

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur



et de la recherche scientifique



UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Fabrication mécanique et productique

Par : **AMROUCHE Lamine**

**BAGHDAOUI Ouahib**

## Thème :

**Analyse élastoplastique d'une plaque perforée par  
la méthode des éléments finis**

Soutenu le 21/09/2022 devant le jury composé de :

Mm. BOUZIDI Safia

Présidente

Mr. YAYA Kamel

Rapporteur

Mr .METHIA Mounir

Examineur

**Année Universitaire : 2021/2022**

## **Remerciements**

*Nous remercions tout d'abord Allah le Tout Puissant de nous avoir donné la foi, le courage et la volonté de mener à bien notre modeste travail.*

*Nous adressons nos vifs remerciements à notre encadreur Dr YAYA Kamel de nous avoir dirigé et conseillé pendant la réalisation de notre travail.*

*Nous remercions également les enseignants du département de génie mécanique de nous avoir aidés tout au long de notre formation*

*Enfin nous tenons à exprimer notre reconnaissance envers nos amis et familles qui nous ont apporté le soutien moral et intellectuel durant l'élaboration de ce travail.*

## ***Dédicace***

*Je dédie ce modeste travail :*

*A ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui m'ont  
Toujours poussé vers le chemin du savoir, à ma source d'amour*

*Et d'affection, les deux êtres les plus chères au monde :*

*Mes Chers parents: Rabah et Fadila.*

*Et à mon petit frère: Yanis*

*A ma plus belle amie*

*Sans oublié les autres amis et mes camarades*

*Et à tous les universitaires*

***LAMINE***

*Je dédie ce travail à :*

*Mes parents*

*Mes frères et mes sœurs*

*Mes amis*

***Ouahib***

## **Résumé**

Cette étude concerne principalement le phénomène de concentration de contraintes dans une plaque trouée, soumise à un champ de traction. Deux approches ont été considérées, la première méthode classique, le second est numérique se basant sur la simulation par le logiciel COMSOL Multiphysics. Nous avons développé un modèle numérique qui permet d'évaluer la valeur de coefficient de concentration de contrainte. Nous avons aussi examiné le domaine élastoplastique uniaxial d'une plaque.

## **Abstract**

This study is mainly concerned with the phenomenon of stress concentration in a plate with holes, subjected to a tensile field. Two approaches have been considered, the first one is classical, the second one is numerical based on the simulation by the software COMSOL Multiphysics. We have developed a numerical model that allows to evaluate the value of stress concentration coefficient. We have also examined the uniaxial elastoplastic domain of a plate.

## Table des matières

Remerciements

Dédicace

Résumé

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Notation

**Introduction générale** ..... 1

### Chapitre 1 : Généralités

1.1	Structures mécanique et résistance des matériaux	2
1.1.1	Définition d'une structure en mécanique	2
1.1.2	Résistance des matériaux	3
1.2	Généralités sur les plaques	3
1.2.1	Introduction	3
1.2.2	Définition d'une plaque	3
1.2.3	Différents types de plaques	4
1.2.4	Domaines d'utilisation des plaques	5
1.3	La méthode des éléments finis	5
1.3.1	Introduction	5
1.3.2	Principe de la méthode des éléments finis	6
1.3.3	La méthode des éléments finis	6
1.3.4	Concept de la méthode des éléments finis	6
1.3.5	Caractéristique d'un élément fini	7
1.3.6	Les étapes de la méthode des éléments finis	7

### Chapitre 2 Théorie sur l'élasticité et l'élastoplasticité

2.1	Théorie d'élasticité	9
2.1.1	Introduction	9
2.1.2	Définition de l'élasticité	9
2.1.3	Elasticité plan	9
2.1.4	Principes de la concentration des contraintes dans une plaque trouée soumise à un champ de traction	12
2.1.5	Problème d'une plaque trouée soumise à un champ de contraintes de traction	15
2.2	Elastoplasticité	18

2.2.1	Introduction .....	18
2.2.2	Essai de traction .....	18
2.2.3	Limite d'élasticité ou seuil d'écoulement .....	19
2.2.4	Comportement élastoplastique uniaxial (l'essai de traction) .....	21
2.2.5	Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale .....	22
<b>Chapitre 3 Simulation numérique</b>		
3.1	Problème de la plaque infinie de kirsch .....	27
3.1.1	Introduction .....	27
3.1.2	Problème de la plaque infinie de kirsch .....	27
3.1.3	Définition du modèle.....	27
3.1.4	Modélisation de la géométrie .....	28
3.1.5	Paramètres physiques .....	29
3.1.6	Génération de maillage.....	30
3.1.7	Calcul de la solution .....	31
3.1.8	Post-traitement et visualisation .....	31
3.2	Plaque élasto-plastique .....	33
3.2.1	Introduction .....	33
3.2.2	Définition du modèle.....	33
3.2.3	Modélisation de la géométrie .....	34
3.2.4	Paramètres physiques .....	35
3.2.5	Génération de maillage.....	36
3.2.6	Calculer la solution.....	37
3.2.7	Post-traitement et visualisation .....	37
<b>Conclusion générale</b> .....		39
<b>Référence</b> .....		43

## Liste des figures

Figure 1.1 Type de structures .....	2
Figure 2.1 Une plaque d'épaisseur h.....	4
Figure 3.1 Domaine d'utilisation des plaques.....	5
Figure 4.1 Etape de l'analyse d'un problème aux limites .....	6
Figure 5.2 Etat des contraintes planes .....	10
Figure 6.2 Plaque sollicitée en traction dans le plan(0, $x_1$ , $x_2$ ) .....	11
Figure 7.2 Illustration schématique montrant l'origine de la concentration de contrainte .....	12
Figure 8.2 Une plaque trouée soumise à la traction .....	13
Figure 9.2 Plaque percée d'un trou circulaire soumise à une sollicitation de traction simple	14
Figure 10.2 Phénomène de concentration de contraintes dans une plaque trouée .....	14
Figure 11.2 Une plaque trouée soumise à la traction .....	15
Figure 12.2 Courbe théorique donnant le coefficient de concentration de contrainte en fonction du rapport d/h .....	17
Figure 13.2 La solution obtenue par la simulation par logiciel COMSOL Multiphysics .....	17
Figure 14.2 Courbe de repense (contrainte – déformation) .....	19
Figure 15.2 Limite d'élasticité.....	20
Figure 16.2 Essai de traction .....	21
Figure 17.2 Modélisation du comportement élasto-plastique .....	23
Figure 18.2 Essai de traction Pour acier charges – décharge .....	24
Figure 19.2 Evolution de la limite.....	24
Figure 20.2 a) écrouissage isotrope,        b) écrouissage cinématique .....	25
Figure 21.2 Courbe expérimentale d'un matériau écrouissable.....	26
Figure 22.2 Courbe de résultants expérimentaux de l'essai Traction-Compression à 900C° ..	26
Figure 23.3 Modèle géométrique de la plaque de Kirsch, en utilisant la symétrie .....	28
Figure 24.3 Modélisation de la géométrie.....	29
Figure 25.3 Le maillage .....	31
Figure 26.3 Diagramme de contrainte.....	32
Figure 27.3 Le résultat obtenu de la simulation .....	33
Figure 28.3 Plaque trouée soumise à la traction.....	33
Figure 29.3 Modélisation de la géométrie d'une plaque élasto-plastique .....	35
Figure 30.3 Génération de maillage .....	37
Figure 31.3 La région plastifiée .....	38

## Liste des tableaux

Tableau 1.3 Plan de symétrie .....	29
Tableau 2.3 la charge .....	30
Tableau 3.3 Les propriétés du matériau de la plaque.....	30
Tableau 4.3 Plan de symétrie .....	35
Tableau 5.3 Le chargement .....	36
Tableau 6.3 Les propriétés du matériau d'une plaque élasto-plastique.....	36



## Notation

$(\sigma_{ij})$  : Le tenseur de contrainte

$(\varepsilon_{ij})$  : Le tenseur de déformation

U : le champ de déplacement

E : Le module de Young

$\nu$  : Le coefficient de poisson

$K_T$  : Coefficient théorique de concentration de contraintes

W : la largeur de la plaque

L : la longueur de la plaque

e : l'épaisseur de la plaque

$\sigma_x$  : la contrainte normale

$\sigma_{max}$  : La contrainte maximale

$\sigma_{nom}$  : La contrainte nominale

d : Le diamètre de trou

$\rho$  : Le rayon de courbure de l'entaille.

$\Delta L$  : Allongement de la plaque

$\sigma_0$  : La limite d'élasticité "vraie" ou limite de proportionnalité;

$\sigma_{0.2}$  : La limite d'élasticité conventionnelle

$\sigma_B$  : La nouvelle limite d'élasticité apparaît après la décharge poste-élastique

$\varepsilon^e$  : La déformation élastique

$\varepsilon^p$  : La déformation plastique

$E^{ep}$  : Le module élasto-plastique

P: la charge appliquée sur la plaque

# **Introduction générale**

## **Introduction générale :**

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception mécanique d'un composant ou d'un organe mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou d'une structure avec la présence d'une entaille après l'usinage par exemple. En 1898, G. Karsh a été le premier à mettre en évidence le phénomène de concentration de contraintes, cela été pour un problème de détermination des contraintes autour d'un trou. Par la suite des solutions analytiques ont été progressivement trouvées et proposés par différents auteurs pour des structures qui présentent des géométries de plus en plus complexes.

De nos jours des méthodes de calcul et principalement la méthode des éléments finis continuent à être utilisés pour calculer les coefficients de concentration des contraintes dans des cas pratiques pour différents configurations de structures présentant des singularités. L'emploi de logiciel spécifique basé sur cette méthode (méthode des éléments finis) utilisant des techniques modernes telles que la génération de maillage automatique et son raffinement ont permis des améliorations considérables dans les précisions de ces calculs. Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude d'une plaque trouée soumise à un chargement de traction par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel COMSOL Multiphysics.

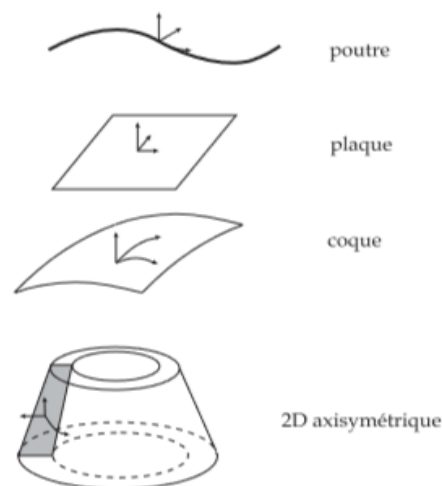
Il est divisé en trois chapitres: Le premier chapitre est consacré aux généralités: on s'intéresse à la présentation de la définition des structures en mécanique et les généralités sur les plaques et la méthode des éléments finis .Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude théorique sur l'élasticité et l'élastoplasticité. Le troisième chapitre concerne à la simulation numérique d'une plaque trouée par logiciel COMSOL Multiphysics. A la fin on se termine avec une conclusion générale.

