MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

MAIZIA Hassiba
YAHIAOUI Sarah

THÈME

LES FRACTIONS CONTINUES

Soutenu publiquement, le 22/06/2017, devant le jury composé de :

Mr.	**A. BEDHOUCHE**	M.A.A	Université A-Mira de Béjaia.	Président.
Mr.	**B. FARHI**	M.C.A	Université A-Mira de Béjaia.	Promoteur.
Mr.	**M. MOUZAIA**	M.A.A	Université A-Mira de Béjaia.	Examinateur.

Remerciements

Après avoir rendu grâce à Dieu le Tout Puissant et le Miséricordieux, nous tenons à remercier et à exprimer notre profonde gratitude à notre encadrant Monsieur B. FARHI, pour son sens d'écoute et d'échange, sa disponibilité, son support inestimable, et surtout ses judicieux conseils, et sa rigueur scientifique, qui ont contribué à alimenter notre réflexion, et nous ont permis de mener notre travail à bon port.

Par ailleurs nous remercions le président du jury Monsieur A. BEDHOUCHE d'avoir bien voulu juger ce travail, et d'accepter la présidence du jury de ce mémoire. Nos remerciements s'adressent également à Monsieur M. MOUZAIA pour avoir accepter d'évaluer notre travail et de faire partie de notre jury.

On ne manquerai pas d'adresser nos remerciements à tous les membres de la faculté sciences exactes en général et aux membres du département de mathématiques en particulier, ainsi que tous les enseignants qui nous ont fournit les outils nécessaires à la réussite de nos études universitaires ; ainsi que toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'achèvement de notre cursus universitaire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mon très cher père, ma très chère mère et ma très chère grand-mère, grâce à Dieu et à vous que je suis parvenu aujourd'hui jusque là, les mots n'expriment pas tout ce que j'éprouve pour vous en ce moment aussi important de ma vie.

A mes très chers frères Samir, Moho, Fayez, Halim et Nâfaa.

A ma très chère sœur Lila et son mari khalef.

A ma tante Malika et mes oncles.

A mes belles sœurs Noira et Zakia.

A mes neveux Massi, Koussayla, Anis et Abdrahim.

A mes cousines Hilwa, Adja, Sâadia, Katia et Walida.

A mes meilleures copines Sarah, Cylia, Dihia, Souad, Sonia et Dallal.

A toutes les personnes qui m'aiment, je dédie ce modeste travail.

MAIZIA Hassiba

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mon trés cher père, ma trés chère mère.

Ma trés chère sœur Sabrina.

Mes trés chers frères Fatah et Abdelhak.

Mes oncles et mes tantes.

Mes cousins et cousines.

Mon binôme Hassiba et sa famille.

Ma trés chère amie Meriem.

Et tout mes collègues.

YAHIAOUI Sarah

Table des matières

Historique

L'histoire des fractions continues est placée au moment de la création de l'algorithme d'Euclide (environ 300 avant JC), où Euclide savait déjà développer les nombres rationnels sous la forme de fractions continues régulières.

Les fractions continues ont notamment été utilisées par les mathématiciens indiens. On cite **Aryabhata** $(476 - 550)$ qui les utilisa dès le $6^{ème}$ siècle pour résoudre des équations diophantiennes.

Le mathématicien arabe **Ibn al-Banna al-Murakishi** (1256 - 1321), le véritable fondateur du calcul sur les fraction et qui est à l'origine même de la notation $\frac{a}{b}$, a décrit des calculs sur les fractions impliquant implicitement les fractions continues. Il a fait cela d'abord dans son très célèbre abrégé de mathématiques, intitulé تلخيص أعمال الحساب, puis dans son livre détaillant son abrégé, intitulé رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب. Son disciple andalou **al-Qalsadi** (1412 - 1486) a développé et a simplifié les travaux de son maître.

L'apparition en Europe (Italie) est plus tardive, elle est due à deux mathématiciens de l'Université de Bologne, **Rafael Bombelli** (1526 - 1572) et **Pietro Cataldi** transforma l'intéressant produit infini

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{(2i+1)^2}\right),$$

découvert par **John Wallis** (1655), en une fraction continue généralisée

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\frac{7^2}{\ddots}}}},$$

mais n'a pas utilisé davantage ces fractions. Wallis prend alors l'initiative de publier ces résultats dans son livre *Opera Mathematica* (1695), ainsi qu'un bon nombre des propriétés de celles-ci, et fut le premier a utiliser le terme "fraction continue".

Le $18^{ème}$ siècle est marqué par trois mathématiciens d'exception: **Leonhard Euler** $(1707 - 1783)$, **Johan Heinrich Lambert** $(1728 - 1777)$, **Joseph Louis Lagrange** $(1736 - 1813)$. En 1737, dans *"De fractionibus continuis",* Euler démontre que toute solution irrationnelle positive d'une équation de second degré peut être représentée par une fraction continue. Lambert a été le premier a prouver que π est irrationnel en utilisant les fractions continues, et Lagrange prouva que la fraction continue d'un irrationnel quadratique est périodique.

Au $19^{ème}$ et $20^{ème}$ siècle, les fractions continues furent l'objet d'un nombre incroyable de travaux, et ont fait leurs apparition dans d'autres domaines.

Ce bref aperçu du passé des fractions continues vise à donner un aperçu de l'évolution de ce domaine.

CHAPITRE 1

Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *On appelle fraction continue généralisée toute fraction itérée du genre :*

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_{1+}\cfrac{b2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_{3+}\ddots}}}. \tag{1.1.1}$$

(avec a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout i)

Les a_n sont appelés "les dénominateurs partiels" et b_n sont appelés "les numérateurs partiels".

Définition 1.1.2 *On appelle fraction continue régulière toute expression de la forme :*

$$a_0+\cfrac{1}{a_{1+}\cfrac{1}{a_{2+}\cfrac{1}{a_{3+}\ddots}}}. \tag{1.1.2}$$

Avec $a_0 \in \mathbb{Z}$, et pour tout $n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{N}^*$.

Notation 1.1.1 *On notera une fraction continue régulière par $[a_0, a_1, ...]$ ou $a_0 + \frac{1}{a_1+...+}\frac{1}{a_n+...}$ et une fraction continue généralisée par $a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+...+}\frac{b_n}{a_n+...}$.*

1.2 Développement d'un nombre réel positif en fraction continue régulière

Pour x un réel, on définit une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme suit :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = \frac{1}{x_n-[x_n]} \quad (\forall\ n \in \mathbb{N}) \end{cases}. \tag{1.2.1}$$

Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, x_n est un entier, l'algorithme s'arrête à la $n^{ème}$ étape et le développement est fini.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n := [x_n]$ (Avec $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geq 1$) .On a :

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - [x_n]} = \frac{1}{x_n - a_n} \Longleftrightarrow x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}.$$

En réitérant plusieurs fois cette relation (en partant de $x_0 = x$), on obtient :

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} \\ &\vdots \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + a_n + \frac{1}{x_{n+1}}}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Cette dernière fraction continue régulière s'appelle "le développement en fraction continue régulière de x" qu'on note $[a_0, a_1, a_2...]$.

Définition 1.2.1 *(Réduite d'une fraction continue)*

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $[a_0, a_1, ...]$ son développement en fraction continue régulière. On appelle $k^{ème}$ réduite de x (où $k \in \mathbb{N}$ et k est au plus égale à la longueur du développement en question) la fraction continue finie $[a_0, a_1, ..., a_k]$.

1.2.1 Le cas d'un nombre rationnel

On démontre dans ce qui suit que l'algorithme de développement en fraction continue régulière d'un réel x s'arrête si et seulement si x est rationnel.

Théorème 1.2.1 *Le développement en fraction continue d'un nombre réel x est fini si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.*

Preuve. L'implication directe du théorème est immédiate. Montrons l'implication inverse.

Soit $x \in \mathbb{Q}$, et montrons que son développement en fraction continue régulière est fini.

On peut écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $PGCD\ (\ p,\ q) = 1$.

Considérons l'algorithme d'Euclide de calcul du $PGCD\ (\ p,\ q) = 1$:

$$
\begin{aligned}
p &= a_0 q + p_0 \qquad (0 \leq p_0 < q) \\
q &= a_1 p_0 + p_1 \qquad (0 \leq p_1 < p_0) \\
p_0 &= a_2 p_1 + p_2 \qquad (0 \leq p_2 < p_1) \\
&\vdots \\
p_{n-2} &= a_n p_{n-1} + 1.
\end{aligned}
$$

(1 est le dernier reste non nul car $PGCD\ (\ p,\ q) = 1$).

L'algorithme de développement en fraction continue régulière de x donne : $x_0 = x$, $x_1 = \frac{1}{x_0 - [x_0]} = \frac{1}{\frac{p}{q} - a_0} = \frac{q}{p_0}$, $x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{1}{\frac{q}{p_0} - a_1} = \frac{p_0}{p_1}$,..., $x_n = \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$, $x_{n+1} = \frac{p_{n-1}}{1} = p_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

L'algorithme s'arrête donc en arrivant à x_{n+1} et on obtient $x = [a_0, a_1, ..., a_n, p_{n-1}]$; qui est bien un développement en fraction continue régulière fini. Ceci complète la preuve du théorème. ■

Remarque 1.2.1 *Si $x = [a_0, a_1, ..., a_n] \in \mathbb{Q}$ et $a_n \geq 2$, on peut écrire encore :*

$$x = [a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n - 1, 1] .$$

On voit ainsi que x est représenté de deux façons différentes en fractions continues régulières.

On peut montrer que cette situation est la seule possible pour représenter un nombre réel de deux façons différentes en fractions continues régulières.

Exemple 1.2.1 *Développement en fraction continue régulière de* $\frac{37}{13}$.

Posons $\alpha = \frac{37}{13}$. Ecrivons l'algorithme d'Euclide pour 37 et 13 :

$$37 = 2 \times 13 + 11$$
$$13 = 1 \times 11 + 2$$
$$11 = 5 \times 2 + 1.$$

Maintenant, nous allons utiliser chacune de ces lignes dans l'ordre pour mettre α sous la forme d'une fraction continue.

Tout d'abord
$$\alpha = \frac{37}{13} = \frac{2 \times 13 + 11}{13} = 2 + \frac{11}{13}.$$
On réecrit
$$\frac{11}{13} = \frac{1}{\frac{13}{11}} = \frac{1}{\frac{1 \times 11 + 2}{11}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{11}}.$$
Si bien que nous avons déjà
$$\alpha = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}}.$$
De même
$$\frac{2}{11} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{1}{\frac{5 \times 2 + 1}{2}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}.$$
Et donc
$$\alpha = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = [2, 1, 5, 2].$$
Ici le processus s'arrête car nous avons atteint une fraction du type $\frac{1}{a}$, qui apparait au moment où l'algorithme d'Euclide se termine, en donnant un reste de 1 (ce qui arrive forcément car nous sommes partis de deux nombres premiers entre eux).

On pourra écrire aussi le dernier terme sous une autre forme, en effet
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}},$$

d'où le développement en fraction continue de α devient :

$$\frac{37}{13} = [2, 1, 5, 1, 1] .$$

Le corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 1.2.1 *Si x est un réel irrationnel, le développement en fraction continue régulière est infini.*

Exemple 1.2.2 *Soit $x_0 = \sqrt{2}$. Les calculs donnent : $a_0 = [\sqrt{2}] = 1$, $x_0 = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, ainsi $x_1 = \sqrt{2} + 1$, $a_1 = 2$, donc $x_1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, donc $x_1 = x_2$, $a_2 = 2$.*

Et on voit que le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ est périodique de période 1, plus précisément $x_n = 2$ pour $n \geq 1$. Ainsi $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, ..., 2, ...]$.

Nous verrons plus loin que les développements périodiques caractérisent les nombres algébriques quadratiques.

Exemple 1.2.3 *Nous savons que $\pi \approx 3.141592$, les calculs donnent :*

$a_0 = 3$ et $x_1 = \frac{1}{0.141592} \approx 7.062513$;
$a_1 = 7$ et $x_2 \approx \frac{1}{0.062513} \approx 14.996594$;
$a_2 = 14$ et $x_3 \approx \frac{1}{0.996594} \approx 1.003417$;
$a_3 = 1$ et $x_4 \approx \frac{1}{0.003417} \approx 292.634591$;
$a_4 = 292$ et $x_5 \approx \frac{1}{0.634591} \approx 1.575818$;
$a_5 = 1, ...$etc.

Avec cela on voit que la réduite d'ordre 6 de la fraction continue de π est $[3, 7, 14, 1, 292, 1]$.

Remarque 1.2.2 *(Quelques règles de calcul)*

1. $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$ avec $p > q \Rightarrow \frac{q}{p} = [0, a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$.
2. $x = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n] \Rightarrow -x = [-a_0 - 1, 1, a_1 - 1, a_2, ..., a_n]$.
3. $[..., a_{n-3}, 0, a_{n-1}, a_n] = [..., a_{n-3} + a_{n-1}, a_n]$.
4. $[..., a_{n-2}, 0, a_n] = [..., a_{n-2} + a_n]$.
5. $[..., a_{n-2}, a_{n-1}, 0] = [..., a_{n-2}]$.

