République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences exactes
Département mathématique

Mémoire de Fin de Cycle

En Vue de l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Statistique et analyse décisionnelle

Thème :

Recueil sur les méthodes d'optimisation combinatoire et application sur un problème de transport réel : *cas Ifri*

Réalisé par :

MAAMERI Nessma & SAGHI Soraya

Devant le jury composé de :

Président	**M. BOURAINE**	**M.A.A**	**U. A. Mira, Béjaia**
Examinateur	**H. ALOUI**	**M.C.B**	**U. A. Mira, Béjaia**
Rapporteur	**M. OURBIH**	**Professeur**	**U. A. Mira, Béjaia**

Béjaia, Dimanche 23 Juin 2013.

Remerciements

Le simple geste d'une personne à une autre est de reconnaître son bienfait, Et enfin, ce n'est que le destin qui impose ce qu'il veut.

En effet, nous remercions d'abord et avant tout notre dieu qui nous a donné la vie, la force et le courage, ainsi que la patience pour réaliser ce travail. Nous le remercions également pour avoir mis à notre disposition d'aimables personnes qui nous ont soutenues du mieux qu'elles pouvaient.
Nous adressons ensuite toute notre gratitude à notre encadreur : le professeur M. OURBIH pour sa disponibilité, sa patience, et ses judicieuses orientations, qui ont contribué à alimenter notre réflexion et aussi MR K. AMROUN
Nous ne manquerons pas non plus de dire un grand merci aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce mémoire à sa juste valeur, et de nous faire part de leurs remarques sûrement pertinentes qui contribueront, sans nul doute, au perfectionnement du présent travail.
Nous tenons également à remercier l'ensemble des enseignants du département de mathématiques, qui nous ont transmis des connaissances scientifiques et donné les outils nécessaires à une meilleure réussite de nos études universitaires.
Nos derniers remerciement vont droit aux amis(es) et collègues qui nous ont encouragé en nous témoignant leur sympathie et apporté leur aide morale et intellectuelle tout au long de notre démarche et plus particulièrement melle ZIDOUNI Kanza un grand merci pour toi.

Dédicace

Je dédie ce laborieux travail à :
Mon père qui m'a inculqué la discipline, les valeurs de la réussite et du respect d'autrui.
Ma tendre mère qui m'a enseigné la tendresse, la douceur et l'amour des autres.
Ma tante zehoua que j'aime énormément et mes très chers oncles Djamel et Akacha pour leurs soutien moral et financier qui m'a été d'une aide inestimable tout au long de ma vie.
A la mémoire du symbole de douceur, de tendresse, d'amour : ma grand mère Ferroudja.
Mes soeurs Alia et Sabrina pour lesquelles je souhaite de brillantes études et un avenir prometteur.
Mes freres Ali, Guillas et mon joli coeur Rayane auquel je souhaite de suivre le chemin de ses freres et soeurs ainées.
Ma chère binôme "Soraya", merci pour les bon moments qu'on a partagé ensemble, et plein d'amour, de joie, de santé à l'avenir.
Mes cousins et cousines.
L'ensemble de mes amis(es) plus particulièrement ma fleure adorée Lewan Iraten.

Nessma

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :
Ce qu'est toujours mon meilleur exemple dans la vie : mon très cher père, pour les sacrifices qu'il a consentis pour mon éducation et pour l'avenir qu'il n'a cessé d'offrir.
Symbole de douceur, de tendresse, d'amour et affection : ma chere mère.
A mes chers sœurs et frères qui sont toujours derrière moi surtout sabrina, Zina, ,fayçal et mohamed.
A ma moitié egale Mohand, qui m'a constamment soutenu et a permis la réalisation de ce mémoire. Je le remercie ici de son amour et lui dédie ce travail.
A mes chers neveux Rayan, Maraouen et hamza.
A ma chere binôme nessma.
A mes chers amis et camarades.
A vous tous je dis merci

Soraya

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

"Le désir humain de perfection trouve son expression dans la théorie de l'optimisation. Elle étudie comment décrire et atteindre ce qui est meilleur, une fois que l'on connaît comment mesurer et modifier ce qui est bon et ce qui est mauvais ... la théorie de l'optimisation comprend l'étude quantitative des optimums et les méthodes pour les trouver" [1].

A partir de la citation ci-dessus, on comprend la motivation d'un processus d'optimisation. En fait, l'optimisation combinatoire couvre un large éventail de techniques, certaines datant même de quelques siècles et est utilisée dans de nombreux domaines de la vie courante : finance (minimisation de coût, maximisation de profit), transport (planification), biologie (analyse de données, modélisation), etc. Elle peut être définie comme la recherche d'une solution optimale, parmi un ensemble de solutions candidates, pour un problème donné. La notion de meilleure solution étant définie par une fonction objectif de plusieurs variables liées entre elles par des contraintes sous forme d'égalités ou d'inégalités.

Dans un contexte de concurrence acharnée dictée par la globalisation de l'économie, toutes les entreprises à travers le monde ont la grande préoccupation de garder un certain niveau de compétitivité pour pouvoir survivre, et ce tout en restant dans les normes de leurs propres moyens.
Ce climat concurrentiel impose un grand soin aux différentes rubriques liées aux activités de l'entreprise. Le transport est l'un des secteurs les plus sensibles qui touche directement à son économie. Il est depuis toujours, un des services vitaux et coûteux.

L'étude des problèmes de transport a constitué l'un des champs majeurs d'application de la programmation linéaire. Le travail initié par Hitchcock et Koopmans en 1940 a été la source des développements réalisés dans le traitement des problèmes de transport. A base de ces travaux, d'autres chercheurs ont décortiqué les modèles de transport de base, pour inclure non seulement les modèles de livraisons optimums mais également analyser la gestion de production, la livraison des produits et les problèmes d'affectation.

Transporter sur de grandes et moyennes distances des quantités très importantes de produits engendre des coûts de transport pouvant représenter plus de 30% du prix de revient du produit. Toute réduction de ces coûts, même minime a une importance économique considérable.

Lors de notre présentation à l'entreprise IFRI en tant que «spécialistes» d'aide à la décision, nous avons d'abort discuté sur les différents problèmes existants dans l'entreprise et nous avons constaté leur problème majeur qui est la minimisation des coûts de transport. Notre projet s'inscrit dans ce cadre et traite la problématique du transport de palettes d'eau minéral naturel sur tout le térritoire national de cette société. Le but étant de trouver une stratégie (plan de transport optimal) pour que l'entreprise puisse exploiter ces moyens de façon à couvrir la demande de sa clientèle d'une part et de minimiser les coûts engendrés d'une autre part. Nous avons mis en œuvre le tableur Solveur d'Excel 2013, qui permet un gain de temps, pour optimiser le problème en question.

À la suite de cette introduction, nous essayerons de donner durant le premier chapitre quelques généralités sur l'optimisation combinatoire, ce chapitre a pour but de rappeler comment résoudre un problème d'optimisation combinatoire avec maximisation ou minimisation d'une fonction objectif fidèlement à un certain nombre de contraintes.

Le deuxième chapitre, a pour principal objectif de présenter la formulation mathématique des problèmes de programmation linéaire et les différentes méthodes de résolution, nous exposons la résolution des PL par la méthode du simplexe développée par G.B.Dantzig (1949).

Ensuite, nous présentons de près au chapitre trois, la modélisation et la résolution d'un problème de transport.

Cette présentation est suivie d'une application au quatrième chapitre, dont l'intéret est de déterminer un plan d'éxpédition optimal de distribution de palettes d'eau minéral naturel pour l'entreprise Ifri, et enfin nous terminons notre étude par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités sur l'optimisation combinatoire

1.1 Introduction

L'optimisation combinatoire occupe une place très importante en recherche opérationnelle, elle se trouve au carrefour de la théorie des graphes, de la programmation linéaire et de la programmation en nombres entiers. Son importance se justifie d'une part, par la grande difficulté des problèmes d'optimisation et d'autre part, par de nombreuses applications pratiques pouvant être formulées sous forme d'un problème d'optimisation combinatoire.

1.2 C'est quoi l'optimisation combinatoire ?

Beaucoup de problèmes d'ordre pratique ou théorique nécessite de prendre le meilleur choix, selon un critère donné, parmi un ensemble de choix possibles, souvent très large.
Ces problèmes ont été étudiés depuis longtemps dans des axes de recherches indépendants et ce n'est qu'au milieu du vingtième siècle qu'ils ont été mis dans une seule structure en établissant des relations entre eux. Cette structure est nommée optimisation combinatoire.

Définition 1.2.1. Soit un ensemble fini E. Un problème d'optimisation combinatoire consiste à déterminer le minimum s^* d'une application f, sur un ensemble fini S :

$$f(s^*) \ = \ \max_{s \in S} \ f(s) \tag{1.1}$$

où

$f : S \to \mathbb{R}$ et S est une collection contenue dans l'ensemble $P(E)$ des parties de E qui satisfait les contraintes du problème.

Remarque 1.2.1. La définition 1.1.1 reste valable dans le cas d'une maximisation car :

$$\min_{s \in S} f(s) = - \max_{s \in S} (f(s))$$

Nous présentons rapidement ici trois problèmes classiques d'optimisation combinatoire : le problème du plus cours chemin, le problème de voyageur de commerce et le problème du sac-à-dos.

1.3 Quelques problèmes classiques d'optimisation combinatoire

Le problème du plus cours chemin

Soit un graphe $G = (X, V)$, où X est l'ensemble des sommets et V est l'ensemble des arcs. On appelle le problème du plus cours chemin le problème suivant :
Etant donné un graphe G, nous associons à chaque arc u un nombre $l(u) \geq 0$ que nous appellerons la longueur de l'arc u. Trouver un chemin élémentaire μ, allant d'un sommet a à un sommet b, tel que la longueur totale :

$$l(u) = \sum_{u \in \mu} l(u)$$

soit aussi petite que possible.

Le problème du voyageur de commerce

Le problème du voyageur de commerce est l'un des problèmes classiques d'optimisation combinatoire. Il s'agit d'un voyageur en commerce qui souhaite visiter n villes données en passant par chaque ville exactement une fois (établir une tournée). Il commence par une ville quelconque et termine en retournant à la ville de départ. Le problème consiste à trouver la tournée de longueur minimale passant par toutes les villes et revenant au point de départ. La notion de distance peut être remplacée par d'autres notions comme le temps qu'il met ou l'argent qu'il dépense, dans tous les cas, on parle de coût. On distinguera ce problème par la notation PVC.

Considérons la distance entre les villes i et j est c_{ij} :

1. **Les variables de décision :**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si la ville } j \text{ suit immédiatement la ville } i \text{ dans le parcours;} \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

2. **Les contraintes :**

   (a) Le nombre de villes que le voyageur visite après la ville i est 1

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., n \tag{1.2}$$

   (b) Le nombre de villes que le voyageur visite avant la ville j est 1.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, ..., n \tag{1.3}$$

   (c) La contrainte de sous tournée : Soit U un sous ensemble de villes

$$\sum_{i \in U} \sum_{j \in U} x_{ij} \geq 1 \tag{1.4}$$

3. **La fonction objectif :**

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1.5}$$

4. **Le modèle :**

$$\begin{cases} \min Z = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, ..., n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, ..., n \\ \sum\limits_{i \in U} \sum\limits_{j \in \overline{U}} x_{ij} \geq 1 & 1 \leq |U| \leq n-1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \end{cases} \tag{1.6}$$

Le problème de sac à dos

Le problème de sac à dos modélise des situations analogues au remplissage d'un sac à dos, i.e. étant donné un sac de capacité b et n objets, où chaque objet j possède un poids et une valeur w_j, le problème qui se pose est : comment remplir le sac de sorte que le poids total des objets choisi n'excède pas la capacité du sac b tout en maximisant la valeur total.

1. **Les variables de décision :**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si l'objet } j \text{ est sélectionné} \\ 0, & \text{Sinom.} \end{cases} \tag{1.7}$$

2. **Les contraintes :** La contrainte de capacité

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b \tag{1.8}$$

3. **La fonction objectif** :

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{1.9}$$

4. **Le modèle :**

$$\begin{cases} \max Z = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \end{cases} \tag{1.10}$$

1.4 Outils de modélisation des problèmes d'optimisation combinatoire

Un problème d'optimisation combinatoire peut être modélisé en utilisant différents formalismes, par exemple :

La théorie des graphes

Les graphes s'introduisent de manière très naturelle comme support de modélisation, car ils permettent d'expliciter des relations de structure des problèmes d'optimisation combinatoire.

Des points et des flèches, se sont les ingrédients d'une théorie qui est née en 1736 avec la communication d'Euler $(1707-1783)$ dans laquelle il proposait une solution au célèbre problème des sept ponts de Königsberg. Cette théorie est nommée la théorie des graphes. Euler avait la curiosité de traverser les sept ponts de la ville de Königsberg une fois et une seule et à revenir à son point de départ. Euler représenta cette situation à l'aide d'un dessin où les sommets représentent les terres et les arêtes représentent les ponts. Le problème des ponts de Königsberg est identique à celui consistant à tracer une figure géométrique sans lever le crayon et sans passer plusieurs fois sur un même trait.

La programmation linéaire

Nous pouvons exprimer un problème d'optimisation combinatoire sous la forme d'un programme linéaire en variables continus (PL) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$(PL)\begin{cases} \max z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=\overline{1,m} \\ & x_j \geq 0 \quad j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{1.11}$$

La programmation linéaires en nombre entiers

Nous parlons de la programmation linéaire en nombres entiers lorsque le domaine des solutions d'un programme linéaire est restreint à des valeurs entières, car c'est le cas que nous rencontrons dans de nombreuses situations réelles. La forme générale d'un programme linéaire en nombres entièrs notée (P) est la suivante :

$$(P)\begin{cases} \max Z = & cx \\ & Ax \leq b \\ & x_j \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.12}$$

Le problème (PL) obtenue à partir de (P) en relâchant les contraintes d'intégrité sera appelé relaxation continue de (P).

1.5 Classification des problèmes

1.5.1 Selon les contraintes et l'objectif

A. Problèmes linéaires :On parle de problèmes linéaires lorsque l'on veut optimiser une fonction linéaire sous des contraintes purement linéaires.

- ***Programmation en nombres entiers*** : On appelle un programme en nombres entiers un modèle comportant une fonction objectif et des contraintes linéaires et des variables astreintes à ne prendre que des valeurs entières.

- ***Programmation entière mixte*** : Si certaines variables du modèle sont continues et d'autres en nombres entiers, on parle de programmation entière mixte.

- ***Programmation en*** $\{0, 1\}$: Un cas particulier très fréquent de programmation en nombres entiers est celui où les variables ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1 : on parle alors de programmation en $\{0, 1\}$

B. Problèmes non-linéaires : C'est le cas général dans lequel la fonction objectif ou les contraintes (ou les deux) contiennent des parties non-linéaires.

1.5.2 Selon la complexité

La théorie de la complexité est basée sur les travaux d'Edmonds, (1962) [2] et de Cook, (1971) [3], elle s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes. En effet, pour chaque problème posé, il est toujours possible de trouver une multiplicité d'algorithmes permettant de le résoudre. On se pose alors la question fondamentale de savoir quel algorithme

est le plus performant. Pour les comparer, on pourrait calculer le temps mis par un algorithme pour s'exécuter. L'approche de Donald Knuth a alors été de calculer une mesure de la complexité d'un algorithme, afin d'obtenir un ordre de grandeur du nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour que l'algorithme fournisse la solution du problème à l'utilisateur.
Théoriquement, tout problème d'optimisation peut être résolu par une énumération complète de toutes les solutions possibles de l'espace de recherche. De telles méthodes de résolution sont d'ailleurs appelées méthodes énumératives. Cependant, sur certains problèmes, une énumération exhaustive amène à des algorithmes de complexité exponentielle (c'est-à-dire en $O(e^n)$), inutilisables en pratique.
Même si, pour certains problèmes, on connaît des algorithmes éfficaces à complexité polynomiale (c'est-à-dire en $O(n^p)$), ce n'est pas généralisable à l'ensemble des problèmes. Nous pouvons donc conjecturer que certains problèmes sont par nature plus difficiles que d'autres, et par conséquent que leur résolution requiert des algorithmes de complexité plus élevée. Il est alors intéressant de définir une classification permettant de regrouper les problèmes ayant un même niveau de difficulté (pour plus de détails voir le travail présenté par Garey et Johnson, (1979) [4]).

Il existe de nombreuses classes de problèmes dans la littérature, nous ne mentionnerons ici que les plus représentatives :

- ***La classe*** P : On dit qu'un problème est de classe P, s'il peut être résolu, de manière éxacte par un algorithme de complexité polynomiale.

- ***La classe NP*** : La classe NP (" nodeterministic polynomial time "), quant à elle, regroupe les problèmes dont on peut vérifier que n'importe quelle proposition est bien une solution du problème, en un temps polynomial. On peut donc facilement en déduire que $P \subset NP$. La question qui fait encore débat aujourd'hui est de savoir si $NP \subset P$. Ceci prouverait qu'il existe des algorithmes polynomiaux permettant de résoudre n'importe quel type de problèmes. Or, la conjecture actuelle est plutôt de dire que $P \neq NP$. Ce qui impliquerait qu'il n'existe pas d'algorithmes polynomiaux pour résoudre les problèmes NP. De tels problèmes sont alors catégorisés comme difficiles et, à l'heure actuelle, leur résolution requiert des algorithmes à complexité exponentielle.

- ***La classe NP-complets*** :

Une dernière classe de problèmes existe, et est particulièrement importante, il s'agit des problèmes NP-complets. Ce sont les problèmes NP les plus difficiles, leur particularité est que tout problème NP peut être transformé en un problème NP-complet en un temps polynomial. Ces problèmes constituent donc le "noyau dur" des problèmes NP, si bien que si l'on trouvait un algorithme polynomial permettant de résoudre un seul problème NP-complet, on pourrait en déduire un autre pour tout problème NP. Parmi les problèmes NP-complets les plus connus, on peut citer : le problème du sac à dos.

1.6 Méthodes de résolutions

Une recherche exhaustive par énumération explicite de toutes les solutions est impensable pour résoudre un problème d'optimisation difficile en raison du temps de calcul induit. Néanmoins, la résolution d'un tel problème peut se faire de manière exacte en utilisant des méthodes permettent d'obtenir une ou plusieurs solutions dont l'optimalité est garantie. Mais comme le temps de calcul nécessaire pour trouver une solution risque d'augmenter exponentiellement avec la taille du problème, ces méthodes rencontrent généralement des difficultés avec les applications de taille importante. Selon Laporte et al, (1987) [5], les méthodes exactes de par leur nature, ne peuvent s'appliquer qu'à des problèmes spécifiques. Cependant dans certaines situations, on peut se contenter de solutions de bonne qualité, sans garantie d'optimalité, mais au profit d'un temps de calcul réduit. On utilise pour cela une méthode approchée, adaptée au problème considéré, mais avec l'inconvénient de ne disposer en retour d'aucune information sur la qualité des solutions obtenues.

1.6.1 Méthodes exactes

La méthode du Simplexe

La méthode du simplexe a été développée par George Dantzig en 1947. Cette méthode est un procédé itératif permettant d'atteindre progressivement sans l'aide d'un graphique

la solution optimale d'un programme linéaire.
L'idée de l'algorithme consiste à partir d'un sommet quelconque du polyèdre et, à chaque itération, d'aller à un sommet adjacent s'il est possible d'en trouver un meilleur pour la fonction objectif. S'il n'y en a pas, l'algorithme s'arrête en concluant que le sommet courant est optimal. En général, il y a plusieurs sommets adjacents au sommet courant qui sont meilleurs pour l'objectif. Il faut en sélectionner un seul, la règle de sélection étant appelée *Règle de pivotage*.

La procédure de séparation et d'évaluation

La procédure de séparation et d'évaluation progressive, en anglais *Branch and Bound* est une mise en application du principe latin *Divide ut Regnes* qui conseille de diviser ses ennemis pour régner plus aisément.
Cette méthode a été proposée par Little et al en (1963) pour résoudre le problème du voyageur de commerce puis, repris par d'autres sous différentes variantes. L'algorithme du Branch-and-Bound permet de séparer, de façon récursive, le problème initial en sous problèmes de cardinalité moindre, pour en faciliter sa résolution. Le cardinal des sous problèmes étant réduit en imposant des contraintes supplémentaires à l'ensemble à explorer. Une série de tests est ensuite appliquée à tous les sous problèmes générés, afin de supprimer de l'espace de recherche les sous problèmes qui ne peuvent pas mener à la solution optimale.
Cette recherche par décomposition de l'ensemble des solutions peut être représentée graphiquement par un arbre. C'est de cette représentation que vient le nom de "Méthode de recherche arborescente". [6]

La méthode des coupes de Gomory

Les méthodes de coupes ont permis de résoudre les problèmes particuliers de type partitionnement ou recouvrement (Delorme 1947). Leurs principe consiste à ajouter des contraintes linéaires, appelées coupes, n'excluant aucun point entier admissible une par une jusqu'à ce que la solution optimale de la relaxation soit entière.

Dans l'approche Branch and Bound que nous avons développé précédemment, la recherche des solutions est faite en éclatant le polyèdre convexe délimité par les contraintes en trois partis distinctes et à éliminer celle qui ne contient pas de solutions entières et à explorer les deux autres. L'approche par les coupes de Gomory est complètement différente dans le sens où elle coupe le polyèdre et se rapproche de la solution optimale entière d'itération en itération.
Gomory a développé une technique qui permet d'identifier automatiquement des inégalités valides, appelées coupes de Gomory.