# **Chapitre 1 : Généralités**

## 1.1 Structures mécanique et résistance des matériaux

### 1.1.1 Définition d'une structure en mécanique

La mécanique des structures se définit comme la mécanique des solides de dimensions finies où une des dimensions au moins est faible devant les autres. La mécanique des structures couvre donc un grand nombre de géométries dont les plus courantes sont les poutres (1D), les plaques et coques (2D), et les solides axisymétriques (2D) (figure 1.1). En observant la géométrie des structures étudiées, des hypothèses peuvent être faites quant à la cinématique qui prévaut dans ces solides. Toute la difficulté de ce type d'approche réside dans le choix judicieux de cette cinématique qui doit être suffisamment riche pour observer tous les phénomènes rencontrés durant l'utilisation des structures considérées, mais assez simple pour permettre des résolutions analytiques. On peut remarquer que ces structures sont également utilisées dans les simulations numériques, telles que les simulations par éléments finis par exemple. Dans ce cas, comme lors de la résolution analytique d'ailleurs, les temps de calcul nécessaires à la résolution d'un problème sont amplement plus faibles que si le même problème était traité avec une approche de type mécanique des milieux continus.



**Figure 1.1** Type de structures

### 1.1.2 Résistance des matériaux

La résistance des matériaux est un cadre restreint, mais utilisable pour la plupart des applications courantes, pour traiter des problèmes de mécanique des structures. Principalement, les hypothèses simplificatrices de la RdM portent sur des conditions de réversibilité et de linéarité. Les études en RdM sont conduites sous les hypothèses suivantes :

- Cadre de l'hypothèse des petits déplacements: petites déformations, petits déplacements (pas de flambage ou de striction par exemple),
- Les matériaux constitutifs sont élastiques linéaires isotropes,
- Les problèmes appartiennent au domaine de la statique, ou sont supposés quasi-statiques,
- Principe de Saint-Venant : loin de son point d'application, une sollicitation extérieure peut être remplacée par son torseur équivalent,
- Principe de superposition : quel que soit l'ordre d'application des efforts extérieurs sur un solide, l'état final est invariant [1].

## 1.2 Généralités sur les plaques

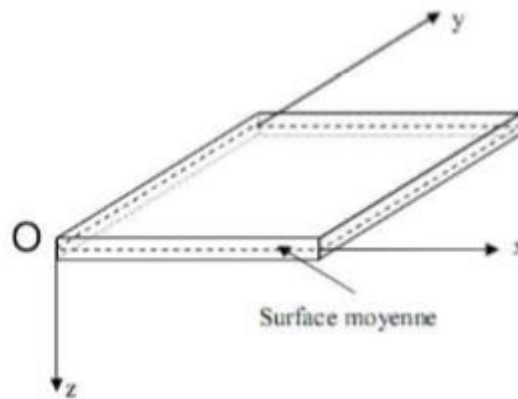
### 1.2.1 Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous-marine, aérospatiale, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,...), etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle [2].

### 1.2.2 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan  $x y$ ) et par une petite épaisseur (notée  $h(x, y)$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une

analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane [2].



**Figure 2.1** Une plaque d'épaisseur  $h$

### 1.2.3 Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories :

- Les plaques isotropes: elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques ( $E$  et  $\nu$  : respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...)
- Les plaques orthotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aeronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art. [3]
- Les plaques anisotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale

### 1.2.4 Domaines d'utilisation des plaques

L'utilisation des plaques est très répandues et couvre presque tous les domaines techniques et technologiques et en particulier dans la construction des édifices et des ouvrages d'art en génie civil. On utilise aussi les plaques dans l'industrie automobile, aéronautique et aérospatiale (figure3.1). Les plaques existent sous différentes formes et géométrie, rectangulaires, circulaires y compris des formes complexes. [4]



constructions civiles



ouvrages d'arts (plaques circulaire)



aéronautique



industrie automobile

**Figure 3.1** Domaine d'utilisation des plaques

## 1.3 La méthode des éléments finis

### 1.3.1 Introduction

L'analyse numérique des plaques se fait par différences finis, éléments finis ou éléments de frontières. Les avantages et potentialité de la méthode des éléments finis sont tels que les autres méthodes sont peu utilisées, sauf dans certains cas particuliers. La méthode des éléments finis est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier des structures continues ayant des propriétés géométriques et des conditions de charges appliquées. Donc, elle est bien adaptée à l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces, puisqu'elle seule aujourd'hui est



capable de résoudre ce type de problème. Elle est donc l'auxiliaire le plus précieux pour l'ingénieur [3].

### 1.3.2 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions : structures planes, solides élastiques, plaques minces, membranes et coques [5].

### 1.3.3 La méthode des éléments finis

Est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles : la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps (figure 4.1) La modélisation. La discrétisation ensuite et portent sur les deux aspects principaux du problème pratique [6].

- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites.
- Choix des éléments finis et du maillage.

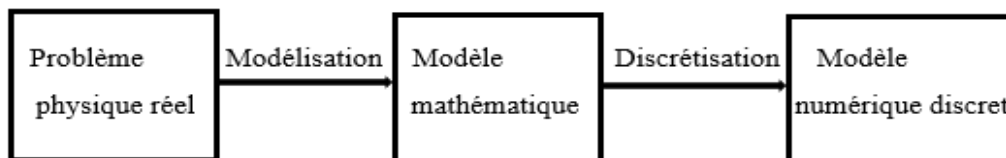


Figure 4.1 Etape de l'analyse d'un problème aux limites

### 1.3.4 Concept de la méthode des éléments finis

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments [7].

### 1.3.5 Caractéristique d'un élément fini

- **Attributs d'un élément fini :**

Un découpage, artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu, en éléments finis permet, d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, un triangle ou un quadrilatère (plan ou courbe), un tétraèdre, un prisme ou hexaèdre (brique). Les frontières entre éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbes, des faces planes ou courbes.

- **Matériau**: le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope, etc.)

- **Nœuds**: les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces, etc. on y choisit et définit les degrés de liberté du problème.

- **Degrés de liberté**: la fonction d'approximation choisie (en général le champ des déplacements) est exprimé en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout veillant à respecter certains règles, dites critère de convergence.

- **Forces nodales**: à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...). Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini que sont sa matrice de rigidité et son vecteur force [3].

### 1.3.6 Les étapes de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées, destiné à résoudre les équations différentielles.

Les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes ; on peut les résumer en dix étapes :

1. Définition de la géométrie de la structure étudiée.
2. Maillage de la structure (discrétisation en éléments).
3. Définition du modèle associé à la structure.
4. Choix des paramètres du modèle.
5. Construction de la matrice de raideur globale par assemblage des matrices de raideur locales des éléments en fonction de la table de connectivité.
6. Construction du vecteur effort global par assemblage des vecteurs d'effort locaux suivant la table de connectivité.
7. Prise en compte des conditions aux limites.
8. Prise en compte du chargement.
9. Résolution du système pour obtenir les déplacements nodaux des éléments.
10. Traitement du résultat (calcul des déformations, calcul des contraintes) [**6 - 8**].

**Chapitre 2 :**  
**Théorie sur l'élasticité et**  
**l'élastoplasticité**

## 2.1 Théorie d'élasticité

### 2.1.1 Introduction

La théorie de l'élasticité s'occupe, en fait, des mêmes questions que la résistance des matériaux mais d'un point de vue plus rigoureux. Elle s'intéresse, comme son nom l'indique, au comportement des éléments de structure dans le domaine élastique c'est-à-dire le domaine des déformations faibles et non permanentes, par opposition au domaine plastique qui fait l'objet de la théorie de la plasticité. Il y est fait abstraction, dans une large mesure, des hypothèses simplificatrices et des méthodes approchées. Aussi, y est-on souvent confrontés à un appareil mathématique complexe qui permet, certes, une analyse plus fine des phénomènes étudiés mais qui, en revanche, limite des possibilités d'utilisation pratique. Justement, dans le souci d'étendre le champ d'investigation aux domaines d'applications pratiques, est née la théorie appliquée de l'élasticité qui est une discipline qui accorde une plus large importance aux interprétations physiques des phénomènes que ne l'accorde la théorie mathématique de l'élasticité

### 2.1.2 Définition de l'élasticité

Elle est définie comme une discipline qui étudie avec rigueur les petites déformations élastiques linéaires des solides continus, homogènes, isotropes, à partir des forces connues et/ou des déplacements connus de certains points. Son principe consiste à isoler un volume élémentaire, et à étudier son équilibre [9].

### 2.1.3 Elasticité plan

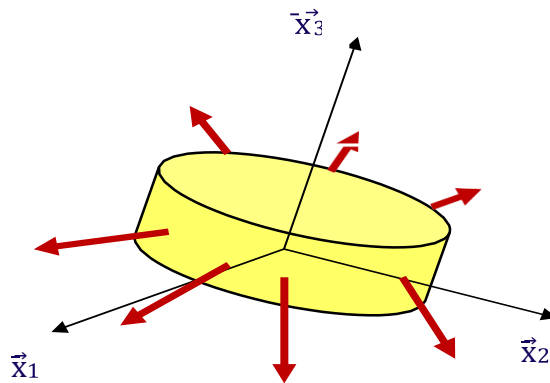
La recherche de solutions analytiques sur des corps de formes quelconques tridimensionnels soumis à des chargements quelconques est quasiment impossible. Pour des problèmes de dimensionnement, on peut fréquemment faire des études bidimensionnelles. Ces géométries sont plus faciles à traiter mathématiquement. En pratique il existe deux cas d'élasticité plane, l'état plan de contraintes planes et l'état de déformations planes. On va ainsi présenter les différents cas 2D : déformations planes, contraintes planes, en coordonnées cartésiennes et polaires. Les résultats développés concerneront principalement le problème étudié de concentration de contraintes dans une plaque trouée soumise à un champ de traction [10].

### 2.1.3.1 Contraintes planes

Un solide est en état de contraintes planes par rapport à un plan  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$  (figure 5.2), si en tout point (M) de ce solide, le tenseur de contraintes par rapport à un repère  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les composantes  $(\sigma_{11})$ ,  $(\sigma_{22})$  et  $(\sigma_{12})$  sont indépendantes de la direction  $(\vec{x}_3)$  qui représente une direction principale pour tous les points de ce solide.



**Figure 5.2 Etat des contraintes planes**

Le tenseur de déformation est de la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La loi de comportement qui permet de relier les contraintes aux déformations s'écrit en fonction du module de Young (E) et du coefficient de Poisson ( $\nu$ ):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

L'approximation des contraintes planes convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan (plaque sollicitée en traction) (figure 6.2).

