

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA-BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes



Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Mécanique des Fluides et Transferts Thermiques

Thème

***Analyse linéaire d'un film liquide s'écoulant sur une
paroi: Equation d'Orr-Sommerfeld***

Présenté par

Melle TOUFOUTI Zineb

Soutenu le: 11/06/2017

Devant le Jury composé de:

NAIT BOUDA	Faiçal	MCA	Président
DJEMA	Amar	MCB	Examineur
NESSAS DJESSAS	Houria	MAA	Examineur
MEHIDI BOUAM	Nadia	MCA	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents qui sont la source de mon éducation, et mon savoir.

À mes très chers frères et sœurs.

À ma grand-mère paternelle.

À la mémoire de mon grand-père paternelle.

À mon oncle.

À mes grands-parents maternels, mes tantes, mes oncles maternels, mes cousins et mes cousines.

À mes chères amies NaimaMhn, Naima ben, Tita, Nono, Kahina, Lamia, Hakima,.....

À tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Remerciements

Je remercie **ALLAH** Tout- puissant de m’avoir donné le courage, la volonté et la patience de pouvoir terminer ce modeste travail.

J’adresse mes plus vifs remerciements à ma promotrice **Madame Mehidi Nadia** pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l’aboutissement de ce travail.

Que le président et les membres du jury trouvent ici mes vifs remerciements pour avoir accepté de présider et d’examiner mon travail.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l’élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Remerciements

Notations.....	5
----------------	---

Introduction générale.....	9
----------------------------	---

Chapitre I Equations du mouvement d'un écoulement sur un cylindre

I.1 Introduction.....	12
-----------------------	----

I.2 Formulation du problème.....	12
----------------------------------	----

I.2 .1 hypothèses de l'étude.....	13
-----------------------------------	----

I.2 .2 Equation de conservation de la masse.....	13
--	----

I.2 .3 Equations de conservation de la quantité de mouvement.....	13
---	----

I.3 Conditions aux limites.....	14
---------------------------------	----

I.3.1 Condition d'adhérence et d'imperméabilité à la paroi solide.....	14
--	----

I.3.2 Conditions à l'interface.....	14
-------------------------------------	----

I.3.3 Condition cinématique :.....	15
------------------------------------	----

I.3.4 Bilan des contraintes normales.....	15
---	----

I.3.5 Bilan des contraintes tangentielles.....	16
--	----

I.4 Ecoulement de base.....	16
-----------------------------	----

I.4.1 Calcul de la vitesse de base.....	16
---	----

I.4.2 Calcul de la pression de base.....	17
--	----

I.5 Formes adimensionnelles des équations.....	18
--	----

I.5.1 Echelles caractéristiques.....	18
--------------------------------------	----

I.5.2 Equations du mouvement adimensionnées.....	19
--	----

Chapitre II Formulation de l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement cylindrique

II.1 Introduction.....	24
------------------------	----

II.2 Equations linéarisées.....	24
---------------------------------	----

II.2.1 Equations linéarisées pour les perturbations.....	24
--	----

II.2.2 Evaluation des conditions aux limites à l'interface non perturbées.....	25
--	----

II.2.3 Système complet des équations linéarisées.....	27
---	----

II.3 Equation d'Orr-Sommerfeld	28
II.3.1 Modes normaux.....	28
II.3.2 Fonctions de courant.....	28
Chapitre III Résolution asymptotique du problème	
III.1 Introduction	33
III.2 Problème aux valeurs propres	33
III. 3 Développement asymptotiques	34
III .3.1 Système à l'ordre zéro.....	34
III .3.2 Système à l'ordre un.....	37
III .4 Résultats et discussion	38
III .4.1 Influence de la courbure.....	38
III .4.2 Influence de la tension superficielle.....	40
Conclusion et perspectives	41
Références bibliographiques	42
Résumé	43

Notations

Symboles Romains

\vec{v}	Vecteur vitesse
\vec{g}	Accélération gravitationnelle
t	Temps
(r, θ, x)	Coordonnées cylindriques
(u, v)	Composantes de la vitesse suivant les axes x et r
p_a	Pression atmosphérique
p	Pression
\vec{n}	Vecteur unitaire normal à l'interface
\vec{t}	Vecteur unitaire tangent à l'interface
$h(x, t)$	Epaisseur du fluide
R_c	Rayon du cylindre
$\frac{1}{\mathfrak{R}}$	Courbure de l'interface
h_N	Epaisseur de Nusselt (film uniforme)
$U(y)$	Vitesse de l'écoulement de base
u_N	Vitesse à l'interface

Symboles Grecs

θ	Coordonnée azimutale
σ	Tension de surface

μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique
λ	Longueur d'onde
ω	Pulsation de l'onde
ω_r	Pulsation réelle
ω_i	Taux d'amplification de l'onde

Nombres sans dimension

Re	Nombre de Reynolds
Re_c	Nombre de Reynolds critique
We	Nombre de Weber
Ka	Nombre de Kapitza
η	Rayon du cylindre adimensionné
$\varepsilon = \frac{h_N}{\lambda}$	Paramètre du film onde longue

Tenseurs

$\bar{\bar{I}}$	Tenseur identité
$\bar{\bar{\tau}}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\bar{\bar{T}}$	Tenseur des contraintes
$\bar{\bar{D}}$	Tenseur taux de déformation

Opérateurs

∇Opérateur gradient

ΔLaplacien

Introduction générale

L'étude de la stabilité des écoulements d'une ou de plusieurs couches de fluides sur une paroi solide concerne un grand nombre d'applications d'ingénierie et environnemental. Le sujet est très intéressant à la fois en termes de recherche fondamentale et d'applications industrielles et cela a engendré un grand nombre de travaux de recherche [1,5,6,12]. Parmi les applications nous pouvons citer :

- dans la recherche fondamentale, domaine du non linéaire,
- dans le domaine industriel, procédés de revêtement, évaporateur des films tombants (agroalimentaire),
- dans le domaine environnemental, les écoulements de glaciers et de boues.

Les écoulements auxquels nous nous intéressons dans ce travail font intervenir un film liquide laminaire en écoulement sur un cylindre vertical [5,11]. Notons que peu d'études sont consacrées au cas où les parois sont courbes. Tandis que le modèle d'un film liquide en écoulement le long d'un plan incliné a été largement étudié dans la littérature aussi bien théoriquement depuis les travaux de Kapitza [9] et Yih [13], que expérimentalement avec les travaux de Gollub [7]. Pour cette configuration les régimes d'écoulements sont bien décrits.

En considérant les équations de Navier-Stokes pour un film liquide visqueux et incompressible, au delà d'un nombre de Reynolds, appelé nombre de Reynolds critique R_c , l'écoulement devient instable. Plusieurs instabilités sont ainsi mises en évidence : une instabilité de grandes longueurs d'ondes et une instabilité de courtes longueurs d'ondes qui se manifestent à l'interface [1,12,13]. Une instabilité de cisaillement qui se manifeste tout près de la paroi [6].

A faible nombre de Reynolds des effets inertiels faibles sont à l'origine de la déformation de la surface libre. Cette déformation appelée instabilité interfaciale se manifeste par l'apparition d'ondes qui naissent suite à l'amplification de perturbations de faible amplitude. Une étude linéaire permet de déterminer leurs longueurs d'onde, vitesses et leurs taux de croissance.

Pour de grands nombre de Reynolds, les perturbations sont dites ondes de Tollmien-Schlitching (ondes de cisaillements) et elles se présentent avec un taux d'amplification très important. Quand le nombre de Reynolds augmente le nombre de perturbations amplifiées augmente et à partir d'un certain seuil l'écoulement devient turbulent.

Récemment, nous avons développé des études de stabilité linéaire dans le cadre de la préparation des mémoires de Master au sein du laboratoire de physique théorique [2,3].

