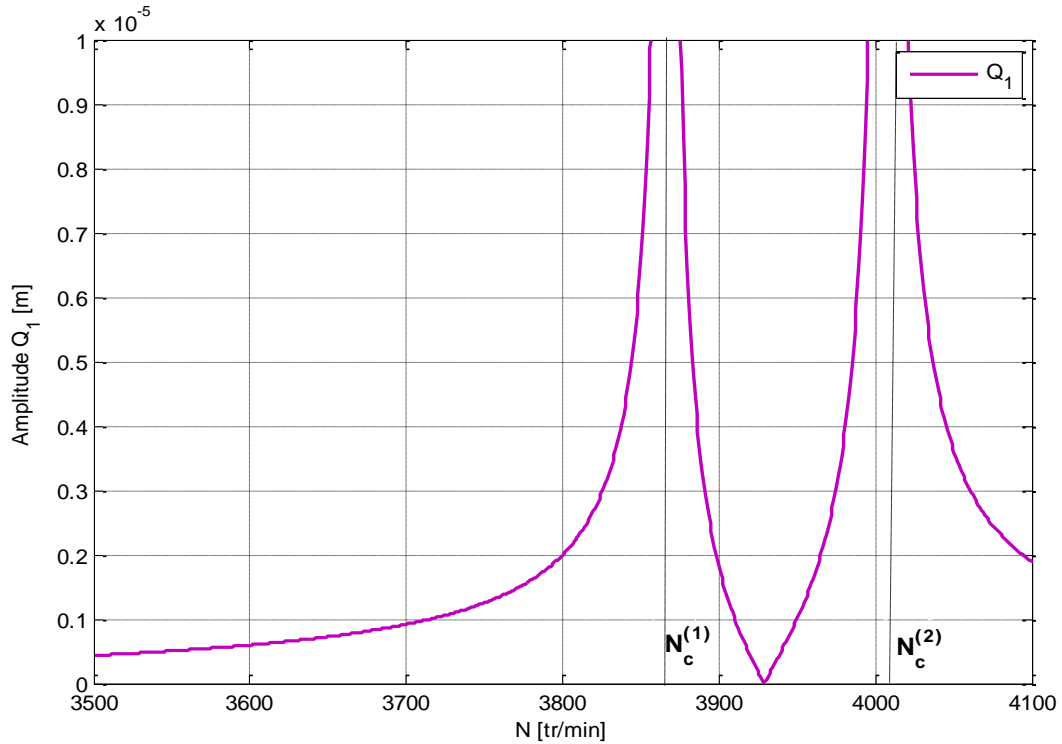


Figure III.12. Réponse au balourd (Q_1) pour $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^6 \text{N/m}$ (rotor dissymétrique), Vitesses critiques : $N_c^{(1)} = 3880 \text{tr/mn}$, $N_c^{(2)} = 4020 \text{tr/mn}$

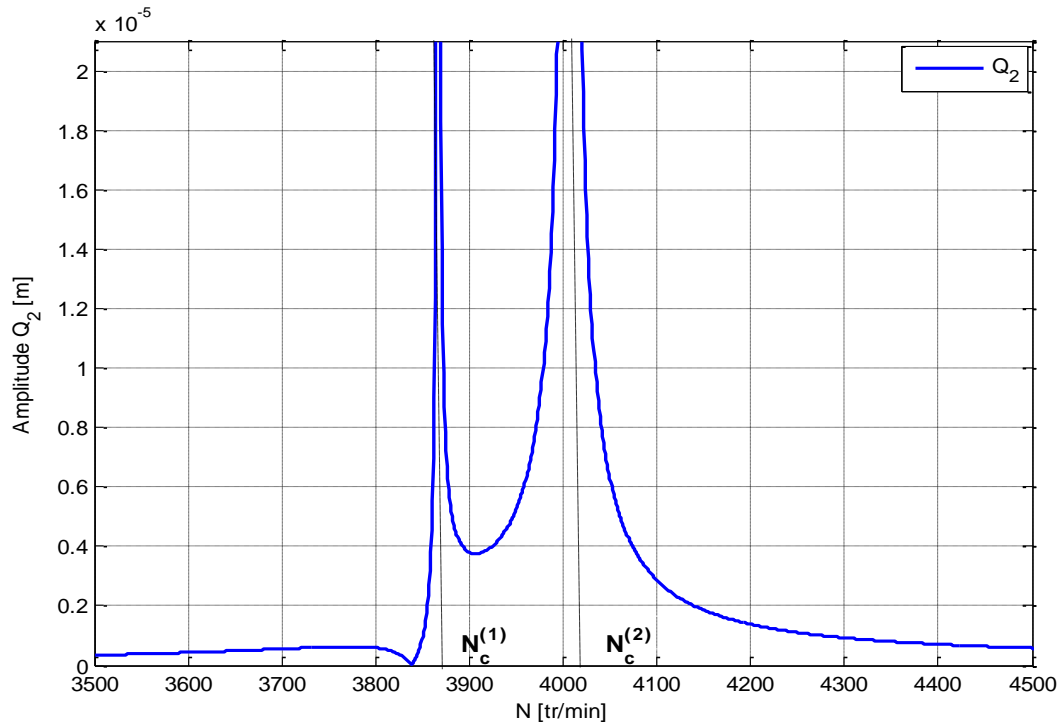


Figure III.13. Réponse au balourd (Q_2) pour $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^6 \text{N/m}$ (rotor dissymétrique), Vitesses critiques : $N_c^{(1)} = 3880 \text{tr/mn}$, $N_c^{(2)} = 4020 \text{tr/mn}$,

Le diagramme de Campbell [$f_1 = f_1(N)$, $f_2 = f_2(N)$] est présenté sur la figure (III.7). A l'arrêt, on a : $f_{10} = \frac{1}{2\pi} \omega_{10}$, $f_{20} = \frac{1}{2\pi} \omega_{20}$. Il est clair que si $k_{xx} \neq k_{zz}$ alors $f_{10} \neq f_{20}$.