La méthode de coupes et de séparation

Cette technique est connue également sous le terme anglais Branch and Cut. L'idée générale des méthodes de coupes est de résoudre un programme en nombres entiers comme une séquence de programmes linéaires.
Un algorithme de coupes et branchements (Branch-and-Cut algorithm) est une technique de séparation et évaluation dans laquelle on applique un algorithme de coupes pour calculer la borne de chaque sous-problème. Cette méthode introduite par Padberg et al, (1991) [7] pour le problème du voyageur de commerce s'est avérée très efficace, elle est maintenant largement utilisée pour résoudre d'une manière exacte des problèmes d'optimisation combinatoire.

1.6.2 Méthodes approchées

A. Heuristiques

Du grec " Heuriskein " signifie, trouver ou découvrir (Heureka) ; une heuristique est une procédure qui exploite au mieux la structure du problème considéré, dans le but de trouver une solution de qualité raisonnable (pas forcément optimale) en un temps de calcul aussi petit que possible (polynômial).
Deux types d'heuristiques sont principalement utilisés : les heuristiques de construction et les heuristiques de descente.

. Heuristiques constructives

Ces méthodes dites heuristiques constructives, se construisent en démarrant d'une solution initiale X_0 vide, et qui à chaque étape k, en respectant les contraintes du problèmes, insèrent une composante(valeur) x_k dans la solution :
Etape 1 : $X_1 = (x_1)$, Etape 2 : $X_2 = (x_1; x_2)$, Etape (k-1) : $x_{(k-1)} = (x_0; ...; x_{(k-1)})$, A l'issu de cette résolution, on obtient une solution telle que : $X_n = (x_1; x_2; ...; x_{n-1}; x_n)$. Parmi ces méthodes nous citons les méthodes gloutons.
- ***Méthodes gloutonnes*** : L'algorithme glouton consiste à chercher dans le voisinage d'une solution s une solution $s^{'}$ qui améliore la qualité de la solution courante s. Si une telle solution est trouvée, elle remplacera cette dernière et la recherche locale continue.
Ces étapes sont répétées jusqu'à ce qu'aucune solution meilleure n'est trouvée dans le voisinage de la solution courante et l'algorithme se termine avec un optimum local.

. Heuristiques de descente

Le principe de méthodes dites heuristiques de descente est très simple, il consiste à définir un voisinage d'une solution réalisable s du problème d'optimisation considéré, puis à chercher s'il existe une solution $s^{'} \in V(s)$ telle que :

$$f(s^{'}) \leq f(s)$$

Si tel est le cas on remplace s par $s^{'}$ et on recommence. Sinon un optimum local est trouvé et la recherche s'arrête.
Dans la (Fig 1.1), nous avons illustré les minima locaux et le minimum global d'une fonction $f(s)$ à minimiser.

B. Métaheuristiques

Le terme métaheuristique a été inventé par Fred Glover lors de la conception de la recherche tabou.
Ces méthodes sont nées après des mises au point poussées sur les heuristiques. Leurs but, autant que pour les heuristiques, est de réussir à trouver un optimum global. Pour cela, l'idée est à la fois de parcourir l'espace de recherche et d'explorer les zones qui paraissent

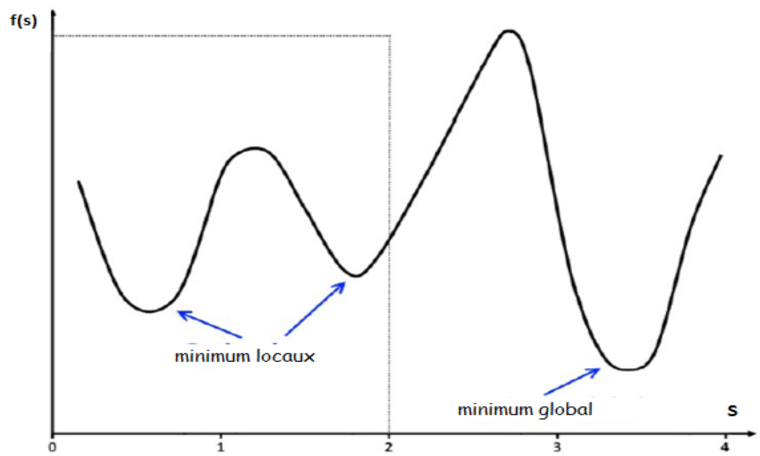


FIG. 1.1 – Minimums locaux et globaux d'une fonction

prometteuses mais sans être " piégé " par un optimum local. Leur fonctionnement, au contraire des heuristiques, est donc indépendant du problème traité. Théoriquement, l'utilisation des métaheuristiques n'est pas vraiment justifiée et les résultats théoriques sont plutôt mauvais.

Un grand nombre de métaheuristiques existent, nous présentons quelques-unes dans la suite de ce chapitre, nous les avons classés par type : celles à solution unique et celles à population de solutions.

. *Métaheuristiques à solution unique*

Nous présentons des algorithmes à solution unique tels que le recuit simulé et la méthode tabou.

- Le Recuit Simulé

L'algorithme du Recuit Simulé permet de résoudre le problème de minimum local (plus précisément dans le cas non linéaire). En effet, une nouvelle solution de coût supérieur à la solution courante ne sera pas forcément rejetée, son acceptation sera déterminée aléatoirement en tenant compte de la différence entre les coûts ainsi que d'un autre facteur appelé " température ".

Ce paramètre, la température, sert à prendre en compte le fait que plus le processus d'optimisation est avancé, moins on est prêt à accepter une solution plus coûteuse, ou alors, elle ne doit pas être trop coûteuse. Par contre, au début, l'acceptation de solutions fortement coûteuses permettra de mieux explorer tout l'espace des solutions possibles et par là-même, d'accroître nos chances d'approcher le minimum global.

Cet algorithme ne garantit pas d'atteindre le minimum global mais pour peu que la décroissance de la température soit très lente, on va beaucoup s'en approcher.

- L'algorithme tabou

La recherche tabou a été initiée au début des années 1980. Elle a été introduite par Glover en (1986) [8].Cette méthode est utilisée pour résoudre des problèmes complexes et/ou de très grande taille (souvent NP-difficiles). Celle-ci à plusieurs applications en programmation non linéaire.

L'idée de la recherche tabou consiste, à explorer le voisinage d'une solution initiale donnée, et à choisir dans ce dernier une autre solution qui minimise la fonction objectif. Il est essentiel de noter que cette opération peut ne pas améliorer la valeur de la fonction objectif. C'est à partir de ce mécanisme que l'on échappe aux minima locaux. Le risque cependant est qu'à l'étape suivante, on retombe dans le minimum local auquel on vient d'échapper. C'est pourquoi il faut que l'heuristique ait de la mémoire, le mécanisme consiste à interdire (d'où le nom de tabou) certains mouvements ou certaines composantes de ce mouvement (l'exemple le plus simple est d'interdire les derniers mouvements).

Les positions déjà explorées sont conservées dans ce qu'on appelle la Liste Tabou d'une taille donnée, qui est un paramètre ajustable de l'heuristique.

. Métaheuristiques à population de solutions

- La méthode par essaims particulaires

L'optimisation par essaims particulaires a été développée par Kennedy et al, (1995)[9], en s'inspirant du comportement social des individus qui ont tendance à imiter les comportements réussis qu'ils observent dans leur entourage tout en y apportant leur variations personnelles, ce qui offre un caractère adaptatif à la méthode. De ce fait, cette technique est fondée sur la notion de coopération entre agents qui peuvent être vus comme des animaux peu intelligents ayant peu de mémoire et de facultés de raisonnement. ***- La méthode par***

colonie de fourmis

L'idée initiale de cette méthode provient de l'observation du comportement des fourmis lorsqu'elles cherchent de la nourriture. En effet, celles-ci parviennent à trouver le chemin le plus court entre leur nid et une source de nourriture, sans pour autant avoir des capacités cognitives individuelles très développées. Après cette étude, un principe étonnant fut révélé : les fourmis communiquent indirectement via leur environnement (on parle alors de "stigmergie"), en déposant des phéromones sur le sol pour éclairer leurs comparses sur le chemin qu'elles ont déjà parcouru. Ainsi, lorsqu'elles reviennent au nid avec de la nourriture, les autres fourmis pourront suivre la piste de phéromones pour retrouver la source de nourriture. Mais, plus important, les phéromones s'évaporant avec le temps, les chemins les plus courts seront forcément ceux qui auront une intensité de phéromones plus forte. Ce qui, au final, mènera automatiquement les fourmis vers le chemin le plus court.[9]
L'algorithme de colonie de fourmis artificielles (Ant Colony Optimization ou ACO) a été proposé par Marco Dorigo lors de sa thèse de doctorat [10]. Il était initialement destiné à la recherche de chemins optimaux dans un graphe. Il reprend la notion de système multi-agent, chaque agent étant une fourmi. Une fourmi parcourt alors le graphe de manière aléatoire, mais avec une probabilité plus importante de suivre une arête du graphe, en fonction de la quantité de phéromones déposée dessus. Lorsque le graphe est entièrement parcouru, elle laisse sur le chemin qu'elle a pris une quantité de phéromones proportionnelle à la longueur de ce chemin.La piste la plus courte sera donc de plus en plus renforcée, et donc de plus en plus attractive.L'exploration de l'espace de recherche se fait via un phénomène d'évaporation se produisant à chaque itération, et retirant une partie des phéromones présentes dans l'environnement. Sans ce dernier phénomène, l'algorithme serait facilement piégé dans un optimum local.
Dans les premières itérations, les phéromones sont déposées uniformément sur les arêtes du graphe et les fourmis se déplacent donc aléatoirement. Mais, au fur et à mesure des itérations, le phénomène d'évaporation et l'intensification" des fourmis sur les arêtes des chemins les plus courts, fait disparaître les phéromones des arêtes les moins intéressantes. Ce processus continue jusqu'à ce que le plus court chemin (trouvé par les fourmis, ce n'est

pas forcément l'optimum global) apparaisse comme une piste de phéromones.
L'algorithme s'est depuis diversifié, et permet maintenant de résoudre d'autres types de problèmes d'optimisation. Par exemple, une fourmi est assimilée à une solution possible du problème, et peut se déplacer dans l'espace de recherche.

- Les algorithmes évolutionnaires

Les algorithmes évolutionnaires sont des algorithmes d'optimisation qui s'appuient sur des techniques inspirées de la génétique et de l'´evolution naturelle, Charles Darwin en 1859 propose ce mécanisme que l'on désigne sous le terme de darwinisme ou sélection darwinienne : sélection, croisement, mutation. C'est au début des années 60 que John Holland, (1975) a commencé à s'intéresser à ce qui allait devenir les algorithmes évolutionnaires. Ses travaux trouvent un premier aboutissement en 1975. L'ouvrage de Goldberg (1989) a également largement contribué à les vulgariser. Les quatre éléments fondamentaux des algorithmes évolutionnaires sont :

- L'évaluation du niveau d'adaptation d'un individu (évaluation de la fonction objective à optimiser),

- La sélection : représentant le choix des individus en fonction de leur niveau d'adaptation,

- le croisement : correspond au m´elange entre individus,

– la mutation : traduisant une modification d'un individu.

Les algorithmes évolutionnaires servent à simuler le processus d'´evolution d'une population. A partir, d'une population de n individus (n solutions d'un problème donné), des opérateurs de sélection, croisement et mutation sont appliqués à l'ensemble de ces individus pour en définir des nouveaux. La sélection a pour but de favoriser les meilleurs éléments de la population, le croisement et la mutation assurent une large exploration de l'espace de recherche de part en diversifiant la population d'individus. De nouveaux individus vont être évalués et vont venir remplacer certains plus anciens ou moins bons, Ainsi la population des n individus évolue au cours du temps et contient des individus de mieux en mieux adaptés au problème. Elle se dirige donc vers l'optimum. Les critères d'arrêt de la méthode sont un nombre fixé de générations, une limite de convergence de la population, ou une population qui n'´evolue plus suffisamment. Les algorithmes évolutionnaires diffèrent des algorithmes classiques d'optimisation et de recherche essentiellement en quatre points fondamentaux :

- Ils utilisent un codage des éléments de l'espace de recherche,

- Ils recherchent une solution à partir d'une population de solutions et non pas à partir d'une seule solution,

- Ils n'imposent aucune régularité sur la fonction étudiée (continuité, dérivabilité,...),

- Ils ne sont pas déterministes, et utilisent des règles de transition probabilistes.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de donner une définition des problèmes d'optimisation combinatoire, de les classifier et d'énumérer quelques méthodes de résolution en allant des méthodes exactes aux méthodes approchées. Nous avons pu constater, qu'elles étaient adaptables à un très grand nombre de problèmes.

D'abord, nous avons présenté avec peu de détails le fonctionnement de l'algorithme du Simplexe puis la méthode de séparation et d'évaluation et ses dérivées. Dans une deuxième étape, nous avons présenté des méthodes approchées, d'abord les heuristiques avec un exemple sur les méthodes constructives et les méthodes de descente, ensuite les métaheuristiques.

Dans le chapitre suivant nous proposons d'étudier la programmation linéaire et ses principes de base, pour modéliser un problème d'optimisation combinatoire sous forme d'équations linéaires.

Chapitre 2

Programmation linéaire

2.1 Introduction

La programmation linéaire est le domaine qui a eu le plus de succès en optimisation. Depuis sa formulation de 1930 à 1940, et le développement de la méthode de simplexe par Dantzig en 1940, des chercheurs dans différents domaines : économie, finance, ingénierie etc..., ont été amené à formuler et à résoudre des problèmes linéaires, et même quand le problème était non linéaire, il était modélisé sous forme linéaire, car les modèles non linéaires nécessitent des algorithmes plus élaborés et plus couteux [11].
La publication en 1984 du papier de Karmarkar est probablement l'évènement le plus significatif en programmation linéaire après la découverte de la méthode du simplexe. L'intérêt du travail de Karmarkar vient de la complexité polynômiale de son algorithme, ce travail a donné naissance aux méthodes de points intérieurs, qui restent jusqu'à présent un domaine de recherche très actif.
Nous nous proposons dans ce chapitre la programmation linéaire pour modéliser un problème d'optimisation combinatoire.

2.2 Formulation d'un programme linéaire

Un programme linéaire est un problème dans lequel on est amené à maximiser (ou minimiser) une application linéaire, appelée fonction objectif ou fonction économique, sur un ensemble d'équations et/ou d'inéquations linéaires, dites contraintes [12]. Autrement dit, la programmation linéaire est une branche des mathématiques qui a pour but de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire de type :

$$max(ou\ min)[Z(x_1, .., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j] \tag{2.1}$$

Sous les contriantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} b_i \quad , i = \overline{1, m} \tag{2.2}$$

Les nombres c_j , a_{ij} , b_i sont les paramètres du modèle ; ce sont des nombres connus avant la résolution (coût unitaire, capacité disponible, coefficients techniques...).

Pour $i = 1, .., m$ et $j = 1, .., n$, on appelle :

c_j = coefficients de la fonction objectif Z, leurs valeurs résulte de l'objectif assigné (le profit, les coûts unitaires, marge).

a_{ij}= coefficients des contraintes, il sagit de la quantité de ressource i requise pour chaque unité de variable x_j.

b_j= membres de droite des contraintes, il sagit de la quantité totale des ressources disponibles.

Dans la plupart des cas, les variables x_j, $j = \overline{1, n}$ sont astreintes à être non négatives ; il est d'usage de noter ces contraintes séparément. Pour un problème de maximisation le problème précédent devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j \\ s.c & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \leq b_i \quad , i = \overline{1, m} \\ & x_j \geq 0 \quad , j = \overline{1, n} \end{array} \right. \tag{2.3}$$

L'ecriture matricielle de ce problème est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & Z = C\ X \\ s.c & A\ X \leq b \\ & X \geq 0 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Où :

$X = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sont les variables à déterminer,

$C = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ sont les coefficients de la fonction objectif Z,

A est une matrice (m x n) fournie par les coefficients des contraintes,

$b = {}^t(b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^n$ représente les constantes des contraintes.

On dit alors qu'on a affaire à un problème de Programmation Linéaire (PL) mis sous la forme canonique.

2.3 Interprétation économique

La formule (2.3) correspondrait à la situation suivante : une entreprise exerce un ensemble de n activités j ; chacune de ces activités consomme une certaine quantité de diverses ressources i. On connaît la quantité b_i de ressource i disponible pour chacune des m ressources ; chaque activité j peut être exercée avec une intensité x_j ; on donne la consommation a_{ij} de ressource i pour exercer l'activité j au niveau unité. Si enfin c_j est le profit unitaire que l'on tire de l'activité j (c'est à dire le profit obtenu en exerçant l'activité j au niveau unité), résoudre le problème (P), c'est déterminer les niveaux x_j (non négatifs) auxquels il faut exercer les activités j de manière que : [13]

- pour toute ressource i la quantité $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$ de ressource i consommée ne dépasse pas b_i,
- le profit total $\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$ soit maximum.

Remarques 2.3.1.
- Notons que les fonctions représentant l'objectif et les contraintes sont toutes des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Il faut s'assurer qu'aucune des contraintes n'est redondante [1].

Exemple 2.3.1. exemple de formulation [14]

Une compagnie XYZ est spécialisée dans la production de deux types de produits : des climatiseurs et des ventilateurs. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures

[1] Une contrainte est redondante si elle peut être déduite par d'autres contraintes par combinaison linéaire

	Heures machines	main d'oeuvre	profit
climatiseur	2h/unité	3h/unité	25 UM/unité
ventilateur	2h/unité	1h/unité	15 UM/unité
Total disponible	240 h	140 h	

Tab. 2.1 – Formulation du programme lineaire

machine et un certain nombre d'heures de main d'œuvre. Le tableau suivant donne l'information nécessaire sur les deux produits, c'est-à-dire les nombres d'heures machine et d'heures main d'œuvre nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun de ces produits, ainsi que le profit généré par la production d'une unité de ce produit. Dans toute la suite, on utilisera comme Unité Monétaire (UM), qui peut être considérée comme Euro, Dollar, Dinar, etc. le tableau nous donne, de plus, le nombre total d'heures machines et d'heures main d'œuvre disponibles.

a. Variables de décision

La compagnie veut décider du nombre de climatiseurs et du nombre de ventilateurs à produire pour maximiser le profit. Ceci nous amène à définir les deux variables de décision suivantes :
x_1= nombre de climatiseurs à fabriquer ; x_2= nombre de ventilateurs à fabriquer.

b. La fonction objectif J L'objectif de l'entreprise est de déterminer le programme de production qui maximisera son profit. La fonction objectif s'écrit alors :

$$\max Z = 25x_1 + 15x_2$$

c. Contraintes du modèle

La limitation des ressources contraint l'entreprise de la manière suivante :

1. Contraintes d'heure machine :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 240$$

2. Contraintes main d'œuvre

$$3x_1 + x_2 \leq 140$$

3. Contraintes de non-négativité (exprimant que les niveaux d'activités ne peuvent être négatifs)

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire est alors définit comme suit :

$$\begin{cases} \max & Z = 25x_1 + 15x_2 \\ \textit{sous les contraines} & \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 140 \\ \textit{et les conditions suivantes} & \\ & x_1 \geq 0 \quad , x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

2.4 Méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire

Les problèmes typiques de programmation linéaire que nous avons présentés dans le paragraphe précédent se résolvent à l'aide des méthodes mathématiques particulières. Parmi ces méthodes on peut citer :

1. La méthode graphique,
2. La méthode d'énumération,
3. La méthode du simplexe.

Dans les trois sections suivantes nous allons présenter ces méthodes et mettre en exergue leurs avantages et inconvénients.

Quelques définitions et théorèmes [15]

Solution réalisable ou admissible : est une solution qui satisfait toutes les contraintes. C'est-à-dire une solution

$$x \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \leq b_i \quad , \textit{pour tout } i = 1, ..., m \qquad x_i \geq 0 \tag{2.6}$$

Espace réalisable ou Polyèdre des contraintes : c'est l'ensemble P des points réalisables, c'est-à-dire :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \leq b_i \quad , pour\ i = 1, ..., m\} \tag{2.7}$$

Géométriquement, P est un polyèdre convexe, c'est-à-dire une région définie comme l'intersection de m demi-espaces. Les sommets de ce polyèdre sont appelés solutions de base.

Solution optimale : est un point x^* réalisable et qui optimise $Z(x)$ sur P, c'est-à-dire, pour un problème de maximisation, un point x^* tel que :

$$x^* \in P \ \ et \ \ Z(x^*) \geq Z(x) \quad pour\ tout \ \ x \in P \tag{2.8}$$

Valeur optimale : c'est la valeur $Z(x^*)$ atteinte par toute solution optimale x^*.

Théorème 2.4.1. *L'ensemble des solutions réalisables d'un PL détermine dans l'espace des décisions un ensemble convexe (appelé domaine réalisable)[15] qui est soit :*

- *Un ensemble vide,*
- *Un polyédrique convexe non borné,*
- *Un polyédrique convexe.*

Théorème 2.4.2. *S'il existe au moins une solution optimale (finie), il existe au moins une solution optimale qui est un sommet du domaine réalisable. Dans le cas où il n'y a que deux (ou trois) variables, il est possible de représenter graphiquement l'ensemble des solutions réalisables et d'en déduire la (les) solution (s) optimale (s) (s'il en existe au moins une). [15].*

2.4.1 Méthode graphique

L'objet principal est de proposer une méthode de résolution d'un problème linéaire ne comportant que deux variables de décision. La méthode consiste en la délimitation de l'intersection des demi-plans représentant les inéquations des contraintes et en la recherche sur le bord de ce domaine des points donnant l'optimum de la fonction objectif. La représentation graphique des contraintes implique la transformation de la forme canonique à la forme standard qui s'effectue on substituant au signe d'inégalité, les signes d'égalités. Le principe de cette méthode est :

- Tracer les droites correspondantes aux contraintes.
- Déterminer l'ensemble de contraintes en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte.
- Tracer les droites correspondantes à la variation de l'objectif. Suivre les déplacements des droites précédentes dans le sens de maximisation de l'objectif.
- Arrêter les déplacements, juste avant que l'intersection avec l'ensemble de contraintes ne devient vide.
- La dernière intersection non vide est l'ensemble de solutions optimales.