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire est de décrire les instabilités qui se produisent au sein d'un film liquide visqueux s'écoulant sur une paroi cylindrique, en prenant en considération la courbure de la paroi et la tension superficielle du fluide. Nous nous intéressons aux résultats acquis par la voie d'une étude de stabilité linéaire de type Orr-Sommerfeld.

L'étude menée dans le cadre de ce travail est organisée en trois chapitres, une introduction et une conclusion.

Le chapitre I, présente les équations relatives au problème étudié, et précise les hypothèses simplificatrices de ces équations. Une solution à l'équilibre est ensuite obtenue, ce qui permet de choisir une vitesse caractéristique, afin d'effectuer une analyse dimensionnelle du problème. Cela permet de mettre en évidence les grandeurs caractéristiques de l'étude et les principaux effets physiques sont représentés par les nombreux nombres sans dimension comme le nombre de Reynolds, la courbure et la tension superficielle.

Le chapitre II, traite de la stabilité linéaire de l'écoulement. Le problème est envisagé en termes de modes normaux et le système d'équations du mouvement est réduit à une équation linéaire du quatrième ordre où les seules inconnues sont la perturbation de la fonction de courant et la perturbation de la surface libre.

Le chapitre III est consacré à l'interprétation des résultats obtenus en matière de stabilité linéaire. On s'intéresse dans ce chapitre à une étude de stabilité linéaire, où l'on considère le nombre d'onde k réel et la pulsation ω complexe [4]. Cela signifie que l'on s'intéresse aux perturbations dont la structure spatiale en x est périodique. Les résultats sont présentés sous forme de diagrammes de stabilité marginale dans le plan nombre de Reynolds, nombre d'onde. Les effets physiques qui maintiennent la croissance ou ceux qui causent la disparition ou l'atténuation des ondes sont ensuite examinées.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale où sont mis en évidence les résultats obtenus.

CHAPITRE I

Equations du mouvement d'un écoulement sur un cylindre

I.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des équations de Navier-Stokes qui gouvernent l'écoulement d'un fluide visqueux sur un cylindre [11], ainsi qu'à la mise sous forme sans dimension de ces équations. L'écriture adimensionnelle des équations du mouvement permet de définir les paramètres sans dimension qui régissent les divers effets physiques du problème étudié, comme la viscosité, la pesanteur, la tension superficielle.

I.2 Formulation du problème

On s'intéresse à l'étude de la stabilité de la surface libre $h(x, t)$ d'un fluide s'écoulant sous l'effet de la pesanteur \vec{g} sur un cylindre vertical de paroi rigide. Nous nous plaçons dans un repère cylindrique (r, θ, x) . L'axe $r = 0$ est confondu avec l'axe du cylindre figure (II.1). Nous considérons un écoulement avec une symétrie de révolution autour du cylindre, la dépendance en θ de l'écoulement sera négligé. On suppose le fluide visqueux, incompressible de viscosité dynamique μ et de densité ρ . La surface libre $h(x, t)$ est caractérisée par une pression uniforme p_a qui est égale à la pression atmosphérique.

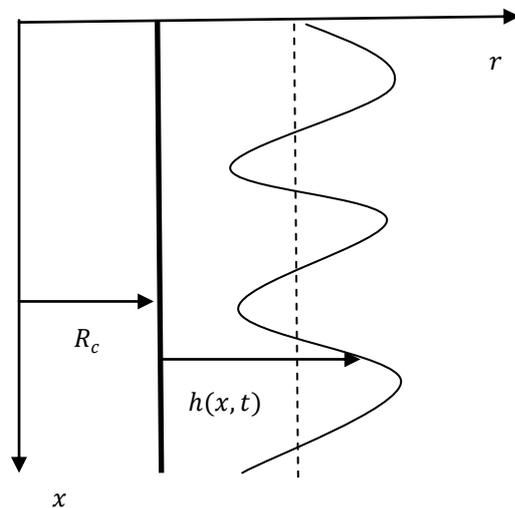


Fig. I.1 : Schéma représentant l'écoulement par gravité d'un fluide sur un cylindre vertical.

I.2.1 hypothèses de l'étude

Dans ce travail, nous avons considéré un fluide visqueux newtonien et incompressible, en écoulement laminaire bidimensionnel et isotherme. L'air au dessus du fluide de pression p_a est immobile. Dans toute l'étude la tension superficielle σ entre le fluide et l'air sera prise en considération.

I.2.2 Equation de conservation de la masse

L'écoulement est incompressible, la conservation de la masse s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{I.1})$$

L'équation (I.1), ou équation de continuité écrite coordonnées cylindriques donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (\text{I.2})$$

Ainsi dans le cas d'un fluide visqueux incompressible, le tenseur des contraintes \bar{T} devient

$$\bar{T} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (\text{I.3})$$

Où p est la pression.

Dans ce cas le tenseur des contraintes visqueuses $\bar{\tau} = 2\mu\bar{D}$. Avec \bar{D} le tenseur taux de déformation.

Rappelons que dans le cas d'un fluide visqueux compressible, le tenseur des contraintes visqueuses est donné par la relation $\bar{\tau} = \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\mu\bar{D}$. λ et μ sont deux coefficients de viscosité.

I.2.3 Equations de conservation de la quantité de mouvement

Du point de vue dynamique l'écoulement par gravité d'un fluides newtonien visqueux autour d'un cylindre est régit par les équations de Navier-Stokes qui résultent de la conservation de la quantité de mouvement.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{v} \quad (\text{I.4})$$

L'analyse de chaque terme de cette équation permet de mettre en évidence les différentes forces contribuant au mouvement du fluide.

- La variation de la pression apparait dans le terme ∇p ;

- Les effets de la gravité apparaissent dans le terme $\rho \vec{g}$;
- Les effets des forces de viscosité sont exprimés par $\mu \Delta \vec{v}$;
- Le terme non linéaire convectif $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ traduit la variation du champ de vitesse en fonction des coordonnées spatiales;
- Le premier terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ représente l'accélération dans un champ instationnaire $\vec{v}(x, r, t)$.

La projection de l'équation de Navier-Stokes (I.4) dans un système de coordonnées cylindriques donne [3,11] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g \quad (\text{I.5})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (\text{I.6})$$

Dans tout ce qui suit, nous désignons par $\vec{v} = (u, v)$ et p les champs de vitesse et de pression. u et v représentent respectivement les composantes du champ de vitesse dans la direction axiale x et la direction radiale r . ρ , μ et g sont respectivement la masse volumique, la viscosité dynamique et l'accélération de la pesanteur. Notons que $\nu = \frac{\rho}{\mu}$ est la viscosité cinématique.

I.3 Conditions aux limites

I.3.1 Condition d'adhérence et d'imperméabilité à la paroi solide

Les conditions aux limites sur la paroi solide du cylindre en $r = R_c$ imposent une vitesse nulle , ce qui s'écrit :

$$u = 0 \quad \text{pour } r = R_c \quad (\text{I.7})$$

$$v = 0 \quad \text{pour } r = R_c \quad (\text{I.8})$$

I.3.2 Conditions à l'interface

Les conditions dynamiques et cinématique à l'interface gaz-liquide sont exprimées en $r = R_c + h(x, t)$. Les conditions dynamiques sont projetées sur un axe tangent et un axe normal à

l'interface . Ces axes sont définis par les deux vecteurs unitaires normal \vec{n} et tangent \vec{t} qui s'expriment par :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

I.3.3 Condition cinématique

Cette condition traduit l'imperméabilité de l'interface. On considère l'interface comme une surface matérielle [2,3].