1.3 Propriétés fondamentales des réduites

On se propose dans cette partie de mettre en évidence quelques propriétés des réduites ainsi qu'une méthode de calcul de celles-ci. Pour une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on évaluera la fraction continue $[a_{0,}a_1, a_2, ...]$ en trouvant une formule récursive évaluant ses troncations :

$$a_{0,} \qquad a_0 + \tfrac{1}{a_1}, \qquad a_0 + \tfrac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}, \qquad etc.$$

Théorème 1.3.1 *Définissons les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :*

$$p_0 = a_0, \qquad p_1 = a_0a_1 + 1, \qquad q_0 = 1, \qquad q_1 = a_1,$$

et pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{cases} p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}. \tag{1.3.1}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$[a_{0,}a_1, a_2, , ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}. \tag{1.3.2}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n :

• Pour $n = 0$, on a:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0 = [a_0] \, ,$$

comme il fallait le prouver.

• Pour $n = 1$, on a:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1] \, ,$$

comme il fallait le prouver.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété est vraie pour n, et montrons qu'elle reste vraie pour $(n + 1)$.

Dans ce qui suit, on écrit $p_n(a_0, ..., a_n)$ (considérée donc comme fonction de $a_0, ..., a_n$). Aussi q_n comme $q_n(a_0, ..., a_n)$.

$$\begin{aligned}
[a_0, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] &= \left[a_0, ..., a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] \\
&= \frac{p_n(a_0, ..., a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}})}{q_n(a_0, ..., a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}})} \\
&= \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})q_{n-1} + q_{n-2}} \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2} + \frac{1}{a_{n+1}} p_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + \frac{1}{a_{n+1}} q_{n-1}} \\
&= \frac{p_n + \frac{1}{a_{n+1}} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{a_{n+1}} q_{n-1}} \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Remarque 1.3.1 *On peut définir les formules récursives précédentes autrement :*

$$\begin{cases} p_{-2} = 0, & p_{-1} = 1, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ pour } n \geq 0 \\ q_{-2} = 1, & q_{-1} = 0, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Corollaire 1.3.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}. \tag{1.3.4}$$

Ce qui peut se réécrire :

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}. \tag{1.3.5}$$

Preuve. Nous allons de nouveau raisonner par récurrence.

• Pour $n = 1$, nous avons

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1 = (-1)^{1-1}.$$

Donc la propriété est vraie à l'ordre 1.

• Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle reste vraie pour $(n + 1)$.

En utilisant les relations de récurrence (1.3.1), on a :

$$\begin{aligned}
p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} &= (p_na_{n+1} + p_{n-1})q_n - p_n(q_na_{n+1} + q_{n-1}) \\
&= p_{n-1}q_n + p_nq_na_{n+1} - p_na_{n+1}q_n - p_nq_{n-1} \\
&= p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} \\
&= -(-1)^{n-1} \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence.

Pour obtenir la deuxième égalité, il suffit de diviser de part et d'autre de l'égalité par $q_{n-1}q_n$ (Si $q_{n-1}q_n \neq 0$). ■

Proposition 1.3.1 *Toute réduite d'une fraction continue rationnelle régulière est une fraction irréductible.*

Preuve. Soit p_n/q_n une réduite d'ordre n d'une fraction continue régulière.

D'après le corollaire 1.3.1, on a : $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$. Le théorème de Bezout implique que p_n et q_n sont premiers entre eux. CQFD. ■

Corollaire 1.3.2 $\forall\ n \geq 2$ *on a*

$$p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^n a_n, \tag{1.3.6}$$

ce qui peut se réécrire

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_nq_{n-2}}. \tag{1.3.7}$$

Preuve. Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= a_np_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-2} - p_{n-2}a_nq_{n-1} - p_{n-2}q_{n-2} \\
&= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\
&= (-1)^n a_n \text{ (en vertu du corollaire 1.3.1).}
\end{aligned}$$

Si $q_n q_{n-2} \neq 0$, en divisant par $q_n q_{n-2}$, on obtient

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

■

Remarque 1.3.2 *On peut réécrire les formules des deux corollaires précédents en utilisant des déterminants comme ceci :*

$$\begin{vmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{vmatrix} = (-1)^n \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} p_{n-2} & p_n \\ q_{n-2} & q_n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n.$$

Proposition 1.3.2 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n \left(x_{n+1} q_n + q_{n-1}\right)}. \tag{1.3.8}$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et posons $x_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$.

On a bien $x = [a_0, a_1, ..., a_n, x_{n+1}]$.

D'après le théorème 1.3.1, on a :

$$x = [a_0, a_1, ..., a_n, x_{n+1}] = \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}},$$

donc

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{q_n \left(x_{n+1} q_n + q_{n-1}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n}{q_n \left(x_{n+1} q_n + q_{n-1}\right)}. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3.3 *Soit x un réel dont le développement en fraction continue est $[a_0, a_1, ...]$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ la réduite d'ordre n de x. Alors, on a :*

$$1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \cdots \tag{1.3.9}$$

Autrement dit la suite des dénominateurs est croissante, et strictement croissante à partir du rang 2, et tend vers l'infini. On a aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} |r_n - r_{n-1}| = 0. \tag{1.3.10}$$

Preuve. On a $q_1 = a_1 \geq q_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} > q_n \times 1 + 0 = q_n,$$

(en utilisant le fait que $a_{n+1} \geq 1$ et que $q_{n-1} > 0$).

Par suite $q_{n+1} > q_n$ implique $q_{n+1} \geq q_n + 1$. Ainsi, nous avons $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$:

$$q_{n+1} \geq q_n + 1 \geq q_{n-1} + 2 \geq \cdots \geq q_1 + n.$$

Or la suite de terme général $q_1 + n$ tend vers l'infini, donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

En utilisant maintenent la relation (1.3.5), on a :

$$|r_n - r_{n-1}| = \frac{1}{q_{n-1}q_n},$$

puisque q_n tend vers l'infini, q_{n-1} également, d'où le résultat. ■

Ainsi, nous venons de montrer que deux réduites consécutives sont de plus en plus proches.

Proposition 1.3.4 *Soit $x = [a_0, a_1, ...]$ une fraction continue infinie. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors pour tout $n \geq 1$,*

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, ..., a_1]. \tag{1.3.11}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, on a $q_1/q_0 = a_1/1 = a_1 = [a_1]$ et la propriété est vraie.
- Soit $n \geq 2$ un entier. Supposons que

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = [a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1],$$

et montrons que

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, ..., a_1].$$

On a

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} ;$$

d'où

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}}.$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence, et on obtient

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, [a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1]] = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] .$$

Ce qui achève cette récurrence et cette démonstration. ■

Proposition 1.3.5 *Soit $x = [a_0, a_1, ...]$ une fraction continue infinie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, ..., a_0] . \tag{1.3.12}$$

Preuve. La démonstration se fait de même que pour la proposition précédente. ■

Le théorème suivant est fondamental car il montre que toute fraction continue régulière infinie est convergente.

Théorème 1.3.2 *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $[a_0, a_1, ...]$ son développement en fraction continue régulière. Alors la suite de réduites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a les propriétés suivantes:*

(a) La sous-suite $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(b) La sous-suite $(r_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$est strictement décroissante.

(c) Les deux sous-suites $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes (et sont donc convergentes vers une même limite).

(d) La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

Remarque 1.3.3 *Les points $(a), (b)$,et (c) du théorème* 1.3.2 *s'expriment mathématiquement comme ceci :*

$$r_0 < r_2 < r_4 < ... < ... < r_5 < r_3 < r_1. \tag{1.3.13}$$

Preuve. • Montrons les points (a) et (b) du théorème. Selon le corollaire 1.3.2, nous avons pour tout entier $n \geq 2$:

$$r_n - r_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}.$$

Lorsque n est pair, ceci montre que $r_n - r_{n-2} > 0$, et lorsque n est impair, ceci montre que $r_n - r_{n-2} < 0$, ce qui conclut, et on a le résultat requis.

• Montrons le point (c) du théorème. La sous-suite $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge donc vers un nombre l_1. De même, la sous-suite $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers un nombre l_2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(r_{2n}-r_{2n+1})=0$, alors ces deux sous-suites sont adjacentes et donc convergent vers une même limite; d'où $l_1=l_2$. Ce qui entraine que $(r_n)_n$ est convergente vers cette même limite.

• Montrons le point (d) du théorème. D'après la proposition 1.3.2. On a :

$$|x-r_n|=\frac{1}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}<\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ce qui montre que $(r_n)_n$ converge vers x.

Ceci complète la preuve du théorème. ■

CHAPITRE 2

Etude des approximations d'un nombre réel par ses réduites

2.1 Approximations décimales

Pour chaque nombre réel x, il existe une suite rationnelle qui converge vers x. La plus évidente est la suite de ses approximations décimales : par exemple, on peut approcher $\pi \approx 3,1415926$ successivement par

$$\frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \cdots$$

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la suite des réduites de x en fraction continue régulière. On se propose de comparer entre ces deux approches. Naturellement, une meilleure approximation rationnelle de x nécessite un dénominateur plus grand. Une bonne approximation est à la fois proche de x, et dont le dénominateur n'est pas trop grand. Donc pour mesurer la qualité d'une approximation $\frac{p}{q}$ de x, on doit borner sa distance à x, à savoir $\left|x - \frac{p}{q}\right|$, en terme de q.

Regardons tout d'abord ce qui se passe dans le cas des approximations décimales.

Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i \geq 1}$ une suite de chiffres (ie $0 \leq a_i \leq 9$, $\forall i \geq 1$) tel que l'on ait $x = x_n + \varepsilon_n$, avec :

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{E(x.10^n)}{10^n},$$

et

$$\varepsilon_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots \leq \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + ... = \frac{1}{10^n}.$$

D'où l'on déduit que :

$$|\varepsilon_n| = \left| x - \frac{E(x.10^n)}{10^n} \right| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Autrement dit, nous venons de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *soit x un nombre réel. Alors il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que :*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q}. \tag{2.1.1}$$

Remarque 2.1.1 *L'utilisation de la base décimale n'était pas nécessaire pour aboutir au théorème pécédent ; tout autre base b $(b > 1)$ fera le même travail.*

2.2 Théorèmes de meilleures approximations

Regardons maintenant la qualité de l'approximation par les fractions continues. Pour ce qui suit, si $x \in \mathbb{R}$ est donné par son développement en fraction continue régulière $[a_0, a_1, ...,]$, on note par x_n $(n \in \mathbb{N})$ le développement $x_n = [a_n, a_{n+1}, ...]$.

Théorème 2.2.1 *Soit $x \in \mathbb{R}$, dont le développement en fraction continue s'écrit $x = [a_0, a_1, ...]$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n la $n^{\text{ème}}$ réduite de x. Alors pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$|x - r_n| < |x - r_{n-1}|. \tag{2.2.1}$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On a

$$x = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}},$$

ce qui s'écrit aussi :

$$x_{n+1}(xq_n - p_n) = -\left(xq_{n-1} - p_{n-1}\right),$$

on procède a des simplifications, on trouve :

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right|\left|x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|,$$

comme $x_{n+1} \geq 1$ et $q_n \geq q_{n-1}$ et l'une au moins de ces inégalités est stricte, on obtient :

$$\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n} < 1,$$

d'où :

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$$

Soit

$$|x-r_n| < |x-r_{n-1}|.$$

■

Théorème 2.2.2 *Soit x un réel, $[a_0, a_1, ...]$ son développement en fraction continue, et $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, ...$ses réduites. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}. \tag{2.2.2}$$

Preuve. En posant $x_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$, on a :

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)},$$

or $x_{n+1} \geq a_{n+1}$, $q_n > 0$, $q_{n-1} > 0$, d'où

$$x_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1} > q_n.$$

En multipliant ces inégalités par q_n, puis en inversant les deux cotés de l'inégalité, on trouve la majoration du théorème. ■

Théorème 2.2.3 *Si $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible comprise entre deux réduites consécutives $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ d'un réel positif x, alors $p > p_{n+1}$ et $q > q_{n+1}$.*

Preuve. Soit x un nombre réel positif, et $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ son développement en fraction continue. Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible comprise entre $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

• Si n est impair, on a :

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_n}{q_n},$$

d'où

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n},$$

ainsi

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} < \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n},$$

ce qui entraine

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} > \frac{qp_n - pq_n}{qq_n},$$

d'où

$$(qp_n - pq_n)\, q_{n+1} < q.$$

Puisque $(qp_n - pq_n)$ est un entier strictement positif, donc $q > q_{n+1}$.