La figure (III.8) illustre les tracés du diagramme de Campbell pour $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^7$ N/m, $k_{xx} = 10^7$ N/m, $k_{zz} = 0$. Les courbes obtenues sont confondues.

Le diagramme de Campbell tracé pour deux valeurs différentes des raideurs est illustré sur la figure (III.9). Les deux fréquences propres sont différentes à l'arrêt, cette différence est lié au facteur de dissymétrie défini par $|k_{xx} - k_{zz}|/2$.

Les figures (III.10)-(III.11) montrent les variations des amplitudes $Q_i, i = 1,2$ en fonction la vitesse de rotation N pour $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^6$ N/m.

Pour $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^6$ N/m, nous avons déterminé les deux vitesses critiques, $N_c^{(1)} = 3880$ tr/min, $N_c^{(2)} = 4020$ tr/min (voir Figs. (III.12)-(III.13)).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, ainsi que la réponse au balourd et la vitesse critique pour un modèle simple d'un rotor d'une turbine à gaz. Dans notre étude, le rotor est supposé non amorti, c'est à dire que l'amortissement est nul, et nous avons traité le cas de rotor symétrique et non symétrique.

Les résultats montrent que le modèle symétrique admet une seule vitesse critique, contrairement au modèle non symétrique qui a deux vitesses critiques.

Conclusion générale

Ce mémoire avait pour objectif d'expliquer la modélisation de la dynamique des rotors et de donner un développement analytique de cette modélisation.

Après une étude bibliographique sur un modèle simple de rotor, une étude analytique d'un modèle du rotor d'une turbine à gaz est développée. Le rotor est supposé composé de deux disques rigides et symétriques et l'un des deux est balourdé, d'un arbre déformable et des paliers. Après la détermination des équations de Lagrange, nous avons procédé à l'étude de la réponse vibratoire du système.

Pour le développement analytique, nous avons supposé que l'amortissement est nul, et nous avons traité le cas symétrique et non symétrique, cette dissymétrie est due aux caractéristiques des paliers.

Nous avons déterminé le diagramme de Campbell, la réponse au balourd et la vitesse critique et cela pour les deux cas étudiés.

Les résultats montrent que le modèle symétrique admet une seule vitesse critique, contrairement au modèle non symétrique qui a deux vitesses critiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Meddour Belkacem, Dynamique des machines tournantes Université de Abbas Laghrour Khenchela. November 2019.
- [2] H.H. Jeffcott, the lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance, *philos.mag.* 37, 304-315;1919.
- [3] Lalanne M., Ferraris G., rotor dynamics prediction in engineering, John Wiley & Sons Ltd, 2-10.
- [4] Jacques M., Surveillance vibratoire et Maintenance prédictive. Technique de l'ingénieur, Traite Mesures et Contrôle, Doc. R6100, 10 Décembre 2002.
- [5] Yukio I., Toshio Y., Linear and Nonlinear rotor dynamics: A Modern Treatment With Applications, Second Edition, 2012.
- [6] Berroussi Chaouki. Étude dynamique d'un rotor. Mémoire de master. Université de Biskra. 2020/2021.
- [7] H.Lamb and R.Southwell "The vibration of spinning disk." *Proc. of the royal society of London*, vol 99.pp.272-280,1921.
- [8] K.Sinhas "Dynamic characteristics of a flexible bladed rotor with coulomb damping due to tip rub," *journal of sound and vibration*, vol 273,2004.pp.875-919.
- [9] P.W.Fortesue and J.Starck "Spacecraft systems engineering" Wiley, New York 1991
- [10] F.F.Ehrich "handbook of rotor dynamic Krieger publishing company 1999.
- [11] H.Jeffcott "The lateral vibration of loaded shafts in the neighbour hood of wirling speed-the effect of want of balance" *Phil.Mag*, vol 37.no 6.pp.304-314,1919

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[12] Michel Lalanne Guy Ferraris, Dynamique des rotors en flexion. Techniques de l'ingénieur. Novembre 1996.

[13] Brahmi hamza. Etude du comportement vibratoire et simulation numérique des charges dynamiques d'un rotor flexible. Mémoire de magister. Université de Boumerdès. 2009/2010

Résumé

Ce travail est une étude théorique du comportement dynamique en flexion d'un modèle simple de rotor d'une turbine à gaz. Nous avons déterminé l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, ainsi que la réponse au balourd et la vitesse critique pour deux modèles symétrique et non symétrique.

Mots clés : Dynamique, Rotors, Flexion, Dissymétrie, Diagramme de Campbell, Vitesse critique

Abstract

This work is a theoretical study of the dynamic behavior in bending of a simple model of a gas turbine rotor. We have determined the evolution of natural frequencies as a function of rotational speed, as well as the response to unbalance and the critical speed for two symmetrical and non-symmetrical models.

Keywords: Dynamics, Rotors, Bending, Asymmetry, Campbell Diagram, Critical Speed

ملخص

هذا العمل عبارة عن دراسة نظرية للسلوك الديناميكي في الانحناء لنموذج بسيط لـدوار توربين غازي. لقد حددنا تطور الترددات الذاتية كدالة لسرعة الدوران ، وكذلك الاستجابة لعدم التوازن والسرعة الحرجة لنموذجين متماثلين وغير متماثلين

الكلمات الرئيسية: الديناميات ، الدورات ، الانحناء ، عدم التناظر ، مخطط كامبل ، السرعة الحرجة