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{I.9})$$

I.3.4 Bilan des contraintes normales

A l'interface on prend en considération les forces de tension superficielle. Ce qui engendre une différence entre les contraintes normales à l'interface qui se traduit par la relation suivante :

$\vec{T} \cdot \vec{n}$ représentent les vecteurs contraintes qui s'exercent sur l'interface de normale \vec{n} , leur produit scalaire par le vecteur \vec{n} normal donne les composantes normales et leur produit scalaire par le vecteur \vec{t} tangent donne les composantes tangentielles de ces contraintes.

$$\vec{n} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{n}) - \vec{n} \cdot (-p_0 \vec{n}) = \frac{\sigma}{\mathfrak{R}} \quad (\text{I.10})$$

Le développement de cette équation s'écrit :

$$p - p_a - \frac{2\mu}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)} \left[\frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = - \frac{\sigma}{\mathfrak{R}} \quad (\text{I.11})$$

Où la courbure $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ est donnée par :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{R_c + h} \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \right) \right\}$$

I.3.5 Bilan des contraintes tangentielles

L'équilibre des contraintes tangentielles entre le fluide et l'air considéré immobile se traduit par la relation suivante :

$$\vec{t} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (\text{I.12})$$

Cette équation devient :

$$2 \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{I.13})$$

I.4 Ecoulement de base

Afin de calculer la solution de base de l'écoulement d'un film mince sur un cylindre vertical, on va considérer les hypothèses suivantes :

- Ecoulement est stationnaire ;
- On suppose un profil de vitesse uniforme ;
- On suppose un régime d'écoulement établi avec $\vec{v} = U(r)\vec{e}_x$;
- A la paroi, on pose $U(R_c) = 0$;
- A l'interface $r = R_c + h(x, t)$, on suppose la contrainte de cisaillement égale à zéro : $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$

En prenant en considération ces hypothèses, les deux équations de Navier-Stocks (I.5) et (I.6) deviennent :

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g = 0 \quad (\text{I.14})$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.15})$$

I.4.1 Calcul de la vitesse de base

l'équation (I.14) devient

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} u \right) = -\frac{\rho g}{\mu} \quad (\text{I.16})$$

soit

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} u \right) = -\frac{\rho g r}{\mu}$$

En intégrant l'équation (I.16) une première fois on obtient :

$$\left(r \frac{d}{dr} u \right) = -\frac{\rho g r^2}{\mu 2} + C_1 \quad (\text{I.17})$$

Et en l'intégrant une deuxième fois on trouve :

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\rho g r}{\mu 2} + \frac{1}{r} C_1$$

Ce qui donne

$$u(r) = -\frac{\rho g r^2}{\mu 4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{I.18})$$

On détermine les constantes d'intégrations C_1 et C_2 en tenant compte des conditions aux limites à la paroi et à l'interface : $\frac{du}{dr} = 0$ en $r = R_c + h_N$ et $u = 0$ pour $r = R_c$.

Ce qui donne la solution d'un écoulement stationnaire appelé solution de Nusselt.

$$u(r) = \frac{\rho g}{\mu} \left[\left[-\frac{1}{4} (r^2 - R_c^2) + \frac{1}{2} (R_c + h_N)^2 \ln \frac{r}{R_c} \right] \right] \quad (\text{I.19})$$

La vitesse à l'interface est donnée par :

$$u(r) = \frac{\rho g}{\mu} \left[\left[-\frac{1}{4} (h_N^2 + 2h_N R_c) + \frac{1}{2} (R_c + h_N)^2 \ln \left(\frac{R_c + h_N}{R_c} \right) \right] \right] \quad (\text{I.20})$$

On peut réécrire cette relation sous la forme :

$$u(r) = \frac{\rho g h_N^2}{\mu} \left[\left[-\frac{1}{4} \left(1 + 2 \frac{R_c}{h_N} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_c}{h_N} + 1 \right)^2 \ln \left(\frac{R_c + h_N}{R_c} \right) \right] \right]$$

L'écoulement de base nous permet de faire le choix des grandeurs de références, ainsi nous pourrions prendre la vitesse à l'interface et la hauteur du film uniforme comme échelle sur la vitesse et la longueur dans le sens vertical à l'écoulement.

I.4.2 Calcul de la pression de base

Les équations (I.14) et (I.5) nous permettent décrire :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.22})$$

O déduit donc que la pression est une constante qui ne dépend ni de x ni de r . La condition au limite sur la contrainte normale nous permet d'écrire :

$$p - p_a = \frac{\sigma}{R_c + h_N} \quad (\text{I.23})$$

I.5 Formes adimensionnelles des équations

Dans ce paragraphe nous allons définir les grandeurs de référence pour écrire les équations de Navier-Stokes incompressibles et les conditions aux limites associées à l'aide de grandeur sans dimension.

I.5.1 Echelles caractéristiques

Pour l'adimensionnement, on utilise les grandeurs de références suivantes :

λ : Longueur d'onde caractérisant l'évolution de l'écoulement suivant la direction x ;

h_N : épaisseur de l'écoulement de base ;

u_N ; est la vitesse à l'interface de l'écoulement de base ;

$v_{réf} = \frac{h_N u_N}{\lambda}$: échelle des vitesses normales ;

$t_{réf} = \frac{\lambda}{u_N}$: temps de référence ;

$p_{réf} = \frac{\mu \lambda u_N}{h_N^2}$: échelle de pression.

Nous dressons toutes ces grandeurs sous forme d'un tableau, nous mettons en regard les grandeurs avec dimension et les grandeurs sans dimension.

Grandeur dimensionnée	Grandeur de référence	Grandeur sans dimension
x	$x_{réf} = \lambda$	$x^* = \frac{x}{x_{réf}} = \frac{x}{\lambda}$
r	$r_{réf} = h_N$	$r^* = \frac{r}{r_{réf}} = \frac{r}{h_N}$
u	$u_{réf} = u_N$	$u^* = \frac{u}{u_{réf}} = \frac{u}{u_N}$
t	$t_{réf} = \frac{\lambda}{u_N}$	$t^* = \frac{t}{t_{réf}} = \frac{tu_N}{\lambda}$
v	$v_{réf} = \frac{x_{réf}}{t_{réf}} = \frac{h_N u_N}{\lambda}$	$v^* = \frac{v}{v_{réf}} = \frac{\lambda v}{h_N u_N}$
p	$p_{réf} = \frac{\mu \lambda u_N}{h_N^2}$	$p^* = \frac{p}{p_{réf}} = \frac{p h_N^2}{\mu \lambda u_N}$

Tableau I-1. Tableau récapitulatif des différentes dimensions

L'écoulement de base adimensionné est donné par :

$$U(r) = \frac{2(\eta + 1)^2 \ln\left(\frac{r}{\eta}\right) - r^2 + \eta^2}{2(\eta + 1)^2 \ln\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) - (\eta + 1)^2 + \eta^2}$$

$$V(r) = 0$$

$$P = W_e R_e \frac{1}{1 + \eta}$$

I.5.2 Equations du mouvement adimensionnées

La mise sous forme adimensionnelle des équations de mouvement et les conditions aux limites est obtenue à l'aide des variables sans dimension exprimées dans le tableau précédent.

Equation projetée suivant l'axe axial :

$$R_e \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + G \quad (I.24)$$

Equation projetée suivant l'axe radial :

$$R_e \varepsilon^3 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{I.25})$$

Equation de continuité

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.26})$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial r} (rv) + r \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.27})$$

Condition d'adhérence à la paroi $r = \eta$ avec $\eta = \frac{R_c}{h_N}$

$$u = v = 0 \quad (\text{I.28})$$

Condition cinématique en $r = \eta + h(x, t)$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{I.29})$$

Condition normale en $r = \eta + h$

$$P = 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial r} - \varepsilon W_e R_e \left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{\eta+h} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{I.30})$$

Condition tangentielle $r = \eta + h$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{I.31})$$

L'adimensionnement des équations du mouvement fait intervenir quatre paramètres sans dimension :

1. $R_e = \frac{U_N h_N}{\nu}$: nombre de Reynolds,
2. $G = \frac{g R_e h_N}{U_N^2}$: coefficient mesurant les effets de la gravité,
3. $W_e = \frac{\sigma}{\rho h_N U_N^2}$: nombre de Weber,
4. $\varepsilon = \frac{h_N}{\lambda}$: paramètre onde longue.
5. $\eta = \frac{R_c}{h_N}$: $\frac{1}{\eta}$ représente la courbure.