D'autre part, puisqu'on a

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p}{q},$$

alors

$$pq_{n+1} > qp_{n+1} > q_{n+1}p_{n+1} \text{ (car } q > q_{n+1}).$$

D'où

$$p > p_{n+1}.$$

• Si n est pair, on a

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}},$$

d'où

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p}{q} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}},$$

ainsi

$$\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n},$$

ce qui entraine

$$\frac{pq_n - qp_n}{qq_n} < \frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{qq_{n+1}} = \frac{1}{q_nq_{n+1}},$$

d'où

$$(pq_n - qp_n)q_{n+1} < q.$$

Puisque $(pq_n - qp_n)$ est un entier strictement positif, donc $q > q_{n+1}$.

D'autre part, puisque on a

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p}{q},$$

alors

$$pq_n > qp_n > q_{n+1}p_n \text{ (car } q > q_{n+1}),$$

donc

$$pq_n \geq q_{n+1}p_n + 1,$$

et comme

$$1 = p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1},$$

en remplaçant, on trouve

$$pq_n > p_{n+1}q_n.$$

Ainsi

$$p > p_{n+1}.$$

■

Théorème 2.2.4 *(Théorème de Dirichlet)*

Soit x un réel irrationnel, alors il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1 *Ce théorème est une conséquence directe de théorème* 2.2.3.

Remarque 2.2.2 *On propose ci-dessous une seconde démonstration du théorème de Dirichlet, en utilisant le principe des tiroirs suivant :*

Si n tiroirs, sont occupés par $n+1$ objets, alors il y'a au moins un tiroir, occupé par plus d'un objet.

Preuve. Soit x un nombre irrationnel quelconque et $n \in \mathbb{N}$, convenons de noter la partie fractionnaire d'un nombre x par $\{x\}$, tel que $\{x\} = x - [x]$.

Considérons les parties fractionnaires $\{0.x\}$,$\{1.x\}$,$\{2.x\}$,...$\{n.x\}$, appartenant tous à $[0, 1[$, qui est réunion des n intervalles disjoints de la forme $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right[\forall j = 1..., n$.

On peut maintenant appliquer le principe des tiroirs où :

- les sous intervalles sont les tiroirs.
- les parties fractionnaires sont les objets à placer.

Alors il existe un sous intervalle qui contiendra forcément deux parties fractionnaires qu'on note $\{kx\}$ et $\{lx\}$ où $0 \leq k < l < n$, mais que la différence entre $(k - l)x$ et un certain entier p ne dépasse pas $\frac{1}{n}$ (car la longueur de chaque sous intervalle c'est $\frac{1}{n}$).

Appellons $q = k - l$, on obtient :

$$0 < |qx - p| < \frac{1}{n},$$

en divisant par q on trouve

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn},$$

comme k et l sont inférieurs à n, on déduit que $q < n$, d'où :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

■

Remarque 2.2.3 *Ce résultat est meilleur que celui obtenu par les approximations décimales, puisque les fractions décimales approchent x avec une précision de l'ordre $\frac{1}{q}$, et le théorème de Dirichlet propose une approximation de l'ordre $\frac{1}{q^2}$.*

Remarque 2.2.4 *La puissance de q que nous avons trouvé au théorème de Dirichlet ne peut pas être remplacée, elle est dite optimale, ça sera l'objet de notre prochain théorème.*

Définition 2.2.1 *(Nombre algébrique)*

Un nombre algébrique réel est un nombre réel qui est racine d'une équation polynomiale non nulle à coefficients rationnels.

Théorème 2.2.5 *(Théorème de Roth)*

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique et irrationnel. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) tels que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}. \tag{2.2.4}$$

Théorème 2.2.6 *De deux réduites consécutives de x, l'une d'entre elles au moins (éventuellement les deux), par exemple $\frac{p}{q}$, vérifie l'inégalité : $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$.*

Preuve. Soient $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ deux réduites consécutives d'un $x \in \mathbb{R}$.

Montrons pour tout $n \geq 0$ au moins l'une de ces deux inégalités est vérifiée

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2}, \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Supposons par l'absurde que $\exists\ n \geq 0$ tel que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{et} \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Ainsi

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| &= \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \\
&= \left| \frac{p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} \right| \\
&= \frac{1}{q_n q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Par comparaison

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n+1}^2}\right),$$

en simplifiant, on obtient

$$q_{n+1}^2 + q_n^2 - 2q_n q_{n+1} \leq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$(q_{n+1} - q_n)^2 \leq 0,$$

le seul cas possible est : $q_{n+1} - q_n = 0$, or d'après la proposition 1.3.3, pour tout $n \geq 1$, $q_n < q_{n+1}$.

D'où la contradiction pour $n \geq 1$. Ce théorème est démontré pour tout $n \geq 1$.

Pour $n = 0$, on a $q_1 = q_0$ si et seulement si $a_1 = q_1 = q_0 = 1$, donc si $a_1 \neq 1$, on obtient encore une contradiction.

Le cas où $n = 0$ et $a_1 = 1$, dans ce cas $x = [a_0, 1, a_2, a, ...]$.

D'après le théorème 2.2.1 on a :

$$\left|\frac{p_1}{q_1} - x\right| < \left|\frac{p_2}{q_2} - x\right| < \frac{1}{q_2^2} = \frac{1}{(a_2+1)^2} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2.1^2} = \frac{1}{2q_1^2}.$$

Ainsi, même pour $n = 0$, $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_1}{q_1}$ vérifie l'inégalité donnée dans l'énoncé. Finalement le théorème est vraie pour tout $n \geq 0$. ∎

Théorème 2.2.7 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $0 < q < q_{n+1}$ on a :*

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|. \tag{2.2.5}$$

De plus, l'inégalité devient une égalité si et seulement si $p = p_n$ et $q = q_n$.

Preuve. Considérons le système linéaire d'inconnus u et v :

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p = up_n + vp_{n+1} \\ q = uq_n + vq_{n+1} \end{cases}.$$

Il admet un unique couple solution $(u, v) \in \mathbb{N}^2$, car

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^n.$$

Par la régle de Cramer, on obtient :

$$u = (-1)^n (pq_{n+1} - qp_{n+1}), \ v = (-1)^n (p_n q - q_n p).$$

Notons que $u \neq 0, v \neq 0$ car :

• Si $u = 0$ alors $pq_{n+1} = qp_{n+1}$, donc q_{n+1} divise qp_{n+1}, mais $PGCD(p_{n+1}, q_{n+1}) = 1$ donc q_{n+1} divise q, ce qui contredit l'hypothèse $0 < q < q_{n+1}$.

• Si $v = 0$, on a $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, qui correspond au cas particulier du théorème.

On a aussi u et v sont de signe contraire, puisque on a :

$$0 < q = uq_n + vq_{n+1} < q_{n+1}.$$

De même $(q_n x - p_n)$ et $(q_{n+1}x - p_{n+1})$ sont de signe contraire (car x est compris entre $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$). Il s'ensuit que $u\,(q_n x - p_n)$ et $v\,(q_{n+1}x - p_{n+1})$ sont de même signe, donc la valeur absolue de leurs somme est la somme de leurs valeurs absolues.

Calculons d'abord $qx - p$:

$$qx - p = (uq_n + vq_{n+1})\,x - (up_n + vp_{n+1}) = u\,(q_n x - p_n) + v\,(q_{n+1}x - p_{n+1})\,,$$

alors

$$|qx - p| = |u\,(q_n x - p_n)| + |v\,(q_{n+1}x - p_{n+1})| \geq |u(q_n x - p_n)| \geq |q_n x - p_n|.$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Remarque 2.2.5 *Ce théorème est une définition du sens de meilleure approximation de x, elle nous donne équivalence entre les deux notions "réduite" et "meilleure approximation".*

Corollaire 2.2.1 *Pour $n > 1$, $0 < q \leq q_n$ et $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, alors :*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

Preuve. Soit $n > 1$,

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \frac{1}{q_n}\,|q_n x - p_n| \\ &< \frac{1}{q_n}\,|qx - p| \ \text{ (d'aprés le théorème 2.2.7).} \\ &\leq \frac{1}{q}\,|qx - p| \ \text{ (car } 0 < q \leq q_n\text{).} \\ &= \left| x - \frac{p}{q} \right|. \end{aligned}$$

■

Nous venons de montrer, qu'étant donnée une réduites $\frac{p_n}{q_n}$, $n > 1$ d'une fractions continue régulière d'un nombre irrationnel x, il n'existe aucun autre rationnel $\frac{p}{q}$ où $0 < q < q_n$ qui approche x mieux que $\frac{p_n}{q_n}$.

Théorème 2.2.8 *Soient p et $q > 0$ deux entiers. Si $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, alors $\frac{p}{q}$ est une réduite de x.*

Preuve. Soit n un entier tel que $q_n \leq q < q_{n+1}$.

On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|(\frac{p}{q} - x) - (\frac{p_n}{q_n} - x)\right| \\ &\leq \left|x - \frac{p}{q}\right| + \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q}\left|qx - p\right| + \frac{1}{q_n}\left|q_n x - p_n\right| \\ &\leq (\frac{1}{q} + \frac{1}{q_n})\left|qx - p\right| \quad \text{(d'après le théorème 2.2.7).} \end{aligned}$$

D'où en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} \left|pq_n - qp_n\right| &\leq (q + q_n)\left|qx - p\right| \\ &< 2q \times \frac{1}{2q} = 1. \end{aligned}$$

Comme $(pq_n - qp_n)$ est un entier, ceci implique $pq_n - qp_n = 0$ et donc $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ est bien une réduite de x. ■

Exemple 2.2.1 *Prenons l'exemple de $e \approx 2,718281828$, son développement en fraction continue régulière est : $[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ...]$, puis on calcule les réduites $\frac{p_n}{q_n}$ en utilisant la relation* (1.3.1)

n	$\frac{p_n}{q_n}$	approximation de $\left\lvert e - \frac{p_n}{q_n} \right\rvert$	approximation de $\frac{1}{2q_n^2}$	$\left\lvert e - \frac{p_n}{q_n} \right\rvert < \frac{1}{2q_n^2}$
0	2	0,718281	0,5	Fausse
1	3	0,281718	0,5	Vraie
2	$\frac{8}{3}$	0,051615	0,555555	Vraie
3	$\frac{11}{4}$	0,031718	0,031250	Fausse
4	$\frac{19}{7}$	0,003996	0,010204	Vraie
5	$\frac{87}{32}$	0,000468	0,000488	Vraie
6	$\frac{106}{39}$	0,000332	0,000328	Fausse

-Tableau 2.2- Théorème 2.2.6 appliqué au nombre e -

Le théorème prochain propose de préciser encore plus nos approximations, grâce aux fractions continues, qui est le théorème de Hurwitz, mais avant de l'énoncer on aura besoin d'un lemme, bien que simple, mais trés utile dans la preuve de ce théorème.

Lemme 2.2.1 *Si $x > 1$ et $x + x^{-1} < \sqrt{5}$ alors $x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $x^{-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Preuve. Supposons

$$x + \frac{1}{x} < \sqrt{5},$$

ce qui est équivalent à

$$x^2 - \sqrt{5}x + 1 < 0,$$

donc

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

d'autre part

$$\frac{1}{x} > \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Théorème 2.2.9 *(Théorème de Hurwitz) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors l'une au moins des trois réduites consécutives de x vérifie :*

$$\left\lvert x - \frac{p}{q} \right\rvert < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \tag{2.2.6}$$

Preuve. Soient $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ trois réduites consécutives d'un $x \in \mathbb{R}$.

Montrons pour tout $n \geq 3$, au moins l'une de ces trois inégalités est vérifiée :

$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{n-1}^2}, \qquad \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}, \qquad \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2}.$$

Supposons par l'absurde que $\exists n \geq 3$ tel que

$$|x - r_k| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2} \text{ pour } k \in \{n-1, n, n+1\},$$

comme x est entre r_{k-1} et r_k, donc :

$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n-1}q_n},$$

d'autre part on a

$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| + \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{q_{n-1}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{q_n^2},$$

par comparaison

$$\frac{1}{q_{n-1}q_n} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n-1}^2}\right),$$

en simplifiant on trouve

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{q_{n-1}}{q_n} < \sqrt{5},$$

l'inégalité est stricte car le nombre de gauche est un rationnel, en utilisant le lemme 2.2.1, on obtient :

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{q_{n-1}}{q_n} > \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

par analogie, on obtient

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} < \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

finalement

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{q_{n+1}}{q_n} &= \frac{a_n q_n + q_{n-1}}{q_n} \\
&\geq \frac{q_n + q_{n-1}}{q_n} = 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} \\
&> 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Cette contradiction prouve le théorème. ■

Corollaire 2.2.2 *Tout irrationnel x admet une infinité d'approximations par des fractions irréductibles p/q qui vérifient :*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Preuve. Le corollaire est une conséquence du théorème précédent, car un nombre irrationnel admet une infinité de réduites distinctes. ■

Exemple 2.2.2 *Reprenons l'exemple du nombre e*

n	$\frac{p_n}{q_n}$	approximation de $\left\|e - \frac{p_n}{q_n}\right\|$	approximation de $\frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$	$\left\|e - \frac{p_n}{q_n}\right\| < \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$
0	2	0,718281	0,447213	Fausse
1	3	0,281718	0,447213	Vraie
2	$\frac{8}{3}$	0,051615	0,049690	Fausse
3	$\frac{11}{4}$	0,031718	0,027950	Fausse
4	$\frac{19}{7}$	0,003996	0,009126	Vraie
5	$\frac{87}{32}$	0,000468	0,00436	Fausse
6	$\frac{106}{39}$	0,000332	0,000294	Fausse

-Tableau 2.2- Théorème de Hurwitz appliqué au nombre e-

Proposition 2.2.1 *La constante $\sqrt{5}$ dans le théorème de Hurwitz est optimale. Plus précisément pour tout $C > \sqrt{5}$, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que :*

$$\left|\phi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Cq^2}. \tag{2.2.7}$$

Où : ϕ est le nombre d'or $\left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Preuve. Soit

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, ...],$$

on peut remarquer que $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, donc l'équation vérifiée par ϕ est :

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

D'autre part, puisque $a_i = 1, \forall i \geq 1$, donc

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \text{ et } q_n = q_{n-1} + q_{n-2},$$

avec $p_0 = q_0 = q_1 = 1, p_1 = 2$.