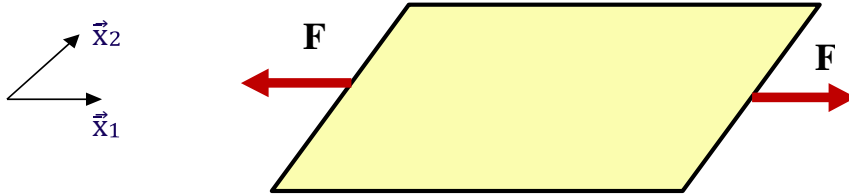


Figure 6.2 Plaque sollicitée en traction dans le plan  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$

2.1.3.2 Déformation planes

On dit qu'un solide est en état de déformations planes dans un plan  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , si en tout point (M) de se solide et par rapport à un repère  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} U_1 = U_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ U_2 = U_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ U_3 = 0 \end{cases}$$

Le tenseur de déformation est alors de la forme :

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En tout point de ce solide les déformations et les contraintes sont indépendantes de la direction  $(\vec{x}_3)$  et le tenseur de contrainte est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

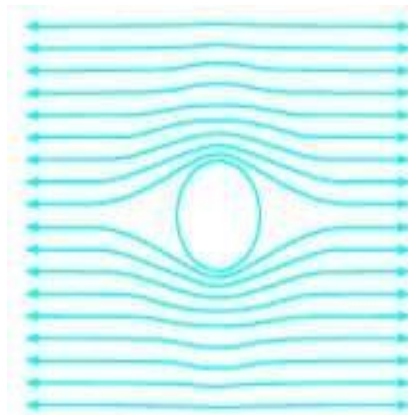
La loi de comportement qui permet de relier les contraintes aux déformations s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\mu & \nu & 0 \\ \nu & 1 + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

## 2.1.4 Principes de la concentration des contraintes dans une plaque trouée soumise à un champ de traction

### 2.1.4.1 Phénomène de concentration de contraintes

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception d'un organe mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Afin de bien illustrer ce phénomène, considérons le cas d'une plaque en présence d'un trou sous traction. En effet, sans la présence d'un trou, les lignes de contraintes sont homogènes. Après la réalisation d'un trou, on constate que ces lignes sont perturbées autour du trou et la densité augmente (figure 7.2).



**Figure 7.2** Illustration schématique montrant l'origine de la concentration de contrainte

### 2.1.4.2 Concentration de contrainte dans une plaque trouée en traction simple

La présence de trous, et plus généralement d'entailles, de congés ou de raccordement conduit à un affaiblissement des structures en raison de sur contraintes locales, appelées concentrations de contraintes. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le facteur de concentration de contrainte associé à chaque géométrie. Le cas courant de la traction d'une plaque percée d'un trou circulaire fait l'objet d'une analyse approfondie de notre étude menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, ayant un comportement élastique linéaire. Pour bien illustrer ce phénomène nous avons jugé utile de présenter par deux exemples types, le premier est celui d'une plaque solide 3D, trouée et soumise à un champ de contraintes de traction, le second est celui d'une plaque 2D de faible épaisseur, et cela dans le but de voir l'influence de la présence du trou dans les deux cas sur la concentration de contrainte autour de celui-ci [11].



### 2.1.4.3 Coefficient théorique de concentration de contraintes

Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée [10]. Le facteur de concentration de contrainte FCC noté  $K_T$  est défini comme étant le rapport de la contrainte maximale réelle dans la zone de discontinuité (Entaille, trou, par exemple) à la contrainte dans la section nette [11,12]. Dans l'expression du FCC ( $K_T$ ), l'indice « T » est employé pour indiquer que ce coefficient est théorique et que son calcul repose sur les hypothèses de la théorie de l'élasticité. Une expression mathématique a été proposée par Peterson [13] à la suite des travaux de Neuber, pour des formes de pièces simples, pour les cas de la sollicitation de traction :

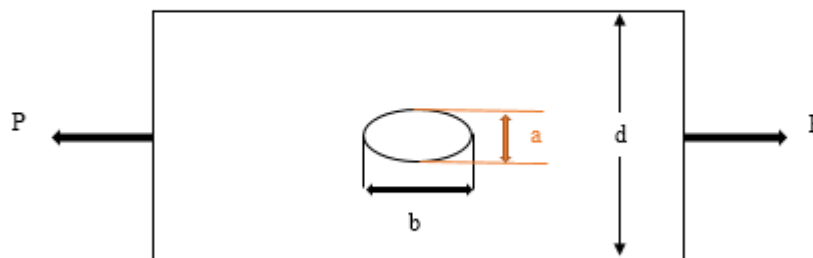


Figure 8.2 Une plaque trouée soumise à la traction

$$K_T = 1 + 2 \frac{a}{b}$$

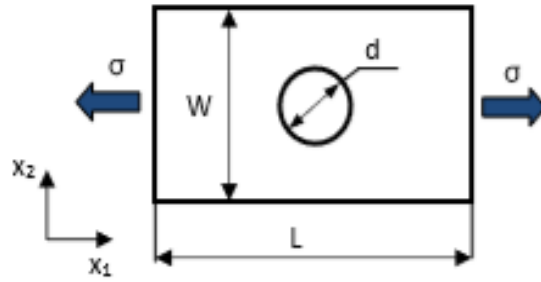
Si on introduit le rayon de courbure :  $K_T = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}$

$$\rho = \frac{b^2}{a}$$

a et  $b_2$ : longueur de l'entaille et  $\rho$ : le rayon de courbure de l'entaille. Dans le cas d'un trou circulaire, nous avons:  $a=b$ , d'où  $K_T = 3$

### 2.1.4.4 Formulations analytiques de Heywood et de Howland

Soit une plaque de longueur L, de largeur W et d'épaisseur e, percée d'un trou cylindrique à section circulaire de rayon (d/2) est soumise à ses extrémités à un état de traction simple. La géométrie et les données de ce problème sont illustrées par le schéma de la (figure 9.2).



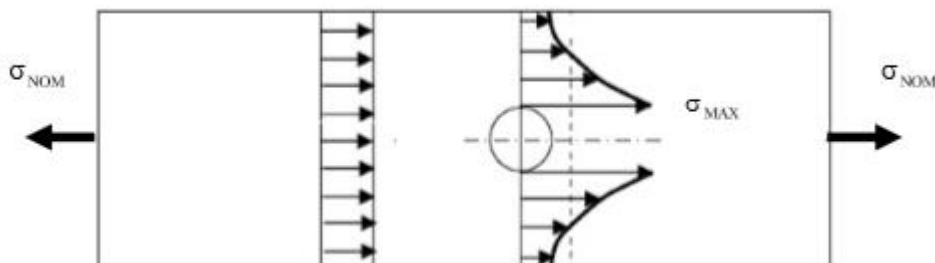
**Figure 9.2** Plaque percée d'un trou circulaire soumise à une sollicitation de traction simple

La longueur ( $L$ ) de la plaque est supposée suffisamment grande pour que l'état de contrainte loin du trou puisse être assimilé à un état homogène. Selon Peterson [13], le facteur de concentration de contrainte est défini comme étant le rapport de la contrainte maximale sous charges réelles dans la zone de la singularité (trou, entaille) à la contrainte nominale dans la section (figure 10.2):

$$K_T = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

$\sigma_{\max}$  : Peut être directement évaluée par la méthode des éléments finis ou par des approches analytiques dans le cas de géométries simples. Elle peut également être estimée en utilisant des méthodes expérimentales telles que la photo élasticité ou la corrélation d'images numériques.

$\sigma_{\text{nom}}$  : Est calculable à l'aide des formules de résistance des matériaux.



**Figure 10.2** Phénomène de concentration de contraintes dans une plaque trouée

## 2.1.5 Problème d'une plaque trouée soumise à un champ de contraintes de traction

### 2.1.5.1 Etude analytique

Soit la plaque trouée montrée dans la figure ci-dessous (figure 11.2), on se propose de calculer :

- la contrainte nominale  $\sigma_{\text{nom}}$
- le facteur de concentration de contrainte  $K_T$
- la contrainte maximale  $\sigma_{\text{max}}$

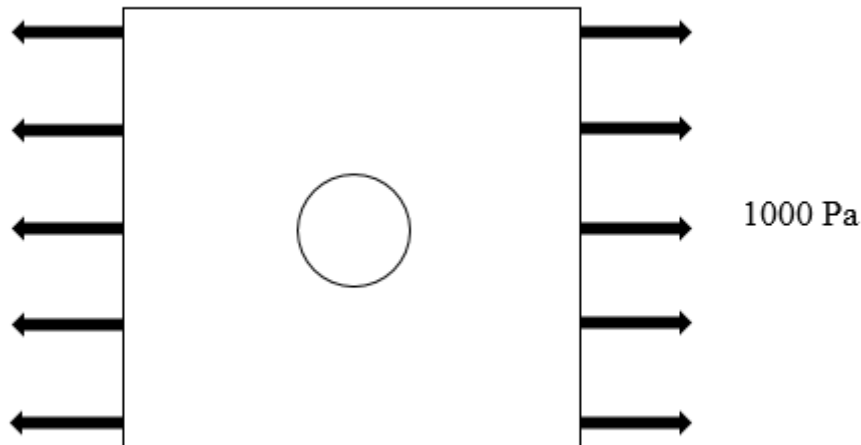


Figure 11.2 Une plaque trouée soumise à la traction

La largeur de la plaque  $h=2\text{m}$

Le diamètre de trou  $d=0.2\text{m}$

L'épaisseur de la plaque  $e=0.2\text{m}$

- Calcul la force :

$$\sigma_1 = \frac{P}{S_1} \Rightarrow P = \sigma_1 * S_1$$

$$\sigma_1 = 1000 \text{ Pa}, \quad S_1 = h * e = 2 * 0.2 = 0.4 \text{ m}^2$$

On trouve :  $P=400 \text{ N}$

- Calcul analytique la contrainte dans la section qui passe par le centre du trou :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{S_2}$$

$$S_2 = (h-d) * e = (2-0.2)*0.2=0.36 \text{ m}^2$$

On trouve :  $\sigma_{\text{nom}} = 1111.11 \text{ Pa}$

- Calcul de la contrainte maximale  $\sigma_{\text{max}}$  :

$$\sigma_{\text{max}} = K_T * \sigma_{\text{nom}}$$

$K_T$  : Coefficient de concentration de contrainte.

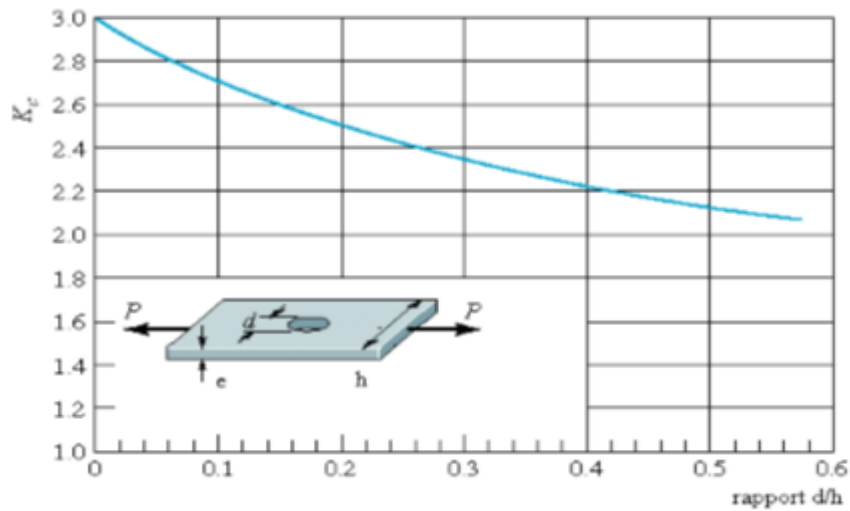
La valeur du coefficient de concentration de contrainte  $K_T$  est déterminée à partir d'abaque.