Exemple : reprenons l'exemple 2.3.1 pour illustrer la méthode de la résolution graphique :

1. Représentation des lignes de contraintes et de l'ensemble des solutions réalisables

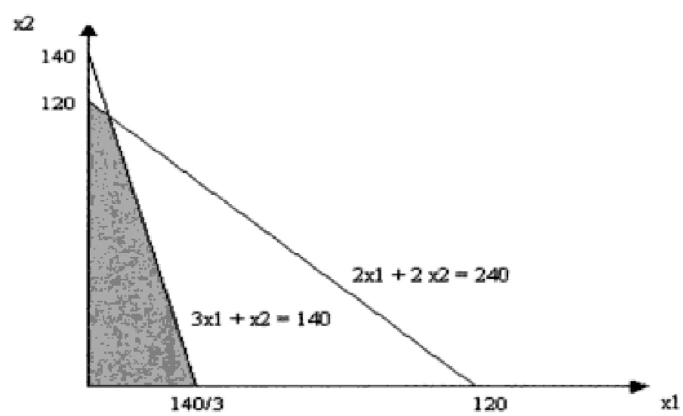


FIG. 2.1 – Ensemble des solutions réalisables.

Le domaine hachuré (Fig 2.1) représente le domaine du plan formé par l'ensemble des points vérifiant toutes les contraintes (l'ensemble des solutions réalisables).

2. Localisation de la solution optimale

La fonction objectif $Z = 25x_1 + 15x_2$ représente pour Z fixé, l'équation des courbes de niveau (des droites de pente $\frac{-5}{3}$). Maximiser Z revient à déplacer la courbe de niveau le plus loin possible de l'origine puisque les coefficients de x_1 et x_2 dans la fonction objectif sont positifs (Fig 2.2).

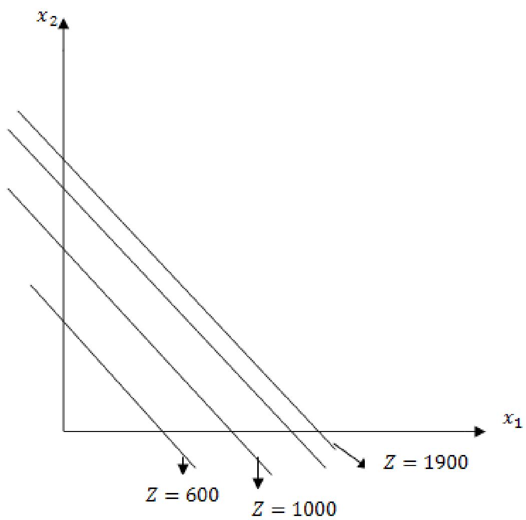


FIG. 2.2 – Représentation de la fonction objectif

Les limites imposées sur x_1 et x_2 étant données et représentées graphiquement par le domaine des solutions réalisables, on ne peut augmenter indéfiniment la valeur de la fonction objectif. Donc, pour maximiser Z, on cherchera la plus haute courbe de niveau qui a une intersection non vide avec le domaine des solutions réalisables. Tout point appartenant à cette intersection est une solution optimale (Fig 2.3).

3. Calcul de la solution optimale

Graphiquement (Fig 2.3), on a localisé la solution optimale. Celle-ci correspond au point d'intersection B des deux droites d et $\grave{d}$ d'équations respectives :

$$2x_1 + 2x_2 = 240$$

$$3x_1 + x_2 = 140$$

Donc : $x_1 = 10, x_2 = 110, \quad Z^* = 1900 \ UM$ est la solution optimale.

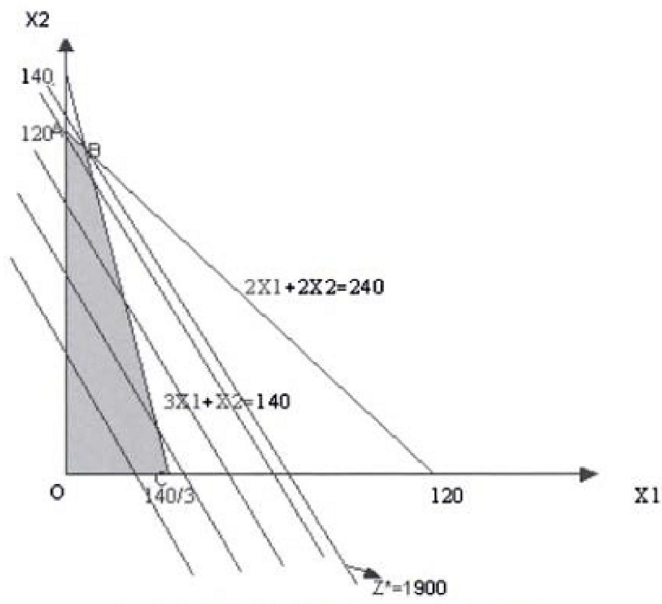


FIG. 2.3 – localisation de la solution optimale.

2.4.2 Méthode d'énumération

On remarque que la solution optimale ne peut être que sur le bord du domaine des solutions réalisables. De plus, elle est dans le cas général donnée par un des points anguleux correspondant aux intersections des droites de contraintes. Une telle solution est appelée solution de base. Ceci nous amène à proposer une deuxième méthode qui consiste à :

- Représenter les lignes de contraintes et l'ensemble des solutions réalisables.
- Localiser toutes les solutions de base (les points d'intersection des droites de contraintes).
- Calculer la valeur de la fonction objectif en chacun de ces points, et selectionner la solution optimale.

Cependant cette méthode est très fastidieuse si nous avons à faire à des problèmes où les points extrêmes sont nombreux ou bien les composantes des vecteurs sont très nombreuses.

Remarque 2.4.1. Si les variables sont remplacées dans les contraintes par leurs valeurs à l'optimum, alors il ya égalité entre le membre de droite et de gauche. Les contraintes sont dites saturés à l'optimum.

Exemple : Reprenons l'exemple 2.3.1 pour illustrer la méthode de résolution par énumération

Les solutions de base correspondent aux points suivants :

$$O(0,0); \quad Z = 0$$

$$A(0,120); \quad Z = 1800$$

$$B(10,110); \quad Z = 1900$$

$$C(140/3,0); \quad Z = 3500/3$$

La solution optimale est donnée par le point B, voir (Fig 2.3).

2.4.3 Méthode du simplexe

Cette méthode est la plus souple et la plus universelle ; elle s'applique à la résolution de tout programme linéaire. Mais elle est plus compliquée et exige plus de temps. Le fondement mathématique de cette méthode garantit une grande précision des résultats. Le développement de cet algorithme se fait au moyen d'un procédé algébrique ou par la méthode des tableaux applés *tableaux du simplexe* fondé sur *la technique du pivot.*

le principe de l'algorithme est le suivant :

- Mettre le modèle sous forme standard en y introduisant des variables d'écart qui ont pour rôle de transformer les inégalités en égalités ;
- Déterminer une première solution de base réalisable et puis établir le premier tableau de simplexe) ;
- Cheminer de solution de base réalisable en solution de base réalisable en augmentant[2] à chaque itération la valeur de la fonction objectif ;
- Arrêter la procédure losqu'il n'est plus possible d'accroître la valeur de la fonction objectif ; la dernière solution de base réalisable obtenue est dès lors solution optimale.

[2]pour un problème à maximum.

Passage d'une forme canonique à une forme standard

La résolution d'un PL à n variables et m contraintes sous sa forme canonique, implique parfois la transformation de la fonction objectif ou celle de certaines contraintes, car il ne peut être résolu sauf s'il est définit sous sa forme standard, cette opération se fait par l'introduction dans chaque contrainte de nouvelle variables non négatives e_k appelé *variable d'écart*.

Le coefficient de variable d'écart e_k dépend du sens de l'inéquation initiale :

Si la contrainte est de type ($\leq$), le coefficient de la variable d'écart introduite dans le membre de gauche a pour valeur (+1).

Si la contrainte est de type ($\geq$), le coefficient de la variable d'écart introduite dans le membre de gauche a pour valeur (-1).

Le PL sous sa forme standard se présente comme suit :

$$\begin{cases} \max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.c \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}e_k = b_i \quad , i = \overline{1,m} \quad et \quad a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i; \\ 0, & \text{si } k \neq i. \end{cases} \\ \qquad x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \\ \\ \qquad e_k \geq 0, k = \overline{1,m} \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarque 2.4.2. Si l'une des contraintes s'exprime sous forme d'égalité :

$$a_{11} + x_1 + a_{12} + x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

elle peut être décomposer en deux inéquations de sens inverse :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \end{cases}$$

Définition 2.4.1. Les variables dont la valeur est nulle sont dites variables hors base, les variables dont la valeur est non nulle sont dites en base (dans la base). De façon générale, tout programme standard associé à un programme canonique à n variables et m contraintes comporte, pour toutes solutions extrêmes un nombre de variables dans la base au plus égal au nombre m de contraintes et un nombre de variables hors base au moins égal au nombre n de variables.

Obtention d'une solution de départ

L'application de la méthode du simplexe à la résolution des PL suppose la connaissance préalable d'une solution de base réalisable de départ.
Initialement, la méthode de simplexe considère que la solution de base la plus évidente correspond à celle où aucune production n'est engagée $x_j = 0$, pour $j = \overline{1, n}$, donc elle suppose le choix de variables d'écart $e_k = b_i$, $k = \overline{1, m}$ comme des variables dans la base.
Lorsque celle -ci ne peut s'obtenir de manière immédiate, on peut avoir recours à deux méthodes qui permettent de la construire de manière systématique, ou de décider que le problème considéré est irréalisable : la méthode M et la méthode des deux phases reposent sur l'introduction de variables artificielles.
L'introduction des variables artificielle permet de modifier la formalisation du programme standard de telle sorte que la solution nulle devient alors une base de départ admissible.
Ces méthodes sont décrites par l'organigramme suivant :

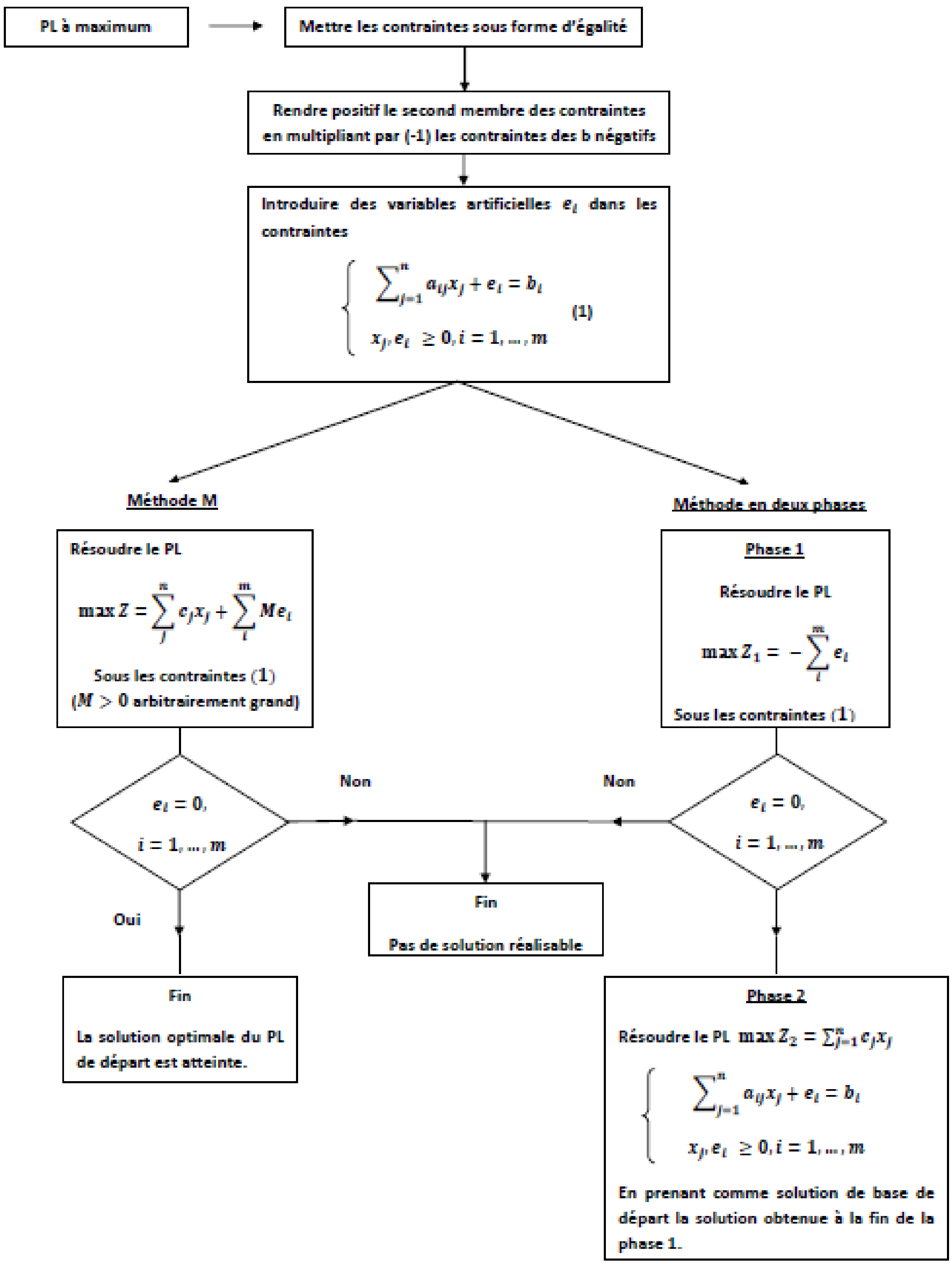


FIG. 2.4 – Organigramme de la méthode M et de la méthode des deux phases

Algorithme de simplexe

Notations :

- $P_j = {}^t(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) \begin{cases} j \in \{1, ..., m\} = B : & \text{vecteur de base.} \\ j \in (m+1, ..., n) : & \text{vecteur hors base.} \end{cases}$
- $P_0 = b$
- c_j, $j \in (1, ..., n)$ coefficient de x_j dans la fonction économique
- x_i, $i \in \{1, ..., m\} = B$: terme indépendant de la i^{eme} contrainte (valeur de la i^{eme} variable dans la solution de base considérée).
- $x_{ij} \begin{cases} i \in \{1, ..., m\} = B : & \text{coefficient de la } j^{eme} \text{ variable dans la } i^{eme} \text{ contrainte.} \\ j \in (1, ..., n), & \end{cases}$
- Z_j, $j \in (1, ..., n)$: $Z_j = \sum_{i \in B} c_i x_{ij}$
- Z_0 : $Z_0 = \sum_{i \in B} c_i x_i$
- La notation $\sum_{i \in B}$ représente une sommation sur tous les indices i tels que la variable x_i est en base.

L'organigramme suivant représente les différentes étapes de l'algorithme du simplexe :

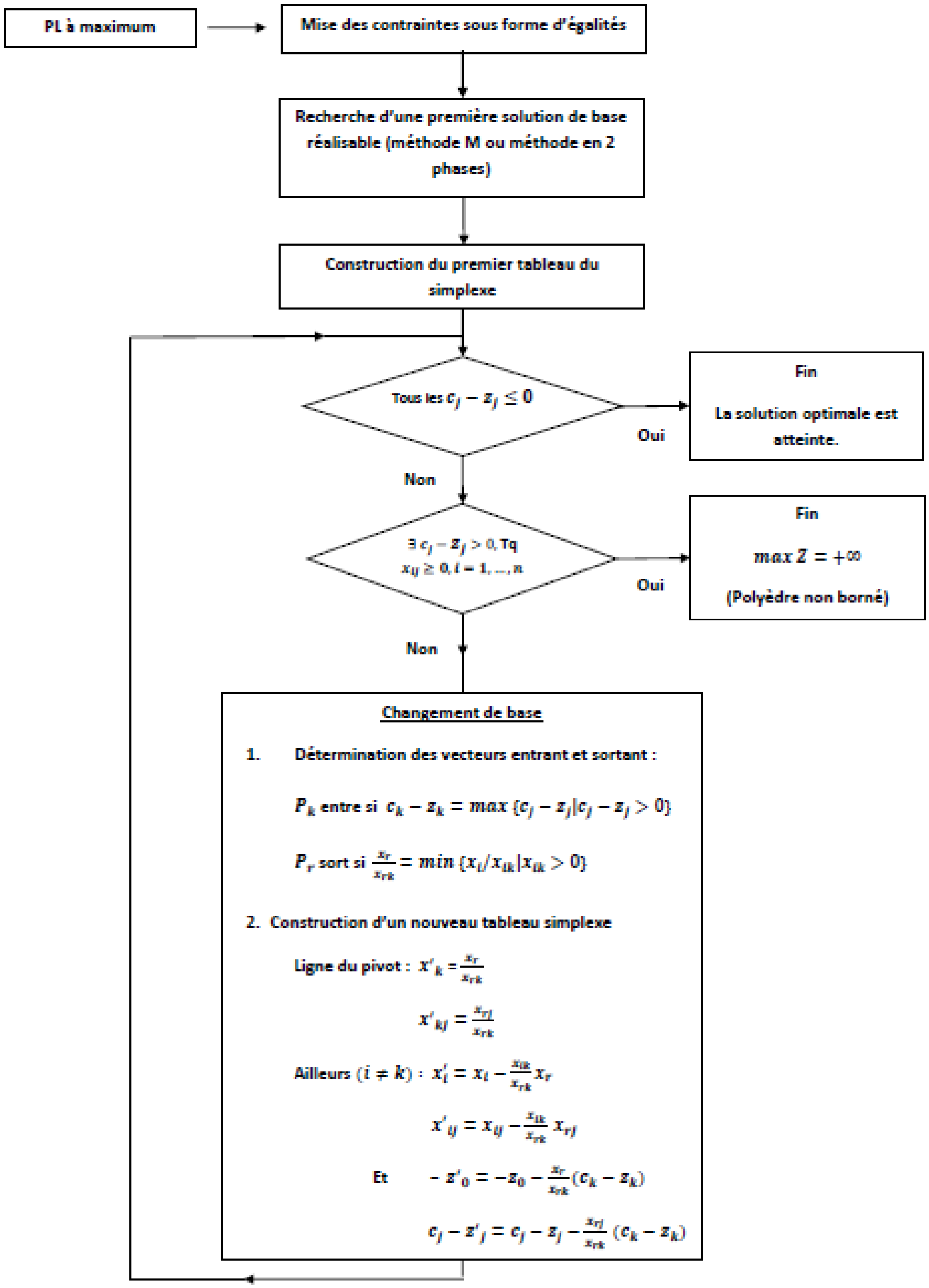


FIG. 2.5 – Organigramme de l'algorithme du simplexe

Exemple : reprenons l'exemple 2.3.1

Etape (1) : recherche d'une première solution de base réalisable.

En introduisant les variables d'ecart e_1 et e_2, le programme linéaire (2.5) s'écrit :

$$\begin{cases} \max & z = 25x_1 + 15x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ s.c & 2x_1 + 2x_2 + e_1 = 240 \\ & 3x_1 + x_2 + e_2 = 140 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad e_1 \geq 0, \quad e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Où

e_1 : nombre d'heures machine non utilisé.

e_2 : nombre d'heures de main d'œuvre non utilisé.

Il est évident que

$$x_1 = 0, x_2 = 0, e_1 = 240, e_2 = 140$$

est une solution de base réalisable.

Construisons le premier tableau simplexe (tableau à l'origine) :

B	x_1	x_2	e_1	e_2	P_0	P'
e_1	2	2	1	0	240	120
$\leftarrow e_2$	3	1	0	1	140	140
$c_j - Z_j$	$\uparrow$ 25	15	0	0	0 $-Z$	

Puique deux nombres $c_j - z_j$ sont positifs (de valeur 25 et 15), cette solution de base réalisable n'est pas optimale.

Etape (2) : recherche d'une meillleure solution de base réalisable.

D'après le citère d'entrée et de sortie présenté dans l'organigramme du simplexe : x_1 hors base entre en base. e_2 en base en base sort de base. ce que nous indiquons dans ce tableau par des flèches d'entrée et de sortie;

Conqtruisons le nouveau tableau simplexe :

B	x_1	x_2	e_1	e_2	P_0	P'
$\leftarrow e_1$	2	2	1	0	240	110
x_2	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{140}{3}$	140
$c_j - Z_j$	0	$\uparrow \frac{20}{3}$	0	$\frac{-25}{3}$	$\frac{-3500}{3}$	

Puisqu'il y a encore un $c_j - z_j$ positif (valant $\frac{20}{3}$), nous ne sommes pas à la solution optimale et nous devons donc rechercher une nouvelle meilleure solution de base réalisable. *Etape (3)* : par raisonnement analogue à celui de l'étape (2), nous déduisons que : x_2 hors base entre en base, e_1 en base sort de base.

Construisant le nouveau tableau simplexe :

B	x_1	x_2	e_1	e_2	P_0
$\leftarrow e_1$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	240
x_2	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{3}$	10
$c_j - Z_j$	0	0	-5	$\frac{-25}{3}$	-1900

Puisque tous les $c_j - Z_j$ sont non positifs, la solution obtenue

$$x_1 = 10, x_2 = 110, e_1 = e_2 = 0$$

est optimale et la valeur maximum de Z est 1900 *UM*

2.5 Dual d'un problème de programmation linéaire

La notion de dualité est un concept fondamental en programmation linéaire et conduit à un résultat de grande portée théorique et pratique.