Ainsi définit on reconnait la suite de Fibonnacci

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}.$$

Ainsi on peut déduire que : $p_n = F_{n+1}$ et $q_n = F_n$. Les réduites de x sont donc $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ (Le quotient de deux nombres consécutives de Fibonnacci).

On applique maintenant la proposition 1.3.2

$$\left|\phi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2(\phi + \frac{F_{n-1}}{F_n})},$$

par passage a la limite quand $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\left|\phi - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \frac{1}{q_n^2(\phi + \frac{1}{\phi})} \\ &= \frac{1}{q_n^2(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} > \frac{1}{Cq_n^2} \text{ (car } C > \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Cette contradiction prouve la proposition. ■

2.3 Nombres équivalents

Définition 2.3.1 *: Soit x, $y \in \mathbb{R}$. On dit que x et y sont équivalents (noté $x \equiv y$) s'il existe des entiers a, b, c et d tels que :*

$$x = \frac{ay+b}{cy+d} \quad \text{avec } ad - bc = \pm 1. \tag{2.3.1}$$

Proposition 2.3.1 *La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence.*

Preuve. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on vérifie les trois propriétés suivantes :

Réflexivité : Il s'agit de vérifier que $x \equiv x$.

On peut écrire

$$x = \frac{1.x + 0}{0.x + 1} \text{ et } 1.1 - 0.0 = 1.$$

Symétrie : Il s'agit de vérifier si $x \equiv y$ alors $y \equiv x$.

Si
$$x = \frac{ay+b}{cy+d} \text{ et } ad - bc = \pm 1,$$
alors
$$y = \frac{-dx+b}{cx-a} = \frac{Ax+B}{Cx+D}.$$
Avec $AD - BC = (-d)(-a) - bc = da - bc = \pm 1$.

Transitivité : Il s'agit de vérifier si $x \equiv y$ et $y \equiv z$ alors $x \equiv z$.

Si
$$x = \frac{ay+b}{cy+d} \text{ avec } ad - bc = \pm 1,$$
et
$$y = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} \text{ avec } a'd' - b'c' = \pm 1,$$
alors, en remplaçant y par son expression dans x
$$x = \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+d} = \frac{(aa'+bc')\,z + ab' + bd'}{(ca'+dc')\,z + cb' + dd'} = \frac{Az+B}{Cz+D},$$
avec
$$\begin{aligned} AD - BC &= (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc') \\ &= aa'dd' + bb'cc' - a'bcd' - ab'c'd \\ &= a'd'(ad-bc) - b'c'(ad-bc) \\ &= (ad-bc)(a'd'-b'c') \\ &= \pm 1. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.2 *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*
$$[a_0, a_1, ..., a_n, x] \equiv [b_0, b_1, ..., b_m, x]\,. \tag{2.3.2}$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$, On pose :

$$y_1 = [a_0, a_1, ..., a_n, x] = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}},$$

avec $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$.

Et

$$y_2 = [b_0, b_1, ..., b_m, x] = \frac{p'_m x + p'_{m-1}}{q'_m x + q'_{m-1}},$$

avec $p'_m q'_{m-1} - p'_{m-1} q_m = \pm 1$.

On exprime x en fonction de y_1 :

$$x = \frac{p_{n-1} - y_1 q_{n-1}}{y_1 q_n - p_n}.$$

On remplace dans y_2, on trouve :

$$y_2 = \frac{\left(p'_m q_{n-1} - q_n p'_{m-1}\right) y_1 + \left(p_n p'_{m-1} - p'_m p_{n-1}\right)}{\left(q'_m q_{n-1} - q_n q'_{m-1}\right) y_1 + \left(p_n q'_{m-1} - q'_m p_{n-1}\right)},$$

avec

$$\begin{aligned}
&\left(p'_m q_{n-1} - q_n p'_{m-1}\right)\left(p_n q'_{m-1} - q'_m p_{n-1}\right) - \left(p_n p'_{m-1} - p'_m p_{n-1}\right)\left(q'_m q_{n-1} - q_n q'_{m-1}\right) \\
&= \left(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}\right)\left(p'_m q'_{m-1} - q'_m p'_{m-1}\right) \\
&= \pm 1.
\end{aligned}$$

Donc y_1 et y_2 sont équivalents. ∎

Ce corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 2.3.1 *Deux réels qui ont le même développement en fraction continue à partir d'un certain rang sont équivalents.*

La réciproque de ce corollaire est également vraie. On a en conclusion le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *(admis, voir [5]) Deux réels irrationnels sont équivalents si et seulement si leurs développements en fraction continue coïncident à partir d'un certain rang.*

2.4 Au delà du théorème de Hurwitz

On peut affiner la constante d'approximation dans le théorème de Hurwitz, si on se restreint à certaines classes d'équivalences, en supprimant à chaque fois les classes d'équivalence qui nous donne l'optimalité de la constante d'approximation.

Théorème 2.4.1 *(Le théorème d'Hermite)*
Si un nombre irrationnel x n'est pas équivalent à $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors il existe une infinité de fractions irréductibles p/q tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8}q^2}. \tag{2.4.1}$$

Théorème 2.4.2 *Si un nombre irrationnel x n'est pas équivalent à $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ni à $\sqrt{2}$ alors pour tout réel C tel que $0 < C \leq \frac{\sqrt{221}}{5}$, il existe une infinité de fractions irréductibles p/q tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Cq^2}. \tag{2.4.2}$$

CHAPITRE 3

Fractions continues périodiques

On a vu au chapitre 1 que le développement en fraction continue régulière d'un irrationnel est infini. Dans ce chapitre, on introduira les irrationnels quadratiques et on verra par le théorème de Lagrange, que leurs fractions continues sont périodiques à partir d'un certain rang. Un cas particulier de ce théorème est le théorème de Galois sur les fractions continues qui sont périodiques dès le premier terme (purement périodique). Et comme applications on verra le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$ (où D est un entier positif, et n'est pas un carré parfait) et la résolution de l'équation de Pell-Fermat.

3.1 Les irrationnels quadratiques

Définition 3.1.1 *Un irrationnel quadratique est un nombre réel de la forme* $A + B\sqrt{D}$ *avec* $A \in \mathbb{Q}$, $B \in \mathbb{Q}^*$ *et* D *est un entier positif qui n'est pas un carré parfait.*

Proposition 3.1.1 *Si* $A_1 + B_1\sqrt{D} = A_2 + B_2\sqrt{D}$. *Alors* $A_1 = A_2$ *et* $B_1 = B_2$.

Preuve.

$$A_1 + B_1\sqrt{D} = A_2 + B_2\sqrt{D} \iff (A_1 - A_2) = (B_2 - B_1)\sqrt{D}.$$

Si $B_1 \neq B_2$, on obtient :

$$\sqrt{D} = \frac{A_1 - A_2}{B_2 - B_1} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est faux car D n'est pas un carré parfait. D'où $B_1 = B_2$ et $A_1 - A_2 = 0$, donc $A_1 = A_2$. ■

Proposition 3.1.2 *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors x est quadratique si et seulement si x est racine d'une équation de second degré à coefficients entiers.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons que x est quadratique. Alors x s'écrit $x = A + B\sqrt{D}$, avec $A \in \mathbb{Q}$, $B \in \mathbb{Q}^*$ et $D \in \mathbb{N}^*$ qui n'est pas un carré parfait. Ce réel x vérifie alors $(x - A)^2 = B^2 D$ qui se ramène (après développement) a une équation de second degré à coefficients entiers.

($\Longleftarrow$) Si x est une racine d'une équation de second degré à coefficients entiers ; càd qu'il vérifie

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ avec } a \in \mathbb{Z}^*, b, c \in \mathbb{Z} \ ;$$

alors on a :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac,$$

ce qui montre bien que x est quadratique.

La proposition est démontrée. ■

Remarque 3.1.1 *On peut prendre l'énoncé de la proposition* 3.1.2 *comme définition d'un nombre irrationnel quadratique.*

Définition 3.1.2 *On dit qu'un irrationnel quadratique x est réduit si $x > 1$ et son conjugué $\overline{x}$ vérifie $-1 < \overline{x} < 0$.*

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 3.1.3 *Si $x_1 = A_1 + B_1\sqrt{D}$ et $x_2 = A_2 + B_2\sqrt{D}$.*

Avec A_1, A_2, B_1, $B_2 \in \mathbb{Q}$, $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ et $D \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait , sont des irrationnels quadratiques, alors on a :

1) $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$.

2) $\overline{x_1 - x_2} = \overline{x_1} - \overline{x_2}$.

3) $\overline{x_1 . x_2} = \overline{x_1} . \overline{x_2}$.

4) $\overline{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} = \frac{\overline{x_1}}{\overline{x_2}}$.

3.2 Le théorème de Lagrange

Définition 3.2.1 *On dit qu'un développement en fraction continue $[a_0, a_1, \ldots]$ d'un réel x est périodique s'il existe deux entiers strictement positifs L et k tels que pour tout $l \geq L$, on ait $a_{l+k} = a_l$. Dans un tel cas, on écrit :*

$$x = [a_0, a_{1,\ldots,} a_{L-1}, \overline{a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}}] \,, \tag{3.2.1}$$

et on dira que k est la période de ce développement.

- Si $L = 0$, on dira que x est purement périodique.

Théorème 3.2.1 *(Théorème de Lagrange) Le développement en fraction continue d'un irrationnel x est périodique si et seulement si x est un irrationnel quadratique.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Si x a un développement périodique $[a_0, a_{1,\ldots,} a_{L-1}, \overline{a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}}]$, notons $y = [\overline{a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}}]$.

On a donc :

$$y = [a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}, y] = \frac{p^{'} y + p^{''}}{q^{'} y + q^{''}},$$

avec $\frac{p\prime}{q\prime}$ et $\frac{p"}{q"}$ sont les deux dernières réduites de $[a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}, y]$. Ce qui donne :

$$y^2 q^{'} + (q^{''} - p^{'})y - p^{''} = 0, \tag{1}$$

et montre que y est quadratique.

Mais, on a

$$x = [a_0, \ldots, a_{L-1}, y] = \frac{p_{L-1} y + p_{L-2}}{q_{L-1} y + q_{L-2}},$$

avec $\frac{p_{L-1}}{q_{l-1}}$ et $\frac{p_{L-2}}{q_{L-2}}$ sont les deux dernières réduites de $[a_0, \ldots, a_{L-1}, y]$.

Ce qui entraine que :

$$y = \frac{p_{L-2} - q_{L-2} x}{q_{L-1} x - p_{L-1}}.$$

On remplace y par son expression dans (1), on obtient que x est solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des entiers en fonction de $p_{L-1}, p_{L-2}, q_{L-1}, q_{L-2}$.

D'où x est un irrationnel quadratique.

($\Leftarrow$) Si x est un irrationnel quadratique : x satisfait donc une équation quadratique avec des coefficients entiers. Notons Δ son discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$).

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } \; a > 0, \, \Delta > 0, \tag{2}$$

soit $x = [a_0, a_{1,\ldots,}x_n]$, alors

$$x = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}}, \quad n \geq 2,$$

avec $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ sont les deux dernières réduites de $[a_0, a_1, \ldots, x_n]$.

On remplace x par son expression dans l'équation (2), après calculs on obtient :

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = 0. \tag{3}$$

avec

$$\begin{cases} a_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ b_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2} \\ c_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2 \end{cases}.$$

Si $a_n = 0$, on aura :

$$ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = 0,$$

càd :

$$a\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) + c = 0.$$

Ainsi p_{n-1}/q_{n-1} est racine rationnelle de (2) ce qui est en contradiction avec le fait que x est irrationnel. D'où $a_n \neq 0$.