Pour notre cas d'étude :

$$\frac{d}{h} = 0.1$$

On peut déduire à partir de l'abaque de la figure (12.2), que  $K_T = 2.73$  ce qui conduit à :

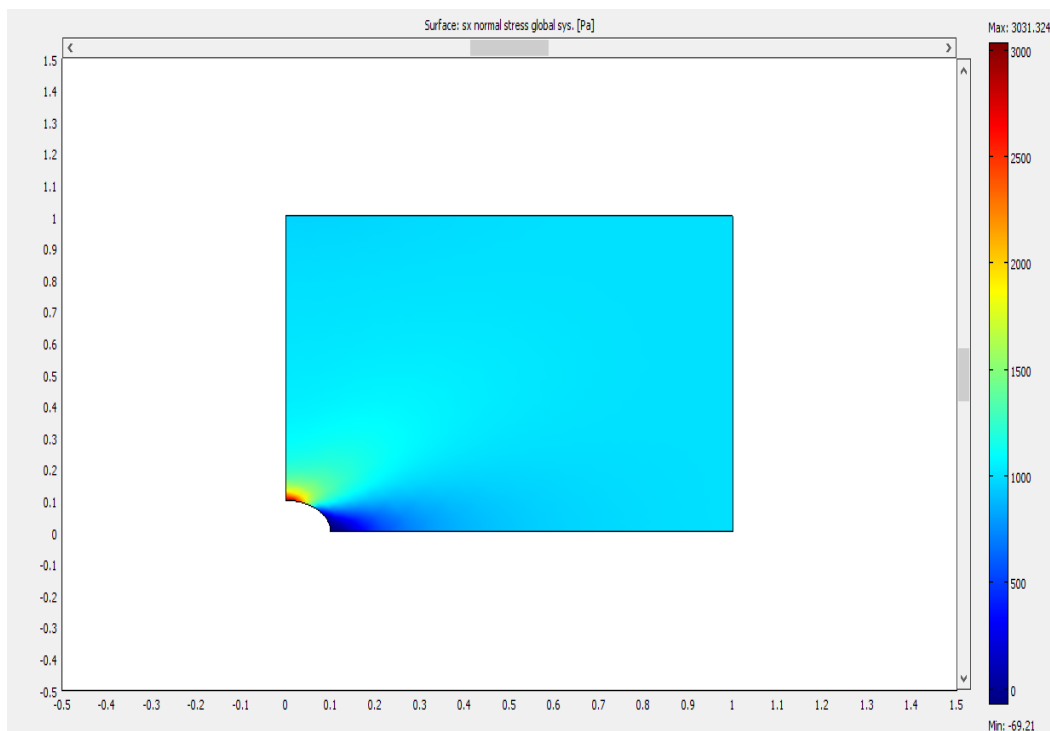
$$\sigma_{\text{max}} = 3033 \text{ Pa}$$



**Figure 12.2** Courbe théorique donnant le coefficient de concentration de contrainte en fonction du rapport  $d/h$

### 2.1.5.2 Etude numérique

Pour valider les résultats obtenus analytiquement, nous avons élaboré pour ce cas de figure (plaque 2D trouée soumise à un champ de contraintes de traction), une étude numérique basée sur des simulations numériques utilisant logiciel COMSOL Multiphysics. Cette étude a permis de trouver les résultats suivants :



**Figure 13.2** La solution obtenue par la simulation par logiciel COMSOL Multiphysics

La contrainte maximale dans la section passant par le trou :

$$\sigma_{\max} = 3031.324 \text{ Pa}$$

On conclue que les résultats obtenus sont en parfaite concordance avec les résultats fournis par l'étude analytique.

## 2.2 Elastoplasticité

### 2.2.1 Introduction

#### 2.2.1.1 Loi de comportement élasto-plastique

L'étude du comportement d'un corps solide est souvent basée sur la variation d'une grandeur mécanique  $Q$  (force, couple, pression, ...etc.) appliquée à ce corps en fonction d'une grandeur géométrique  $q$  (déplacement, rotation, variation de volume, ...etc.) à température constante. Cette étude permet de mettre en évidence les caractéristiques physiques intrinsèques du matériau. L'association des lois de conservation à des lois physiques traduisant le comportement des matériaux dans le cadre de la mécanique des milieux continus, produira les lois de comportement [14].

#### 2.2.1.2 Loi de comportement

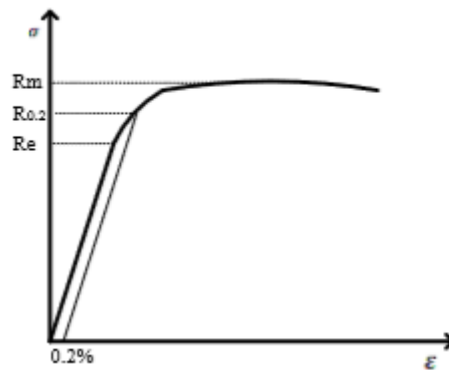
En principe, les lois de comportement peuvent se déduire de la connaissance de la distribution détaillée des particules et des interactions entre ces particules au sein d'un matériau donné, par une démarche de thermomécanique statistique. C'est ainsi que la loi des gaz parfaits et les lois d'élasticité des solides en petites déformations se déduisent de la mécanique statistique ou des potentiels d'interaction entre molécules. Dans la majorité des cas toutefois, cette démarche déductive se révèle inextricable et ne donne pas lieu à des lois de comportement explicites simples. On pourra toutefois les approcher par une démarche phénoménologique consistant à corréler contraintes aux déformations à partir de résultats expérimentaux suffisamment nombreux. C'est l'approche la plus efficace en sciences de l'ingénieur [14].

### 2.2.2 Essai de traction

L'essai de traction est le test le plus couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau, et donc établir sa "loi de comportement". Cet essai consiste le plus souvent à soumettre une plaque à un allongement  $\Delta L$  par déplacement relatif de ses extrémités,

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique.

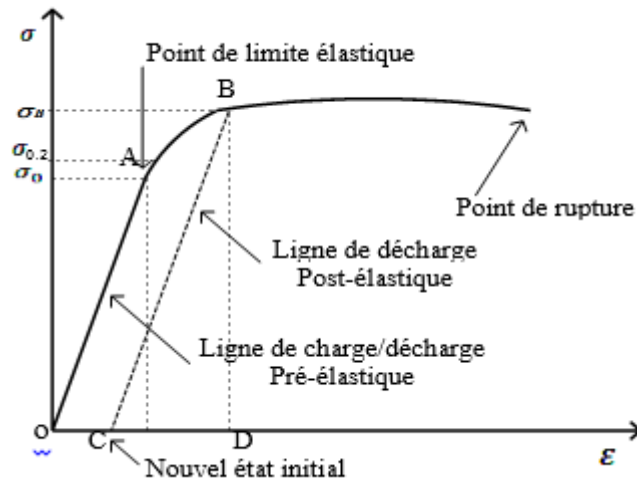
Les courbes obtenues à l'aide de cet essai ont typiquement l'allure de la figure (14.2) Le comportement fait apparaître une partie linéaire (élasticité) suivie d'une partie non linéaire. Le changement de la courbe de charge peut présenter un palier horizontal. Comme pour l'acier doux ou le cuivre à température ambiante, comme il peut être sans palier, le cas du cuivre recuit, de l'aluminium et des aciers hautement alliés [14].



**Figure 14.2 Courbe de repense (contrainte – déformation)**

### 2.2.3 Limite d'élasticité ou seuil d'écoulement

L'expérience montre qu'un grand nombre de matériaux solides présentent un comportement élastique (et donc en particulier réversible, l'échantillon revenant dans son état initial après un cycle charge -décharge). La limite d'élasticité (ou de proportionnalité) est la contrainte au-dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles. Le point correspondant à  $R_e$  figure (14.2) caractérisé par un changement net de la courbe de charge ( $F, \Delta L$ ) est difficile à situer. Si on charge de O en passant de A jusqu'au B, Puis on décharge en B (figure 15.2) lorsqu'on charge à partir de C, on aura une nouvelle limite d'élasticité  $B \sigma$  plus nette. (Augmentation ou diminution) de l'amplitude de la contrainte. Il y a alors (durcissement ou adoucissement) du matériau [14].



**Figure 15.2 Limite d'élasticité**

Sur la figure (15.2) on distingue les contraintes suivantes :

$\sigma_0$  : La limite d'élasticité "vraie", ou limite de proportionnalité.

$\sigma_{0.2}$ : La limite d'élasticité conventionnelle (apparente), correspond à une déformation inélastique de 0,2%, cette valeur classique étant relativement élevée, on utilise parfois  $\sigma_{0.02}$ .

$\sigma_B$  : La nouvelle limite d'élasticité apparaît après la décharge poste-élastique.

On distingue aussi les tronçons suivants :

OC : déformation plastique " permanente "

CD : déformation élastique " réversible "

OD : déformation total.

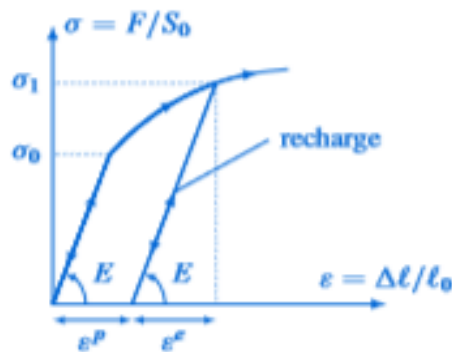
Lorsque la limite d'élasticité est atteinte, il est possible de poursuivre une augmentation de chargement, le matériau se déformant alors plastiquement. En général, la valeur de la contrainte à un instant donné dépend de toutes les déformations subies auparavant par le matériau, de la vitesse et de l'ordre dans lequel ces déformations se sont produites, ainsi que de nombreux autres paramètres physiques tels que l'histoire des températures. Il existe une multitude de lois de comportement permettant de décrire, totalement partiellement, la variété des matériaux qu'ils soient issus de la nature ou de l'industrie, elles ne suffisent cependant pas à déterminer complètement la loi de comportement d'un matériau. Notre étude se limite au comportement élasto-Plastique classique.



### 2.2.4 Comportement élastoplastique uniaxial (l'essai de traction)

L'essai de traction consiste à tirer sur une plaque, et permet d'extraire la courbe contrainte-déformation unidimensionnelle du matériau illustrée sur la figure (16.2). On observe au cours d'un chargement monotone croissant que la courbe présente deux phases :

**Première phase** Elle est définie par  $\sigma < \sigma_0$ . La relation entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  est linéaire. Si le chargement n'a pas dépassé la limite de contrainte  $\sigma_0$ , la décharge repassera par le même chemin :



**Figure 16.2 Essai de traction**

Il y a réversibilité; c'est la définition de l'élasticité. La relation de comportement s'écrit alors :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Où  $E$  est le module d'Young, identifié comme la pente de la droite.

**Seconde phase** Elle est caractérisée par  $\sigma > \sigma_0$ . Le matériau gagne le domaine plastique. Pour observer l'irréversibilité liée au comportement plastique, il est nécessaire d'effectuer une décharge de l'éprouvette. La décharge effectuée à partir d'une contrainte  $\sigma_1$  supérieure à la limite d'élasticité initiale  $\sigma_0$  ne se fait pas suivant la courbe de charge mais suivant une droite de pente  $E$  : c'est de nouveau un comportement élastique et réversible. On identifie donc une partition additive de la déformation uniaxiale en parties élastique et plastique :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

Où  $\varepsilon^e$  est la déformation élastique, réversible (récupérable à la décharge), liée à la contrainte au travers de la loi d'élasticité ( $\sigma = E\varepsilon^e$ ) et où  $\varepsilon^p$  est la déformation plastique, irréversible ou résiduelle.