Notons que dans tout le document les grandeurs avec dimensions et celles sans dimensions sont notées de la même façon.

Pour alléger les calculs, nous avons choisi de disposer l'origine du repère au niveau de la paroi du cylindre, nous introduisons donc une nouvelle variable $y = r - R_c$ (figure I.2) [11]. Avec ce changement de variable la paroi du cylindre est donnée par l'équation $y = 0$ et celle de la surface libre est $y = h(x, t)$.

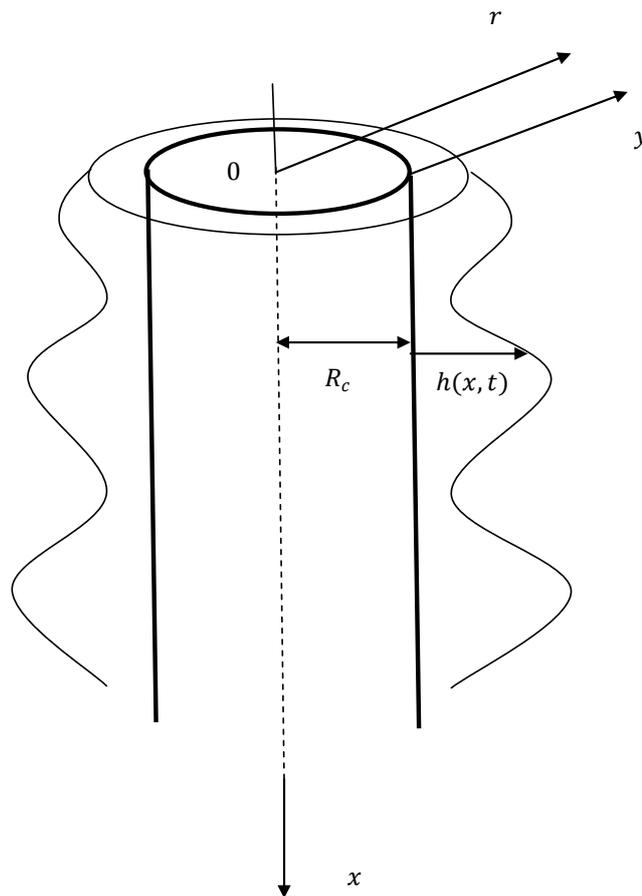


Fig. I.2 : Ecoulement sur un cylindre d'un film mince, limité par les plans $y = 0$ et $y = h(x, t)$. On suppose un écoulement axisymétrique.

Toutes les équations gouvernant l'écoulement sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

<p>équation projetée suivant x</p> $R_e \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{(y + \eta)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G$
<p>équation projetée suivant r</p> $R_e \varepsilon^3 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{(y + \eta)} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{(y + \eta)^2} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$
<p>équation de continuité</p> $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y + \eta} = 0$
<p>condition d'adhérence à la paroi</p> $u = v = 0$
<p>condition cinématique à l'interface $y = h(x, t)$</p> $v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$
<p>continuité des contraintes tangentielles $y = h(x, t)$</p> $\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
<p>continuité des contraintes normales $y = h(x, t)$</p> $P = 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon W_e R_e \left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{\eta + h} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \right]$

Tableau I-2. Tableau récapitulatif de toutes les équations adimensionnées

CHAPITRE II

Formulation de l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement cylindrique

II.1 Introduction

Dans la situation de l'écoulement d'un film mince visqueux qui est considéré comme un écoulement de faible épaisseur, les effets de la viscosité jouent un rôle prédominant dans la dynamique de l'écoulement. On peut donc négliger les effets inertiels non linéaires devant les effets visqueux. Notre travail dans ce chapitre consiste à linéariser les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites associées regroupées dans le tableau (I.2). Pour ensuite établir l'équation d'Orr-Sommerfeld.

II.2 Equations linéarisées

Les développements effectués dans ce chapitre suivent ceux introduits par Benjamin [10] et Yih [13] pour un écoulement d'un film mince visqueux en écoulement sur un plan incliné. La géométrie cylindrique considérée dans ce travail prend en considération les effets de la courbure et de la tension superficielle. On verra au chapitre suivant que ces deux effets sont source d'une instabilité qui se produit à de faible nombre de Reynolds.

Dans le calcul de l'écoulement de base au chapitre précédent, nous avons supposé que la surface libre est indéformable (écoulement uniforme). Nous introduisons ici des perturbations de cet écoulement de base où apparaissent de petites variations de la surface libre.

II.2.1 Equations linéarisées pour les perturbations

Dans l'état non perturbé l'interface est supposée parfaitement plate, en terme de grandeur sans dimension cela revient à écrire $y = 1$.

Afin d'étudier la formation des perturbations à la surface libre, nous perturbons l'écoulement de base () en lui superposant des perturbations infinitésimales de la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = U(y) + \delta \tilde{u}(x, y, t) \\ v(x, y, t) = 0 + \delta \tilde{v}(x, y, t) \\ p(x, y, t) = P + \delta \tilde{p}(x, y, t) \\ h(x, t) = 1 + \delta \tilde{h}(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où $\delta \ll 1$ mesure l'amplitude des perturbations.

Dans tout ce qui suit, on notera U et P la vitesse et la pression relatives à l'écoulement de base. Les grandeurs \tilde{u} , \tilde{v} et \tilde{p} désignent les champs de vitesse et de pression dus aux perturbations et

\tilde{h} est la déformation de la surface libre. En substituant ces expressions dans les équations de Navier-Stokes adimensionnelles et les conditions aux limites associées, puis négliger tous les termes quadratiques termes d'ordre δ^2 dans les équations devant ceux d'ordre δ , on obtient les équations de navier-Stockes linéarisées :

$$R_e \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU(y)}{dy} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y+\eta)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \quad (\text{II.2})$$

$$R_e \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y+\eta)} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) - \frac{\tilde{v}}{(y+\eta)^2} \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\tilde{v}}{(y+\eta)} = 0 \quad (\text{II.4})$$

Conditions aux limites à la paroi en $y = 0$ deviennent :

$$\tilde{u} = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\tilde{v} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Conditions aux limites à la surface libre en $y = 1 + \delta \tilde{h}(x, t)$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{dU}{dy} + \delta \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$P + \delta \tilde{p} = \left(2\delta - \delta \tilde{h} \frac{dU(1)}{dy} \right) - W_e R_e \left(\delta \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} - \frac{1}{\eta+1+\delta \tilde{h}} \right) \quad (\text{II.9})$$

II.2.2 Evaluation des conditions aux limites à l'interface non perturbées

Les grandeurs intervenant dans les conditions aux limites à l'interface comme la vitesse et la pression des perturbations sont évaluées en $y = 1 + \delta \tilde{h}(x, t)$. On peut évaluer ces variables en $y = 1$ par un développement limité [10]. Au premier ordre les grandeurs sont exprimées en $y = 1$ et non en $y = 1 + \delta \tilde{h}(x, t)$, soit :

$$\begin{cases} U(1 + \delta \tilde{h}) = U(1) + \delta \tilde{h} \frac{\partial U(1)}{\partial y} \\ P(1 + \delta \tilde{h}) = P(1) + \delta \tilde{h} \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{cases} \tilde{u}(1 + \delta \tilde{h}) = \tilde{u}(1) + \delta \tilde{h} \frac{\partial \tilde{u}(1)}{\partial y} \\ \tilde{v}(1 + \delta \tilde{h}) = \tilde{v}(1) + \delta \tilde{h} \frac{\partial \tilde{u}(1)}{\partial y} \\ \tilde{p}(1 + \delta \tilde{h}) = \tilde{p}(1) + \delta \tilde{h} \frac{\partial \tilde{p}(1)}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Après substitution par les développements précédents dans les équations du mouvement et en tenant compte de l'hypothèse $U(1) = 1$, on obtient :

La condition cinématique reste inchangée, on remarque juste que l'écoulement de base dans l'équation (I.19) est évalué en $y = 1$ au lieu de $y = 1 + \delta \tilde{h}$.