2.5.1 Définition

Etant donné un problème de PL(appelé primal) sous la forme canonique

$$\begin{cases} \max & Z = CX \\ s.c & AX \leq b \\ & X \geq 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

On lui associe un autre problème de PL

$$\begin{cases} min & w = yb \\ s.c & yA \geq C \\ & y \geq 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

2.5.2 Interprétation économique de la dualité

Une entreprise I fabrique n produit et le bénéfice par unité du produit i est c_i. Pour fabriquer les produits l'entreprise utilise m matières premières, et la quantité totale de matière j est b_j . Par unité de produit i, il faut $a_{i,j}$ quantité de la matière j. Pour I, maximiser son bénéfice revient à résoudre (2.10)qu'on appelle le problème *primal.*

Une entreprise II propose de racheter les ressources de I pour sa propre production. Quand est-ce que la transaction peut se faire ? Quand I ne perd pas à vendre ses matières premières plutôt que de fabriquer ses produits. De plus II veut payer le prix le plus bas possible. On pose y_j le prix proposé par II à I par unité de produit j.
Le coût pour II est

$$w = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j$$

Les contraintes représentent que pour I le prix de vente (par unité de produit) à II est plus élevé ou égal au bénéfice pour chaque produit.
Pour une unité de produit i :

$$\sum_{j=1}^{m} y_j a_{ji} \geq c_i$$

et évidemment $y_j \geq 0$ pour tout j.
Cela s'écrit sous la forme (2.11) qu'on appelle le problème dual. Le dual modélise ainsi le fait qu'il est plus intéressant pour I de vendre à II que de fabriquer et aussi que II cherche à proposer le prix le plus bas possible.

2.6 Applications de la programmation linéaire

La programmation linéaire est de loin la branche de la programmation mathématique la plus utilisée dans les applications pratiques, voici quelques problèmes qui se traitent par la résolution d'un programme linéaire[16].

- La planification de production, où l'on dispose de plusieurs machines et d'une capacité finie de production à répartir entre plusieurs types de produits.
- Si l'on attribue un gain unitaire à chaque produit fabriqué, la programmation linéaire fournira la composition du plan de production idéal (entraînant un bénéfice maximum).
- Le problème de mélange : par exemple, une firme pétrolière dispose de plusieurs sortes de pétrole brut de différentes qualités. Etant données les contraintes de teneurs minimales et maximales en certain types d'hydrocarbures (dépendant de l'utilisation envisagé du pétrole), l'objectif de programme linéaire sera de maximiser le profit (c'est à dire en employant les sortes les moins coûteuses) tout en respectant les contraintes de composition et de disponibilité.
- Le problème de transport : minimiser le coût total de transport de biens entre plusieurs centres de productions (ou dépôts) et plusieurs centres de consommation (ou de vente), sachant que les coûts de transport spécifiques à chaque couple centre de production /centre de consommation (dépendant principalement de la distance entre les deux cites) sont donnés.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la formulation mathématique des problèmes de programmation linéaire et les différentes méthodes de résolution. Nous y avons en particulier passé au peigne fin la méthode du simplexe et exposé ses multiples avantages par rapport aux autres approches qui existaient avant elle.

Nombreux sont les problèmes de décisions qui se ramène à un modèle de programmation linéaire, contentons-nous de citer les trois situations les plus classique dans la littérature : le problème de planification de production, problème de mélange et le problème du transport qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Le Problème de transport

3.1 Introduction

D'une manière générale, on définit par problème de transport tout problème d'optimisation du transfert entre points-origine ou fournisseurs et points, destination ou clients. Lorsque ces points matérialisent des lieux géographiques et lorsque l'objet du transfert est un ensemble de marchandises, il s'agit du problème de transport au sens strict (classique).

Tous ces problèmes, bien qu'appartenant à des domaines de la gestion très différents, sont susceptibles d'être traités à l'aide du même modèle, le modèle de transport, qui constitue une catégorie particulière de programmes linéaires. Il serait, bien entendu, possible de résoudre ces problèmes à l'aide des techniques de la programmation linéaire (simplexe), mais la structure très spécifiques des problèmes de transport permet de recourir à des techniques particulières beaucoup plus légères.

Ainsi, dans ce chapitre, nous allons présenter la formalisation du modèle de transport et ses méthodes de résolution. Nous considérons le problème de transport simple dont l'objectif est de minimiser la fonction coût rattachée au transfert de différentes quantités d'une matière à partir de m origines vers n destinations.

3.2 Définition du problème de transport

Un problème de transport est un problème d'optimisation qui consiste à envoyer une quantité de produits à partir de m origines vers n destinations tout en minimisant le total des coûts à encourir pour convoyer (transporter) le flot partant des diverses origines jusqu'aux différentes destinations [17]. Tout problème de transport s'illustre comme suit :

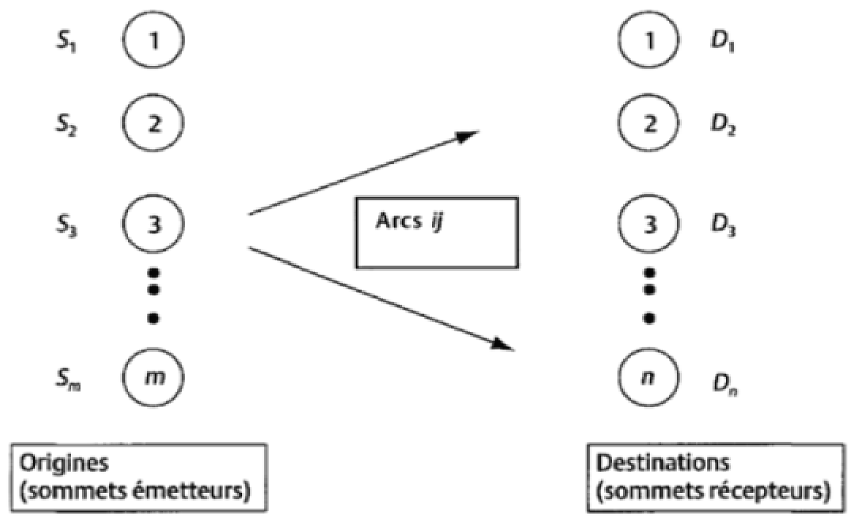


FIG. 3.1 – Problème de transport

Dans un problème de transport, on appelle origine chacun des sommets émetteurs et destination chacun des sommets récepteurs. Chaque sommet émetteurs i expédie une quantitié fixe de flot, dénotée (S_i) dans la (fig 3.1) et appelée disponibilité de l'origine i. Chaque sommet récepteur j cherche à recevoir une quantité fixe de flot, dénotée (D_j) et qualifiée de demande de la destination j. Le coût de transport d'une unité de flot sur l'arc (ij) du réseau est dénoté (C_{ij}). Les données pertinentes au problème de transport se présentent de la façon suivant :

	1 2 ... j ... n	Disponibilité
1 2 ... i ... m	C_{ij}	S_i
Demande	D_j	

Tab. 3.1 – Les données d'un problème de transport

3.3 Formulation mathématique du problème de transport

On peut formuler un problème de transport sous forme d'un programme linéaire, avec deux manières différentes.

3.3.1 Formulation primale

Dans un problème de transport, on est amené à minimiser une application linéaire, appelée fonction objectif ou fonction économique qui est définie comme suit :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

avec

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq S_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq D_j$$

et

$$x_{ij} \geq 0 \ ; \ i = \overline{1, m} \ ; \ j = \overline{1, n}$$

Remarque 3.3.1.

- Il y a une contrainte par origine i et une contrainte par destination j.
- Le problème n'aura de solution que dans la mesure où la quantité totale disponible permet de satisfaire la demande totale :

$$\sum_{i=1}^{m} S_i \geq \sum_{j=1}^{n} D_j$$

3.3.2 Formulation duale

La formulation duale mérite d'être étudiée car elle fournit une technique de résolution particulièrement intéressante : l'interprétaion économique de ses résultats est également riche d'enseignement.

Ecriture du programme dual

Compte tenu des résultats obtenus au chapitre de la programmation linéaire, on peut énoncer les propositions suivantes :

- On associe à chacune des contraintes primales une variables duale. La variable duale u_i est associée à la contrainte origine i et la variable duale v_j à la contrainte destination j ;

- L'objectif du problème dual est de rendre maximum une fonction linéaire des m variables u_i et des n variables v_j ;

- Les coefficients économiques de la fonction objèctif duale (en ce qui concerne les vriables u_i et v_j) sont respéctivement les dispoibilités S_i et les demandes D_j du problème primal ;

- La matrice des coefficients des variables dans les contraintes est la transposée de la matrice utilisée dans le problème primal. Compte tenu de la structure spécifique de la matrice A, dans chacune des contraintes duales n'interviendront que deux variables. De façon plus précise, dans la contrainte associée à la variable primale x_{ij}, seules les variables u_i et v_j apparaîtront ;

- La contraine (i, j) s'exprime ainsi :

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

L'écriture duale du problème de transport se présente alors de la façon suivante :

$$\max R = \sum_{i=1}^{m} S_i u_i + \sum_{j=1}^{n} D_j v_j$$

Sous contraintes :

$$\begin{cases} u_i + v_j \leq C_{ij} \\ u_i, v_j \in \mathbb{R} \,; i = \overline{1,m} \,;\; j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Où les variables u_i,v_j sont considérées comme des coûts fictifs, l'un est un coût d'envoi et l'autre de réception, elles sont appelées les potentiels ou les coûts duaux.

Relations avec le primal et interprétation économique

Les relations qui existent en programmation linéaire entre le primal et le dual se retrouvent dans le modèle de transport. En particulier,

- Si l'une des formalisations a une solution, l'autre en a une également et la valeur de la fonction objectif est la même, à l'optimum pour les deux formulation. Ainsi,

$$\min Z = Z^* = \max R = R^*$$

Soit encore

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ {x^*}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} S_i {u^*}_i + \sum_{j=1}^{n} D_j v_j^*$$

- Si la contrainte (i, j) duale n'est pas saturée à l'optimum, ce qui est matérialisé par une inégalité stricte, la variable x_{ij} est nulle dans la solution primale optimale ;

3.4 Problème de transport balancé

Le problème de transport est dit balancé si la quantité totale disponible au niveau de toutes les origines est égale à la quantité totale demandée au niveau, de toutes les destinations. En d'autres termes le problème est balancé si :

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

On prouve aisément que si le problème de transport est balancé, les contraintes d'inégalités des offres et des demandes deviennent des contraintes d'égalités. D'autre part, on montre aussi que tout problème de transport qui n'est pas balancé peut être transformé en un problème balancé ; ceci en créant une destination ou une origine fictive. Il suffit donc, pour traiter tous les problèmes de transport, de connaitre une méthode de résolution des problèmes de transport équilibrés [18]. C'est pour cette raison que dans la suite nous considérerons que le cas des problèmes balancés.

Exemple 3.4.1. Exemple de formulation d'un problème de transport [19]

La société des applications électriques (S.A.E) possède en Europe 3 unitès de production où elle fabrique, entre autre, des transformateurs. Elle comercialise ses produits à travers quatre entrepôts situés dans les principales zones de consommation. Le tableau 3.2 indique pour chaque unité U_i la capacité de production des transformateurs, et pour chaque entrepôt E_i la demande de transformateurs émanant de la zonne de consommation correspondante. Le tableau 3.3 donne les coûts de transport unitaires entre chaque usine et chaque entrepôt.

Capacités de production	Demandes
$U_1 = 1000$	$E_1 = 700$
$U_2 = 200$	$E_2 = 100$
$U_3 = 400$	$E_3 = 300$
	$E_4 = 500$

TAB. 3.2 – Capacité de production des transformateurs

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	64	50	77	14
U_1	37	20	48	24
U_1	25	14	15	48

TAB. 3.3 – Coûts de transport unitaires (euros)

Si on appelle x_{ij} les quantités transportées entre l'usine U_i et l'entrepôt E_j, le coût de transport total supporté par la (S.A.E) s'écrira :

$$\min Z = 64x_{11} + 50x_{12} + 77x_{13} + 14x_{14} + ... + 25x_{31} + 14x_{32} + 15x_{33} + 48x_{34}$$

L'objectif de l'entreprise est de rendre minimum ce coût de transport, tout en tenant compte des disponibilités du produit et de sa demande. Ici l'offre totale est égale à la demande : toutes les capacités seront utilisées pour satisfaire la demande. Par exemple, la capacité de production de l'unité U_2 est 200 ; elle devra donc expédier exactement 200 transformateurs vers les entrepôts. Ceci va s'exprimer à l'aide de la contrainte :

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200$$

De meme, dans la mesure ou la (S.A.E) désire augmenter ses ventes, il est nécessaire d'expédier vers un entrepôt donné ce qu'il a demandé. Soit, pour l'entrepôt E_3, par exemple :

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300$$

Le problème de la (S.A.E) peut ainsi s'exprimer sous la forme d'un programme linéaire comprenant 12 variables - une par trajet possible - et 7 contraintes - une par usine et par entrepôt. Il s'écrit :

$$\min Z = 64x_{11}+50x_{12}+77x_{13}+14x_{14}+37x_{21}+20x_{22}+48x_{23}+24x_{24}+25x_{31}+14x_{32}+15x_{33}+48x_{34}$$

avec

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=200 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=400 \\ \quad x_{11}+x_{21}+x_{31}=700 \\ \quad x_{12}+x_{22}+x_{32}=10 \\ \quad x_{13}+x_{23}+x_{33}=300 \\ \quad x_{14}+x_{24}+x_{34}=500 \\ \quad et \;\; x_{11},\ldots,x_{34}\geq 0. \end{cases}$$

3.5 Méthodes de résolution d'un problème de transport

3.5.1 La programmation linéaire

Un problème de transport est un problème linéaire, qui peut se résoudre en appliquant les différentes techniques de la programmation linéaire vue dans le chapitre précédent (simplexe), mais étant donnée la structure très particulière de ces problèmes, souvent on a recours à utiliser des techniques plus spécifiques et plus adéquates.

3.5.2 L'algorithme du transport

On appelle algorithme du transport, la méthode servant à résoudre les problèmes de transport. Basé sur l'algorithme du simplexe en tenant compte de la structure du problème. Voici la forme générale de cet algorithme [17] :

Phase 1 : Détermination d'une solution de base initiale.

Phase 2 : la recherche de la solution optimale à partir de la solution de base réalisable trouvée à la phase 1.

Définition 3.5.1. ***Notion de boucle***

Une séquence de au moins 4 cellules d'un tableau est une boucle si et seulement si :

- toute paire consécutive de cellules sont soit sur la même ligne, soit sur la même colonne

- aucun triplet de cellules n'est sur la même ligne ou colonne

- la première et la dernière cellule sont consécutives (soit sur la même ligne, soit sur la même colonne)

Théorème 3.5.1.
Soit un problème de transport avec m producteurs et n consommateurs. Les cellules qui correspondent à un ensemble de $(m + n - 1)$variables ne contiennent aucune boucle si et seulement si les $m + n - 1$ variables forment une solution de base.*[20]*

démonstration 3.5.1.
Ce théorème découle du fait qu'un ensemble de $m + n - 1$ cellules ne contiennent aucune boucle si et seulement si les $m + n - 1$ colonnes de A qui correspondent à ces cellules sont linéairement indépendantes.[20]

1. Recherche d'une solution de base initiale

L'algorithme de transport, comme toute application de la méthode du simplexe à la résolution de ce type de problème, nécessite une solution initiale de base. Sa détermination à partir de la forme standard n'est pas appropriée compte tenu de la structure des problèmes de transport. D'autres techniques plus simples et adaptées leurs sont appliquées, dont voici quelques-unes :

La méthode du coin nord-ouest

L'idée de la méthode est le suivant :

. Tracer la matrice indiquant la disponibilité et la demande.

. Egaler x_{11} (élément du coin Nord-ouest) à la petite valeur entre la disponibilité de la première ligne et la demande de la première colonne. Déduire ces deux quantités de la valeur obtenue.

. Dans ce cas la disponibilité de la première ligne ou la demande de la première colonne sera égale à zéro.

On répète l'étape 2 en utilisant toujours l'élément du coin nord-ouest de la matrice résultante, mais cette fois on ne considère pas la ligne ou la colonne déjà satisfaite.

. On répète l'étape 2 jusqu'à ce que la solution initiale soit obtenue.

Appliquant cette méthode sur l'exemple 3.4.1

On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_i
U_1					1000
U_2					200
U_3					400
D_j	700	100	300	500	1600

Tableau initial

On élimine du tableau la ligne ou la colonne saturée, on diminue de x_{11} la ligne ou la colonne non saturée ;

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_i
U_1	700				300
U_2	-				200
U_3	-				400
D_j	-	100	300	500	1600

Etape 1

On continue cette procédure récursivement sur le reste du tableau ;

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_i
U_1	700	100			200
U_2	-	-			200
U_3	-	-			400
D_j	-	-	300	500	1600

Etape 2

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_i
U_1	700	100	200	-	-
U_2	-	-			200
U_3	-	-			400
D_j	-	-	100	500	1600

Etape 3

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_i
U_1	700	100	200	-	-
U_2	-	-	100		100
U_3	-	-	-		400
D_j	-	-	-	500	1600

Etape 4

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_i
U_1	700	100	200	-	-
U_2	-	-	100	100	-
U_3	-	-	-		400
D_j	-	-	-	400	1600

Etape 5

La dernière case sature à la fois sa ligne et sa colonne.

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_i
U_1	700	100	200	-	-
U_2	-	-	100	100	-
U_3	-	-	-	400	-
D_j	-	-	-	-	1600

Etape 6

La solution de base initiale donnée par cette méthode est :

$$x_{11} = 700, x_{12} = 100, x_{13} = 200, x_{23} = 100, x_{24} = 100, x_{34} = 400$$

Le coût de cette solution est de 91600 *euros*.

Remarque 3.5.1. Cette méthode a pour elle l'avantage de fournir rapidement et aisément une solution de base mais l'inconvénient (puisqu'elle ne fait pas intervenir les coûts) est d'être en général assez loin de l'optimum donc de nécessiter ensuite de nombreuses étapes avant de l'atteindre, aussi elle assure que les variables assignées ne peuvent pas former de boucle ;

Méthode règle du minimum de ligne

Elle consiste en la recherche sur la première ligne, le coût C_{ij} minimal et on affecte le minimum entre S_i et D_j. Si la ligne n'est pas saturée, on repère sur cette ligne le deuxième coût supérieur ou égal au précèdent, on s'efforce de saturer une ligne ou une colonne jusqu'à l'étape finale fournissant la $(m + n - 1)^{eme}$ valeur $x_{ij} \geq 0$.

On peut encore tout simplement choisir au hasard une ligne et une colonne non saturée, puis, procéder comme précédemment à l'affectation des valeurs.

Règle du meilleur coin Nord-Ouest

On choisit le plus petit des C_{ij} et dans la case qui lui correspond, on place le minimum (S_i,D_j). On cherche alors dans la ligne i ou dans la colonne j, selon le cas, un coût immédiatement supérieur.

En s'efforçant de saturer une demande ou une destination, on cherche alors un nouveau coût minimum de colonne ou de ligne et on poursuit cette opération jusqu'à l'étape finale qui sature à la fois une demande et une destination[21].

La méthode du coût minimum

Il s'agit de sélectionner la cellule de coût minimum, lorsque plusieurs cases présentent le même coût unitaire minimal, on en choisit une qui accepte le plus grand nombre d'unités possible.

- allouer le plus possible à la cellule courante et ajuster l'offre et la demande ;
- sélectionner la cellule de coût minimum ayant une demande et une offre non nulles ;
- répéter jusqu'au moment où toute l'offre est allouée.

La méthode des pénalités (ballas hummer)

Pour chaque ligne i ou colonne j, elle évalue une pénalité qui représente la perte unitaire résultante du transport d'une unité de produit au second moindre coût plutôt qu'au moindre coût de cette rangée. Elle donne la priorité d'assignation aux rangées de plus grande pénalité. Cette méthode, appelée aussi méthode de Vogel [23], fera intervenir les coûts unitaires de transport et sera donc, en général, assez proche de l'optimum. Les différentes étapes de la méthode sont présentées ci-dessous :

1. ***Détermination de la plus grande pénalité***

Déterminer pour chaque ligne i

$$u_i = \min C_{ij} \text{ et } p_i = \min(C_{ij} - u_i)$$

Déterminer pour chaque colonne j

$$v_j = \min C_{ij} \text{ et } q_j = \min(C_{ij} - v_j)$$

Déterminer la plus grande pénalité $\max(p_i, q_j)$

si $\max(p_i, q_j) = p_K$ alors déterminer $\min(C_{kj}) = C_{kj}$

sinon $\max(p_i, q_j) = q_r)$ alors déterminer $\min(C_{ir}) = C_{kr}$

La variable à allouer est x_{kr}

2. ***Allocation de la variable***

Allouer la variable x_{kr} en effectuant

$x_{kr} = min(S_k, D_r)$ poser $S_k := (S_k - x_{kr})$ et $D_r := (D_r - x_{kr})$

3. ***Rayure d'une rangée***

L'assignation de la variable x_{kr} implique $S_k = 0$ ou $D_r = 0$, donc la saturation d'au moins une rangée qui est rayée du tableau.

4. ***Embarras de choix***

Si les deux rangées de la variable assignée sont saturées en même temps où $S_k = 0$ et $D_r = 0$ alors il faut rayer celle de plus grande pénalité. Si l'embarras persiste, alors le lever de manière arbitraire.

Illustration : Appliquant cette méthode sur l'exemple 3.4.1
Pour chaque rangée (ligne ou colonne) du tableau des coûts (Tab. 3.11), on déterminera l'élément le plus petit et celui qui lui est immédiatement supérieur et on calculera leur différence (notée Δ)

Dans la rangée correspondant à la différence maximale (ici la ligne U_1) on remplira la case contenant le plus petit élément (ici la case (U_1E_4) avec le minimum de l'offre de la ligne et de la demande de la colonne. Puis on recommencera le processus autant de fois que nécessaire en supprimant à chaque fois l'origine dont l'offre est entièrement utilisée et/ou la destination dont la demande est complètement satisfaite.