Posons maintenant $\Delta_n = b_n^2 - 4a_nc_n$. On peut vérifier que $\Delta_n = \Delta > 0$, donc x_n est bien une racine irrationnelle d'une équation quadratique à coefficients entiers a_n, b_n et c_n, qui est la suivante :

$$a_n y^2 + b_n y + c_n = 0, \qquad a_n > 0 \text{ et } \Delta_n > 0.$$

Montrons maintenant qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ tel que l'on ait pour tous $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} |a_n| < A \\ |b_n| < B \\ |c_n| < C \end{cases}.$$

D'aprés le théoreme 2.2.4, on a :

$$\left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - x\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2}.$$

Il existe donc $\delta \in \mathbb{R}$, avec $|\delta| < 1$, tel que :

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - x = \frac{\delta}{q_{n-1}^2}, \text{ avec } |\delta| < 1,$$

donc

$$p_{n-1} = xq_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}}.$$

En remplaçant p_{n-1} par son expression dans la formule de a_n, on trouve :

$$\begin{aligned} a_n &= a(xq_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}})^2 + bq_{n-1}(xq_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}})q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ &= (ax^2 + bx + c)q_{n-1}^2 + 2ax\delta + b\delta + a\frac{\delta^2}{q_{n-1}^2} \\ &= \left(2ax\delta + a\frac{\delta}{q_{n-1}^2} + b\right)\delta. \end{aligned}$$

En se servant de $|\delta| < 1$, il vient que :

$$\begin{aligned} |a_n| &< \left|2ax + b + \frac{a\delta}{q_{n-1}^2}\right| \\ &< |2ax + b + a\delta| \ (\text{ car } q_{n-1}^2 > 1, n \geq 2) \\ &< \ 2\,|ax| + |b| + |a|\,|\delta| \\ &< 2\,|ax| + |b| + |a| = A. \end{aligned}$$

Remarquons que $c_n = a_{n-1,}$ cela va nous éviter de refaire les même calculs. En effet $|c_n| = |a_{n-1}| < A = C$.

Pour la suite $(b_n)_n$, on utilise le fait que $\Delta_n = \Delta$. On a :

$$\begin{aligned} b_n^2 - 4a_nc_n = b^2 - 4ac& \\ &\Longleftrightarrow b_n^2 = 4a_nc_n + b^2 - 4ac \\ &\Rightarrow \left|b_n^2\right| \leq 4\,|a_n|\,|c_n| + |\Delta| \\ &\Rightarrow |b_n| < \sqrt{4A^2 + \Delta} = B. \end{aligned}$$

On vient de montrer que les suites d'entiers $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ sont bornées ; par conséquant chacune d'elles prend un nombre fini de valeurs. D'où la suite $(a_n, b_n, c_n)_n$ prend aussi un nombre fini de valeurs. D'où il existe i, j et k trois indices deux à deux distincts tels que: $(a_i,b_i, c_i) = (a_j, b_j, c_j) = (a_k,b_k, c_k)$ ainsi les réels x_i, x_j, x_k sont solutions de la même équation (3), comme celle-ci n'admet que deux solutions, donc deux d'entre elles sont égaux. Sans perte de généralité, supposons que $x_i = x_j$.

Puisque le développement en fraction continue d'un irrationnel est unique, en identifiant les développements x_i et x_j, on obtient : $a_i = a_j$, $a_{i+1} = a_{j+1}, \ldots$

Ce qui montre que le développement de x est périodique. ∎

3.3 Le théorème de Galois

Théorème 3.3.1 *(Théorème de Galois) Un irrationnel quadratique x est purement périodique si et seulement s'il est réduit.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit x est un irrationnel quadratique avec développement en fraction continue purement périodique. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$x = [\overline{a_0, a_{1,\ldots,}a_n}] = [a_0, a_{1,\ldots,}a_n, x] = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}},$$

où $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ sont les deux dernières réduites de $[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}]$.

En développant cette dernière, on obtient :

$$q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1} = 0. \tag{1}$$

Soit

$$y = [\overline{a_n, a_{n-1,\ldots,}a_0}] = [a_n, a_{n-1,\ldots,}a_0, y] = \frac{yp_n' + p_{n-1}'}{yq_n' + q_{n-1}'},$$

avec $\frac{p_n'}{q_n'}$ et $\frac{p_{n-1}'}{q_{n-1}'}$ sont les deux dernières réduites de $[\overline{a_n, a_{n-1,\ldots,}a_0}]$.

Mais d'après la proposition 1.3.4, on a:

$$\frac{p_n'}{q_n'} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \text{ et } \frac{p_{n-1}'}{q_{n-1}'} = \frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

D'où :

$$y = \frac{yp_n + q_n}{yp_{n-1} + q_{n-1}}.$$

Ce qui donne en développant :

$$p_{n-1}y^2 - (p_{n-1} - q_n)y - q_n = 0.$$

D'où

$$q_n\left(-\frac{1}{y}\right)^2 + (p_{n-1} - q_n)\left(-\frac{1}{y}\right) - p_{n-1} = 0, \tag{2}$$

de (1) et (2) on déduit x et $-\frac{1}{y}$ sont les deux racines de la même équation quadratique

$$q_n\alpha^2 - (p_{n-1} - q_n)\alpha - p_{n-1} = 0.$$

Et puisque $x \neq -\frac{1}{y}$ (car x et $-\frac{1}{y}$ sont de signes différents) alors x et $-\frac{1}{y}$ sont conjugués, càd $\overline{x} = -\frac{1}{y}$.

Enfin, comme $y > 1$ alors $\overline{x} = -\frac{1}{y} \in]-1, 0[$.

Ce qui montre bien que x est réduit.

($\Leftarrow$) Soit x est un irrationnel quadratique réduit.

Posons :

$x_0 = x$ et pour $n \geq 1$; $a_n = [x_n]$, $\quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$ donc $\frac{1}{x_{n+1}} = x_n - a_n$.

On va montrer par récurrence que tout les x_n sont réduits. Comme $x_n > 1$, on doit montrer que $-1 < \overline{x_n} < 0$, raisonnons alors par récurrence :

- Pour $n = 0$, $x_0 = x$ est réduit par hypothèse.
- Supposons que $-1 < \overline{x_n} < 0$ et montrons que $-1 < \overline{x_{n+1}} < 0$.

On a $\overline{x_{n+1}} = \overline{\left(\frac{1}{x_n - a_n}\right)} = \frac{1}{\overline{x_n} - a_n}$; d'où $-1 < \overline{x_{n+1}} < 0$.

Ce qui achève notre récurrence.

Maintenant, puisque $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ $(\forall n \geq 1)$, on a $\overline{x_n} = \frac{1}{\overline{x_{n-1}} - a_{n-1}}$; d'où $-\frac{1}{\overline{x_n}} = a_{n-1} - \overline{x_{n-1}}$. Ce qui entraine (puisque $-1 < x_{n-1} < 0$) que $a_{n-1} = \left[-\frac{1}{\overline{x_n}}\right]$ $(\forall n \geq 1)$.

Etant donné que x est un irrationnel quadratique, le théorème de Lagrange assure que x est périodique à partir d'un certain rang et il existe donc deux entiers distincts i et j tels que $x_i = x_j$.

Ce qui entraine $\left[-\frac{1}{\overline{x_i}}\right] = \left[-\frac{1}{\overline{x_j}}\right]$, càd $a_{i-1} = a_{j-1}$, ce qui donne $x_{i-1} = x_{j-1}$.

Par récurrence on obtient :

$$x_{i-2} = x_{j-2},\ x_{i-3} = x_{j-3}, ..., x_0 = x_{j-i},$$

donc

$$x_0 = x = [a_0, a_{1,...,}a_{j-i-1}, x_{j-i}] = [a_0, a_{1,...,}a_{j-i-1}, x_0] = [\overline{a_0, a_{1,...,}a_{j-i-1}, a_{j-i-1}}]\ ;$$

ce qui montre que le développement en fraction continue de x est purement périodique. Ce théorème est démontré. ■

3.4 Développement de $\sqrt{D}$ en fraction continue régulière

Théorème 3.4.1 *Soit D un entier positif qui n'est pas un carré parfait. Alors le développement en fraction continue du nombre $\sqrt{D}$ est de la forme :*

$$\sqrt{D} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, ..., a_3, a_2, a_1, 2a_0}\right]. \tag{3.4.1}$$

Preuve. Soit $D \in \mathbb{N}^*$ qui n'est pas un carré parfait.
Posons $a_0 = \left[\sqrt{D}\right]$, $y = a_0 + \sqrt{D}$ et $\overline{y} = a_0 - \sqrt{D}$.
On a $y > 1$ et $\overline{y} = a_0 - \sqrt{D} = \left[\sqrt{D}\right] - \sqrt{D} \in]-1, 0[$.

Ainsi y est réduit, et d'après le théorème de Galois il admet un développement en fraction continue purement périodique. En notant par $[a_0, a_1, ...]$ le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$y = a_0 + \sqrt{D} = \left[\overline{2a_0, a_1, a_2, ..., a_n}\right] = \left[2a_0, \overline{a_1, a_2, ..., a_n, 2a_0}\right].$$

Ce qui donne :

$$\sqrt{D} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, ..., a_n, 2a_0}\right]. \tag{1}$$

D'autre part, on a

$$\sqrt{D} - a_0 = \left[0, \overline{a_1, a_2, ..., a_n, 2a_0}\right],$$

ce qui entraine

$$\frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = \left[\overline{a_1, a_2, ..., a_n, 2a_0}\right]. \tag{2}$$

Mais

$$\frac{1}{\sqrt{D}-a_0} = -\frac{1}{y} = \left[\overline{a_n, a_{n-1}, ..., a_1, 2a_0}\right]. \tag{3}$$

(car le développement en fraction continue de $-\frac{1}{y'}$ est l'inverse de la période de y).

En identifiant entre (2) et (3), on obtient $a_n = a_1, a_{n-1} = a_2, ...$, puis on les remplace dans (1) et on obtient finalement :

$$\sqrt{D} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, ..., a_2, a_1, 2a_0}\right].$$

■

Remarque 3.4.1 *On appelle un développement en fraction continue du type* $[\overline{a_1, a_2, ..., a_2, a_1}]$ *un palindrôme.*

3.4.1 La longueur de la période du développement en fraction continue de $\sqrt{D}$

Soit $D \in \mathbb{N}^*$, qui n'est pas un carré parfait.

On note par $L(\sqrt{D})$ la longueur de la période du développement en fraction continue de $\sqrt{D}$.

Théorème 3.4.2 *On a :* $L(\sqrt{D}) \leq 2D$.

- Pour $D \leq 1000$, on écrit $D = a^2 + r$, où $a = \left[\sqrt{D}\right]$ et r : le reste. Alors $L(\sqrt{D}) \leq 2a$.
- Pour $D > 1000$, cette inégalité n'est pas toujour vraie. Par example, pour $D = 1726 = 41^2 + 45$, on a $L(\sqrt{D}) = 88 > 82 = 2a$.

Théorème 3.4.3 *On a :*

$$L(\sqrt{D}) = O(\sqrt{D}\log D).$$

3.4.2 Méthodes pour approcher la racine carré d'un entier positif

Méthode1 : cette méthode permet d'obtenir une fraction continue généralisée. C'est celle que Bombelli a utilisé pour calculer $\sqrt{13}$, puis Cataldi en fait de même avec $\sqrt{18}$.

Les étapes : Soit $D \in \mathbb{N}^*$, qui n'est pas un carré parfait

• On écrit $\sqrt{D} = a + r$ où $a = \left[\sqrt{D}\right]$ et r : le reste.

• On élève au carré les deux membres de l'équation $D = a^2 + 2ar + r^2$.

• On met r comme facteur : $D - a^2 = r(2a + r)$.

• On note $b = D - .a^2$, on obtient $r = \frac{b}{2a+r}$.

• On remplace à chaque fois r par $\frac{b}{2a+r}$, on peut continuer comme cela indifiniment, et on obtient :

$$\sqrt{D} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}.$$

Exemple 3.4.1 *Pour $D = 19$, on obtient :*

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \ddots}}}.$$

Méthode 2 : Reprenons l'exemple de $\sqrt{19}$, cette méthode permet d'obtenir sa fraction continue régulière. On pose $x = \sqrt{19}$. Ce qui donne $x^2 - 19 = 0 \qquad (1)$.

• On utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur $f_1(x) = x^2 - 19$, on trouve $f_1(4).f_1(5) < 0$ (il faut choisir les deux entiers les plus proches tels que $f_1(A).f_1(B) < 0$).

• Puis on fait le changement de variables en utilisant $\inf(A, B)$ comme suit : $x = 4 + \frac{1}{a}$.

• On remplace x dans (1), on obtient $3a^2 - 8a - 1 = 0 \qquad (2)$.

• On recommence la même procédure avec la nouvelle équation et ainsi de suite.