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U(1) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (\text{II.12})$$

En développant $\frac{dU(1 + \delta \tilde{h})}{dy} = \frac{dU(1)}{dy} + \delta \tilde{h} \frac{d^2U(1)}{dy^2}$ et en prenant en considération le fait que $\frac{dU(1)}{dy} = 0$, la condition sur les contraintes tangentielles devient :

$$\tilde{h} \frac{d^2 \bar{U}(1)}{dy^2} + \frac{\partial \tilde{u}(1)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}(1)}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.13})$$

La condition sur les contraintes normales est exprimée en remplaçant dans l'équation (II.9) le terme $= W_e R_e \frac{1}{(1+\eta)}$. Cette condition devient après simplification :

$$\tilde{p} = 2 \frac{\partial \tilde{v}(1)}{\partial y} - W_e R_e \left(\frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} - \frac{\tilde{h}}{(\eta+1)^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

II.2.3 Système complet des équations linéarisées

Toutes les équations linéarisées sont résumées dans le tableau suivant :

<p>Equations pour le fluide $0 < y < h(x, t)$</p> $Re \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{U}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{d\bar{U}(y)}{dy} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y + \eta)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)$ $Re \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{U}(y) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y + \eta)} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) - \frac{\tilde{v}}{(y + \eta)^2}$ $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\tilde{v}}{(y + \eta)} = 0$
<p>Conditions à la paroi $y = 0$</p> $\tilde{u} = 0$ $\tilde{v} = 0$
<p>Conditions à l'interface $y = 1$</p> $\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U(1) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$ $\frac{d\bar{U}(1)}{dy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0$ $\tilde{p} = 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - We Re \left(\frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} - \frac{\tilde{h}}{(\eta + 1)^2} \right)$

Tableau II-1. Tableau résumant les équations linéarisées de l'écoulement perturbé.

II.3 Equation d'Orr-Sommerfeld

II.3.1 Modes normaux

Les équations (II.2)-(II.3) et les conditions aux limites (II.8)-(II.9) tronquées au premier ordre sont linéaires, cela nous permet d'introduire les solutions de ce problème sous forme de modes normaux, en introduisant la transformée de Fourier des perturbations sous forme :

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, y, t) = \tilde{u}(y)e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{v}(x, y, t) = \tilde{v}(y)e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{p}(x, y, t) = \tilde{p}(y)e^{ik(x-ct)} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Pour l'étude de la stabilité temporelle de l'écoulement, on impose le vecteur d'onde k réel et on résout le problème linéaire pour une valeur complexe de la célérité c , soit $\omega = kc$ où ω désigne la pulsation complexe de la perturbation. L'écoulement de base est instable si la partie imaginaire qu'on désigne par le taux de la croissance de la perturbation est positif ($\omega_i > 0$). Le mouvement de la surface libre est une onde sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ se propageant à la célérité c .

II.3.2 Fonctions de courant

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, la fonction de courant est d'un grand intérêt pratique, elle permet de simplifier le problème en ramenant l'étude du champ de vitesse du fluide incompressible à un champ scalaire [4,13]. Rappelons que notre étude concerne un écoulement incompressible axisymétrique. Le champ de vitesse ne dépend que de deux composantes (\tilde{u}, \tilde{v}) .

L'équation de continuité (II.4) peut être écrite sous la forme suivant :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{(y+\eta)} \frac{\partial((y+\eta)\tilde{v})}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.16})$$

Cette équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} (-(\eta + y)\tilde{v}) = \frac{\partial((\eta+y)\tilde{u})}{\partial x} \quad (\text{II.17})$$

L'équation (II.17) permet ainsi d'introduire une fonction de courant $\psi(x, y, t)$ telle que

$$\tilde{u} = -\frac{1}{(\eta+y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{II.18})$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{(\eta+y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.19})$$

Et on pose :

$$\begin{cases} \psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{p}(x, y, t) = \Pi(y)e^{ik(x-ct)} \\ h(x, t) = h_0e^{ik(x-ct)} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

L'équation de continuité est satisfaite. Après substitution des perturbations de vitesse par les fonctions de courant dans les équations de Navier-Stokes (II.2) et (II.3) , on obtient :

$$\frac{\frac{d^3\varphi}{dy^3}}{y+\eta} - \frac{\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{(y+\eta)^2} + \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{(y+\eta)^3} - k^2 \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{y+\eta} + \frac{ikR_e \left(c \frac{d\varphi}{dy} - U(1) \frac{d\varphi}{dy} + \varphi \frac{dU(1)}{dy} \right)}{y+\eta} + i\Pi(y)k = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$-ik \frac{\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{y+\eta} + ik \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{(y+\eta)^2} + \frac{ik^3\varphi}{y+\eta} + k^2 R_e \left(-\frac{\varphi U(1)}{y+\eta} + \frac{c\varphi}{y+\eta} \right) + \frac{d\Pi(y)}{dy} = 0 \quad (\text{II.22})$$

En $y = 0$:

$$\varphi = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad (\text{II.24})$$

En $y = 1$:

La condition cinématique devient:

$$\varphi(1) = h_0(\eta + 1)(c - U(1)) \quad (\text{II.25})$$

La continuité des contraintes tangentielles est :

$$\frac{\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{y+\eta} - \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{(y+\eta)^2} + \frac{k^2\varphi}{y+\eta} + h_0 \frac{d^2U}{dy^2} = 0 \quad (\text{II.26})$$

La continuité des contraintes normales s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi}{dy^3} - \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dy} + ikcR_e \frac{d\varphi}{dy} - ikR_e U \frac{d\varphi}{dy} + ikR_e \varphi \frac{dU}{dy} - 3k^2 \frac{d\varphi}{dy} \\ - ikR_e W_e h_0 \left(-\frac{k^2}{1+\eta} + \frac{1}{(1+\eta)^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

En dérivant par rapport à y l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe x ; puis on soustrait l'équation ainsi obtenue de l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe r nous permet d'obtenir l'équation d'Orr-Sommerfeld :

$$\begin{aligned} \frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2\frac{d^3\varphi}{dy^3} + 3\frac{d^2\varphi}{dy^2} - 3\frac{d\varphi}{dy} - 2k^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + ikR_e \left(c \frac{d^2\varphi}{dy^2} - U \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \varphi \frac{d^2U}{dy^2} \right) \\ + ikR_e (U(1) - c) \frac{d\varphi}{dy} - ikR_e \varphi \frac{dU}{dy} + 2k^2 \frac{d\varphi}{dy} + iR_e k^3 \varphi (U(1) - c) \\ + \varphi k^4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

La condition cinématique (II.25) nous permet de déterminer l'amplitude h_0 de l'interface :

$$h_0 = \frac{\phi(1)}{(\eta+1)(c-U(1))} \quad (\text{II.29})$$

et les conditions aux limites (II.26) et (II.27) deviennent :

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \frac{d\varphi}{dy} + \varphi(1) \frac{d^2U}{c-U(1)} + \varphi k^2 = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3 \varphi}{dy^3} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dy} - 3k^2 \frac{d\varphi}{1 + \eta} + ikR_e(U - c) \frac{d\varphi}{1 + \eta} + ikR_e \varphi \frac{dU}{1 + \eta} \\
& + 2k^2 \frac{\varphi}{(1 + \eta)^2} - ikR_e W_e \varphi \left(\frac{1}{(c - U(1))} \left(\frac{1}{(1 + \eta)^3} - \frac{k^2}{(1 + \eta)} \right) \right) = 0
\end{aligned}
\tag{II.31}$$

CHAPITRE III

Résolution asymptotique du problème

III.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld établie pour un écoulement en coordonnées cylindriques. Pour cela une méthode des développements asymptotiques sera développée dans le cas des grandes ondes. La stabilité linéaire de cette écoulement nous permet de déterminer une relation de dispersion analytique. Cette démarche nous permet de déterminer le seuil critique d'apparition des instabilités de l'écoulement.