On observe qu'il n'existe plus de relation biunivoque entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  dû à l'irréversibilité de la déformation plastique et donc  $\sigma = f(\varepsilon)$ . Ce type de relation doit être remplacé par une loi de type «taux» traduisant les effets d'histoire associés à l'irréversibilité de la déformation plastique :

$$\dot{\varepsilon}^P = f(\sigma)$$

Plus exactement, comme le temps intervenant ici n'est qu'un temps cinématique, on peut réécrire cette même équation sous forme incrémentale  $d\varepsilon^P = f(\sigma)$  où  $d\varepsilon^P$  est un incrément élémentaire de déformation plastique [15].

### 2.2.5 Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale

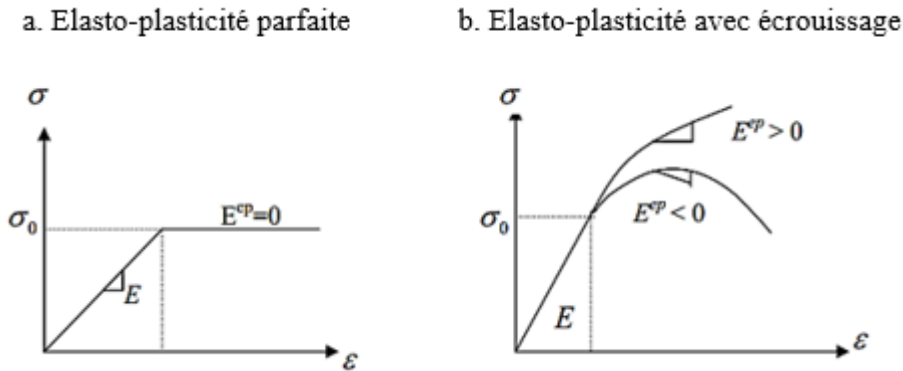
Dans un essai uniaxial, traction simple par exemple, seule  $\sigma_1$  est non nulle. Les différents phénomènes observés en pratique (figure 14.2) sont pris en compte en définissant trois notions importantes [16]:

- Critère de limite élastique ou d'épuisement : Donnant des contraintes au début de l'écoulement plastique.
- Règle d'écrouissage : Décivant comment évolue la condition (critère) d'épuisement pendant l'écoulement plastique.
- Règle d'écoulement : Liant l'incrément des déformations plastiques aux contraintes.

#### 2.2.5.1 Modélisation du comportement élasto-plastique

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-Plastique parfaite (sans effet Bauschinger, figure (17.2.a), soit par celle avec écrouissage (linéaire ou non) et donc un module élasto-Plastique tangent  $E^{ep}$  linéaire ou non (figure (17.2.b)). Ce dernier cas est plus général : Donc si  $E^{ep} = 0$  c'est le cas de l'élasto-plasticité parfaite, si  $E^{ep} > 0$  c'est le durcissement

(Écrouissage positif) et si  $E^{ep} < 0$  c'est l'adoucissement (écrouissage négatif) [17].



**Figure 17.2 Modélisation du comportement élasto-plastique**

### 2.2.5.2 Critère d'épuisement

Le critère d'épuisement est atteint quand  $|\sigma|$  atteint  $\sigma_y$ . On utilise les valeurs absolues pour accommoder la compression ou la traction ou les deux à la fois (charge inversée) [16].

$\sigma_y$  : est la limite élastique initiale et est considérée positive.

$\sigma$  : est la contrainte courante comptée algébriquement.

Le critère s'exprime par :

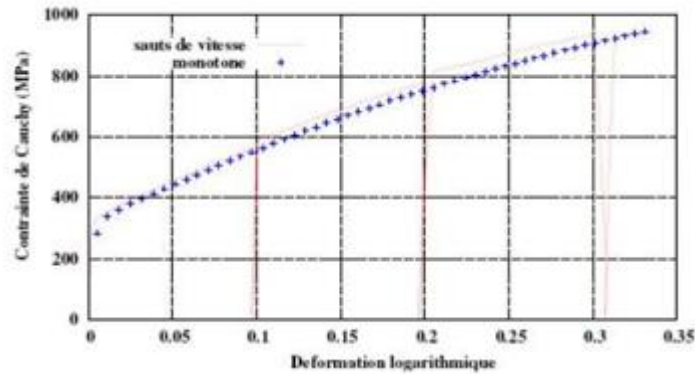
$$|\sigma| - \sigma_y = F(\sigma, \sigma_y) = 0$$

### 2.2.5.3 Phénomène d'écrouissage

Le problème de l'évolution du domaine d'élasticité est une des difficultés majeures de la plasticité, Lorsqu'on effectue une série de charges-décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure (18.2). Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage. Au cours du mouvement au-delà du seuil de plasticité (d'écoulement) résulte un durcissement du matériau par écrouissage (source de Frank-Read), Le cycle décharge charge n'est plus parfaitement élastique, Mais par simplification nous pouvons considérer que :

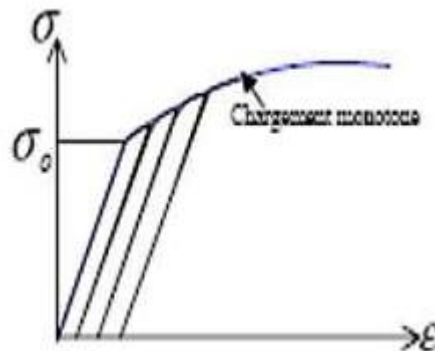
Lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone;

L'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité [14].



**Figure 18.2 Essai de traction Pour acier charges – décharge**

Ces deux approximations figure (19.2) nous amènent à penser, que connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écrouissage obtenue pour un chargement monotone. Ce phénomène de plasticité engendre les différents mécanismes d'écrouissage notamment les écrouissages cinématique et isotrope.



**Figure 19.2 Evolution de la limite**

### 2.2.5.3.1 Ecrouissage isotrope

Supposant que les conditions d'épuisement en traction et en compression s'effectuent de la même manière, La figure (20.2, a) représente l'historique d'un cycle de chargement qui suit le trajet : OA-AB-BC. Après décharge nous obtenons le point O', la déformation plastique est définie par OO'. On inverse la charge à partir du point O' l'écoulement plastique commencera au point B de contrainte  $\sigma_B = -\sigma_A$  (La limite d'élasticité en compression augmente comme celle de traction). Dans ce cas la marge élastique  $2\sigma_y$  subit une expansion isotrope symétrique de centre O fixe, en plus l'isotropie est toujours conservée [14].

### 2.2.5.3.2 Ecouissage cinématique

L'effet BAUSCHINGER est la principale manifestation de l'écrouissage cinématique. Il se traduit par un abaissement de la limite d'élasticité en compression après une sollicitation préalable en traction et vice-versa. Sur la figure (20.2, b) lorsqu'on inverse la charge à partir du point O' l'écoulement plastique commencera au point B de contrainte  $\sigma_B = \sigma_A - \alpha$

Cela veut dire que la marge élastique de  $2\sigma_y$  garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance  $\alpha = \sigma_0 - \sigma_A$  [14].

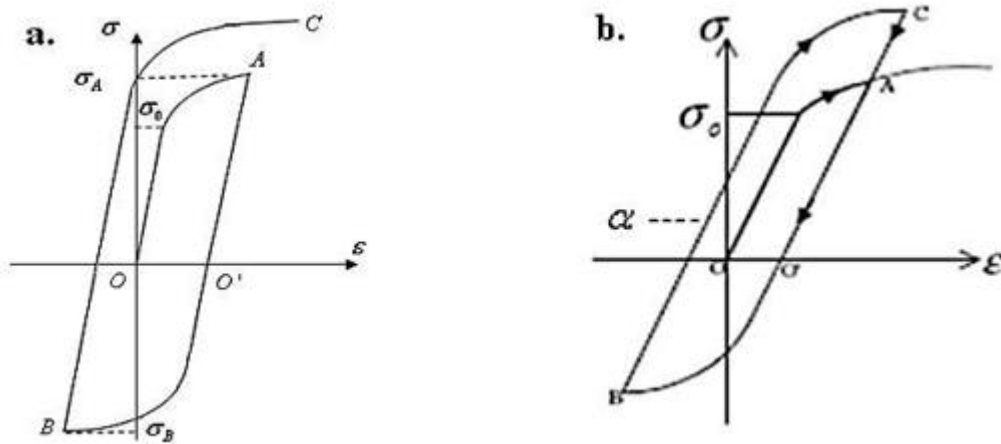


Figure 20.2 a) écouissage isotrope, b) écouissage cinématique

### 2.2.5.3.3 Ecouissage mixte

L'effet de BAUSCHINGER est complètement ignoré dans l'écrouissage isotrope, et maximal dans l'écrouissage cinématique. Cela est en contradiction avec les observations expérimentales.

L'écrouissage mixte est une combinaison des deux, la marge élastique subit une expansion et une transformation au même temps. La figure (21.2) présente la courbe d'un essai de traction-compression sur un acier inoxydable à température ambiante, où l'effet de BAUSCHINGER est remarquable, comme on peut remarquer que la forme de la courbe de décharge n'est pas toujours linéaire, mais peut être de forme hystérésis figure (22.2), les deux essais sont relatifs à un acier inoxydable [14].

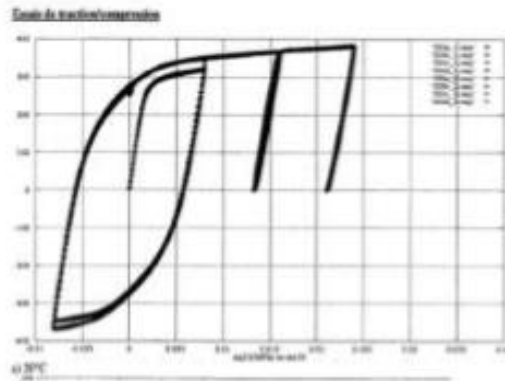


Figure 21.2 Courbe expérimentale d'un matériau écrouissable

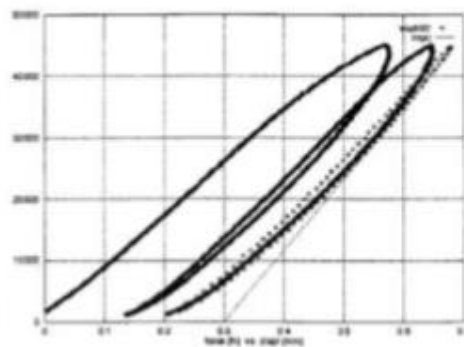


Figure 22.2 Courbe de résultants expérimentaux de l'essai Traction-Compression à 900C°

2.2.5.4 Règle de chargement [16]

Plastification F, les règles de charge et décharge sont :

$$\text{Si } \begin{cases} F < 0 : \text{domaine élastique} \\ F = 0 : \text{plastification} \\ F > 0 \text{ impossible} \end{cases}$$

Quand  $F = 0$ , il y a chargement si  $dF > 0$  et déchargement si  $dF < 0$

# **Chapitre 3**

## **Simulation numérique**

### 3.1 Problème de la plaque infinie de kirsch

#### 3.1.1 Introduction

La résolution analytique de problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, cependant les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ses problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre des problèmes complexes. La méthode des éléments finis est de toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rende facile à la mise en œuvre. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de nature différente. De nombreux logiciels basés sur cette méthode, généraux ou dédiés sont disponibles sur le marché. Nous consacrons le présent chapitre à des simulations numériques à l'aide de logiciel de calcul COMSOL Multiphysics pour étudier et déterminer la concentration de contrainte dans une plaque trouée soumise à un champ de traction uniforme.