On résume la procédure par le tableau suivant

Etape	**Résultats**
1	$x^2 - 19 = 0,\ f_1(4).f_1(5) < 0,\ x = 4 + \frac{1}{a}$.
2	$3a^2 - 8a - 1 = 0,\ f_2(2).f_2(3) < 0,\ a = 2 + \frac{1}{b}$.
3	$5b^2 - 4b - 3 = 0,\ f_3(1).f_3(2) < 0,\ b = 1 + \frac{1}{c}$.
4	$2c^2 - 6c - 5 = 0,\ f_4(3).f_4(4) < 0,\ c = 3 + \frac{1}{d}$.
5	$5d^2 - 6d - 2 = 0,\ f_5(1).f_5(2) < 0,\ d = 1 + \frac{1}{e}$.
6	$3e^2 - 4e - 5 = 0,\ f_6(2).f_6(3) < 0,\ e = 2 + \frac{1}{f}$.
7	$f^2 - 8f - 3 = 0,\ f_7(8).f_7(9) < 0,\ f = 8 + \frac{1}{g}$.
8	$3g^2 - 8g - 1 = 0,\ f_8(g) = f_8(a)$.

On s'arrête à l'étape 8, puisque $a = g$, on déduit que la période de $\sqrt{19}$ est $\left[\overline{2,1,3,1,2,8}\right]$,ainsi

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\dots}}}}}} = \left[4, \overline{2,1,3,1,2,8}\right].$$

3.5 L'équation de Pell-Fermat

Définition 3.5.1 *L'équation de Pell-Fermat est une équation diophantienne de la forme*

$$x^2 - Dy^2 = +1. \tag{3.5.1}$$

$$x^2 - Dy^2 = -1. \tag{3.5.2}$$

Quelques remarques :

• Si l'on autorise de prendre D un carré parfait, l'équation (3.5.1) devient très facile à résoudre.

En effet si $D = d^2$ on a :

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 = 1 &\Longleftrightarrow x^2 - d^2y^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow (x + dy)(x - dy) = 1 \\ &\Longleftrightarrow (x + dy, x - dy) = (1,1) \text{ ou } (-1,-1) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = (1,0) \text{ ou } (-1,0). \end{aligned}$$

• Si (x,y) est solution, alors $(x,-y), (-x,y)$ et $(-x,-y)$ sont également des solutions. Donc on peut se restreindre à (x,y) avec x,y positifs.

• Si $y = 0$, on obtient deux couples de solutions $(1,0)$ et $(-1,0)$, c'est aussi des solutions triviales.

• Si (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sont deux solutions de (3.5.1), alors leurs composition $(x,y) = (x_1,y_1) \circ (x_2,y_2) := (x_1x_2 + Dy_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$ est également une solution, car on a :

$$\left(x_1^2 - Dy_1^2\right)\left(x_2^2 - Dy_2^2\right) = \left(x_1x_2 + Dy_1y_2\right)^2 - D\left(x_1y_2 + y_1x_2\right)^2 = 1.$$

Définition 3.5.2 *Une solution (x_1,y_1) de (3.5.1) est dite minimale si $x_1 > 0, y_1 > 0$, et pour toute autre solution (x,y) tel que $x > 0, y > 0$, on ait :*

$$x + y\sqrt{D} \geq x_1 + y_1\sqrt{D}.$$

Proposition 3.5.1 *Si* $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ *est une solution positive de* $x^2 - Dy^2 = \pm 1$. *Alors* $\frac{p}{q}$ *est une réduite pour* $\sqrt{D}$.

Preuve. On a :

$$p^2 - Dq^2 = \pm 1 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = D \pm \frac{1}{q^2} \geq 1 \Rightarrow p \geq q.$$

Ce qui entraine que :

$$\left|p - \sqrt{D}q\right| = \frac{1}{p + \sqrt{D}q} \leq \frac{1}{q\left(1 + \sqrt{D}\right)} < \frac{1}{2q}.$$

D'où

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Ceci entraine (en vertu du théorème 2.2.6) que $\frac{p}{q}$ est une réduite de $\sqrt{D}$. CQFD ■

Théorème 3.5.1 *Soit* n *la longueur de la période de* $\sqrt{D}$ *(*D *est un entier positif, qui n'est pas un carré parfait).*
La solution minimale de (3.5.1) *dans* $\mathbb{N}^{*2}$ *est donnée par :*

$$(x,y) = \begin{cases} (p_n, q_n) & \text{si } n \text{ est impair} \\ (p_{2n+1}, q_{2n+1}) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

La solution minimale de (3.5.2) *dans* $\mathbb{N}^{*2}$ *est donnée par :*

$$(x,y) = \begin{cases} (p_n, q_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{pas de solutions} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Preuve. D'après le théorème 3.4.1, le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$ est de la forme :

$$\sqrt{D} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, ..., a_n, 2a_0}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sqrt{D} &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0 + \sqrt{D}\right] \\ &= \frac{\left(a_0 + \sqrt{D}\right) p_n + p_{n-1}}{\left(a_0 + \sqrt{D}\right) q_n + q_{n-1}},\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$Dq_n + (a_0q_n + q_{n-1})\sqrt{D} = (a_0p_n + p_{n-1}) + p_n\sqrt{D},$$

comme q_n, $a_0q_n + q_{n-1}$, $a_0p_n + p_{n-1}$, p_n sont des entiers, et $\sqrt{D}$ est irrationnel, les deux membres sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} Dq_n = a_0p_n + p_{n-1} \\ a_0q_n + q_{n-1} = p_n \end{cases}.$$

D'où :

$$\begin{cases} p_{n-1} = Dq_n - a_0p_n \\ q_{n-1} = p_n - a_0q_n \end{cases}.$$

D'autre part on a : $p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (-1)^{n-1}$, ainsi :

$$p_n(p_n - a_0q_n) - q_n(Dq_n - a_0p_n) = (-1)^{n-1},$$

et par simplification on aura :

$$p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n-1},$$

il en résulte que :

- n impair $\Rightarrow p_n^2 - Dq_n^2 = 1$
- n pair $\Rightarrow p_n^2 - Dq_n^2 = -1$.

1er cas : n impair

On a (p_n, q_n) est une solution minimale pour l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$.

2eme cas : n pair

On a (p_n, q_n) est une solution minimale pour l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$, comme on peut aussi trouver une solution minimale pour l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$, en effet :

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n+1}, x_{2n+2}] \\ &= [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{2n+2}], \end{aligned}$$

ainsi

$$p_{2n+1}^2 - Dq_{2n+1}^2 = (-1)^{2n+1-1} = 1,$$

on conclut que (p_{2n+1}, q_{2n+1}) est une solution positive de $(3.5.2)$. ■

Théorème 3.5.2 *Soit* (x_1, y_1) *la solution minimale de* $(3.5.1)$ *.Alors* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *est une solution de* $(3.5.1)$ *si et seulement s'il existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tel que :*

$$\left| x + y\sqrt{D} \right| = \pm \left(x_1 + y_1\sqrt{D} \right)^n .$$

Exemple 3.5.1 *On cherche une solution minimale positive de l'équation* $x^2 - 23y^2 = 1$*.*

On calcul d'abord le développement en fraction continue de $\sqrt{23}$:

$$\sqrt{23} = \left[4, \overline{1, 3, 1, 8} \right] ,$$

comme on a vu au théoème 3.5.1, on doit passer par le calcul des réduites :

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{4}{1}, \ \frac{p_1}{q_1} = \frac{5}{1}, \ \frac{p_2}{q_2} = \frac{19}{4}, \ \frac{p_3}{q_3} = \frac{24}{5}, \ \frac{p_4}{q_4} = \frac{211}{44},$$

on vérifie, on obtient :

$$24^2 - 23 \ . \ 5^2 = 576 - 575 = 1.$$

Donc $(24, 5) = (p_3, q_3)$ est bien une solution minimale positive de l'équation, avec laquelle on peut retrouver les autres solutions positives, en effet :

$$\left(24 + 5\sqrt{23} \right)^2 = 1151 + 240\sqrt{23},$$

de sorte que $(1151, 240) = (p_7, q_7)$ est encore une solution de l'équation.

Par suite on a

$$\left(24 + 5\sqrt{23} \right)^3 = \left(1151 + 240\sqrt{23} \right) \left(24 + 5\sqrt{23} \right) = 55224 + 11515\sqrt{23}.$$

D'où $(55224, 11515) = (p_{11}, q_{11})$ vérifie encore l'équation de départ

$$(55224)^2 - 23\,(11515)^2 = 3049690176 - 23\,(132595225) = 1,$$

et ainsi de suite.

CHAPITRE 4

Développement du nombre e en fraction continue régulière

4.1 Les fonctions de Bessel

Définition 4.1.1 *La fonction gamma Γ d'Euler est définie, pour tout réel $x > 0$ par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{4.1.1}$$

La fonction gamma Γ vérifie les relations suivantes:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4.1.2}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{4.1.3}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4.1.4}$$

Définition 4.1.2 *Les fonctions de Bessel B_v sont définies pour tout $v > -1$, et tout $x \in \mathbb{C}$ par :*

$$B_v(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(v+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{4.1.5}$$

Ces fonctions B_v vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} B_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \sin x \\ B_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cos x \end{cases} . \tag{4.1.6}$$

Remarque 4.1.1 *La fonction de Bessel B_v $(v > 1)$ vérifie l'equation différentielle :*

$$x^2 y^{''} + xy' + (x^2 - v^2)y = 0. \tag{4.1.7}$$

Proposition 4.1.1 *Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et tout $v > 0$, on a :*

$$B_{v-1}(x) + B_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} B_v(x). \tag{4.1.8}$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{C}^*$ et $v > 0$. On a :

$$B_{v-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{v-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(v+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{x}{2}\right)^{v-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^k}{k!\Gamma(v+k)}. \tag{1}$$

et

$$B_{v+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{v+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(v+k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{x}{2}\right)^{v+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^k}{k!\Gamma(v+k+2)}. \tag{2}$$

On somme (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned} B_{v-1}(x) + B_{v+1}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{v-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(-\frac{x^2}{4})^k}{k!\Gamma(v+k)} + \frac{(\frac{x}{2})^2(-\frac{x^2}{4})^k}{k!\Gamma(v+k+2)} \right] \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{v-1} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^k}{k!\Gamma(v+k)} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^{k+1}}{k!\Gamma(v+k+2)} \right] \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{v-1} \left[\frac{1}{\Gamma(v)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^k}{k!\Gamma(v+k)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^k}{(k-1)!\Gamma(v+k+1)} \right] \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{v-1} \left[\frac{v}{\Gamma(v+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{v+k}{k!(v+k)\Gamma(v+k)} - \frac{k}{k!\Gamma(v+k+1)} \right) \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \right] \\ &= \left(\frac{2}{x}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^v \left[\frac{v}{\Gamma(v+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v}{k!\Gamma(v+k+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \right] \\ &= \frac{2v}{x} B_v(x). \end{aligned}$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Théorème 4.1.1 *Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et tout $v > -1$, on a :*

$$\frac{B_v(x)}{B_{v-1}(x)} = \frac{x}{2v-}\;\frac{x^2}{2(v+1)}\;{}_-\;\frac{x^2}{2(v+2)_{-\dots}}\;\frac{x^2}{2(v+n)_{-\dots}}. \tag{4.1.9}$$

Preuve. En divisant les deux memebres de (4.1.8) par $B_v(x)$, on obtient :

$$\frac{B_{v-1}(x)}{B_v(x)} = \frac{2v}{x} - \frac{B_{v+1}(x)}{B_v(x)},$$

En inversant les deux membres de cette dernière, il vient que :

$$\frac{B_v(x)}{B_{v-1}(x)} = \frac{1}{\frac{2v}{x} - \frac{B_{v+1}(x)}{B_v(x)}}. \tag{1}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_n(x) = i\frac{B_{v+n-1}(x)}{B_{v+n-2}(x)}$.