La solution de base initiale est la suivante :

$$x_{11} = 500, x_{14} = 500, x_{21} = 100, x_{22} = 100, x_{31} = 100, x_{33} = 300$$

Le coût de cette solution est de 51700 *euros*.

	E_1	E_2	E_3	E_4	Disponibilité	Δ
U_1	64	50	77	14 / 500	500	36
U_2	37	20	48	24	200	4
U_3	25	14	15	48	400	1
Demande	700	100	300			
Δ	12	6	33	10		

Etape 1

	E_1	E_2	E_3	E_4	Disponibilité	Δ
U_1	64	50	77	14 / 500	500	14
U_2	37	20	48	24	200	17
U_3	25	14	15 / 300	48	100	1
Demande	700	100	-	-		
Δ	12	6	33	-		

Etape 2

	E_1	E_2	E_3	E_4	Disponibilité	Δ
U_1	64	50	77	14 / 500	500	14
U_2	37	20 / 100	48	24	100	17
U_3	25	14	15 / 300	48	100	11
Demande	700	-	-	-		
Δ	12	6	33	-		

*Etape*3

	E_1	E_2	E_3	E_4	Disponibilité	Δ
U_1	64 500	50	77	14 500	-	64
U_2	37	20 100	48	24	100	37
U_3	25	14	15 300	48	100	25
Demande	200	-	-	-		
Δ	12	-	-	-		

Etape 4

	E_1	E_2	E_3	E_4	Disponibilité	Δ
U_1	64 500	50	77	14 500	-	-
U_2	37 100	20 100	48	24	-	37
U_3	25	14	15 300	48	100	25
Demande	100	-	-	-		
Δ	12	-	-	-		

Etape 5

	E_1	E_2	E_3	E_4	Disponibilité	Δ
U_1	64 500	50	77	14 500	-	-
U_2	37 100	20 100	48	24	-	-
U_3	25 100	14	15 300	48	-	25
Demande	-	-	-	-		
Δ	12	-	-	-		

Etape 6

2. Recherche de la solution optimale

Il serait techniquement possible de résoudre le problème de transport en faisant appel aux méthodes développées dans le chapitre précédent. Cependant, compte tenu de la structure particulière du problème, il va être possible de recourir à des techniques plus légères issues d'une adaptation de l'algorithme de simplexe [22]. On étudiera successivement une technique de résolution applicable à la formulation primale, basée sur l'algorithme de stepping-stone, puis une technique utilisant simultanément les deux formulations avec l'algorithme primal-dual

Théorème 3.5.2. *Théorème d'optimalité*

Les variables u_i, v_j sont au nombre $(m+n)$, tandis que les équations qui les définissent sont au nombre $(m+n-1)$.On peut alors choisir un potentiel quelconque, et on lui donne une valeur arbitraire ; on prend en général, $u_1 = 0$.

– *Si* $x_{ij} \geq 0$ *(variable de base), alors* $u_i + v_j = C_{ij}$.

– *Si* $x_{ij} = 0$ *(variable hors base), alors* $u_i + v_j \leq C_{ij}$.

Ces deux résultats importants nous offrent le critère d'optimalité.

Algorithme du stepping-stone

De la même façon que dans l'algorithme du simplexe, l'algorithme *stepping stone*, repose sur la détermination d'une solution de base initiale qui est ensuite progressivement amélioré par intégration de variables hors base et élimination corrélative de variable de base.

On calcule pour chaque cellule vide (i, j), la variation de coût marginal qu'entraîne le déplacement d'une unité de charge dans cette cellule. La sélèction des trajets ne se fait pas au hasard, il est nécessaire de calculer pour chaque trajet (i, j) non utilisé, la variation du coût total qu'on obtiendrait en faisant passer une unité par ce trajet et en procédant au ajustement nécessaires, pour retenir en priorité celui qui permettrait la plus forte réduction du coût total.

Remarque 3.5.2. - Tant que pour une case vide, il existe des économies réalisables, il faut continuer les calculs. En revanche, si un trajet inutilisé ne permet pas de réduire le coût

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	700	100	200	
U_2			100	100
U_3				400

Solution initiale

de transport, l'optimum est atteint.

Vérifiant par exemple, la solution de base réalisable obtenue par la méthode coin nord-ouest.

La solution de base proposée par cette méthode Comporte 6 trajets retenus avec :

$$x_{11} = 700, x_{12} = 100, x_{13} = 200, x_{23} = 100, x_{24} = 100 \text{ et } x_{34} = 400$$

Cette solution respecte les contraintes de disponibilité, de même que les contraintes de demande : on le vérifie par l'addition des cases du tableau respectivement en ligne et en colonne.

Il faut maintenant étudier s'il n'existe pas de meilleures solutions. On peut procéder à cette étude en modifiant légèrement la solution actuelle, en faisant passer une unité dans un trajet actuellement non utilisé.

Calculons les différents coûts marginaux Δ_{ij} de tous les trajets non utilisées dans la solution de base du coin nord-ouest :

Trajet non utilisé	Chaîne d'échages	coût marginal $\Delta_{i,j}$
(1,4)	(1,4)(1,3)(2,3)(2,4)	14-17+48-77=-39
(2,1)	(2,1)(2,3)(1,3)(1,1)	37-48+77-64=2
(2,2)	(2,2)(2,3)(1,3)(1,2)	20-48+77-50=-1
(3,1)	(3,1)(3,4)(2,4)(2,3)(1,3)(1,1)	25-48+24-48+77-64=-34
(3,2)	(3,2)(3,4)(2,4)(2,3)(1,3)(1,2)	14-48+24-48+77-50=-31
(3,3)	(3,3)(3,4)(2,4)(2,3)	15-48+24-48=-57

Le min des (Δ_{ij})pour $(\Delta_{ij}) < 0$ est (-57) donc, la variable entrante est x_{33}.

Le min des variables dont on a soustrait θ est 100, donc $\theta = 100$, la variable sortante est x_{23}. (Voir étape 1)

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	700	100	200	
U_2			$100-\theta$	$100+\theta$
U_3			θ	$400-\theta$

Etape 1

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	700	100	200	
U_2				200
U_3			100	300

Etape 2

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	700	100		200
U_2				200
U_3			300	100

Etape 3

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	600	100		300
U_2				200
U_3	100		300	

Etape 4

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	600			400
U_2		100		100
U_3	100		300	

Etape 5

	E_1	E_2	E_3	E_4
U_1	500			500
U_2	100	100		
U_3	100		300	

Etape 6

Les tableaux précédents reproduisent les différentes itératives conduisant à la solution optimale. À chaque étape de calcul, on introduit dans la solution le trajet permettant la plus grande économie. La solution optimale est donnée par le tableau de l'étape 6. A cette étape de calcul, aucune réduction du coût n'est possible.

Remarque 3.5.3. L'application de l'algorithme du stepping-stone nécessite d'autant plus d'itérations que la solution de départ est éloignée de l'optimum. C'est souvent le cas lorsque celle-ci est déterminée par la méthode du coin nord-ouest qui ne prend pas en compte les coûts unitaires de transport et dont le mérite essentiel est la simplicité.

Algorithme Primal-dual

L'algorithme primal-dual de résolution d'un problème linéaire a tout d'abort été conçu pour des problèmes à structure particulière. C'est dans se cas, qu'il s'avère particulièrement utile car il permet d'exploiter efficacement la structure particulière de ces problèmes [20]. Nous le montrons en abordant la particularisation de l'algorithme primal-dual au problème de transport.

Connue encore sous le nom de la méthode des potentiels. Elle consiste en l'utilisation du premier critère à savoir $u_i + v_j = C_{ij}$ pour les cellules des variables de base. On vérifie ensuite pour les cellules des variables hors base le second critère $u_i + v_j \geq C_{ij}$.

L'algorithme primal-dual permet de repérer plus facilement le trajet le plus intéressant à introduire à chaque étape de calcul. Il fournit également un test d'optimalité. Cette nouvelle procédure est basée sur l'utilisation des contraintes duales. Pour les trajets actuellement utilisées, la relation suivante doit être respectée :

$$u_i + v_j = C_{ij}$$

La solution est optimale si le second critère est vérifié pour toutes les cellules des variables hors base.

Dans le cas, où le second critère n'est pas vérifié alors :

- On calcule $\Delta_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$ pour toute cellule (i, j) des variables hors base ;

- On cherche alors une cellule (i_0, j_0) telle que $\Delta_{(i_0 j_0)} = \min(\Delta_{ij})$ qui entrera en base, puis, on construit un cycle, qui d'ailleurs est unique puis, on affecte des signes $(+)$ et $(-)$ aux sommets de ce cycle en commençant par la cellule (i_0, j_0) affectée du $(-)$, en se mouvant dans le sens des aiguilles d'une montre (ou dans le sens contraire).

- Parmi les sommets du cycle affectés du signe $(-)$, on choisit celui, où la variable x_{ij} est minimale, et on pose $\theta = \min x_{ij} = x_{(i_1 j_1)}$.

- Pour les sommets du cycle affectés du signe $(+)$, on ajoute aux x_{ij}le nombre θ des sommets du cycle $(-)$. On répète l'itération jusqu'à ce que le critère d'optimalité soit atteint.

Si on repart de la première solution de base donnée par la méthode de coin nord-ouest, les valeurs u_i et v_j sont déterminées à l'aide du système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 64 \\ u_1 + v_2 = 50 \\ u_1 + v_3 = 77 \\ u_2 + v_3 = 48 \\ u_2 + v_4 = 24 \\ u_3 + v_4 = 48 \end{cases}$$

Ce système comprend 7 variables et 6 équations. On affecte une valeur arbitraire à l'une des variables, par exemple $u_1 = 0$. les autres variables peuvent alors être déterminées :

$$v_1 = 64; v_2 = 50; v_3 = 77; u_2 = -29; v_4 = 53; u_3 = -5$$

.

L'application de ces valeurs aux trajets inutilisés donne les résultats suivants :

Trajet inutilisé	$u_i + v_j - C_ij$
$(1,4)$	$0 + 53 - 14 = 39$
$(2,1)$	$-29 + 64 - 37 = -2$
$(2,2)$	$-29 + 50 - 20 = 1$
$(3,1)$	$-5 + 64 - 25 = 34$
$(3,2)$	$-5 + 50 - 14 = 31$
$(3,3)$	$-5 + 77 - 15 = 57$

Le trajet le plus intéressant s'avère être le trajet $(3,3)$, qu'il faut donc introduire dans la solution. La nouvelle base est obtenue à l'aide des mêmes calculs que dans l'algorithme précédent : elle correspond au tableau de l'étape 1. Une nouvelle série de valeurs u_i et v_j est alors déterminée pour ce tableau et la procédure peut reprendre. On utilise cette procédure pour le tableau de l'étape 6 qui reproduit la solution optimale :

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 64 \\ u_1 + v_4 = 14 \\ u_2 + v_1 = 37 \\ u_2 + v_2 = 20 \\ u_3 + v_1 = 25 \\ u_3 + v_3 = 15 \end{cases}$$

Les cases sont testées. Toutes sont caractérisées par des $u_i + v_j - C_{ij}$ négatifs. Donc l'optimum est atteint :

Trajet inutilisé	$u_i + v_j - C_ij$
$(1,2)$	$0 + 47 - 50 = -3$
$(1,3)$	$0 + 54 - 77 = -23$
$(2,3)$	$-27 + 54 - 48 = -21$
$(2,4)$	$-27 + 14 - 24 = -37$
$(3,2)$	$-39 + 47 - 14 = -6$
$(3,4)$	$-39 + 14 - 48 = -73$

3.6 Problème de dégénérescence

Nous avons une solution Dégénéré lorsqu'une ou plusieurs variables de base sont nulles, c'est-à-dire lorsque toutes les contraintes sont satisfaites et qu'il y a moins de $(m + n - 1)$ cellules positives $(x_{ij} > 0)$ dans la solution considérée. La dégénérescence peut apparaitre soit dans la première solution de base, soit au cours du processus des itérations menant à la solution optimale.

Pour résoudre le problème de dégénérescence, nous mettant autant de zéro dans les cellules vides du tableau de la solution dégénérée que nous assimilons à des cellules pleines de telle sorte à ce que le nombre de celle-ci soit égal à $(m+n-1)$[18]

3.7 Extensions et applications du modèle de transport

La définition donnée du modèle de transport rend sont extension possible à d'autre domaines de la gestion que celui du transport au sens strict. C'est ce qui se produit chaque fois que le problème peut s'assimiler à une question de mise en relation de points-origine et de points-destination.
On envisage ici deux applications du modèle de transport :

- le problème d'affectation ;
- la planification et la production des stocks.

3.7.1 Problème d'affectation

Le problème d'affectation est un cas particulier du problème de transport dans lequel chaque source est affectée à une seule destination. Etant donnés n tâches et n ouvriers, une affectation consiste à affecter la tâche i à l'ouvrier j [23]de façon :

- Chaque ouvrier j ait une et une seule tâche.
- Chaque tâche i est attribuée à un ouvrier.

L'affectation d'une tâche i à un ouvrier j coûte C_{ij}. Le problème d'affectation consiste à trouver une affectation de coût minimum.

1. Formulation du problème

Les variables de décisions sont définit comme suit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la tâche i est affectée à l'ouvrier j ;} \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Les contraintes du problème d'affectation s'écrivent donc simplement :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = \overline{1,n}$$

(la ressource i doit être affectée à une et une seule activité).

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = \overline{1,n}$$

(l'activité j ne peut être affectée qu'à une et une seule ressource).

Le problème linéaire d'affectation s'écrit donc

$$\begin{cases} \min Z = & \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \\ & \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \ ; \ i = \overline{1,n} \ ; \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

le problème dual s'écrit

$$\begin{cases} \max W = & \sum\limits_{i=1}^{n} u_i + \sum\limits_{i=1}^{n} v_j \\ & u_i + v_j, i, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

2. Résolution du problème

Nous allons illustrer l'algorithme Hongrois pour la résolution du problème d'affectation. Soit la matrice des coûts C, où : C_{ij} est le coût de l'affetation d'une tâche i à un ouvrier j. On note par $C^{(k)}$ la matrice des coûts à l'itération k. Les differentes étapes de l'algorithme

Hongrois sont :

Etape 1 : Réduction de la matrice des coût C comme suit : on soustrait le plus petit élément de chaque ligne aux éléments de cette ligne. Puis on soustrait le plus petit élément de chaque colonne au éléments de cette colonne.

Etape 2 : Encadrer un zero par ligne et par colonne en commençant par la ligne ayant le moins de zero possibles. Puis, barrer les autres zéros se situant sur le même ligne et la même colonne.

Etape 3 : Èliminer les lignes et les colonnes contenant des zeros de sorte que le nombre de telles lignes et colonnes soit minimum. On opère de la manière suivante :

Ètape 3.1 : Repérer par une étoile $*$ les lignes qui n'ont pas d'affectation.

Ètape 3.2 : Repérer par une $*$ les colonnes qui ont des zéros barrés dans la ligne repérée.

Ètape 3.3 : Repérer parmi les autres lignes, celles qui ont une affectation dans la colonne repérée.

Ètape 3.4 : Repéter les étapes 3.2 3.3 jusqu'au moment où il n'est plus possible d'ajouter un repère.

Ètape 3.5 : Èliminer, tracer un trait sur les lignes non repérées et les colonnes repérées.

Ètape 4 : Distinguer la valeur la plus petite des données restantes (qui n'est pas couverte par un trait). Soit a cette valeur, la matrice des coût de la prochaine itération C^{k+1} se calcule de la manière suivante :

- ${C_{ij}}^{(k+1)} = {C_{ij}}^{(k)}$, si la cellule (i, j) est couverte soit par un trait horizontal ou un trait vertical.
- ${C_{ij}}^{(k+1)} = {C_{ij}}^{(k)} - a$, si la cellule (i, j) n'est pas couverte par un trait horizontal ni par un trait vertical.
- ${C_{ij}}^{(k+1)} = {C_{ij}}^{(k)} + a$, si la cellule (i, j) est couverte par un trait horizontal et un trait vertical.

Aller à l'étape 2.

3.7.2 Planification et production des stocks

Le stockage peut être assimilé à une opération de transport. Il ne s'agit plus ici de relier deux localisations géographiques mais deux périodes différentes. Si la planification dans le temps des opérations doit porter sur t périodes, chacune des unités de production se verra affecter un vecteur de t capacités, une par période. Ces nombres peuvent varier d'une période à une autre pour des raisons telles que les congés annuels par exemple ou encore les fluctuations des approvisionnements.
Soit $(K_{i,1}, ..., K_{i,t})$ le vecteur de capacités de l'unité de production i. De même façon, le marché j sera associé à un vecteur de demande $(D_{j,1}, ..., D_{j,t})$.
Le coût d'approvisionnement de marché j par l'unité i va inclure deux éléments : le coût de transport C_{ij} et le coût de stockage qui va dépendre de l'écart entre la date de production et la date de vente. Si S est le coût de stockage mensuel, $S(l-l^{'})$ indiquera le coût de stockage d'un produit fabriqué en l et vendu en $l^{'}$. On peut définir ainsi un coût d'approvisionnement $C_{i,l,j,l'}$ tel que :

$$C_{i,l,j,l'} = C_{i,j} + S(l - l^{'}), \quad avec \quad l^{'} \geq l$$

Quand l est supérieur à $l^{'}$, ce qui correspond à un retard dans l'éxécution du carnet de commandes, une pénalité peut éventuellement être inclue dans le coût du transport.
Le but du modèle est de déterminer les quantités $X_{i,l,j,l'}$ produites au cours de la période l par l'unité i et acheminées en $l^{'}$ vers le marché j. Le modèle permet ainsi d'établir le planning des productions, du stockage et des opérations de transport. La formulation suivante est utilisée :

$$\begin{cases} \min C = & \sum\limits_{i,j,l,l'} \sum\limits_{j} C_{i,l,j,l'} x_{i,l,j,l'} \\ & \sum\limits_{j,l'} x_{i,l,j,l'} \leq K_{i,l}, \quad i = \overline{1,m}, l = \overline{1,t} \\ & \sum\limits_{i,l} x_{i,l,j,l'} \geq D_j, \quad j = \overline{1,n}, l^{'} = \overline{1,t} \\ & x_{i,l,j,l'} \geq 0. \end{cases}$$

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un cas particulier des problèmes linéaires : le problème de transport et ses méthodes de résolution.
Par la suite, nous avons mis l'accent sur quelques applications du problème de transport en outre, le problème d'affectation et le problème de planification et production des stocks.
Le chapitre suivant fera l'objet d'une étude pratique d'un problème de transport, cas de la S.A.R.L Ifri

Chapitre 4

Cas pratique

4.1 Introduction

À l'heure actuelle le maintien en compétitivité de la SARL Ibrahim et Fils dépend de sa rentabilité. Cette dernière se traduit par l'utilisation rationnelle des biens et moyens dont elle dispose, comme par exemple la conception d'un système de commercialisation intelligent de ses produits, puisque d'autres solutions comme l'augmentation du prix de vente des produits ou du prix de transport aident beaucoup plus la concurrence. En plus, généralement ces alternatives sont fixées par le marché.
Dans le cadre de la planification et de la gestion de la fonction de distribution, les responsables de l'entreprise Ibrahim et Fils désirent appuyer leurs décisions en matière de transport par des méthodes et outils scientifiques, qui permettront d'améliorer leur efficacité afin de satisfaire la demande de la clientèle. Partant du principe qu'il existe toujours une façon optimale d'accomplir chaque tâche, le principal objectif de ce travail est d'optimiser les coûts de transportation des palettes d'eau minérale de la SARL d'Ifri sur le térritoire nationale.

4.2 Description de l'entreprise Ifri

L'entrée de l'Algérie en économie de marché a incité la création des entreprises privés. Ifri, une société à responsabilité limitée, sise à la zone industrielle dite Ahrik dans la commune d'Ouzellaguen wilaya de Bejaia est implantée à l'entrée Est de la vallée de la

Soummam, en contrebas du massif montagneux du Djurdjura qui constitue son réservoir naturel d'eau. Elle est parmi les plus importantes sociétés industrielles Algériennes dans le domaine de l'agro-alimentaire.[24]

4.2.1 Historique et croissance de l'entreprise Ifri

À l'origine, il y avait la limonaderie Ibrahim laid, créée en 1986 par des fonds privés, ayant pour activités la production d'eaux gazeuses (limonades) et sirops.

Dix ans plus tard (1995), l'entreprise est transformée en une Société au Nom Collectif (SNC). Avec l'expérience acquise dans le domaine des boissons gazeuses, le groupe Ifri ne cesse de surprendre depuis sa création. Parti d'une société spécialisée dans la fabrication de boissons gazeuses (sodas), la fabrique s'est transformée en un géant de la production de l'eau dès 1995, date du lancement de la première unité de fabrication d'eau minérale naturelle sous un emballage plastique (PET)[1].

Dans l'utilisation du PET au niveau national, Ifri inaugure son premier atelier d'embouteillage le 20 juillet 1996. À cette date, plus de 20 millions de bouteilles sont commercialisées sur l'ensemble du territoire national. Ce chiffre atteint 48 millions de litres en 1999, puis 252 millions de litres en 2004 avant de franchir le cap de 500 millions de litres en 2005.

L'entreprise disposait d'une flotte de camions très limitée, souvent elle fait recours à la location des camions pour distribuer ses produits à ses clients qui demandaient des petites quantités. L'entreprise a changé son statut en une Société A Responsabilité Limitée (SARL) suite, au développement de son réseau par conséquent, l'augmentation du volume des quantités demandées.