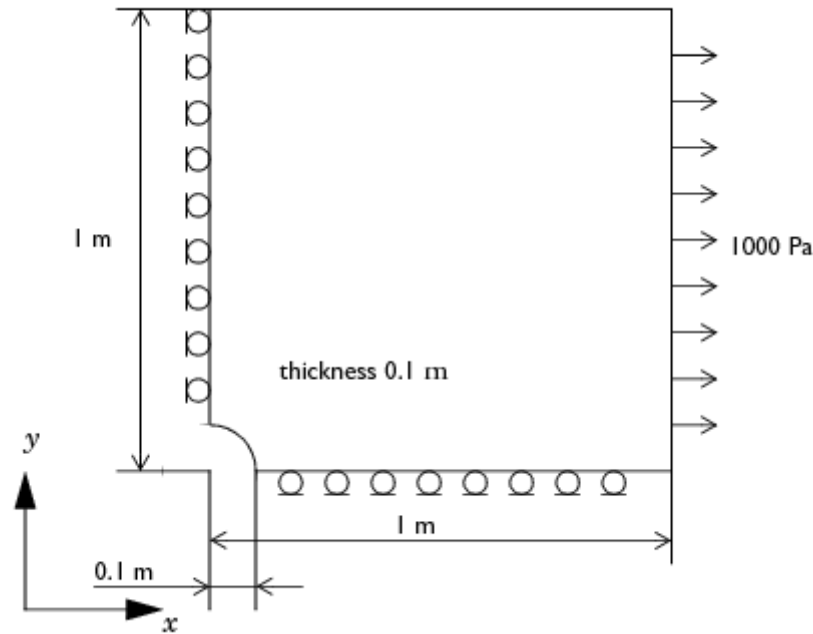
#### 3.1.2 Problème de la plaque infinie de kirsch

Dans l'exemple suivant, nous construisons et résolvons un modèle en utilisant le mode d'application Contraintes planes. Ce modèle décrit l'analyse des contraintes statiques d'une géométrie simple avec un petit trou dans une plaque infinie. Le modèle est un problème classique, et la solution théorique a été dérivé par G. Kirsch en 1898 .Le niveau de contrainte est comparé aux valeurs théoriques.

#### 3.1.3 Définition du modèle

Le modèle est la plaque de Kirsch, une plaque infinie est modélisée comme une plaque de 2 m par 2 m avec un trou de 0,1 m de rayon au milieu. En raison de la symétrie, de la charge et de la géométrie, seul un quart de la plaque est modélisé.





**Figure 23.3** Modèle géométrique de la plaque de Kirsch, en utilisant la symétrie

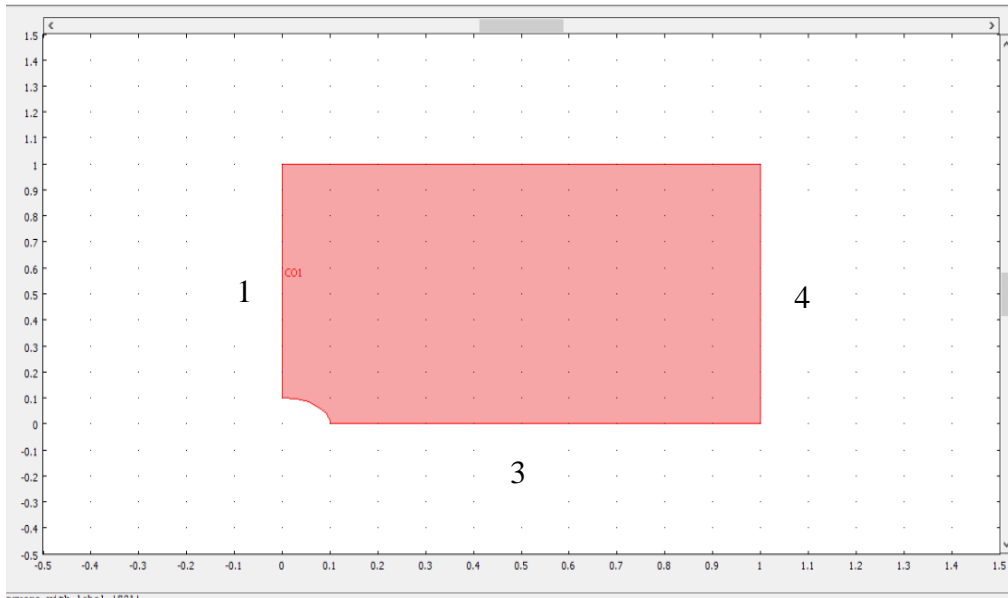
- 1) Choix des matériaux : matériaux isotrope avec  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu = 0.3$ .
- 2) Charges appliquées : Une force répartie de  $10^3$  Pa sur le bord droit, orientée dans la direction x.
- 3) Plans de symétrie :  $x = 0$ ,  $y = 0$ .
- 4) Sélectionnons 2D dans la liste des dimensions de l'espace
- 5) Nous sélectionnons Module Mécanique des structures > Contraintes planes > Analyse statique

### 3.1.4 Modélisation de la géométrie

1. Nous cliquons sur le bouton Rectangle/Carré de la barre d'outils et en cliquons sur le bouton gauche de la souris à (0, 0). Appuyons sur Ctrl tout en déplaçant la souris vers (1, 1) et en cliquons à nouveau sur le bouton gauche de la souris pour créer un carré.

2. Nous cliquons sur le bouton Ellipse/Cercle (centré) de la barre d'outils et en cliquons sur le bouton gauche de la souris à (0, 0), appuyons sur Ctrl tout en déplaçant la souris à (0,1, 0,1) et cliquons à nouveau sur le bouton gauche de la souris pour créer un cercle centré.

3. Sélectionnons le carré et le cercle et cliquons sur le bouton Différence de la barre d'outils pour découper un trou dans la plaque.



**Figure 24.3 Modélisation de la géométrie**

### 3.1.5 Paramètres physiques

#### 3.1.5.1 Paramètres des limites

Contraindre les bords de symétrie dans les directions x et y. On Spécifie la force distribuée sur le bord droit à  $10^3$  Pa dans la direction x.

- 1) Sélectionnons paramètres des limites dans le menu physique
- 2) On spécifie les paramètres des frontières conformément aux tableaux suivants ; lorsque nous avons terminé, cliquons sur OK.

	Frontières 1,3	
Page	contrainte	
	Condition de contrainte	Plan de symétrie

**Tableau 1.3 Plan de symétrie**

	Sous-domaine 1	
Page	Matériau	
	Mode de matériau	Isotrope
	E	2.1 e11
	$\nu$	0.3
	Epaisseur	0.1

**Tableau 3.3 Les propriétés du matériau de la plaque**

	Frontière 4	
Page	Chargement	
	Fx	1 e3
	Définition de chargement	Chargement sur arrête définie par force/surface tenant compte de l'épaisseur

**Tableau 2.3 la charge**

### 3.1.5.2 Paramètres de sous-domaine

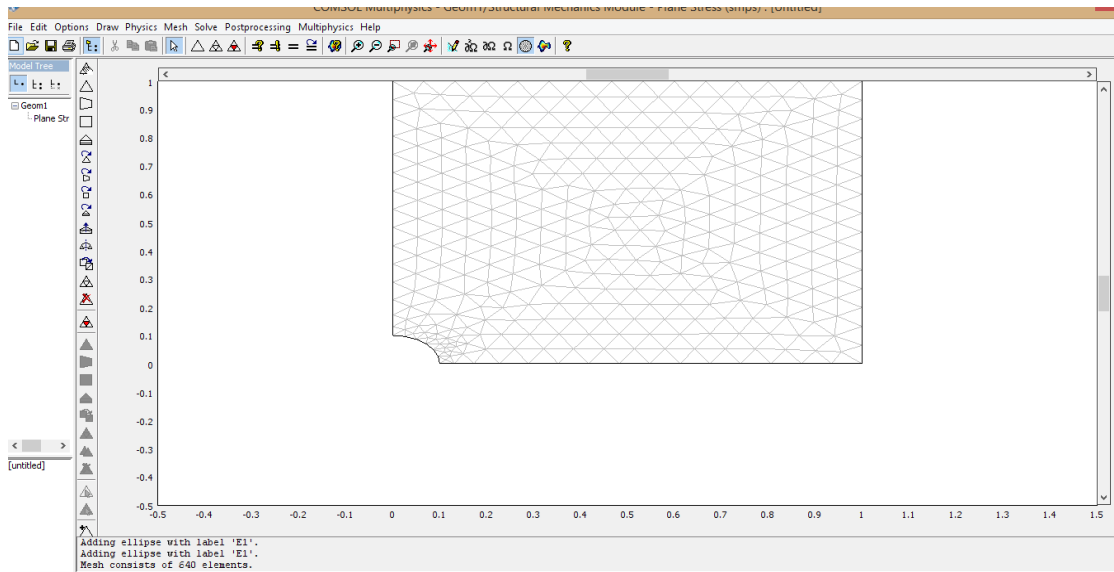
On spécifie les propriétés du matériau de la plaque

- 1) Sélectionnons paramètres du sous-domaine dans le menu physique.
- 2) On spécifie les paramètres de sous-domaine conformément au tableau suivant ; lorsque nous avons terminé, on clique sur OK.

### 3.1.6 Génération de maillage

Nous utilisons les paramètres de maillage par défaut.

On clique sur le bouton Initialiser le maillage de la barre d'outils principale pour créer le maillage.



**Figure 25.3 Le maillage**

### 3.1.7 Calcul de la solution

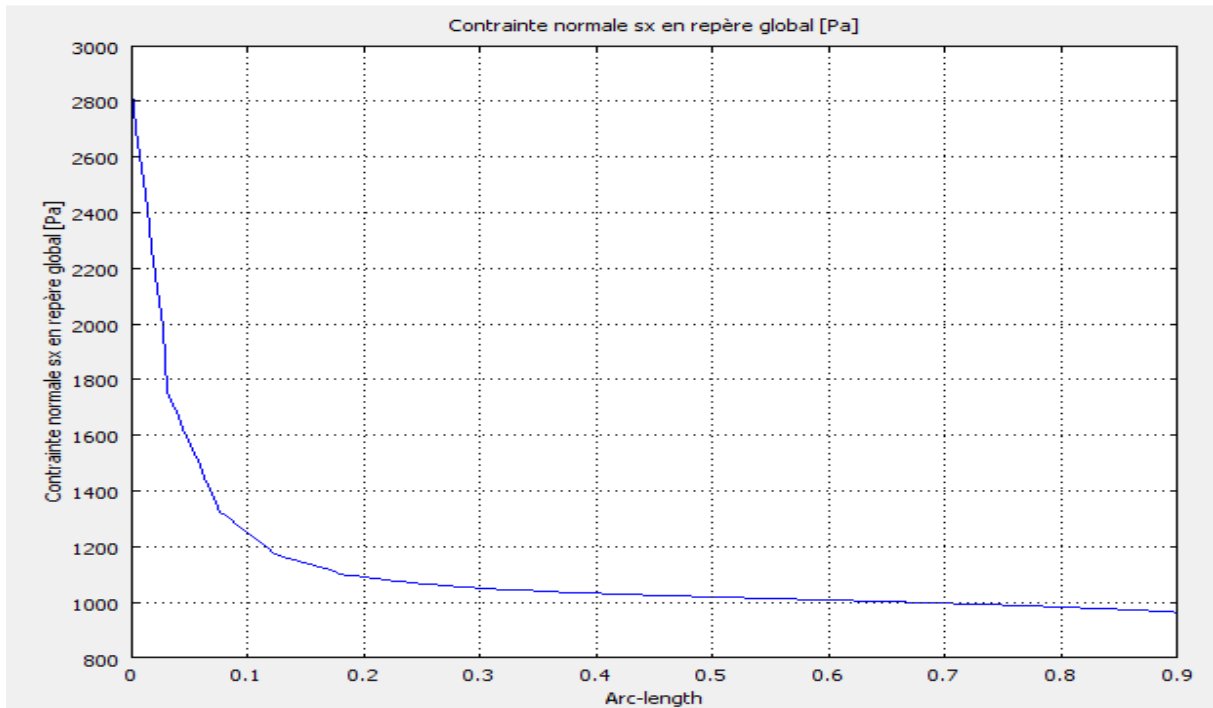
On clique sur le bouton résoudre de la barre d'outils principale pour calculer la solution.