III.2 Problème aux valeurs propres

L'équation d'Orr-Sommerfeld est décrite comme un problème aux valeurs propres, où la célérité c est la valeur propre et $\varphi(y)$ est la fonction propre [4]. L'équation à résoudre est donc l'équation d'Orr-Sommerfeld qui est une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. Nous rappelons l'équation d'Orr-Sommerfeld et les quatre conditions aux limites nécessaires à la résolution du problème.

$$\begin{aligned} \frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2\frac{\frac{d^3\varphi}{dy^3}}{y+\eta} + 3\frac{\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{(y+\eta)^2} - 3\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{(y+\eta)^3} - 2k^2\frac{d^2\varphi}{dy^2} + ikR_e \left((c-U)\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \varphi\frac{d^2U}{dy^2} \right) \\ + ikR_e(U-c)\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{y+\eta} - ikR_e\varphi\frac{\frac{dU}{dy}}{y+\eta} + 2k^2\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{y+\eta} + iR_e\varphi k^3(U-c) + \varphi k^4 \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Deux conditions à la paroi, condition d'adhérence et condition d'imperméabilité :

$$\varphi(y) = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{III.3})$$

Et les deux conditions à l'interface sur les contraintes tangentielles et normales :

$$\frac{\varphi(1)\frac{d^2U(1)}{dy^2}}{c-U(1)} - \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{1+\eta} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \varphi k^2 = 0 \quad (\text{III.4})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi}{dy^3} - \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dy} + ikR_e(c - U)\frac{d\varphi}{dy} + ikR_e\varphi\frac{dU}{dy} - 3k^2\frac{d\varphi}{dy} \\ + 2k^2\frac{\varphi}{(1+\eta)^2} - ikR_eW_e\varphi\left(\frac{1}{(c - U(1))}\left(\frac{1}{(1+\eta)^3} - \frac{k^2}{(1+\eta)}\right)\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

III. 3 Développement asymptotiques

Dans ce paragraphe on va tenter de résoudre l'équation précédente par une approche basée sur les développements asymptotiques [13] . On s'intéresse à la déstabilisation de la surface libre d'un film mince, donc l'épaisseur du liquide visqueux en écoulement sur une paroi est faible, à faible nombre de Reynolds des ondes de grandes longueurs d'onde tel que $k \ll 1$, apparaissent à la surface libre. On cherche alors les solutions du problème aux valeurs propres où les inconnues sont l'amplitude $\varphi(y)$ et la célérité complexe $= c_r + ic_i$, en posant le nombre d'onde $k \rightarrow 0$. On fixe les paramètres sans dimension comme la tension superficielle, le nombre de Froude et la courbure de la paroi du cylindre et on va développer l'amplitude $\varphi(y)$ et la célérité c en série de puissance du petit paramètre k .

$$\begin{cases} c = c_0 + kc_1 + k^2c_2 + \dots \\ \varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + k^2\varphi_2 + \dots \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Ces expressions sont introduites dans les équations (III.1)-(III.5) et on collecte les termes du même ordre en k et on obtient un système d'équations à résoudre pour chaque ordre.

III .3.1 Système à l'ordre zéro

$$\frac{d^4\varphi_0}{dy^4} - \frac{2}{y+\eta}\frac{d^3\varphi_0}{dy^3} + \frac{3}{(y+\eta)^2}\frac{d^2\varphi_0}{dy^2} - \frac{3}{(y+\eta)^3}\frac{d\varphi_0}{dy} = 0 \quad (\text{III.7})$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\varphi_0 = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{d\varphi_0}{dy} = 0$$

(III.9)

$$\frac{d^2\varphi_0}{dy^2} - \frac{1}{1+\eta} \frac{d\varphi_0}{dy} - \frac{-4/\kappa}{c_0-1} \varphi_0 = 0$$

(III.10)

$$\varphi_0''' - \frac{1}{y+\eta} \varphi_0'' + \frac{1}{(y+\eta)^2} \varphi_0' = 0$$

(III.11)

La résolution de ce système d'équation est effectuée à l'aide du logiciel Maple. La résolution de l'équation (III.7) donne :

$$\varphi_0(y) = b_1 + b_2(y+\eta)^4 + b_3(y+\eta)^2 + b_4(y+\eta)^2 \ln(y+\eta)$$

(III.12)

On obtient un polynôme de degré quatre et les constantes d'intégration sont obtenues à l'aide des quatre conditions aux limites (III.8)-(III.11) développées à l'ordre zéro :

Et les conditions aux limites s'écrivent :

$$b_1 + b_2\eta^4 + b_3\eta^2 + b_4\eta^2 \ln(\eta) = 0$$

(III.13)

$$4b_2\eta^3 + 2b_3\eta + 2b_4\eta \ln(\eta) + b_4\eta = 0$$

(III.14)

$$\begin{aligned} & 12b_2(1+\eta)^2 + 2b_3 + 2b_4 \ln(1+\eta) + 3b_4 \\ & - \frac{4b_2(1+\eta)^3 + 2b_3(1+\eta) + 2b_4(1+\eta) \ln(1+\eta) + b_4(1+\eta)}{(1+\eta)} \\ & - 4\kappa \left(\frac{b_1 + b_2(1+\eta)^4 + b_3(1+\eta)^2 + b_4(1+\eta)^2 \ln(1+\eta)}{c_0-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

(III.15)

$$\begin{aligned} & 24b_2(1+\eta) + \frac{2b_4}{1+\eta} - \frac{12b_2(1+\eta)^2 + 2b_3 + 2b_4 \ln(1+\eta) + 3b_4}{1+\eta} \\ & + \frac{4b_2(1+\eta)^3 + 2b_3(1+\eta) + 2b_4(1+\eta) \ln(1+\eta) + b_4(1+\eta)}{(1+\eta)^2} = 0 \end{aligned}$$

(III.16)

Les conditions aux limites à la paroi (III.13)- (III.14) et les conditions à l'interface (III.15)- (III.16) déterminent les constantes b_1 , b_2 , b_3 et b_4 . On trouve :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{\eta^2}{2} b_4 \\
 b_2 &= 0 \\
 b_3 &= -b_4 \ln(\eta) - \frac{b_4}{2} \\
 b_4 &= -\frac{2(2b_2\eta^2 + b_3)}{2 \ln(\eta) + 1}
 \end{aligned}
 \tag{III.17}$$

La substitution de ces constantes dans l'équation (III.12) nous permet d'avoir une expression explicite de la fonction propre à l'ordre zéro, nous pouvons prendre arbitrairement une constante égale à un ce qui revient à normaliser la fonction propre $\varphi_0(y)$:

$$\varphi_0(y) = b_4 \frac{\eta^2}{2} - b_4 \left(\ln(\eta) - \frac{1}{2} \right) (y + \eta)^2 + b_4 (y + \eta)^2 \ln(y + \eta)
 \tag{III.18}$$

La condition (III.15) nous permet de déterminer l'expression de la célérité c_0 :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \left(4(1 + \eta)^4 \ln\left(\frac{1 + \eta}{\eta}\right) - 10\eta^2 - 8\eta - 4\eta^3 - 2 \right) \ln\left(\frac{1 + \eta}{\eta}\right) \\
 &\quad - 2(2\eta + 1)(1 + \eta)^2 \ln\left(\frac{1 + \eta}{\eta}\right) + 2 + 4\eta + 4\eta^2
 \end{aligned}
 \tag{III.19}$$

Remarquons que la valeur de la célérité à l'ordre zéro s'exprime uniquement en fonction de la courbure η , elle est donc réelle. On peut dire qu'à cet ordre les ondes se propagent toutes à une même vitesse. Ces ondes ne sont ni amplifiées ni amorties. Il faut donc chercher la correction de la célérité à l'ordre suivant.