En 2002 la SARL Ifri, a crée sa propre flotte de véhicules, avec 75 camions de type semi-remorque, jusque-là, le système de distribution se faisait sous forme de tournées. Elle a investi ses efforts dans le but d'élargir sa gamme de produits et d'augmenter sa capacité de production. Vu le nombre important de ses clients ainsi que les grandes quantités demandées par ces derniers, l'entreprise a modifié son système de distribution, par la création des dépôts (distributeurs agréés) à travers les 48 wilayas et en alimentant chaque dépôt

[1] Polyéthylène Téréphtalate

directement de l'usine sans faire des tournées (forme une seule tournée). La distribution des produits pour ses clients (super marché, alimentation générale,...) se fait à partir du ses dépôts agréés.

En 2010, la S.A.R.L a crée sa propre entreprise de transport nomée "Bejaia Logistique" avec 149 camions de type semi-remorque, qui assure le transport sur les grandes distances (usine-dépôt) i.e. à travers les 48 wilayas et 247 camions de différentes charges repartis sur le territoire national, par exemple le dépôt de l'entreprise Ifri situé à Ouzellaguen, assure la distribution de ses produits avec cinq camions. A la fin de 2011, l'entreprise a augmenté sa flotte de véhicules avec 50 camions de type semi-remorque, et 145 camions de petite charge.

4.2.2 Organisation et missions de l'entreprise Ifri

L'entreprise Ifri est composée de plusieurs directions et services (la direction générale, la direction des achats, la direction de Béjaia logistique, le service maintenance,...), ces directions sont toutes situées au siège social. Elle a pour mission de produire une gamme diversifiée à savoir : l'eau minérale naturelle, l'eau minérale gazéifiée, les sodas, les boissons fruitées et les boissons fruitées au lait.

4.3 Position du problème

Dans le cadre de la gestion de la fonction de distribution, les responsables de l'entreprise Ifri désirent mettre en oeuvre une méthode scientifique afin de satisfaire la demande de la clientèle dispersé. Le système de distribution de la SARL Ifri regroupe toutes les activités de transport de l'entreprise, qu'il s'agisse de l'acheminement des matières premières aux sites de production, du transport des produits finis aux dépôts régionaux et enfin de ceux-ci aux clients.

Le réseau de distribution de l'entreprise se compose d'un dépôt central implanté à Ouzellaguen, qui fait lieu du centre de production de l'entreprise et 9 dépôts régionaux (Béjaia, Bouira, Tamanrasset, Annaba, Alger, Setif, Mostaganem, Tiaret, Oran, Béchar). Les clients de l'entreprise sont dispersés sur tout le territoire national. Le nombre de clients ou de destination est de 48 wilaya comme le montre le schéma suivant :

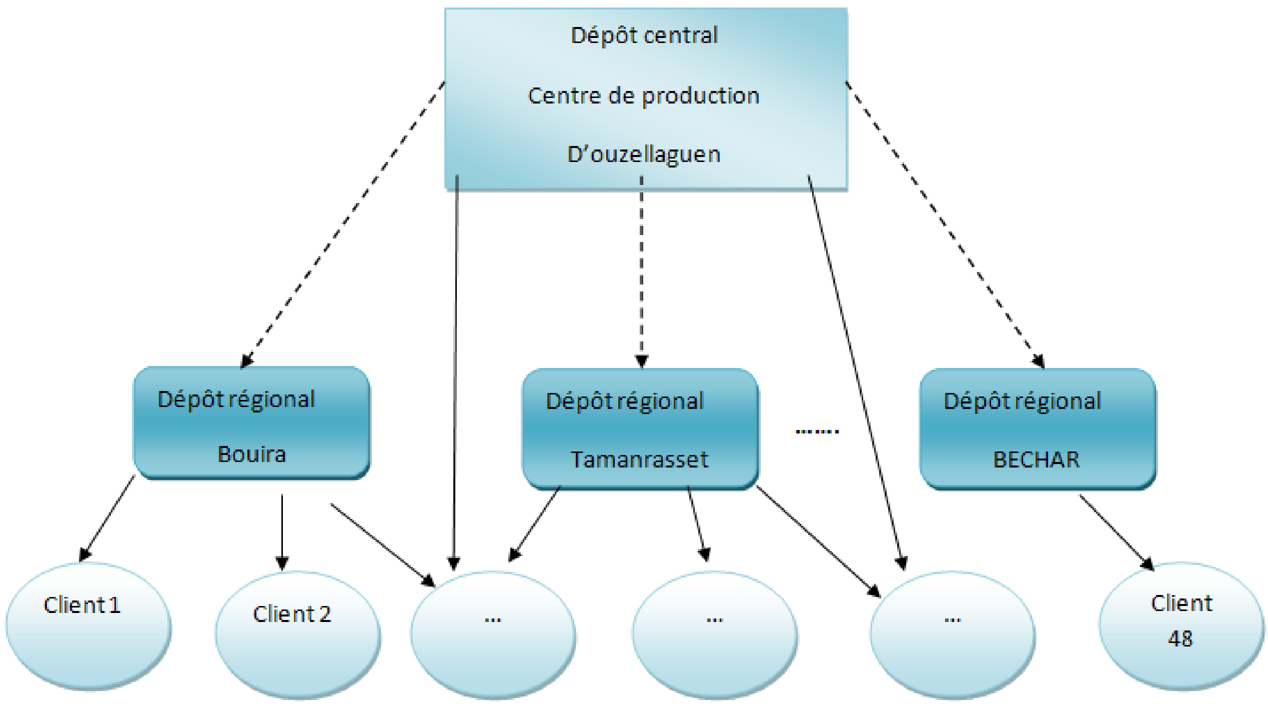


Fig. 4.1 – Système de distribution de la S.A.R.L Ifri

Le problème consiste alors à déterminer un plan d'expédition optimal des palettes d'eau minérale naturelle a partir des différents depôts implantés dans differentes regions. Cet objectif doit être satisfait en minimisant le coût de transport tout en respectant les contraintes de disponibilité de l'entreprise et les contraintes de demande des clients.

4.4 Récolte des données

. Données récoltées auprès du service production

En ce qui concerne la récolte des données, on a eu recours au service production, cela dans le but d'évaluer la capacité de production de l'entreprise et d'énumérer sa gamme de produits. Durant cette visite on a pu avoir la capacité annuelle d'eau minérale naturelle produite par l'entreprise, qui atteint une capacité de 40071770000 L estimée à 39753740 palettes.

. Données récoltées auprès du service commercial

Pour identifier et analyser d'une façon plus précise les variations des coûts de commercialisation des palettes d'eau minérale naturelle, on a eu recours au service commercial, pour voir comment fonctionnent les opérations de demande et livraison aux clients et le mode d'établissement des factures ainsi l'encaissement des paiements. Les données qu'on a récoltées dans ce service sont :

. La liste des dépôts sur le territoire algérien et leurs capacités en palettes est présentée dans le tableau suivant :

Dépôt (i)	**Capacité** S_i	**Dépôt** (i)	**Capacité** S_i
Béjaia	4770449	Setif	3180299
Bouira	2385225	Annaba	5167986
Tamanrasset	6758136	Mostaganem	1987687
Tiaret	3577837	Oran	3577836
Alger	5565524	Béchar	2782761

Tab. 4.1 – Les dépôts et leurs capacités en palettes d'eau sur le territoire national

. La liste des clients et le nombre de palettes demandées par chaque client est résumée comme suit :

client (j)	demande D_j	client (j)	demande D_j
Adrar	466259	Constantine	1094715
Chlef	1168918	Médéa	956436
Laghouat	531451	Mostaganem	859835
O. bouaghi	725099	M'sila	115507
Batna	1306216	Mascara	914607
Béjaia	1064505	Ouargla	651548
Biskra	841449	Oran	1696156
Béchar	315021	El bayedh	266686
Blida	1169908	Illizi	61045
Bouira	811385	B.B. aririj	733105
Tamanrasset	206044	Boumerdas	935615
Tebessa	756700	El taref	476407
Tlemcen	1107149	Tindouf	57331
Tiaret	987804	Tessemssilt	343500
T. ouzou	1315335	El oued	755352
Alger	3485618	Khanchla	451059
Djelfa	1274013	Souk ahras	511067
Jijel	742988	Tipaza	689402
Setif	1738034	Mila	894558
Saida	385687	Ain defla	893540
Skikda	1048295	Naâma	225004
S.B. abas	705423	A. timou	433043
Annaba	710969	Ghardaia	424130
Guelma	562746	Relizane	847076

TAB. 4.2 – Clients et leurs demandes en nombre de palettes d'eau

. Données récoltées auprès du service Béjaia logistique

La seule donnée récoltée dans ce service est le coût de transport de béjaia à alger qui est égal à 31 000 DA/camion de 26 palettes. Nous avons déduit le coût unitaire par kilometre qui est égale à 5DA/palettes.
Les données concernant les coûts C_{ij} du transport d'une palette d'eau minérale(en Dinars) d'un dépôt i vers la wilaya j ont été calculés en utilisant le coût unitaire par kilometre et les différentes distances interwilayates collectées par Internet et qui sont résumés dans le tableau suivant(voir matrice complète dans l'annexe B) :

	Adrar	Chlef	....	Ghardaia	Relizane
Béjaia	7430	2155	....	3500	2610
Bouira	5095	1565	....	2895	1925
...	...	...	....	...	...
Oran	6375	1115	....	3750	615
Béchar	2880	3730	....	4135	3255

TAB. 4.3 – Matrice des coûts du transport des palettes sur le territoire national

4.5 Modélisation du problème

La recherche opérationnelle peut remédier à une large gamme de problème concernant la gestion organisationnelle optimale des ressources, il est généralement nécessaire de cerner et de bien comprendre le problème en question et de le modéliser sous forme mathématique. Si on appelle $x_{i,j}; i = \overline{1,10}; \quad j = \overline{1,48}$ le nombre de palettes transportés du dépôt i à une déstination j et C_{ij} leurs coûts unitaires de transport. Le coût du transport total supporté par la S.A.R.L Ifri s'écrira :

$$Z = 7430x_{1,1} + 2155x_{1,2} + ... + 4135x_{10,47} + 3255x_{10,48}$$

L'objectif de l'entreprise est de rendre minimum ce coût de transport. tout en tenant compte des disponibilités du produit et sa demande. Ici le problème est balancé donc $\sum_{i=1}^{10} S_i = \sum_{j=1}^{48} D_j = 39753740$ *palettes* : toutes les capacités seront utilisées pour satisfaire la demande. Le problème de la S.A.R.L Ifri peut ainsi s'exprimer sous la forme d'un programme linéaire comportant 480 variables - une par trajet possible et 58 contraintes, une par dépôt et par déstination. Il s'écrit :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\min Z = & \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{48} C_{ij}\ x_{ij} = 7430x_{1,1} + 2155x_{1,2} + ... + 4135x_{10,47} + 3255x_{10,48} \\
S.C & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{1,6} + ... + x_{1,48} = 4770449 \\
 & x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{2,6} + ... + x_{2,48} = 2385225 \\
 & x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} + x_{3,6} + ... + x_{3,48} = 6758136 \\
 & x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} + x_{4,6} + ... + x_{4,48} = 3577837 \\
 & x_{5,1} + x_{5,2} + x_{5,3} + x_{5,4} + x_{5,5} + x_{5,6} + ... + x_{5,48} = 5565524 \\
 & x_{6,1} + x_{6,2} + x_{6,3} + x_{6,4} + x_{6,5} + x_{6,6} + ... + x_{6,48} = 3180299 \\
 & x_{7,1} + x_{7,2} + x_{7,3} + x_{7,4} + x_{7,5} + x_{7,6} + ... + x_{7,48} = 5167986 \\
 & x_{8,1} + x_{8,2} + x_{8,3} + x_{8,4} + x_{8,5} + x_{8,6} + ... + x_{8,48} = 1987687 \\
 & x_{9,1} + x_{9,2} + x_{9,3} + x_{9,4} + x_{9,5} + x_{9,6} + ... + x_{9,48} = 3577836 \\
 & x_{10,1} + x_{10,2} + x_{10,3} + x_{10,4} + x_{10,5} + x_{10,6} + ... + x_{10,48} = 2782761 \\
 & x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} + x_{5,1} + x_{6,1} + x_{7,1} + x_{8,1} + x_{9,1} + x_{10,1} = 466259 \\
 & x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} + x_{5,2} + x_{6,2} + x_{7,2} + x_{8,2} + x_{9,2} + x_{10,2} = 1168918 \\
 & x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} + x_{5,3} + x_{6,3} + x_{7,3} + x_{8,3} + x_{9,3} + x_{10,3} = 531451 \\
 & x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} + x_{5,4} + x_{6,4} + x_{7,4} + x_{8,4} + x_{9,4} + x_{10,4} = 725099 \\
 & x_{1,5} + x_{2,5} + x_{3,5} + x_{4,5} + x_{5,5} + x_{6,5} + x_{7,5} + x_{8,5} + x_{9,5} + x_{10,5} = 1306216 \\
 & x_{1,6} + x_{2,6} + x_{3,6} + x_{4,6} + x_{5,6} + x_{6,6} + x_{7,6} + x_{8,6} + x_{9,6} + x_{10,6} = 1064505 \\
 & x_{1,7} + x_{2,7} + x_{3,7} + x_{4,7} + x_{5,7} + x_{6,7} + x_{7,7} + x_{8,7} + x_{9,7} + x_{10,7} = 841449 \\
 & x_{1,8} + x_{2,8} + x_{3,8} + x_{4,8} + x_{5,8} + x_{6,8} + x_{7,8} + x_{8,8} + x_{9,8} + x_{10,8} = 315021 \\
 & x_{1,9} + x_{2,9} + x_{3,9} + x_{4,9} + x_{5,9} + x_{6,9} + x_{7,9} + x_{8,9} + x_{9,9} + x_{10,9} = 1169908 \\
 & x_{1,10} + x_{2,10} + x_{3,10} + x_{4,10} + x_{5,10} + x_{6,10} + x_{7,10} + x_{8,10} + x_{9,10} + x_{10,10} = 811385 \\
 & x_{1,11} + x_{2,11} + x_{3,11} + x_{4,11} + x_{5,11} + x_{6,11} + x_{7,11} + x_{8,11} + x_{9,11} + x_{10,11} = 206044 \\
 & x_{1,12} + x_{2,12} + x_{3,12} + x_{4,12} + x_{5,12} + x_{6,12} + x_{7,12} + x_{8,12} + x_{9,12} + x_{10,12} = 756700 \\
 & x_{1,13} + x_{2,13} + x_{3,13} + x_{4,13} + x_{5,13} + x_{6,13} + x_{7,13} + x_{8,13} + x_{9,13} + x_{10,13} = 1107149 \\
 & x_{1,14} + x_{2,14} + x_{3,14} + x_{4,14} + x_{5,14} + x_{6,14} + x_{7,14} + x_{8,14} + x_{9,14} + x_{10,14} = 987804 \\
 & x_{1,15} + x_{2,15} + x_{3,15} + x_{4,15} + x_{5,15} + x_{6,14} + x_{7,15} + x_{8,15} + x_{9,15} + x_{10,15} = 1315335 \\
 & x_{1,16} + x_{2,16} + x_{3,16} + x_{4,16} + x_{5,16} + x_{6,16} + x_{7,16} + x_{8,16} + x_{9,16} + x_{10,16} = 3585618 \\
 & x_{1,17} + x_{2,17} + x_{3,17} + x_{4,17} + x_{5,17} + x_{6,17} + x_{7,17} + x_{8,17} + x_{9,17} + x_{10,17} = 1274013 \\
 & x_{1,18} + x_{2,18} + x_{3,18} + x_{4,18} + x_{5,18} + x_{6,18} + x_{7,18} + x_{8,18} + x_{9,18} + x_{10,18} = 742988 \\
 & x_{1,19} + x_{2,19} + x_{3,19} + x_{4,19} + x_{5,19} + x_{6,19} + x_{7,19} + x_{8,19} + x_{9,19} + x_{10,19} = 1738034 \\
 & x_{1,20} + x_{2,20} + x_{3,20} + x_{4,20} + x_{5,20} + x_{6,20} + x_{7,20} + x_{8,20} + x_{9,20} + x_{10,20} = 385687 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & x_{1,40} + x_{2,40} + x_{3,40} + x_{4,40} + x_{5,40} + x_{6,40} + x_{7,40} + x_{8,40} + x_{9,40} + x_{10,40} = 451059 \\
 & x_{1,41} + x_{2,41} + x_{3,41} + x_{4,41} + x_{5,41} + x_{6,41} + x_{7,41} + x_{8,41} + x_{9,41} + x_{10,41} = 511067 \\
 & x_{1,42} + x_{2,42} + x_{3,42} + x_{4,42} + x_{5,42} + x_{6,42} + x_{7,42} + x_{8,42} + x_{9,42} + x_{10,42} = 689402 \\
 & x_{1,43} + x_{2,43} + x_{3,43} + x_{4,43} + x_{5,43} + x_{6,43} + x_{7,43} + x_{8,43} + x_{9,43} + x_{10,43} = 894558 \\
 & x_{1,44} + x_{2,44} + x_{3,44} + x_{4,44} + x_{5,44} + x_{6,44} + x_{7,44} + x_{8,44} + x_{9,44} + x_{10,44} = 893540 \\
 & x_{1,45} + x_{2,45} + x_{3,45} + x_{4,45} + x_{5,45} + x_{6,45} + x_{7,45} + x_{8,45} + x_{9,45} + x_{10,45} = 225004 \\
 & x_{1,46} + x_{2,46} + x_{3,46} + x_{4,46} + x_{5,46} + x_{6,46} + x_{7,46} + x_{8,46} + x_{9,46} + x_{10,46} = 433043 \\
 & x_{1,47} + x_{2,47} + x_{3,47} + x_{4,47} + x_{5,47} + x_{6,47} + x_{7,47} + x_{8,47} + x_{9,47} + x_{10,47} = 424130 \\
 & x_{1,48} + x_{2,48} + x_{3,48} + x_{4,48} + x_{5,48} + x_{6,48} + x_{7,48} + x_{8,48} + x_{9,48} + x_{10,48} = 847076 \\
\textit{Sous conditions} & x_{i,j} \geq 0 \quad i = \overline{1,10}; \quad j = \overline{1,48}.
\end{array}
\right.
$$

4.6 Résolution du problème

Pour résoudre le problème posé, on a eu recours au solveur Excel mais vue sa capacité limité à 200 variables [25], on etait dans l'obligation de réduire le nombre de dépôt de 10 à 4 dépôts, afin de diminuer le nombre de variable à la limite du logiciel. Pour cela nous avons regroupé certain dépôts de la manière suivante :

- Groupe 1 (Est) : Bejaia,Setif,Annaba ;
- Groupe 2 (Sud) : Tamanrasset, Bechar ;
- Groupe 3 (Ouest) : Tiaret, Oran, Mostaganem ;
- Groupe 4 (Centre) : Alger, Bouira.

En prenant comme représentant fictif de chaque groupe :

- Bejaia pour le groupe 1 ;
- Tamanrasset pour le groupe 2 ;
- Tiaret pour le groupe 3 ;
- Alger pour le groupe 4.