D'après (1), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha_n(x) = \frac{i}{\frac{2(v+n-1)}{x} - \frac{B_{v+n}(x)}{B_{v+n-1}(x)}} = \frac{1}{\frac{2(v+n-1)}{ix} + i^2\frac{B_{v+n}(x)}{iB_{v+n-1}(x)}} = \frac{1}{\frac{2(v+n-1)}{ix} + \alpha_{n+1}(x)}\cdots, \tag{2}$$

en réitérant (2) en partant de $n = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} i\frac{B_v(x)}{B_{v-1}(x)} &= \frac{1}{\frac{2v}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{B_{v+1}(x)}{B_v(x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{2v}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{2(v+1)}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{B_{v+2}(x)}{B_v(x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{2v}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{2(v+1)}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{2(v+2)}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{2(v+3)}{ix} + \cdots}. \end{aligned}$$

En multipliant par ix les numérateurs et dénominateurs de chaque fraction apparaissant dans le dernier développement en fraction continue, on obtient :

$$\begin{aligned} i\frac{B_v(x)}{B_{v-1}(x)} &= \frac{ix}{2v -}\;\frac{ix}{\frac{2(v+1)}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{2(v+2)}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{2(v+3)}{ix} + \cdots} \\ &= \frac{ix}{2v -}\;\frac{x^2}{2(v+1) +}\;\frac{ix}{\frac{2(v+1)}{ix} +}\;\frac{1}{\frac{2(v+3)}{ix}}\;+\cdots \\ &= \frac{ix}{2v}\;-\frac{x^2}{2(v+1)}\;-\;\frac{x^2}{2(v+2)}\;-\;\frac{x^2}{2(v+n)}\;-\dots \end{aligned} \tag{3}$$

Il ne reste qu'à diviser les deux membres de (3) par i pour obtenir la formule requise :

$$\frac{B_v(x)}{B_{v-1}(x)} = \frac{x}{2v-}\;\frac{x^2}{2(v+1)_-}\;\frac{x^2}{2(v+2)_-}\;\frac{x^2}{2(v+n)}\;{}_{-\dots}$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Exemple 4.1.1 *Pour $v = \frac{1}{2}$, en utilisant les relations* (4.1.6), *on trouve :*

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ddots - \cfrac{x^2}{2n+1 - \ddots}}}}. \tag{4.1.10}$$

En substituant dans cette dernière x par ix, on obtient :

$$\tan(ix) = i \tanh x = \frac{ix}{1_+} \frac{x^2}{3_+} \frac{x^2}{5_{+\cdots}}.$$

D'où :

$$\tanh x = \frac{x}{1_+} \frac{x^2}{3_+} \frac{x^2}{5_{+\cdots+}} \frac{x^2}{2n+1_{+\cdots}}.$$

Si $x \in \mathbb{Q}^*$ s'écrivant $x = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}^*)$, on obtient :

$$\tanh x = \tanh \frac{a}{b} = \frac{a}{b_+} \frac{a^2}{3b_+} \frac{a^2}{5b_{+\cdots+}} \frac{a^2}{(2n+1)b_{+\cdots}} \tag{4.1.11}$$

4.2 Le théorème fondamental

Théorème 4.2.1 *(Euler) Le développement en fraction continue régulière du nombre e est donné par :*

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, ...] = \left[2, \overline{1, 2n, 1}\right]_{n \geq 1}. \tag{4.2.1}$$

Plus explicitement, on a $e = [a_0, a_1, \ldots]$, avec $a_0 = 2$, $a_{3k-2} = 1$, $a_{3k-1} = 2k$, $a_{3k} = 1$ $(\forall k \geq 1)$.

Preuve. En prenant $a = 1$, $b = 2$ dans la relation (4.1.11), on obtient :

$$\tanh \frac{1}{2} = \frac{1}{2_+} \frac{1}{6_+} \frac{1}{10_{+\ldots+}} \frac{1}{2\,(2n+1)_{+\ldots}}.$$

D'où :

$$\frac{1}{\tanh \frac{1}{2}} = \frac{e+1}{e-1} = [2, 6, 10, \ldots, 2\,(2n+1), \ldots]. \tag{4.2.2}$$

On compare les réduites $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ de la fraction continue $\left[2, \overline{1, 2n, 1}\right]_{n \geq 1}$ aux réduites $r'_n = \frac{p'_n}{q'_n}$ de la fraction continue de $(4.2.2)$, en utilisant $(1.3.1)$, on obtient :

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1}, \ \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{1}, \ \frac{p_2}{q_2} = \frac{8}{3}, \ \frac{p_3}{q_3} = \frac{11}{4}, \ \frac{p_4}{q_4} = \frac{19}{7}, \ \frac{p_5}{q_5} = \frac{87}{32}, \ \frac{p_6}{q_6} = \frac{106}{39}, \ \frac{p_7}{q_7} = \frac{193}{71}.$$

$$\frac{p'_0}{q'_0} = \frac{2}{1}, \ \frac{p'_1}{q'_1} = \frac{13}{6}, \ \frac{p'_2}{q'_2} = \frac{132}{61}.$$

On observe que

$$p_1 = p'_0 + q'_0,\ q_1 = p'_0 - q'_0.$$
$$p_4 = p'_1 + q'_1,\ q_4 = p'_1 - q'_1.$$
$$p_7 = p'_2 + q'_2,\ q_7 = p'_2 - q'_2, \ldots etc.$$

Ceci nous amène à conjecturer qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$p_{3k+1} = p'_k + q'_k \text{ et } q_{3k+1} = p'_k - q'_k.$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_k = p'_k + q'_k \text{ et } Y_k = p_{3k+1}.$$

Et montrons qu'on a $X_k = Y_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$. Pour $k \geq 2$, on a d'après (1.3.1) :

$$\begin{cases} p'_k = 2\,(2k+1)\,p'_{k-1} + p'_{k-2} \\ q'_k = 2\,(2k+1)\,q'_{k-1} + q'_{k-2} \end{cases}.$$

En additionnant membre à membre ces deux dernières, on tire : $X_k = 2\,(2k+1)\,X_{k-1} + X_{k-2}$. $(\forall k \geq 2)$.

D'autre part, pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\begin{cases} p_{3k-3} = p_{3k-4} + p_{3k-5} \quad (1) \\ p_{3k-2} = p_{3k-3} + p_{3k-4} \quad (2) \\ p_{3k-1} = (2k)\,p_{3k-2} + p_{3k-3} \quad (3) \\ p_{3k} = p_{3k-1} + p_{3k-2} \quad (4) \\ p_{3k+1} = p_{3k} + p_{3k-1} \quad (5) \end{cases}.$$

On effectue le calcul suivant : $(1) - (2) + 2 \times (3) + (4) + (5)$, on obtient :

$$P_{3k+1} = (4k+2)\,P_{3k-2} + P_{3k-5} \Longleftrightarrow Y_k = 2\,(2k+1)\,Y_{k-1} + Y_{k-2}.$$

Ainsi (X_k) et (Y_k) vérifient la même relation de récurrence et comme elles ont les mêmes premiers termes $(X_0 = Y_0$ et $X_1 = Y_1)$, on conclut qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $X_k = Y_k$; càd : $p_{3k+1} = p'_k + q'_k$.

On montre de la même façon qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $q_{3k+1} = p'_k + q'_k$.

On a par conséquent :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{p_k}{q_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{p_{3k+1}}{q_{3k+1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{p'_k+q'_k}{p'_k-q'_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{p'_k}{q'_k}+1}{\frac{p'_k}{q'_k}-1}=\frac{\frac{e+1}{e-1}+1}{\frac{e+1}{e-1}-1}=\frac{\frac{e}{e-1}}{\frac{1}{e-1}}=e.$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Remarque 4.2.1 *La fraction continue régulière du nombre π est donné par :*

$$\pi=[3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,...]\,.$$

Le comportement de celle-ci à l'infini reste inconnu, par suite c'est un problème ouvert.

CHAPITRE 5

Fractions continues généralisées

5.1 Propriétés fondamentales des réduites

On se propose dans cette partie de reprendre les propriétés vues au chapitre 1 dans le cas des fractions continues généralisées ; on note que les démonstrations se font exactement de la même façon.

Introduisons d'abord une fraction continue $a_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots$ et appelons $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ sa réduite d'ordre n $(\forall n \in \mathbb{N})$.

On pose par convention $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$.

Théorème 5.1.1 *Les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont les relations de récurrence :*

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} \end{cases} \quad (\forall n \geq 1)\,. \tag{5.1.1}$$

Proposition 5.1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} b_i, \tag{5.1.2}$$

et

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n-1} b_i. \tag{5.1.3}$$

Ce qui peut se réecire comme suit :

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} b_i}{q_n q_{n-1}}, \tag{5.1.4}$$

et

$$r_n - r_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n-1} b_i}{q_n q_{n-2}}. \tag{5.1.5}$$

Théorème 5.1.2 *La fraction continue* $a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+\cdots+}\frac{b_n}{a_n+\cdots}$ *est convergente si et seulement si la série de terme générale* $\frac{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} b_i}{q_n q_{n-1}}$ *est convergente.*

De plus, si $q_n \neq 0$, $\forall\ n \geq 1$, on a en cas de convergence :

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+\cdots+}\frac{b_n}{a_n+\cdots} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} b_i}{q_n q_{n-1}}. \tag{5.1.6}$$

Preuve. D'après la relation (5.1.4) , on a :

$$\begin{aligned} r_n &= r_0 + \sum_{k=1}^{n}(r_k - r_{k-1}) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\prod_{i=1}^{k} b_i}{q_k q_{k-1}}. \end{aligned}$$

La formule en découle en faisant tendre n vers l'infini. ■

5.2 Quelques théorèmes pour la transformation de séries numériques en fractions continues généralisées.

Théorème 5.2.1 *Soit* $(a_i)_{i\geq 1}$ *une suite réelle telle que* $a_i \neq 0$ $(\forall i \in \mathbb{N})$ *et* $a_i \neq a_{i+1}$ $(\forall i \geq 2)$. *Alors (en cas de convergence), on a :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{a_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1^2}{a_2 - a_1 + \cfrac{a_2^2}{a_3 - a_2 + \cfrac{a_3^2}{\ddots}}}}. \tag{5.2.1}$$

Preuve. On procède par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, le théorème est vérifiée, puisqu'on a :

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{1}{\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}} = \frac{1}{\frac{a_1(a_2-a_1)+a_1^2}{a_2-a_1}} = \frac{1}{a_1 + \frac{a_1^2}{a_2-a_1}}.$$

• Supposons maintenent que le théorème est vrai à l'ordre n (càd vrai toute suite de n termes) et montrons qu'il reste vrai à l'ordre ($n+1$).

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n} + \frac{(-1)^n}{a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \cdots + (-1)^{n-1}(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}}.\end{aligned}$$

C'est devenu une somme de n termes ; en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} &= \frac{1}{a_1 +}\frac{a_1^2}{a_2 - a_1 +}\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{\frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} - a_{n-1}} \\ &= \frac{1}{a_1 +}\frac{a_1^2}{a_2 - a_1 +}\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}^2}{\frac{a_n(a_{n+1}-a_n)+a_n^2}{a_{n+1}-a_n} - a_{n-1}} \\ &= \frac{1}{a_1 +}\frac{a_1^2}{a_2 - a_1 +}\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n - a_{n-1} + \frac{a_n^2}{a_{n+1}-a_n}}.\end{aligned}$$

Ce qui montre le théorème pour une suite à $(n+1)$ termes. Ceci achève cette récurrence et cette preuve. ■

Exemple 5.2.1 *(Fraction continue généralisée de* $\ln(2)$*) :*

Le développement de $\ln(x+1)$ en série de Taylor est :

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Pour $x = 1$, on obtient :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

En appliquant le théorème pécédent pour $a_k = k$, donc $a_k - a_{k-1} = 1$ $(\forall k \geq 1)$, on trouve

$$\boxed{\ln(2) = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{4^2}{\ddots}}}}}.}$$

Exemple 5.2.2 *(Fraction continue généralisée de $\frac{\pi}{4}$) :*

Le développement de arctan (x) en série de Taylor est :

$$\arctan(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Pour $x = 1$, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

En appliquant le théorème pour $a_k = 2k - 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{1}{1} {}_{+}\frac{1^2}{3-1} {}_{+}\frac{3^2}{5-3} {}_{+}\frac{5^2}{7-5} {}_{+}\frac{7^2}{9-7} {}_{+\cdots} \\ &= 1 {}_{+}\frac{1^2}{2} {}_{+}\frac{3^2}{2} {}_{+}\frac{5^2}{2} {}_{+}\frac{7^2}{2} {}_{+\cdots};\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}}.}$$

Théorème 5.2.2 *soit $(a_i)_{i\geq 1}$ une suite réelle telle que $a_i \neq 0$ et $a_i \neq 1$ $(\forall i \geq 1)$. Alors (en cas de convergence) on a :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{a_k!} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1}{a_2 - 1 + \cfrac{a_2}{a_3 - 1 + \cfrac{a_3}{\ddots}}}}. \tag{5.2.2}$$

Preuve. On Procéde par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, le théorème est vérifié. Puisque on a :

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{a_2 - 1}{a_1 a_2} = \frac{1}{\frac{a_1 a_2}{a_2 - 1}} = \frac{1}{a_1 + \frac{a_1}{a_2 - 1}}.$$

• Pour la suite de la démonstration, on procède par récurrence, comme fait au théorème 5.2.1. ■

Exemple 5.2.3 *(La fraction continue généralisée de e) :*

Le développement de e^{-x} en série de Taylor est :

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Pour $x = 1$, on obtient

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \cdots ,$$

ainsi,

$$\frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \cdots$$

En prenant $a_k = k$, dans la formule (5.2.6), on trouve

$$\frac{e-1}{e} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \ddots}}}},$$

on inverse $\frac{e}{e-1}$, on obtient

$$\frac{e}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \ddots}}},$$

puis

$$\frac{e}{e-1} - 1 = \frac{1}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \ddots}}},$$

on inverse encore une fois

$$e - 1 = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \ddots}}}.$$

D'où

$$\boxed{e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{\ddots n + \cfrac{n+1}{\ddots}}}}.}$$

5.3 Critères de convergence

Contrairement au théorème 5.1.2 qui n'est pas pratique car les expressions des q_n sont compliquées, on présente ci-dessous des critères de convergences pratiques.