### 3.1.8 Post-traitement et visualisation

Analysons la contrainte  $s_x$  globale le long de la ligne de symétrie  $x = 0$  entre les coordonnées  $y$  0,1 et 1,0 et comparons-la à la solution analytique pour la plaque infinie.

1. Sélectionnons Paramètres du tracé de la coupe transversale dans le menu Post-traitement.
2. On clique sur l'onglet Ligne/Extrusion.
3. Sélectionnons contrainte plane>contrainte normale  $s_x$  en repère globale sys. Dans la liste des quantités prédéfinies de la zone de données de l'axe des  $y$ .
4. On tape 0 et 0,1 dans les champs d'édition X0 et Y0.
5. On tape 0 et 1,0 dans les champs d'édition X1 et Y1.

6. On clique sur appliquer pour visualiser la contrainte normale  $s_x$  dans un diagramme en  $xy$



**Figure 26.3 Diagramme de contrainte**

Visualisons la contrainte normale  $s_x$  dans un tracé de surface

7. Sélectionnons Paramètres de graphique dans le menu Post-traitement.
8. Sélectionnons contrainte normale  $s_x$  en repère globale sys. Dans la liste des quantités prédéfinies et on clique sur OK.

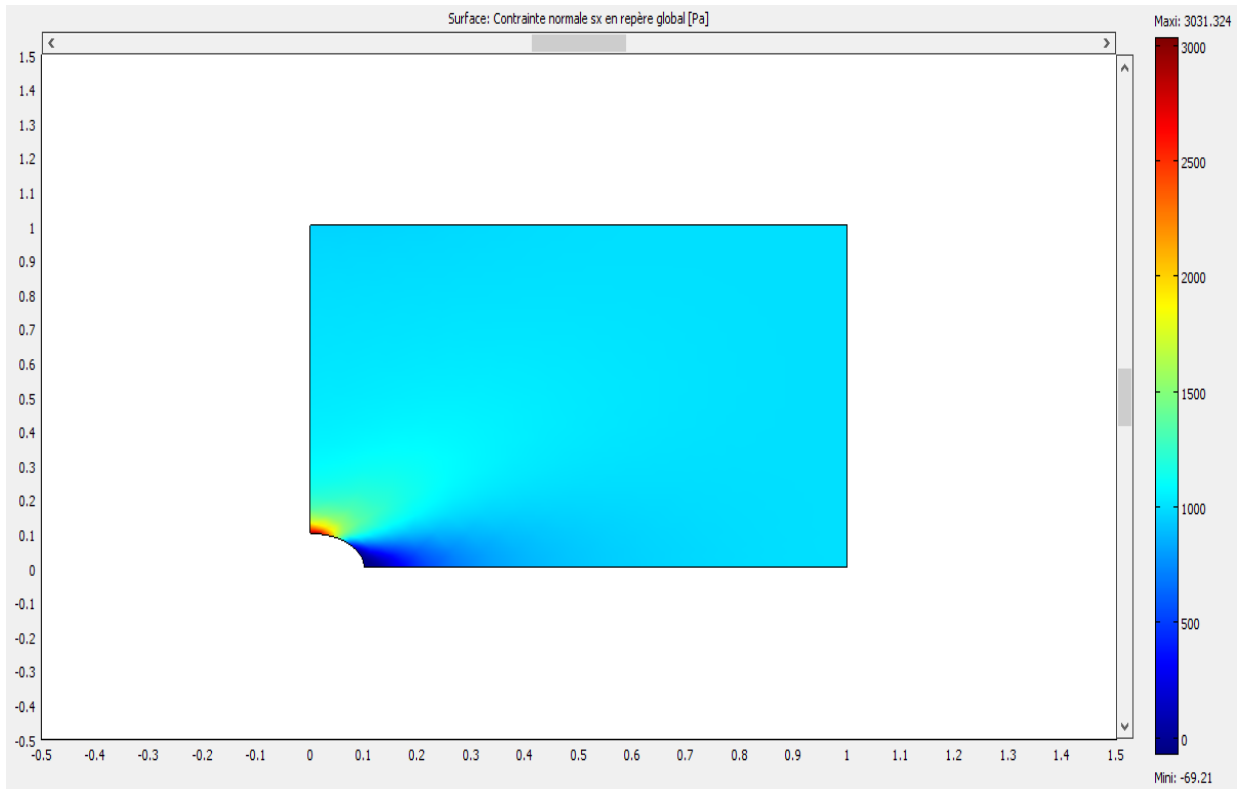


Figure 27.3 Le résultat obtenu de la simulation

## 3.2 Plaque élasto-plastique

### 3.2.1 Introduction

Dans cet exemple, nous analysons une plaque avec un trou lorsqu'elle est chargée au-dessus de la limite élastique.

### 3.2.2 Définition du modèle

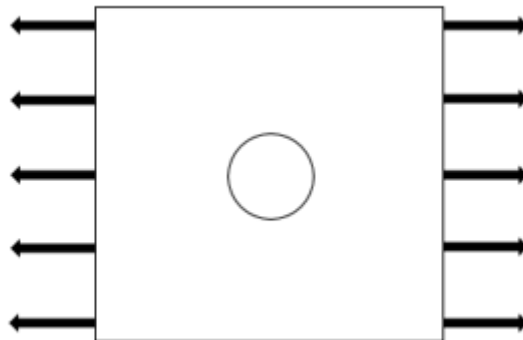


Figure 28.3 Plaque trouée soumise à la traction

Comme la plaque est mince et que les charges sont dans le plan, nous pouvons supposer une condition de contrainte plane. La double symétrie signifie que nous n'avons besoin d'analyser qu'un quart de la plaque.

1) Matériau

- Propriétés élastiques :  $E = 2.1e11$  Pa et  $\nu = 0,3$ .
- Propriétés plastiques : Limite d'élasticité 243 MPa et durcissement isotrope linéaire avec module tangent 2171 MPa.

2) Contraintes et charges

- Les contraintes du plan de symétrie sont appliquées sur la limite verticale la plus à gauche et la limite horizontale inférieure.
- Le bord vertical droit est soumis à une contrainte, qui augmente de zéro à une valeur maximale de 133,65 MPa, puis est relâchée. La valeur maximale est choisie de manière à ce que la contrainte moyenne sur la section traversant le trou soit supérieure de 10 % à la limite d'élasticité ( $=1,1*243*(20-10)/20$ ).

3) Sélectionnons 2D dans la liste des dimensions de l'espace. Nous sélectionnons Module Mécanique des structures>Contraintes planes>Analyse statique élasto-plastique matériau.

### 3.2.3 Modélisation de la géométrie

- 1) Majuscule-cliquons sur le bouton Rectangle/Carré dans la barre d'outils Dessin. Majuscule-cliquons sur le bouton Ellipse/Cercle (centré). puis on clique sur OK.
- 2) Sélectionnons les deux objets en appuyant sur Ctrl A, puis en cliquant sur le bouton Différence dans la barre d'outils Dessin pour créer l'objet composite CO1.
- 3) On Clique sur le bouton Zoom de la sélection dans la barre d'outils principale.

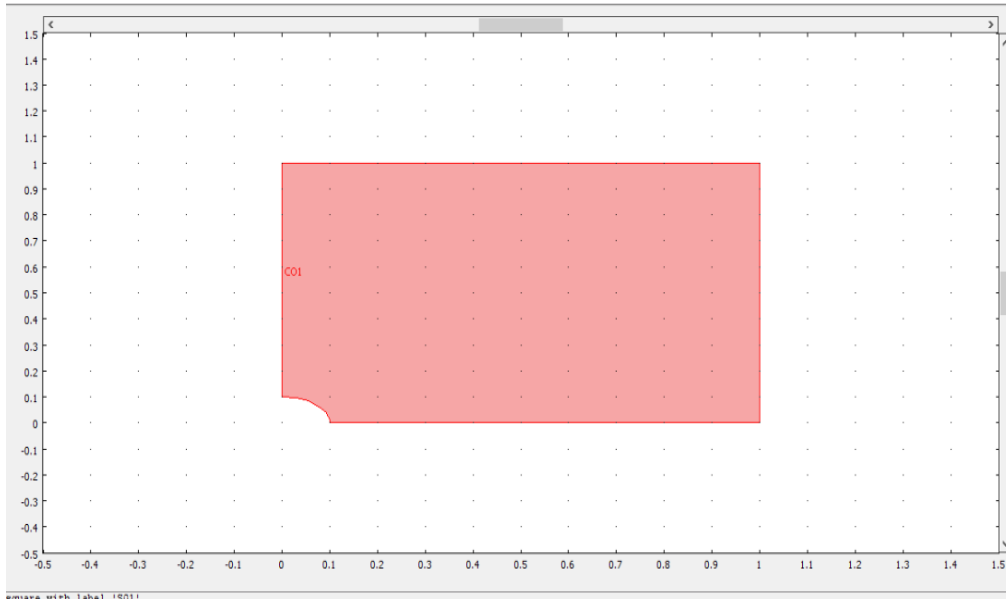


Figure 29.3 Modélisation de la géométrie d'une plaque élasto-plastique

### 3.2.4 Paramètres physiques

#### 3.2.4.1 Paramètres des limites

Sélectionnons paramètres des limites dans le menu physique

On spécifie les paramètres des frontières conformément aux tableaux suivants :

	Frontières 1,3	
Page	contrainte	
	Condition de contrainte	Plan de symétrie

Tableau 4.3 Plan de symétrie

	Frontière 4	
Page	Chargement	
	Fx	$243/2 * ((\text{para} < 1.1) * \text{para} + (\text{para} \geq 1.1) * (2.2 - \text{para}))$
	Chargement sur arrête définie par	Sélectionnons



	force/surface tenant compte de l'épaisseur	
--	---	--

**Tableau 5.3 Le chargement****3.2.4.2 Paramètres du sous-domaine**

- 1) Sélectionnons paramètres du sous-domaine dans le menu physique.
- 2) Sélectionnons Sous-domaine 1, puis en spécifiant les données sur la page Matériau selon le tableau suivant :