4.6.1 Modélisation du problème réduit

Soient $x_{i,j}; i = \overline{1,4}; \quad j = \overline{1,48}$ le nombre de palettes transporté des représentants fictifs des groupes i vers une distination j, le modèle complet s'écrira sous la forme d'un programme linéaire comportant 192 variables - une par trajet possible et 52 contraintes, une par dépôt et par déstination. Il s'écrit :

$$\begin{cases}
\min Z = & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{48} C_{ij}\ x_{ij} = 7430x_{1,1} + 2155x_{1,2} + ... + 3265x_{4,47} + 1475x_{4,48} \\
S.C & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{1,6} + ... + x_{1,48} = 9540897 \\
 & x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{2,6} + ... + x_{2,48} = 11528585 \\
 & x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} + x_{3,6} + ... + x_{3,48} = 8348285 \\
 & x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} + x_{4,6} + ... + x_{4,48} = 10335973 \\
 & x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = 466259 \\
 & x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} = 1168918 \\
 & x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} = 531451 \\
 & x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} = 725099 \\
 & x_{1,5} + x_{2,5} + x_{3,5} + x_{4,5} = 1306216 \\
 & x_{1,6} + x_{2,6} + x_{3,6} + x_{4,6} + x_{=}1064505 \\
 & x_{1,7} + x_{2,7} + x_{3,7} + x_{4,7} = 841449 \\
 & x_{1,8} + x_{2,8} + x_{3,8} + x_{4,8} = 315021 \\
 & x_{1,9} + x_{2,9} + x_{3,9} + x_{4,9} = 1169908 \\
 & x_{1,10} + x_{2,10} + x_{3,10} + x_{4,10} = 811385 \\
 & x_{1,11} + x_{2,11} + x_{3,11} + x_{4,11} = 206044 \\
 & x_{1,12} + x_{2,12} + x_{3,12} + x_{4,12} = 756700 \\
 & x_{1,13} + x_{2,13} + x_{3,13} + x_{4,13} = 1107149 \\
 & x_{1,14} + x_{2,14} + x_{3,14} + x_{4,14} = 987804 \\
 & x_{1,15} + x_{2,15} + x_{3,15} + x_{4,15} = 1315335 \\
 & x_{1,16} + x_{2,16} + x_{3,16} + x_{4,16} = 3585618 \\
 & x_{1,17} + x_{2,17} + x_{3,17} + x_{4,17} = 1274013 \\
 & x_{1,18} + x_{2,18} + x_{3,18} + x_{4,18} = 742988 \\
 & x_{1,19} + x_{2,19} + x_{3,19} + x_{4,19} = 1738034 \\
 & x_{1,20} + x_{2,20} + x_{3,20} + x_{4,20} = 385687 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & x_{1,40} + x_{2,40} + x_{3,40} + x_{4,40} = 451059 \\
 & x_{1,41} + x_{2,41} + x_{3,41} + x_{4,41} = 511067 \\
 & x_{1,42} + x_{2,42} + x_{3,42} + x_{4,42} = 689402 \\
 & x_{1,43} + x_{2,43} + x_{3,43} + x_{4,43} = 894558 \\
 & x_{1,44} + x_{2,44} + x_{3,44} + x_{4,44} = 893540 \\
 & x_{1,45} + x_{2,45} + x_{3,45} + x_{4,45} = 225004 \\
 & x_{1,46} + x_{2,46} + x_{3,46} + x_{4,46} = 433043 \\
 & x_{1,47} + x_{2,47} + x_{3,47} + x_{4,47} = 424130 \\
 & x_{1,48} + x_{2,48} + x_{3,48} + x_{4,48} = 847076 \\
Sous\ \ conditions & x_{i,j} \geq 0 \quad i = \overline{1,4}; \quad j = \overline{1,48}.
\end{cases}$$

4.6.2 résolution du problème réduit

Solution de base initiale

Initialement, la solution de base donnée par le solveur est :

$x_{1,3} = 531451$ $x_{1,4} = 725099$ $x_{1,7} = 841449$ $x_{1,10} = 811385$ $x_{1,11} = 206044$
$x_{1,12} = 756700$ $x_{1,14} = 511665$ $x_{1,16} = 1689304$ $x_{1,19} = 1738034$ $x_{1,33} = 61045$
$x_{1,34} = 733105$ $x_{1,35} = 935615$ $x_{2,1} = 466259$ $x_{2,2} = 1168918$ $x_{2,8} = 315021$
$x_{2,9} = 1169908$ $x_{2,14} = 476138$ $x_{2,20} = 385687$ $x_{2,21} = 1048295$ $x_{2,23} = 710969$
$x_{2,24} = 562746$ $x_{2,26} = 497611$ $x_{2,27} = 859835$ $x_{2,30} = 651548$ $x_{2,36} = 476407$
$x_{2,37} = 57331$ $x_{2,38} = 343500$ $x_{2,39} = 755352$ $x_{2,41} = 511067$ $x_{2,45} = 225004$
$x_{2,48} = 846733$ $x_{3,5} = 1306206$ $x_{3,6} = 1064496$ $x_{3,13} = 1107140$ $x_{3,16} = 1796300$
$x_{3,17} = 1274003$ $x_{3,22} = 705423$ $x_{3,25} = 1094715$ $x_{4,15} = 1315335$ $x_{4,18} = 742988$
$x_{4,26} = 458824$ $x_{4,28} = 1155507$ $x_{4,29} = 914607$ $x_{4,31} = 1696156$ $x_{4,32} = 266686$
$x_{4,40} = 451059$ $x_{4,42} = 689402$ $x_{4,43} = 894558$ $x_{4,44} = 893540$ $x_{4,46} = 433043$
$x_{4,47} = 424130$ $Z = 1.5175 \times 10^{11}$

Solution optimale

Pour trouver une solution optimale, le solveur Excel utilise l'Algorithme de Stepping Stone, le principe de cette méthode est de partir d'une solution de base et de progresser par itération pour trouver une solution qui minimise les coûts de transport [26].

La solution optimale donnée par le solveur aprés 126 itérations est la suivante :

$x_{1,6} = 1064505$, $x_{1,10} = 725372$, $x_{1,18} = 742988$, $x_{1,19} = 1738034$, $x_{1,21} = 1048294$,
$x_{1,28} = 1155507$, $x_{1,34} = 733105$, $x_{1,36} = 476407$, $x_{1,40} = 451059$, $x_{1,41} = 511067$,
$x_{1,43} = 894558$, $x_{2,1} = 466259$, $x_{2,3} = 531451$, $x_{2,4} = 725099$, $x_{2,5} = 1306216$,
$x_{2,7} = 841449$, $x_{2,8} = 315021$, $x_{2,11} = 206044$, $x_{2,14} = 276964$, $x_{2,17} = 1274013$,
$x_{2,23} = 710969$, $x_{2,24} = 562746$, $x_{2,25} = 1094715$, $x_{2,30} = 651548$, $x_{2,32} = 266686$,
$x_{2,33} = 61045$, $x_{2,37} = 57331$, $x_{2,38} = 343500$, $x_{2,39} = 755352$, $x_{2,45} = 225004$,
$x_{2,46} = 433043$, $x_{2,47} = 424130$, $x_{3,2} = 1121512$, $x_{3,13} = 1107149$, $x_{3,14} = 710840$,
$x_{3,20} = 385687$, $x_{3,22} = 705423$, $x_{3,27} = 859835$, $x_{3,29} = 914607$, $x_{3,31} = 1696156$,
$x_{3,48} = 847076$, $x_{4,2} = 47406$, $x_{4,9} = 1169708$, $x_{4,10} = 86013$, $x_{4,12} = 756700$,
$x_{4,15} = 1315335$, $x_{4,16} = 3485168$, $x_{4,26} = 956436$, $x_{4,35} = 935615$, $x_{4,42} = 689402$,
$x_{4,44} = 893540$. $Z = 1.138 \times 10^{11}$

4.6.3 Interprétation des résultats :

Aprés 126 itérations, le solveur Excel, nous a fournit un plan optimal de transport pour la distribution des palettes d'eau minérale des différents représentant fictifs des groupes de dépôts (Béjaia, Tamanrast, Tiaret, Alger) vers les 48 wilayas d'Algerie, avec un coût de transport minimum egal à 1.138×10^{11} DA. Le nombre de palettes à expédier de chaque représentant fictifs vers chaque wilaya est résumé dans le tableau suivant :

Wilaya (j)	D.EST	Wilaya (j)	D. SUD	Wilaya (j)	D. OUEST	Wilaya (j)	Centre
Béjaia	1064505	Adrar	466259	Chlef	1121512	Chlef	4746
Bouira	725372	Laghouat	531451	Tlemcen	1107149	Blida	1169808
Jijel	742988	O. bouaghi	725099	Tiaret	710840	Bouira	86013
Setif	1738034	Batna	1306216	Saida	385687	Tebessa	756700
Skikda	1048295	Biskra	841449	S.abass	705423	T.ouzou	1315335
M'sila	1155507	Béchar	315021	Mostaganem	859835	Alger	3485618
B.Aririj	733105	Tamanrasset	206044	Mascara	914607	Médéa	956436
El taref	476404	Tiaret	276964	Oran	1696156	Boumerdas	935615
khenchla	451059	Djelfa	1274013	Relizane	847076	Tipaza	689402
S.ahras	511067	Annaba	710969			A.defla	893540
Mila	894558	Guelma	562746				
		Constantine	1094715				
		Ouargla	651548				
		El bayedh	266686				
		Illizi	61045				
		Tindouf	57331				
		Tessemsilt	343500				
		El oued	755352				
		Naâma	225004				
		A.timouchent	433043				
		Ghardaia	424130				

TAB. 4.4 – Nombre de palettes à expédier d'un dépôt i vers une wilaya j

Nous constatons, que le groupe EST ne distribue que vers 11 wilayas (Béjaia, Bouira, Jijel, Setif, Skikda, M'sila, Borj bou aririj, El taref, Khenchla, Souk ahras et Mila), le groupe SUD quant à lui distribue vers 22 wilaya (Adrar, Laghouat,...etc), le groupe OUEST distribue à 9 wilayas et enfin le groupe CENTRE distribue à 10 wilayas, avec un coût minimum. On peut dire que les résultats obtenus reflètent la réalité.

4.7 Conclusion

Ce dernier chapitre fait l'objet d'un cas réel, dont l'objectif est d'apporter une solution au problème recensé au niveau de l'entreprise agro-alimentaire Ifri, qui consiste à determiner un plan de transport optimal pour la distribution des palettes d'eau minérale partant des différents dépôts régionaux implantés sur tout le téritoire national vers ses différentes wilayas, à moindre coût en utilisant le tableur solveur d'Exel 2013.
Au niveau de la résolution de se problème, nous avons rencontré un problème de dimension que notre solveur n'a pas pu supporter. Nous étions dans l'obligation de réduire le problème et enfin de le résoudre.

Conclusion générale

Toute entreprise qu'elle que soit sa taille, son domaine d'activité est amenée à faire face à des problèmes de gestion au quotidien. Parmi ces problèmes, on cite le problème de transport qui nécessite la mise en œuvre d'un procédé de prise de décision rationnel à cause de son niveau de complexité particulièrement élevé et à cause des coûts supplémentaires qu'il génère s'il est mal géré. Ce qui souligne l'importance qu'occupe ce type de problème dans la gestion quotidienne de l'entreprise.

Dans ce travail, nous avons présenté en premier temps la définition, classification des problèmes d'optimisation combinatoire et énumération de quelques méthodes de résolution, en allant des méthodes exactes aux méthodes approchés.

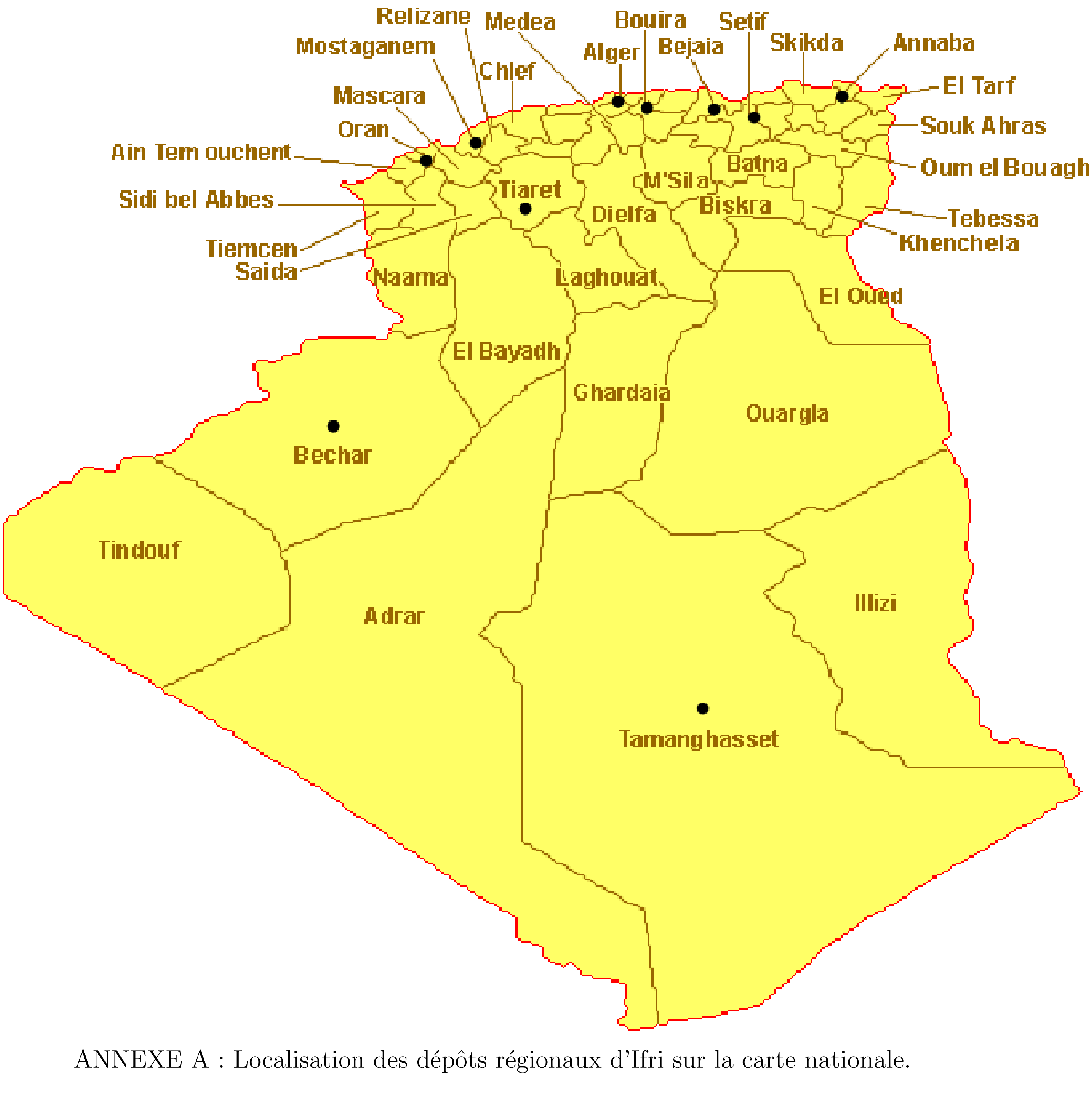
Le deuxième chapitre a traité les méthodes de résolution de problèmes d'optimisation combinatoire fondées sur la programmation linéaire. En effet de nombreux problèmes peuvent être modélisés puis résolus à l'aide de la programmation linéaire où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires.
L'approche par programmation linéaire fournit également une aide à la résolution de problèmes plus difficiles tels que le problème de transport qui a fait l'objet du troisième chapitre.
Après avoir effectuer un stage à l'entreprise agro-alimentaire Ifri et suite au problème recensé à son niveau, qui consiste à determiner un plan d'acheminement à coût minimal pour la distribution des palettes d'eau minérale, partant des différents dépôts régionaux implantés sur tout le territoire national vers les 48 wilayas à moindre coût. Ensuite, nous avons réduit le problème vue l'absence de logiciel traitant les problèmes de grandes dimensions. Au final nous avons pu établir un modèle qui nous a permis de résoudre le problème

réduit et de proposer un plan de transport optimal en utilisant le Solveur Excel ceci à fait l'objet du quatrième chapitre.

Perspectives

Comme l'université de Béjaia ne dispose pas de logiciel spécialisé dans la résolution du problème linéaire de grandes dimension, nous proposons de résoudre notre problème lorsque nous disposerons de logiciel adéquat au problème réel. Et par conséquent, nous satisferons les besoins de l'entreprise Ifri.

Annexes



ANNEXE A : Localisation des dépôts régionaux d'Ifri sur la carte nationale.

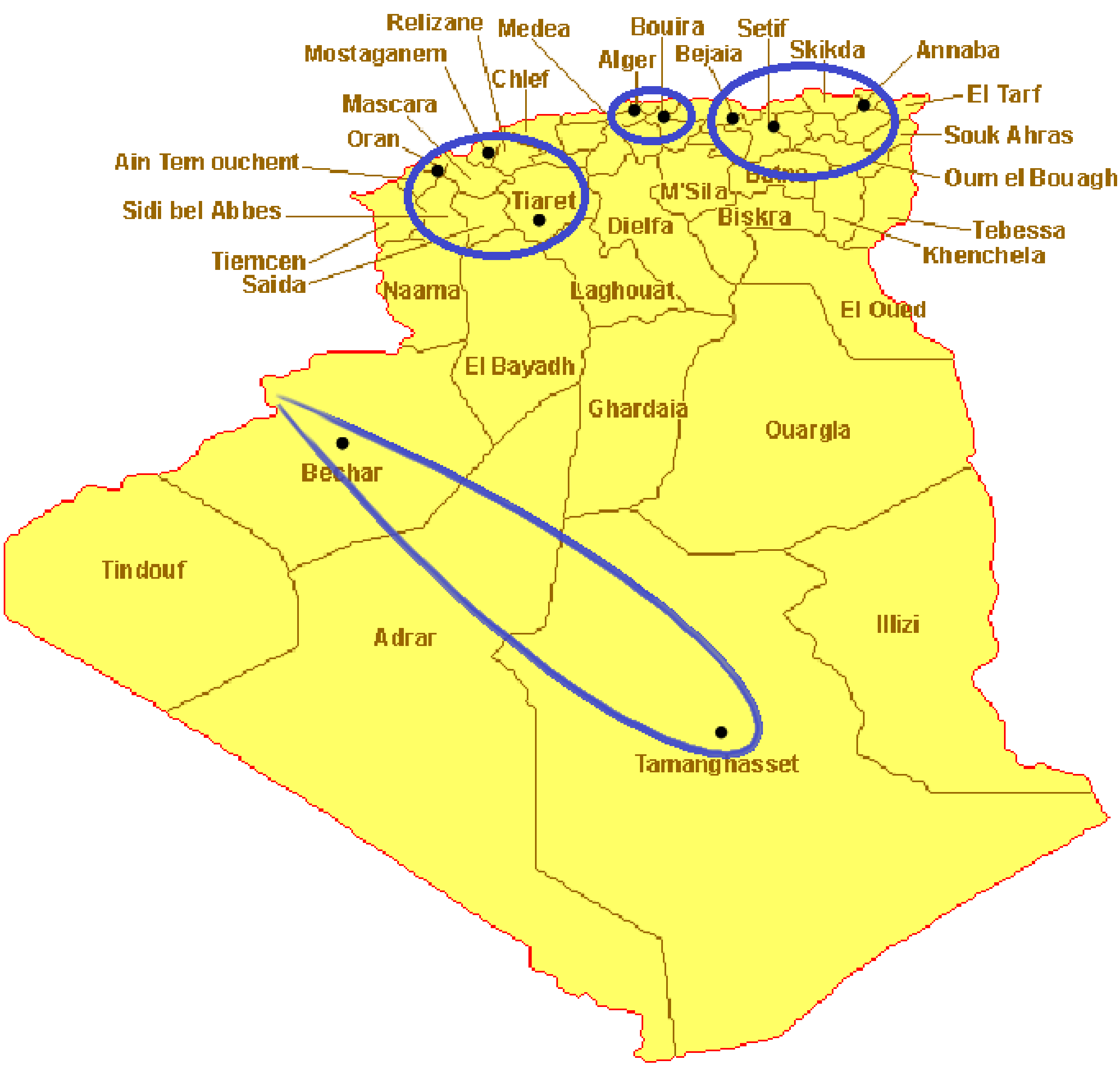
	adrar	chlef	laghouat	o. bouaghi	batna	bejaia	biskra	béchar	blida	bouira	tamanrasset
D. Bejaia	7430	2155	2570	1530	38085	350	1910	5855	1345	695	9985
D. Bouira	5095	1565	1470	1770	1410	695	1660	5170	660	200	9455
Tamanrasset	5210	10165	7830	9265	8525	9435	7910	8100	9650	9700	450
D. Tiaret	6110	440	1390	3785	2505	2470	2325	3285	1135	1800	9010
D. Alger	7715	1040	2000	2500	2125	1210	2125	4925	250	610	9850
D. Setif	6985	2295	1760	1000	645	530	1370	5995	1490	830	9540
D. Annaba	8790	3735	3975	1125	1375	1670	1990	7790	3030	2050	9870
Mostaganm	6165	685	2265	3960	3600	2835	3165	3340	1505	2115	10565
D. Oran	6375	1115	3170	4515	3850	3250	3785	3465	1900	2600	10390
D. Béchar	2880	3730	3205	6155	5275	5490	5005	485	4390	4830	7905
demande	466259	1168918	531451	725099	1306216	1064505	841449	315021	1169908	811385	206044

tlemcen	tiaret	t.ouzou	alger	djelfa	jijel	setif	saida	skikda	s. b. abass	annaba	guelma
3820	2470	620	1210	2060	496,5	530	3280	1215	3370	1690	1630
3130	1800	377,5	525	1535	1125	830	3385	1830	2680	2115	1920
11140	9290	10090	9850	8385	9565	8880	10125	9525	10160	9870	9620
1525	300	1810	1340	1385	2910	2615	885	3615	1085	3945	3705
2700	1700	515	400	1375	1795	1500	2185	2550	2200	3000	2685
3960	2615	1225	1355	1715	760	150	3530	1025	3510	1435	1115
5400	3690	2420	3000	3055	1275	1435	1485	520	5045	100	320
1095	845	2180	1710	2225	3280	2985	870	3985	675	4310	4075
705	1095	2750	2160	2205	3575	3390	910	4330	2350	4850	4815
2805	3280	5065	4595	3655	5420	8180	2465	6180	2990	7790	6270
1107149	987804	1315335	3485618	1274013	742988	1738034	385687	1048295	705423	710969	562746

constantine	médéa	mostganem	m'sila	mascara	ouargla	oran	el bayedh	illizi	b.b. arririj	boumerdas	el taref
1135	1540	2805	955	2930	3605	3245	3530	8525	815	810	2025
1430	855	2115	665	2285	3415	2560	2900	8330	510	382	2495
9090	9395	10565	9380	9715	6395	10380	8315	4195	9145	9590	11060
2910	1015	885	1625	655	3975	1120	1085	8900	2295	1640	4280
2155	455	1710	1240	1805	4000	2160	2395	8855	1020	257,5	3005
655	1685	2945	655	3075	3095	3390	3070	6500	550	1210	1685
780	3000	4470	2060	4500	3840	4850	4455	8665	1935	2680	349
3790	1420	190	2820	435,5	4815	450	2200	6850	2660	2005	4650
4170	3865	450	2745	510	4525	185	1755	9565	3075	2310	5060
7010	4270	3340	4545	2935	5300	3465	2205	10395	4930	4890	6845
1094715	956436	859835	1155507	914607	651548	1696156	266686	61045	733105	935615	476407

tindouf	tessemsilt	el oued	khenchla	souk ahras	tipaza	mila	ain defla	naâma	a.timou	ghardaia	relizane	Capacité
9870	2195	2800	1300	1950	1560	975	1825	4490	3595	3500	2610	4770449
9180	1510	3075	1815	2240	875	1310	1205	3805	2910	2895	1925	2385225
10955	8795	6000	9865	10435	9385	10015	9185	8705	9750	7255	9910	6758136
7295	274,5	3800	3600	4030	1120	3095	750	1730	1390	2355	505	3577837
8735	1060	3500	2325	2755	390	1825	755	2855	2460	3265	1475	5565524
10010	2340	2700	1000	1435	1705	505	1970	4635	3740	2885	2755	3180299
10695	3720	3000	1115	465,5	3085	1005	3415	6015	5120	4160	4135	5167986
7855	1040	4650	3250	4395	1440	3465	1020	2030	770	3550	299,5	1987687
7350	1435	4550	4380	4810	1920	3875	1435	1745	388,5	3750	615	3577836
4015	3530	5500	5855	6590	4325	5660	4070	2090	3135	4135	3255	2782761
57331	343500	755352	451059	511067	689402	894558	893540	225004	433043	424130	847076	39753740