III .3.2 Système à l'ordre un

$$\begin{aligned}
 & -2i \frac{\frac{d^3 \varphi_1}{dy^3}}{1 + \eta} + 3i \frac{\frac{d^2 \varphi_1}{d^2 y}}{(1 + \eta)^2} - 3i \frac{\frac{d \varphi_1}{dy}}{(1 + \eta)^3} + i \frac{d^4 \varphi_1}{dy^4} + i R_e (c_0 - U) \frac{d^2 \varphi_0}{d^2 y} + i R_e \varphi_0 \frac{d^2 U}{d^2 y} \\
 & - i R_e \varphi_0 \frac{\frac{dU}{dy}}{1 + \eta} + i R_e U \frac{\frac{d \varphi_0}{dy}}{1 + \eta} - i R_e c_0 \frac{\frac{d \varphi_0}{dy}}{1 + \eta} - i R_e U(1) \frac{d^2 \varphi_0}{d^2 y} = 0
 \end{aligned}
 \tag{III.20}$$

Les conditions d'adhérence et d'imperméabilité à l'ordre 1 sont

$$\varphi_1(y) = 0 \tag{III.21}$$

$$\frac{d}{dy} \phi_1(y) = 0 \tag{III.22}$$

Les conditions aux limites à l'interface à l'ordre 1 sont exprimées en fonction des solutions du problème à l'ordre zéro. Comme on peut le voir à l'équation (III.20) le système à l'ordre zéro s'écrit en fonction $\varphi_0(y)$ et c_0 et de leurs dérivées.

La vitesse $U(y)$ dans toutes les équations correspond à la vitesse de base adimensionnée :

$$U(y) = \left(2(1 + \eta)^2 \ln \left(\frac{y + \eta}{\eta} \right) - (y + \eta)^2 + \eta^2 \right) \kappa$$

Où

$$\kappa = \frac{1}{2(1 + \eta)^2 \ln \left(\frac{1 + \eta}{\eta} \right) - (1 + \eta)^2 + \eta^2}$$

Dans les conditions aux limites à l'interface cette vitesse et ses dérivées sont évaluées en $y = 1$, ce qui donne :

$$U(1) = 1, \quad U'(1) = 0 \quad \text{et} \quad U''(1) = -4/\kappa$$

La résolution de ce problème est faite de la même manière que celui effectué à l'ordre zéro. On trouve explicitement les solutions $\varphi_1(y)$ et c_1 , la correction c_1 de la célérité est imaginaire, elle permet donc d'analyser les amplifications des perturbations. L'expression de c_1 est trop longue, nous avons donc choisi de ne pas la donner explicitement, mais d'analyser les résultats obtenus graphiquement.

III .4 Résultats et discussion

On souhaite présenter les résultats de stabilité linéaire aux grandes ondes, dans le plan nombre de Reynolds R_e en fonction du nombre d'onde k . La courbe de stabilité marginale est obtenue en posant la célérité complexe $c_1 = 0$. Nous allons analyser les effets combinés des différents paramètres qui caractérisent cet écoulement.

III .4.1 Influence de la courbure

Nous avons regardé l'influence du paramètre de la courbure η les autres paramètres comme le nombre de Weber W_e sont fixes. Les nombres de Reynolds R_e et le nombre de Weber W_e utilisées dans toute l'étude sont définis par :

$$R_e = \frac{U_N h_N}{\nu}$$
$$W_e = \frac{\sigma}{\rho h_N U_N^2}$$

Où nous avons défini U_N comme étant la vitesse à l'interface de l'écoulement de base. Nous avons choisi d'introduire un nouveau paramètre sans dimension, le nombre de Kapitza noté Ka , ce nombre sans dimension ne fait intervenir que les caractéristiques propres du fluide considéré.

Le nombre de Weber W_e peut être écrit en fonction du nombre de Kapitza avec la relation suivante :

$$W_e = (4\kappa)^{-1/3} Ka (R_e)^{-5/3}$$

Rappelons que :

$$\kappa = \frac{1}{2(1+\eta)^2 \ln\left(\frac{1+\eta}{\eta}\right) - (1+\eta)^2 + \eta^2}$$

On constate sur la figure 1 (a) et (b) que la perte de stabilité de cet écoulement intervient à faible nombre de Reynolds.

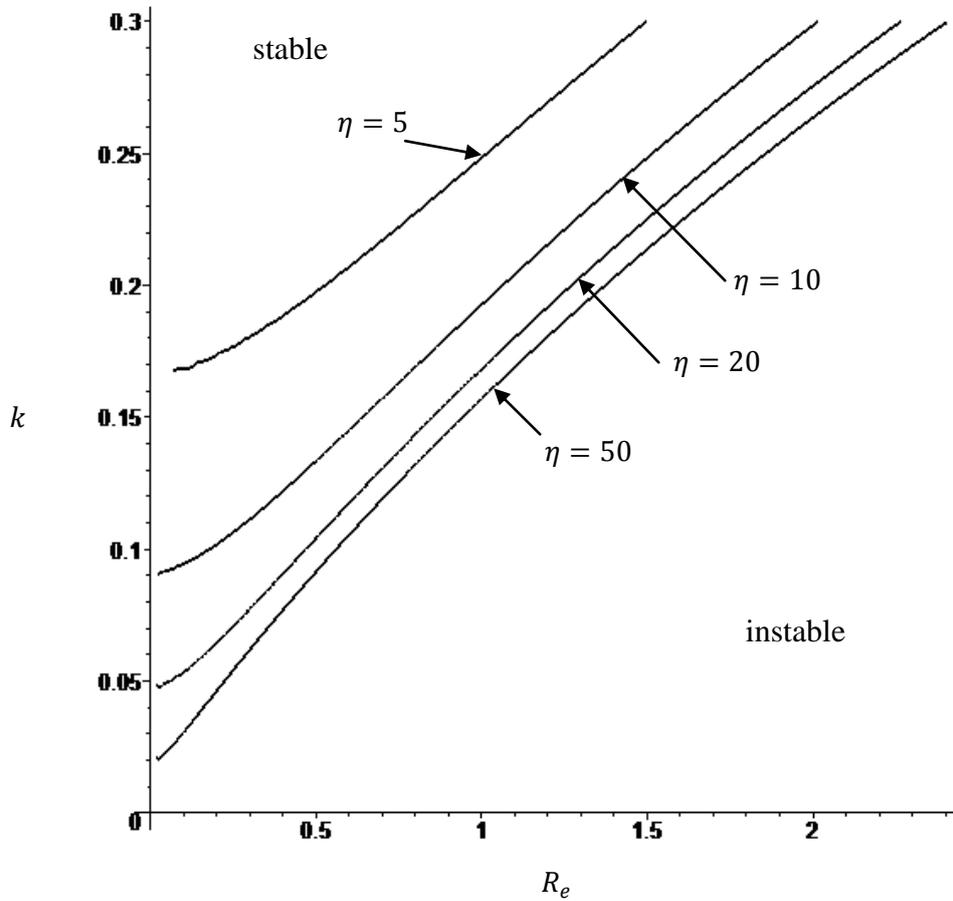


Figure III.1 – Courbes de stabilité neutre pour différentes valeurs de la courbure η . On prend $Ka = 6173$. Les valeurs correspondantes de la courbure sont données par $\frac{1}{\eta}$ (0.02; 0.05; 0.1; 0.1).