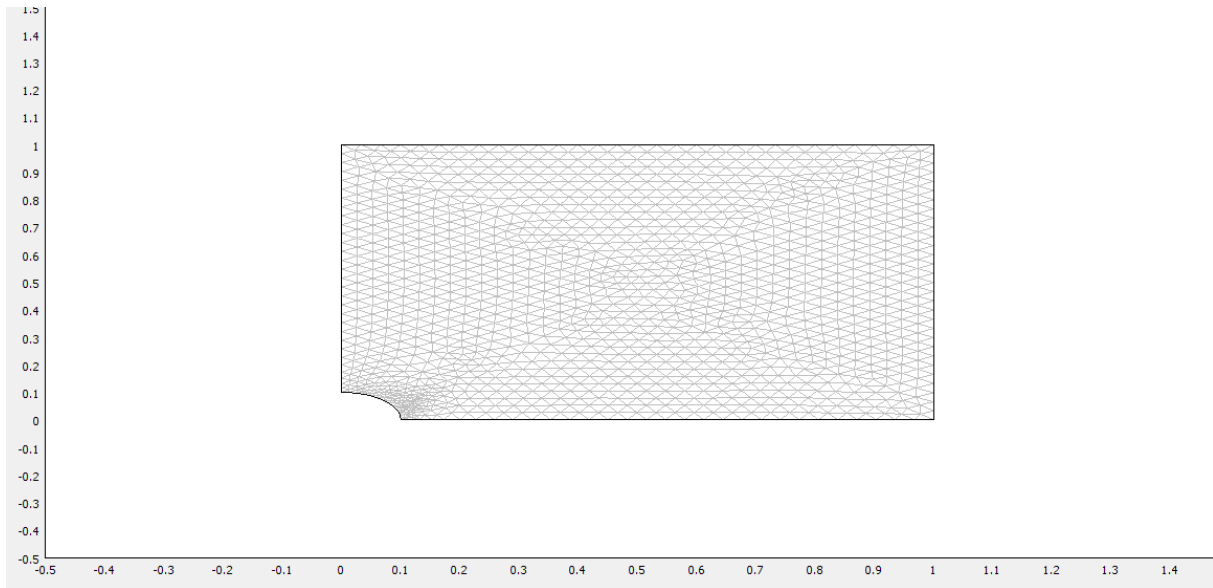
Paramètres	Valeur
E	2.1e11
$\nu$	0.3

**Tableau 6.3 Les propriétés du matériau d'une plaque élasto-plastique**

- 3) On Clique sur le bouton Paramètres du matériau élasto-plastique pour ouvrir la boîte de dialogue Paramètres du matériau élasto-plastique.
- 4) Dans le champ d'édition  $\sigma_{ys}$ , on tape 243 et dans le champ d'édition ETiso, on tape 2171. On clique sur OK
- 5) Sur la page élément, on tape 2 2 2 dans le champ d'édition gorder.
- 6) On clique sur OK pour fermer la boîte de dialogue Paramètres du sous-domaine.

**3.2.5 Génération de maillage**

On clique sur raffiner le maillage pour faire le maillage.



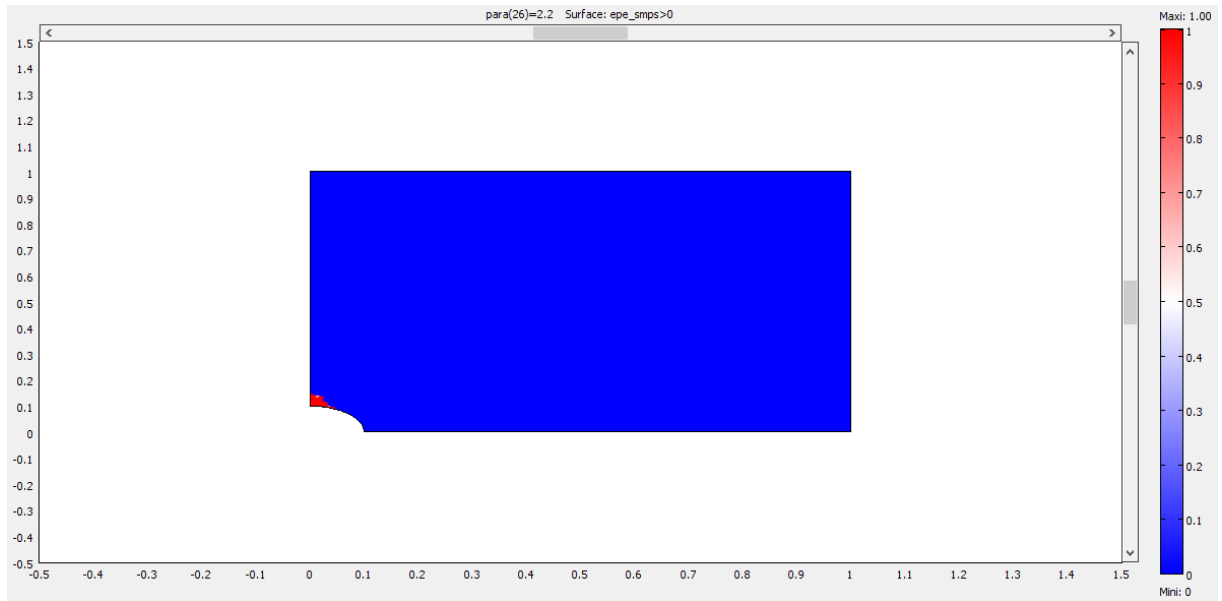
**Figure 30.3 Génération de maillage**

### 3.2.6 Calculer la solution

- 1) On clique sur le bouton Paramètres du solveur dans la barre d'outils principale.
- 2) On tape le nom para dans le champ d'édition Nom du paramètre.
- 3) On saisisse  $0$   $\text{range}(0,44,0,05,0,59)$   $\text{range}(0,63,0,05,1,08)$   $\text{range}(1,1,0,2,1,9)$   $\text{range}(1,95,0,05,2,2)$  dans le champ de modification Valeurs du paramètre. On clique sur OK.
- 4) On clique sur le bouton Solve (Résoudre) dans la barre d'outils principale.

### 3.2.7 Post-traitement et visualisation

- 1) On clique sur le bouton Paramètres de tracé dans la barre d'outils principale.
- 2) Sur la page Général, on sélectionne 2.2 dans la liste des valeurs de paramètres.
- 3) On clique sur l'onglet Surface.
- 4) On Tape  $\text{epe\_smps} > 0$  dans le champ d'édition Expression pour obtenir un indicateur de déformation plastique ( $\text{epe\_smps}$  est le nom de variable pour la déformation plastique effective). Cette expression logique vaut 1 dans la région plastique et 0 ailleurs.
- 5) On sélectionne WaveLight dans la liste des tableaux de couleurs.



**Figure 31.3 La région plastifiée**

### Conclusion

On remarque que lorsque la limite d'élasticité est dépassée, une zone de plasticité apparaît autour du bord du cercle, et cela est dû à l'augmentation de la concentration de contrainte autour du bord du cercle ainsi le début de l'apparition d'une tache de plasticité autour du cercle.

# **Conclusion générale**

## Conclusion générale

L'étude du comportement des plaques est un sujet très important dans le domaine du calcul des structures, il occupe une place aussi vaste dans la recherche scientifique depuis des siècles, avec le développement des outils informatique très puissants et l'apparition des logiciels de calcul très performants. La modélisation des plaques comme d'autres domaines de modélisation des structures sont devenus très efficace et très rationnelle, c à d on peut arriver à comprendre leur comportement avec des modèles numériques et atteindre des résultats plus corrects.

La concentration des contraintes dans une plaque trouée soumise à un champ de contraintes uniforme, a été étudiée en suivantes :

- Une étude analytique basée sur la méthode classique.
- Une étude numérique utilisant le code de calcul COMSOL Multiphysics, pour déterminer ce champ de contraintes et aussi pour déterminer les contraintes maximales et minimales.
- Une comparaison entre ces deux approches analytique et numérique.

Suite à Cette étude nous sommes parvenus aux résultats suivants :

- ✓ Pour l'étude analytique basée sur la théorie des plaques infinies de la résistance des matériaux nous avons développé un programme de calcul qui donne de très bons résultats qui confirment cette théorie.
- ✓ Les simulations numériques que nous avons réalisées par le code de calcul COMSOL Multiphysics ont donné des résultats très satisfaisants à comparer avec ceux de l'étude analytique avec des erreurs très minimes.

## Référence

- [1] Sylvain Drapier, Mécanique des structures & Approximation numérique, octobre 2019
- [2] Jean – Luis Batoz, Modélisation des structures par éléments finis, volume 2 poutre et plaque
- [3] : Derbane Saïd, Modélisation des plaques par la méthode des éléments finis, Mémoire de Magister, Université Mohamed Khider, Biskra, (2012).
- [4] DEGHBODJ Samir, Investigation Numérique du Comportement Thermomécanique d'une Plaque Carrée Isotrope, Université de Tébessa May 2018
- [5] François. Frey, et Jarostove. Jirousek, « Analyse des structures et milieu continu par la méthode des éléments finis », volume 6, Presses polytechniques, édition (2001).
- [6] Bessais L : « Analyse des structures par la M.E.F basée sur l'approche en Déformation » Thèse de Magistère en Génie Mécanique, Biskra 2012.
- [7] Zienkiewicz O, Taylor R, "The Finite élément Method", McGraw-Hill, London 1991.
- [8] Arnaud D. Fabrice G et Frédéric R, " Aide-Mémoire –Mécanique des structures, Résistance des matériaux", Dunod, Paris, 2008.
- [9] Bourkache ourida, Analyse experimentale et numerique des champs de contrainte dans des pièces mécanique, Mémoire Master 2, Université Mouloud Mammeri De Tizi Ouzou (2018)
- [10] Lassoued Mohamed, Deghboudj Samir, Etude de la concentration des contraintes dans une plaque trouée sollicitée en traction, Mémoire de Master 2, Université Larbi Tébessi Tébessa, (2011).
- [11] Deghboudj Samir, Lassoued Mohamed, Satha Hamid, Farhi Faouaz, Gahmousse Abderahmane, Approche numérique pour l'étude du phénomène de concentration de contrainte dans une plaque trouée, ACMA 2012, May 09-12, 2012, Fez, Morocco.
- [12] Mennas Bilel, Deghboudj Samir, Etude Numérique de la concentration des contraintes dans une plaque composite stratifiée trouée soumise à un champ de traction, Mémoire de Master 2, Université Larbi Tébessi Tébessa, (2015).
- [13] Peterson, R.E. Stress Concentration Factors. John Wiley & Sons (1997).

[14] Boutagouga D: « analyse non linéaire géométrique et matérielle des coques par un élément quadrilatéral avec ddl rotationnel dit «drilling rotation " », Thèse de Magistère en génie Civil, Annaba 2008.

[15] Thomas Heuzé, Plasticité des structures, École Centrale de Nantes — 2015

[16] Briki L: «Analyse élasto-plastique des plaques minces et épaisses par l'éléments finis », Thèse de Magistère en génie Civil, Annaba 2004.

[17] Lemaitre J, Chaboche J.: « Mécanique des matériaux solides », Dunod, deuxième édition, 1991.