ANNEXE B : Les données collectées au problème de transport de palettes d'eau de la S.A.R.L Ifri



ANNEXE C : Les dépôts du probème réduit

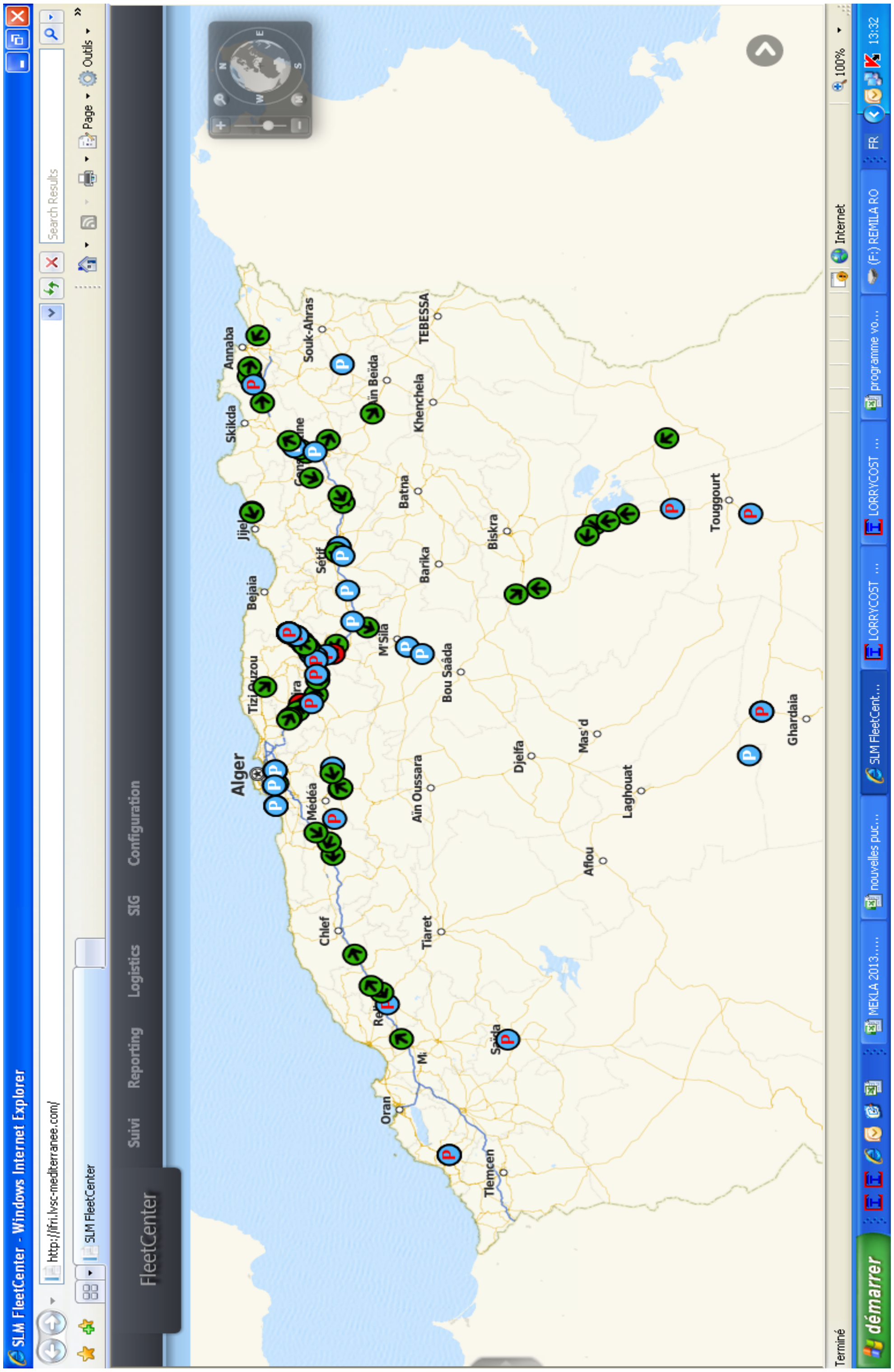
	adrar	chlef	laghouat	o. bouaghi	batna	bejaia	biskra	béchar	blida	bouira	tamanrasset	tebessa
D. Bejaia	7430	2155	2570	1530	38085	350	1910	5855	1345	695	9985	2110
Tamanrasset	5210	10165	7830	9265	8525	9435	7910	8100	9650	9700	450	9245
D. Tiaret	6110	440	1390	3785	2505	2470	2325	3285	1135	1800	9010	4190
D. Alger	7715	1040	2000	2500	2125	1210	2125	4925	250	610	9850	670
demande	466259	1168918	531451	725099	1306216	1064505	841449	315021	1169908	811385	206044	756700

tlemcen	tiaret	t.ouzou	alger	djelfa	jijel	setif	saida	skikda	s. b. abass	annaba	guelma	constantine
3820	2470	620	1210	2060	496,5	530	3280	1215	3370	1690	1630	1135
11140	9290	10090	9850	8385	9565	8880	10125	9525	10160	9870	9620	9090
1525	300	1810	1340	1385	2910	2615	885	3615	1085	3945	3705	2910
2700	1700	515	400	1375	1795	1500	2185	2550	2200	3000	2685	2155
1107149	987804	1315335	3485618	1274013	742988	1738034	385687	1048295	705423	710969	562746	1094715

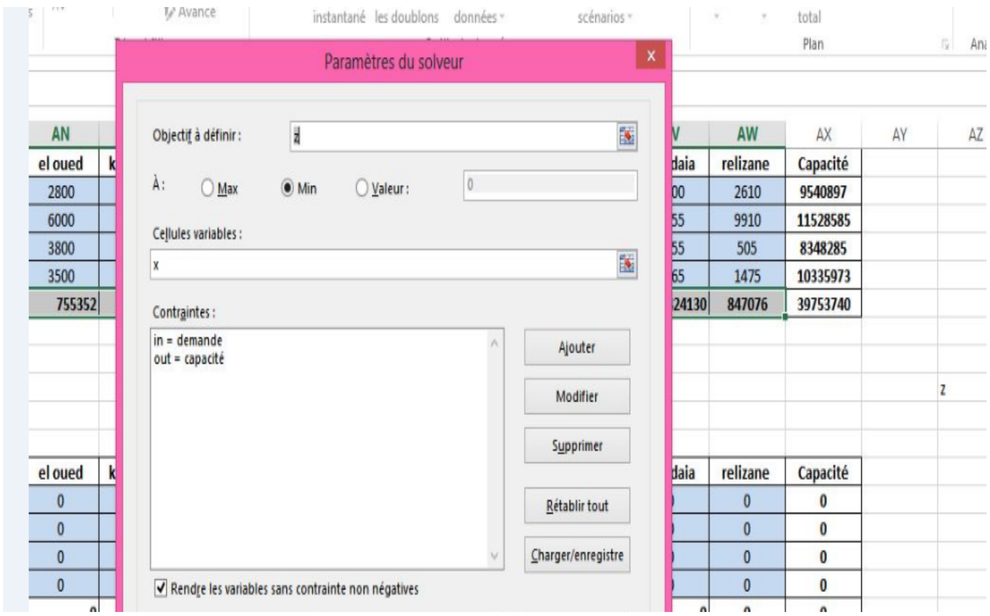
médéa	mostganem	m'sila	mascara	ouargla	oran	el bayedh	illizi	b.b. arririj	boumerdas	el taref	tindouf	tessemsilt
1540	2805	955	2930	3605	3245	3530	8525	815	810	2025	9870	2195
9395	10565	9380	9715	6395	10380	8315	4195	9145	9590	11060	10955	8795
1015	885	1625	655	3975	1120	1085	8900	2295	1640	4280	7295	274,5
455	1710	1240	1805	4000	2160	2395	8855	1020	257,5	3005	8735	1060
956436	859835	1155507	914607	651548	1696156	266686	61045	733105	935615	476407	57331	343500

tessemsilt	el oued	khenchla	souk ahras	tipaza	mila	ain defla	naâma	a.timou	ghardaia	relizane	Capacité
2195	2800	1300	1950	1560	975	1825	4490	3595	3500	2610	13118734
8795	6000	9865	10435	9385	10015	9185	8705	9750	7255	9910	9541497
274,5	3800	3600	4030	1120	3095	750	1730	1390	2355	505	9143360
1060	3500	2325	2755	390	1825	755	2855	2460	3265	1475	7950749
343500	755352	451059	511067	689402	894558	893540	225004	433043	424130	847076	39753740

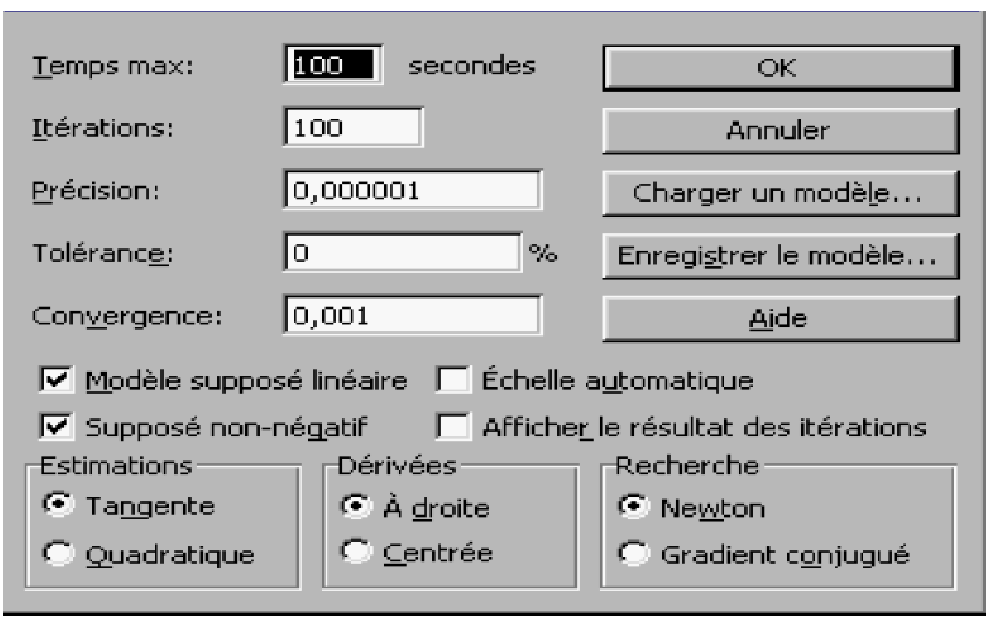
ANNEXE D : Les données collectées au problème de transport de palettes d'eau de la S.A.R.L Ifri réduit



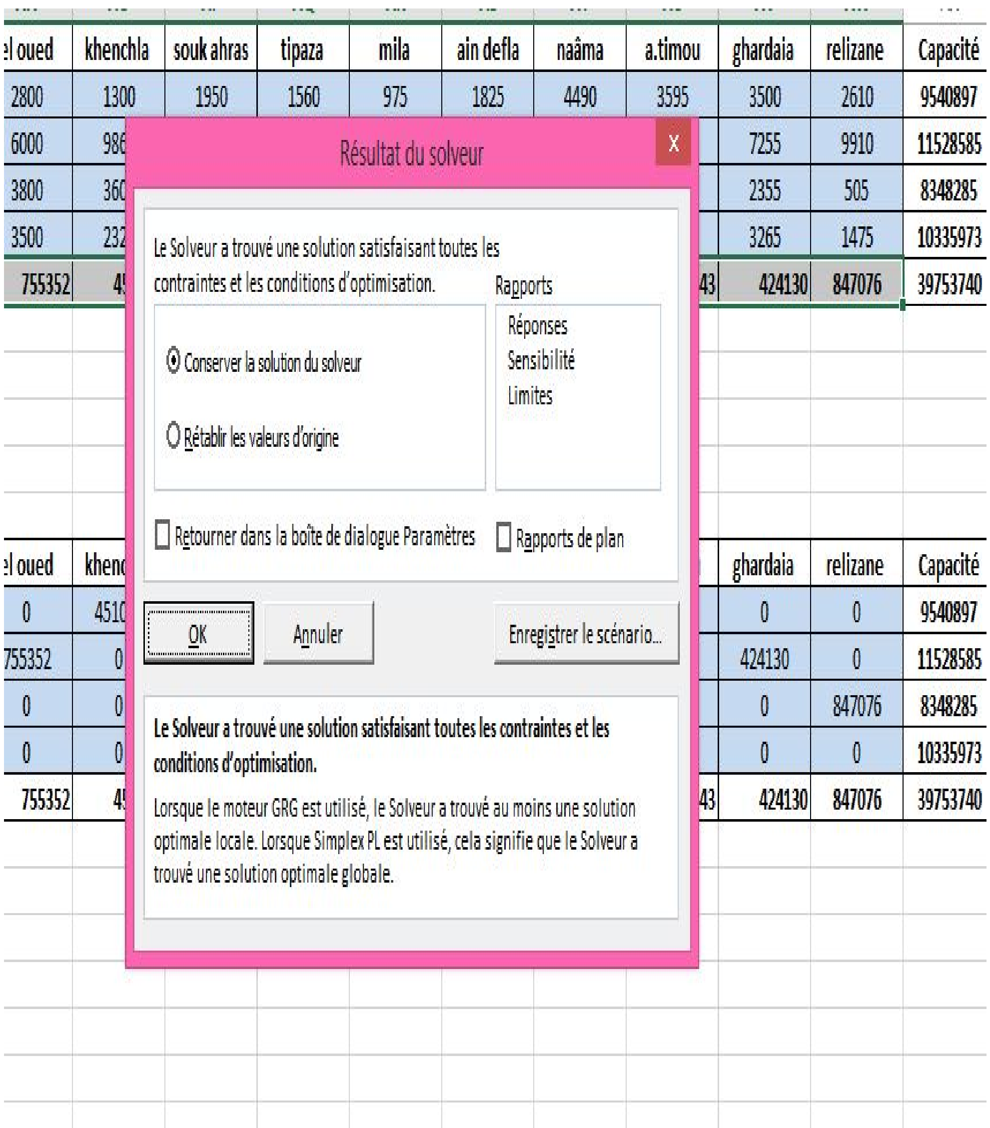
ANNEXE E : Suivi des camions avec le GPS.



Paramètre du solveur pour le modèle de transport des palettes



Option du solveur



ANNEXE F : Résultat du solveur

	adrar	chlef	laghouat	o. bouaghi	batna	bejaia	biskra	béchar	blida	bouira	tamanrasset	tebessa	tlemcen	tiaret	t.ouzou	alger	djelfa	jijel
D. Bejaia	0	0	0	0	0	1064505	0	0	0	725372	0	0	0	0	0	0	0	742988
Tamanrasset	466259	0	531451	725099	1306216	0	841449	315021	0	0	206044	0	0	276964	0	0	1274013	0
D. Tiaret	0	1121512	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1107149	710840	0	0	0	0
D. Alger	0	47406	0	0	0	0	0	0	1169908	86013	0	756700	0	0	1315335	3485618	0	0
demande	466259	1168918	531451	725099	1306216	1064505	841449	315021	1169908	811385	206044	756700	1107149	987804	1315335	3485618	1274013	742988

setif	saida	skikda	s. b. abass	annaba	guelma	constantine	médéa	mostganem	m'sila	mascara	ouargla	oran	el bayedh	illizi	b.b. arririj	boumerdas	el taref	tindouf
1738034	0	1048295	0	0	0	0	0	0	1155507	0	0	0	0	0	733105	0	476407	0
0	0	0	0	710969	562746	1094715	0	0	0	0	651548	0	266686	61045	0	0	0	57331
0	385687	0	705423	0	0	0	0	859835	0	914607	0	1696156	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	956436	0	0	0	0	0	0	0	0	935615	0	0
1738034	385687	1048295	705423	710969	562746	1094715	956436	859835	1155507	914607	651548	1696156	266686	61045	733105	935615	476407	57331

as	el taref	tindouf	tessemsilt	el oued	khenchla	souk ahras	tipaza	mila	ain defla	naâma	a.timou	ghardaia	relizane	Capacité
	476407	0	0	0	451059	511067	0	894558	0	0	0	0	0	9540897
	0	57331	343500	755352	0	0	0	0	0	225004	433043	424130	0	11528585
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	847076	8348285
	0	0	0	0	0	0	689402	0	893540	0	0	0	0	10335973
15	476407	57331	343500	755352	451059	511067	689402	894558	893540	225004	433043	424130	847076	39753740

ANNEXE G : Plan optimal obtenu avec le solveur Excel.

[illegible]	[illegible]
9910	11528585
505	8348285
1475	10335973
847076	39753740

z	1,138E+11

relizane	Capacité
0	9540897
0	11528585
847076	8348285
0	10335973

ANNEXE H : Valeur optimal de la fonction objectif donnée par le solveur

Bibliographie

[1] Wild Beightler, Phillips. Foundations of optimization. 2nd ed.Englewood Cliffs, 1979.

[2] J. Edmonds, *Covers and packings in a family of sets. American Mathematical Society*, vol(68) :494-499, 1962.

[3] S.A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, Association for Computing Machinery, pages 151-158, 1971.

[4] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and intractability : A guide to the theory of np-completeness. W. H. Freeman and Company*, 1979.

[5] G. Laporte and Y. Nobert, *Exact algorithms for the vehicle routing problem*, Annals of Discrete Mathematics, vol(31) :147-184, 1987.

[6] Michel Sakarovitch, Optimisation Combinatoire, Méthodes mathèmatiques et algorithmiques. Edition Herman. (1984).

[7] M. Padberg and G. Rinaldi, *A branch-and-cut algorithm for the resolution of largescale symmetric traveling salesman problems*, SIAM Review, vol(33) :60-100, 1991.

[8] F. Glover, *Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. Computers and Operations Research*, vol(5) :533-549, 1986.

[9] Batiste Autin Les métaheuriqtiques en Optimisation combinatoire. Conservatoire National des Arts et Metiers Paris. (2006).

[10] A. Colorni, M. Dorigo, and V. Maniezzo. Distributed optimization by ant colonies. Elsevier Publishing, pages 134-142, 1992.

[11] S. El BERNOUSSI, *cours de Programmation linéaire*, Méthode du simplexe, Octobre 2010.

[12] Jacky MONTMAIN et Jean Michel PENLVA, Choix publics stratégiques et systèmes sociaux, *état de l'art sur les théories de la décision et méthodologies de l'approche système, Commissariat à l'énergie atomique et Ecole des mines D'ALES*, Unité de recherche sur la complexité, centre de recherche LGI2P, Juin 2003.

[13] Dominique de werra, Thomas M. liebling et Jean- François hêche, *Recherche opérationnelle pour l'ingénieur*, TOME1 presses polytechniques et universitaires romandes, fédérale de Lausanne, 2004.

[14] K. Mellouli, A. EL KAMEL, P.BORNE, Sciences et technologies 16, *Programmation linéaire et applications (éléments de cours et exercices résolus)*, Editions TECHNIP, Paris, 2004.

[15] F. DROESBEKE, M. HALLIN, CL.LEFEVRE, *Programmation linéaire Par l'exemple*, Edition ellipses, 1986.

[16] Djamel AAID, *Etude numérique comparative entre les méthodes de résolution d'un problème de transport à quatre indices avec capacités*, mémoire magistère en Optimisation Numérique, Université de Constantine, 2010.

[17] Yvesnobert. Roch ouellet . Régit parent, *méhode de plaification en transport.*

[18] Benmazouz,B., *Recherche Opérationnelle de gestion*, ATLAS Edition, mars 1995.

[19] Laurent smoch, *méthodes d'optimisation*, septembre 2011.

[20] Hugues Talbot, *Problèmes de transport et transbordement Résolution*, Laboratoire A2SI, 9 avril 2009.

[21] Cullmann, G., *Recherche Opérationnelle théorie et pratique*, Masson et Cie, 1970.

[22] G.,Hadley, *Linear programming, Addison-Westly Publishing Company*, Reading, Massachusetts (1983).

[23] Jacques TEGHEM, *programmation linéaire*, Editions ELLIPSES, Bruxelles 1996.

[24] K. MEGAR, K. MEKHNECH, *Optimisation et gestion d'un parc du transport cas de la S.A.R.L Ibrahim et Fils*, Editions universitaires Européennes, Août 2011.

[25] C. PRINS, M. SEVAUX, *Programmation linéaire avec Excel*, Editions EYROLLES, Paris 2005.

[26] C. HARBAJI, *La gestion sous Excel et VBA*, Editions EYROLLES, 2012.

Résumé

Le problème de distribution de produits dans une entreprise économique peut être vu comme un problème de transport, qui est un problème d'optimisation combinatoire de la classe P et qui a fait l'objet de nombreux travaux. Le problème de transport est ainsi un programme linéaire qui peut être donc résolu par des méthodes du simplexe ; cependant il existe une méthode plus adaptée connue sous le nom d'algorithme de transport, qui nécessite une solution initiale de base et amélioration de celle-ci jusqu'à l'optimum.
Dans ce mémoire, nous étudions un cas réel, nous avons proposé un modèle linéaire, pour la distribution des palettes d'eau minérale pour l'entreprise agroalimentaire S.A.R.L Ifri. Nous avons pris comme objectif la minimisation des coûts de transport. A la fin nous avons présenté une approche de résolution basée sur l'algorithme de transport résolu par le Solveur d'Excel, qui nous a permis d'avoir un plan de transport optimal réduisant les coûts.
Mots clés : Optimisation Combinatoire, Modélisation, Algorithme de Transport, Solveur Excel.