La figure III.1 montre que en augmentant la courbure ce qui revient à diminuer, la zone instable augmente. Le nombre d'onde d'apparition de cette instabilité augmente lorsque la courbure augmente. Les résultats mettent en évidence une réduction importante de la zone instable pour $\eta = 50$ cette valeur correspond à une faible courbure.

III .4.2 Influence de la tension superficielle

Nous étudions l'influence de la tension superficielle sur les instabilités à travers le nombre de Kapitza Ka . On peut conclure à l'effet stabilisant de la tension superficielle sur l'interface. En effet la zone instable se rétrécit lorsqu'on augmente le nombre de Kapitza comme on peut le voir sur les courbes de la figure III.2.

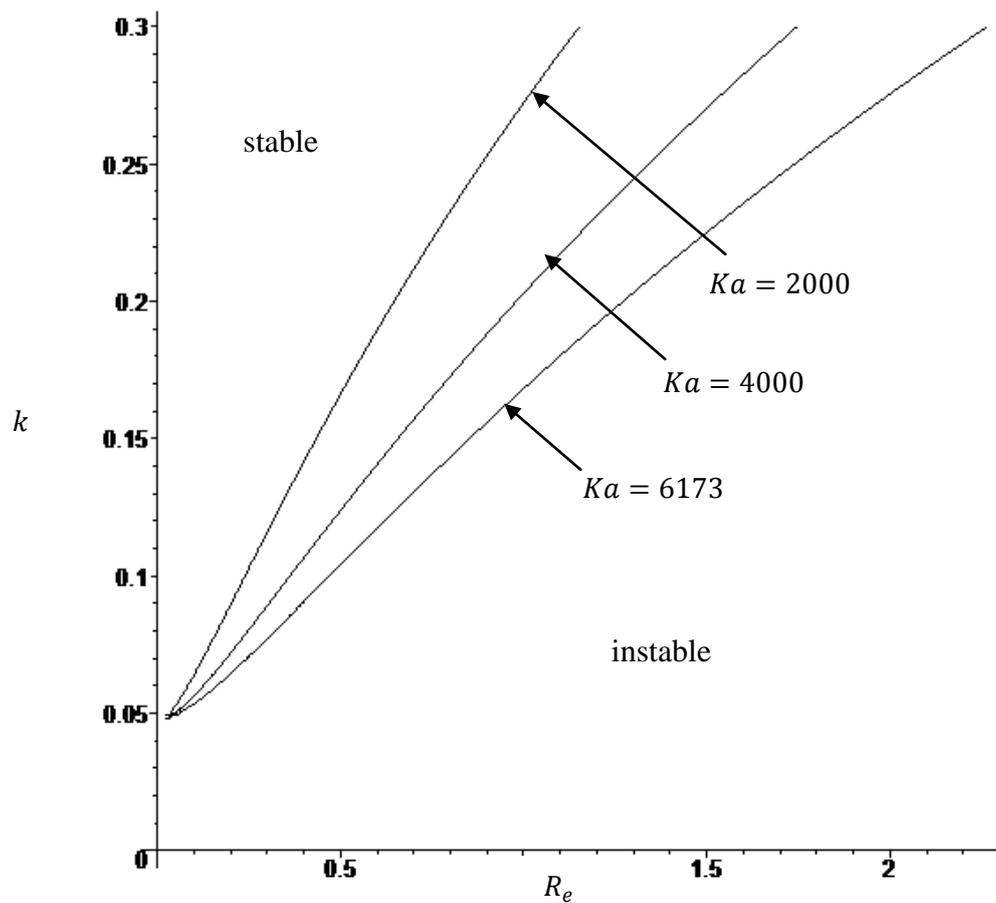


Figure III.2 – Courbes de stabilité neutre montrant l'influence de la tension superficielle, la courbure est fixée à $\eta = 20$.

Conclusion et perspectives

Nous avons analysé la stabilité de la surface libre d'un film fluide visqueux s'écoulant par gravité sur un cylindre vertical. Cette analyse a été effectuée à l'aide de la méthode de petites perturbations et cela nous a permis d'établir l'équation d'Orr-Sommerfeld gouvernant la stabilité de cet écoulement. La résolution du système aux valeurs propres ainsi obtenu est réalisée à l'aide d'un développement asymptotique aux grandes ondes. Cette méthode de résolution présente des avantages importants tels que :

- On obtient une relation de dispersion analytique,
- Précision des résultats au seuil de l'instabilité.

On a pu mettre en évidence les effets déstabilisants de la courbure et ceux stabilisant de la tension superficielle sur l'interface à faible nombre de Reynolds.

Le système d'équations obtenu peut être résolu numériquement sans restriction sur les nombres d'onde.

Références bibliographiques

- [1] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatousse, Linear stability of a two layer film flow down an inclined channel : A second-order weighted residual approach, *Phys. Fluids* **19** (2007).
- [2] L.Boudjmil, Contribution à l'étude des ondes hydrodynamiques dans les écoulements à surface libre, mémoire de master ,(2015).
- [3] Boukorras, S. Etude de la stabilité d'écoulements gravitaires de films liquides, mémoire de master ,(2015).
- [4] Drazin P.G. and Reid W.H . Hydrodynamic stability, Cambridge University Press ,(1981).
- [5] Duprat, C. Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale, *Fluid Dynamics*. Université Pierre et Marie Curie - Paris(2009).
- [6] Floryan, J.M. Davis, S.H. and Kelly, R.E. Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane, *Phys. Fluids* 30 (4), 983 (1987).
- [7] Gollub, J.P. Liu, J. Paul, J.D. Measurements of the primary instability of film flow, *J. Fluid Mech.* 250 (1993) 69–101.
- [8] Hickox, C. E., Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow, *Phys. Fluids* 14 (1971).
- [9] Kapitza P. L. and Kapitza S. P., Wave flow of thin layers of a viscous fluid, *Zh. Eksp. Teor.Fiz* 19 ,pp105–120, (1949).
- [10] Leblanc,S. Hydrodynamique, problèmes corrigés. EDP Sciences. ISBN 978-2-7598-0525-9,(2010).
- [11] Ndoumbe, S. Lusseyran, F. Izrar, B. *Contribution à la modélisation d'un film annulaire tombant*, C. R. Mécanique 331 pp 173–178, (2003).
- [12] A. Oron, S. H. Davis, and S. G. Bankoff, Long-scale evolution of liquid films, *Rev.Mod. Physics* 69, n° 3 (1997).
- [13] Yih, C.-S. , Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids* 6 : 321-34, (1963).

Résumé

Dans cette étude nous montrons que l'écoulement d'un film mince visqueux sur une paroi courbe conduit à une déstabilisation de l'interface liquide-gaz. Le mouvement du fluide est généré par la gravité et la tension superficielle. L'essentiel du travail concerne l'élaboration d'une équation linéaire d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites associées obtenues à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse. Résoudre le problème de stabilité revient à résoudre l'ensemble de ces équations. Nous avons résolu analytiquement ce problème à l'aide d'un développement asymptotique à grande longueur d'onde. Afin d'analyser les effets combinés des différents paramètres qui caractérisent l'écoulement, une étude de la stabilité linéaire du modèle développé est effectuée. Ceci nous a permis de mettre en évidence une instabilité capillaire qui se produit à de faible nombre de Reynolds. Nous montrons que les effets pertinents qui permettent de contrôler l'interface sont la courbure et la tension superficielle.

Mots clés : écoulements laminaires ; fluides visqueux ; films minces ; interface ; grandes ondes ; équation d'Orr-Sommerfeld ; développement asymptotique.