Proposition 5.3.1 *Soient* $(a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$*, deux suites de nombres complexes non nuls. Alors :*

$$\frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 + \cdots +} \frac{b_n}{a_n + \cdots} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{c_1 +} \frac{1}{c_2 + \cdots +} \frac{1}{c_n + \cdots},$$

où

$$c_{2n} = \frac{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}}{b_2 b_4 \ldots b_{2n}} a_{2n} \quad \text{et} \quad c_{2n+1} = \frac{b_2 b_4 \ldots b_{2n}}{b_1 b_3 \ldots b_{2n+1}} a_{2n+1},$$

ont les même réduites (on dit qu'elles sont équivalentes). Elles sont donc de même nature et en cas de convergence, elles ont la même valeur.

Proposition 5.3.2 *Soit la fraction continue* $\frac{1}{c_1 +} \frac{1}{c_2 + \cdots +} \frac{1}{c_n + \cdots}$*, où* $c_n > 0$*. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la suite* $(q_n q_{n+1})_n$ *est croissante et que* $q_n \leq C \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k)$*, où* $C > 0$ *est une constante.*

Preuve. On a d'après le théorème 5.1.1.

$$q_n = c_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

et comme $c_n > 0$ alors $q_n > q_{n-2}$.

Donc $q_n q_{n-1} > q_{n-2} q_{n-1}$, ce qui montre la suite $(q_n q_{n+1})_n$ est strictement croissante.

D'autre part :

• Si $q_{n-2} \leq q_{n-1}$ alors $q_n = c_n q_{n-1} + q_{n-2} \leq c_n q_{n-1} + q_{n-1} = (1 + c_n) q_{n-1}$.

• Si $q_{n-1} \leq q_{n-2}$ alors $q_n \leq (1 + c_n) q_{n-2}$ ainsi $q_n \leq (1 + c_n)(1 + c_{n-1}) q_{n-2}$.

Par itération, on obtient l'une des deux majorations :

$$q_n \leq (1 + c_n)(1 + c_{n-1}) \ldots (1 + c_1) q_0, \tag{1}$$

où

$$q_n \leq (1 + c_n)(1 + c_{n-1}) \ldots (1 + c_2) q_1, \tag{2}$$

d'où

$$q_n \leq C \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k),$$

avec $C = \max\left(q_0, \frac{q_1}{1+c_1}\right)$. ■

Proposition 5.3.3 *Soit la fraction continue* $\frac{1}{c_1 +} \frac{1}{c_2 + \cdots +} \frac{1}{c_n + \cdots}$, *où* $c_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$q_{2p} \geq 1 + c_1(c_2 + c_4 + \ldots + c_{2p}),$$

et

$$q_{2p+1} \geq c_1 + c_3 + \ldots + c_{2p+1}).$$

Preuve. On a : $q_n = c_n q_{n-1} + q_{n-2}$, ce qui implique $q_n - q_{n-2} = c_n q_{n-1}$.

On distingue deux cas :

• Pour n pair, $n = 2p$, on obtient $q_{2p} - q_{2p-2} = c_{2p} q_{2p-1}$.

• Pour n impair, $n = 2p + 1$, on obtient $q_{2p+1} - q_{2p-1} = c_{2p+1} q_{2p}$.

Donc la suite $(q_{2p+1})_p$ est croissante, d'ou $q_{2p+1} \geq q_1 = c_1$.

D'autre part on a : $q_{2p} - q_{2p-2} \geq c_{2p} c_1$. D'où $q_{2p} - q_0 \geq c_1(c_2 + c_4 + \ldots + c_{2p})$ par addition ; la première inégalité en résulte car $q_0 = 1$.

La démonstration est analogue pour la deuxième inégalité. ■

5.3.1 Le critère de Seidel

Théorème 5.3.1 *(Seidel) : Si* $c_n > 0$ $\forall n \geq 1$, *la fraction continue* $\frac{1}{c_1 +} \frac{1}{c_2 + \cdots +} \frac{1}{c_n + \cdots}$ *converge si et seulement si la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ *diverge.*

Preuve. ($\Rightarrow$) On veut montrer si $\frac{1}{c_1+}\frac{1}{c_2+\cdots+}\frac{1}{c_n+\cdots}$ converge alors $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ diverge.

Par contraposition : on suppose que la série $\sum_{k=1}^{n} c_n$ converge, on montre que la fraction continue diverge.

On a d'aprés la proposition 5.3.2 :

$$q_n \leq C \prod_{k=1}^{n}(1+c_k),$$

où

$$\log q_n \leq \log(C \prod_{k=1}^{n}(1+c_k)) = \log C + \sum_{k=1}^{\infty}\log(1+c_k) = \log C + \sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

D'où $(\log q_n)$ est majoré, ainsi $q_n \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. La suite $q_n q_{n-1}$ ne peut donc pas tendre vers $+\infty$, d'où la série de tèrme général $\frac{(-1)^{n-1}b_1\ldots b_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ diverge.

Et comme son térme général ne tend pas vers 0. Donc la fraction continue diverge.

($\Leftarrow$) Il reste à montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge alors $\frac{1}{c_1+}\frac{1}{c_2+\cdots+}\frac{1}{c_n+\cdots}$ converge.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge alors l'une au moins des série $c_2+c_4+\cdots+c_{2p}+\cdots$ où $c_1+c_3+\cdots+c_{2p-1}+\cdots$ diverge. Donc d'aprés la proposition 5.3.3 l'une au moins des deux suites $(q_{2p})_p$ où $(q_{2p-1})_p$ tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} q_n q_{n-1} = +\infty$. Donc la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}b_1\ldots b_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ est une série de alternée ; elle converge, ainsi que la fraction continue. ■

5.3.2 Le critère de Pringsheim

Théorème 5.3.2 *(Pringsheim) Soient $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. Alors, si la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}}$ diverge, la fraction continue $\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+\cdots+}\frac{b_n}{a_n+}$ converge.*

Preuve. D'après la proposition 5.3.1 la fraction continue $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots$ est équivalente à $\frac{1}{c_1+}\frac{1}{c_2+\cdots}$, avec

$$c_{2n} = \frac{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}}{b_2 b_4 \ldots b_{2n}} a_{2n} \quad , \quad c_{2n+1} = \frac{b_2 b_4 \ldots b_{2n}}{b_1 b_3 \ldots b_{2n+1}} a_{2n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

On a donc $c_{2n}c_{2n+1} = \frac{a_{2n}a_{2n+1}}{b_{2n+1}}$ et $c_{2n-1}c_{2n} = \frac{a_{2n-1}a_{2n}}{b_{2n}}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

En appliquant l'inégalité de $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ $(\forall(a,b) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+))$, on obtient

$$c_{2n} + c_{2n+1} \geq 2\sqrt{c_{2n}c_{2n+1}} = 2\sqrt{a_{2n}a_{2n+1}/b_{2n+1}}, \tag{1}$$

et

$$c_{2n-1} + c_{2n} \geq 2\sqrt{c_{2n-1}c_{2n}} = 2\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}/b_{2n}}. \tag{2}$$

En prenant la somme depuis 1 jusqu'à n dans (1) et (2) , on trouve :

$$c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_{2n} + c_{2n+1} \geq 2(\sqrt{a_2a_3/b_3} + \sqrt{a_4a_5/b_5} + \cdots + \sqrt{a_{2n}a_{2n+1}/b_{2n+1}}),$$

et

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_{2n-1} + c_{2n} \geq 2(\sqrt{a_1a_2/b_2} + \sqrt{a_3a_4/b_4} + \cdots + \sqrt{a_{2n-1}a_{2n}/b_{2n}}).$$

Puisque la série de terme général $u_n = \sqrt{a_{2n}a_{2n+1}/b_{2n+1}}$ diverge, l'une au moins des série extraites $(u_{2n})_n$ où $(u_{2n+1})_n$ diverge (série à terme positif).

Ce qui entraîne que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge, et par la suite la fraction continue en question converge d'aprés le critère de Seidel. ■

Appendice

Dans ce qui suit, une liste variée de fractions continues régulières et généralisées.

1. Cataldi, 1613

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}}.$$

2.

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \ddots}}}}.$$

3. Stern, 1833

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2.3}{1 - \cfrac{1.2}{3 - \cfrac{4.5}{1 - \cfrac{3.4}{3 - \cfrac{6.7}{1 - \cfrac{5.6}{3 - \ddots}}}}}}}.$$

4.

$$\frac{6}{\pi^2} = 0^2 + 1^2 - \cfrac{1^4}{1^2 + 2^2 - \cfrac{2^4}{2^2 + 3^2 - \cfrac{3^4}{3^2 + 4^2 - \cfrac{4^4}{4^2 + 5^2 - \ddots}}}}.$$

5.

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\left(1/\sqrt{3}\right)^2}{3 + \cfrac{\left(2/\sqrt{3}\right)^2}{5 + \cfrac{\left(3/\sqrt{3}\right)^2}{7 + \ddots}}}}.$$

6.

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{1}{s - 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}}.$$

7. Lambert, 1766

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x} + \cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\ddots}}}}.$$

8. Laplace, 1805; Legendre, 1826

Pour $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{\frac{e^{-x^2}}{2}}{x + \cfrac{1}{2x+\cfrac{2}{x+\cfrac{3}{2x+\cfrac{4}{x+\ddots}}}}}.$$

9. Lagrange, 1813

Pour $|x| < 1$,

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \cfrac{2x}{1 - \cfrac{1x^2}{3-\cfrac{4x^2}{5-\cfrac{9x^2}{7-\cfrac{16x^2}{9-\ddots}}}}}.$$

10.

$$\log(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2x}{(2-1x)+\cfrac{2^2x}{(3-2x)+\cfrac{3^2x}{(4-3x)+\ddots}}}}.$$

11. Lagrange, 1776

Pour $|x| < 1$,

$$\arctan(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1x^2}{3+\cfrac{4x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\cfrac{16x^2}{9+\ddots}}}}}.$$

12.

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2.3 - x^2) + \cfrac{2.3x^2}{(4.5 - x^2) + \cfrac{4.5x^2}{(6.7 - x^2) + \ddots}}}}.$$

13. Lagrange, 1776

Pour $|x| < 1$,

$$(1+x)^k = \cfrac{1}{1 - \cfrac{kx}{1 + \cfrac{\frac{1.(1+k)}{1.2}x}{1 + \cfrac{\frac{1.(1-k)}{2.3}x}{1 + \cfrac{\frac{2.(2+k)}{3.4}x}{1 + \cfrac{\frac{2.(2-k)}{4.5}x}{1 + \cfrac{\frac{3.(3+k)}{5.6}x}{1 + \ddots}}}}}}}.$$

Bibliographie

[1] DUVERNEY, D. Théorie des nombres : Cours et exercices corrigés (chapitre 3 et 4). 2^eéd. Paris : Dunod, 2007, 271p. ISBN 978 21005112348.

[2] TRIGNAN, J. Introduction aux problèmes d'approximation : Fractions continues. édition du choix. Rue de médicis, Paris : Albert Blanchard, 1994, 79p. ISBN 2 90902816.

[3] KHINCHIN, A, YA. Continued fractions. 3^rdéd. University of Chicago Press, Chicago, 1964, 95p.

[4] HARDY, G, H and WRIGHT, E, M. Introduction to the theory of numbers (chapitre 10). 4^th. Oxford University Press, 1965, 420p. ISBN 0 198533107.

[5] OLDS, C, D. Continued fractions. Random House, New York, 1963, 162p.

[6] MOORE, CH, G. An introduction to continued fractions (chapitre 7). The national council of teachers of mathematics. Washington, 1964, 95p.

[7] BESKIN, N. Fascinating fractions (chapitre 4). Little Mathematics Library. Moscow : Mir Publishers, 1986, 89p.

[8] http://people.math.binghamton.edu/dikran/478/Ch7.pdf

[9] http://math.unice.fr/~walter/L1_Arith/cours2.pdf

[10] https://www.math.ens.fr/~bilu/fractions%20continues.pdf

[11] http://www.dms.umontreal.ca/~rousseac/chapitre_fraction_continue.pdf

[12] http://www.auguste-piccard.ch/pages/TM-PDF/TM2007/TM2007Gillieron.pdf

[13] http://www-irma.u-strasbg.fr/~richez/ressources/recherche/memoire_fractions_continues.pdf

[14] http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/history.html

[15] http://moduloserge.free.fr/HX1-09/TIPE/fraccont.pdf