

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.Mira Béjaïa
Faculté des Sciences exactes
Département de Physique



Mémoire de Master

présenté par

Mr AIT AMOKRANE Salah

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Physique

Option : Physique Théorique

Intitulé

**Introduction à la théorie de jauge
sur réseaux**

Soutenu le 24 septembre 2012 devant le jury composé de :

Mr A.GHARBI	<i>Président</i>	M.C.B	Université de Béjaïa
Mr A. MOHAMED MEZIANI	<i>Rapporteur</i>	M.C.A	Université de Béjaïa
Mr T.FOUGHALI	<i>Examineur</i>	M.A.B	Université de Béjaïa

- - - Promotion 2011-2012 - - -

Remerciements

Au terme de ce travail, en premier lieu, je tiens à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce modeste travail.

Mon remerciement s'adresse à Monsieur MOHAMED MEZIANI Abdelkader de m'avoir proposé ce sujet de mémoire. Je lui exprime ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a accordée, sa disponibilité la plus totale, sa patience et pour tout ce qu'il m'a appris durant mes études à l'université...

Je remercie très sincèrement Monsieur GHARBI Abdelhakim qui m'a fait l'honneur d'être le président du jury. Je remercie également Monsieur FOUGHALI Toufik d'avoir accepté d'être examinateur de ce travail et pour son cours de théorie de jauge qu'il nous a enseigné en deuxième année master.

Je remercie vivement Monsieur le Docteur BELABBAS Moumène qui m'a orienté à la physique, pour la documentation qui m'a offert et pour tout ce qu'il m'a appris durant mes études à l'université, surtout en première année SCIENCES ET TECHNIQUES.

Je souhaite remercier avec un soin particulier TOULOUM Samir et KHALED Hacene pour leurs disponibilité et leurs esprit d'amitié et de loyauté.

Mes remerciements vont également à toute ma famille et mes meilleurs amis : Nabil, Ahmed, Bachir et Taher, qui m'ont toujours soutenu dans les moments difficiles.

Sommaire

Introduction	iii
I Théorie de jauge continue	1
1 Invariance de jauge en mécanique analytique	2
1.1 Formalisme lagrangien et invariance de jauge	2
1.1.1 Le lagrangien	2
1.1.2 Le principe d'Hamilton	3
1.1.3 Invariance de jauge	3
1.2 Formalisme hamiltonien et invariance de jauge	5
1.2.1 L'hamiltonien	5
1.2.2 L'invariance de jauge et les grandeurs physiques	6
1.3 Résumé du chapitre	8
2 Intégrales de chemins et propagateurs	9
2.1 Intégrales de chemins	9
2.2 Propagateur d'un champ scalaire de spin 0	14
2.3 Propagateur d'un champ spinoriel de spin $\frac{1}{2}$	15
3 Invariance de jauge en théorie de champ continue	18
3.1 Champ scalaire et invariance de jauge	18
3.2 Champ spinoriel et invariance de jauge	20
II Théorie de champ sur réseaux	21
4 La discrétisation à la Wilson	22
4.1 La discrétisation de l'espace-temps	22
4.1.1 Réseau hypercubique	22
4.1.2 Conséquences sur les dérivées	23

4.1.3	Conséquences sur les intégrales :	23
4.1.4	Conséquences sur la transformée de Fourier	24
4.1.5	Conséquences sur les impulsions	25
4.2	La discrétisation d'un champ scalaire	25
4.2.1	L'action d'un champ scalaire libre sur réseau	25
4.3	Le propagateur d'un champ scalaire libre	25
4.3.1	La limite continue	26
4.4	La discrétisation d'un champ spinoriel	27
4.4.1	La discrétisation de l'action spinorielle	27
4.4.2	Le propagateur de Dirac sur réseau pour un champ spinoriel libre	27
4.4.3	La limite continue	28
4.5	La discrétisation d'un champ de jauge	29
4.5.1	La variable de lien	29
4.5.2	Les invariants de jauge sur réseau	30
4.5.3	L'action de Wilson	33
4.5.4	La dérivée covariante sur réseau	35
III	Conclusion	36
IV	Annexes	38
A	Réseau réciproque et zone de Brillouin	39
A.1	Réseau réciproque	39
A.2	Les zones de Brillouin	40
B	Les groupes de jauge	42
B.1	Le groupe $U(n)$	42
B.1.1	Le groupe $U(1)$	42
B.2	Le groupe $SU(n)$	42
B.2.1	Le groupe $SU(3)$	43
	BIBLIOGRAPHIE	44

Introduction

Les théories actuellement acceptées par la communauté scientifique reposent sur quatre interactions fondamentales : l'interaction gravitationnelle, électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte.

Basé sur les principes de symétrie, le Modèle standard a réussi l'unification des trois dernières interactions dans le même formalisme où la théorie qui décrit l'interaction forte est la chromodynamique quantique (QCD) dont le groupe de jauge est le groupe $SU(3)$. Cette dernière a été construite par analogie à l'électrodynamique quantique (QED), la théorie qui décrit parfaitement l'interaction électromagnétique par des méthodes de calculs perturbatives. Cependant en QCD, le domaine d'application de ces méthodes est limité à des petites distances entre quarks où la constante de couplage est petite. Par contre à des grandes distances, où la constante de couplage est grande, il faut passer aux méthodes non-perturbatives. Wilson donc a proposé en 1974 la QCD sur réseau. C'est l'acte de naissance de la théorie de jauge sur réseau, dont l'idée principale est la discrétisation de l'espace-temps, ce qui va permettre par la suite à l'aide des méthodes numériques de faire des calculs assistés par ordinateur.

Dans ce mémoire de Master on a proposé une introduction à la théorie de jauge sur réseaux dans sa forme générale. Quatre chapitres regroupés en deux grandes parties ont été choisis et ordonnés de manière à respecter les dépendances mathématique et logiques entre les différents formalismes et concepts. La première partie, la théorie de jauge continue, est composée de trois chapitres dont le premier est nommé «Invariance de jauge en mécanique analytique» où on a présenté le formalisme lagrangien puisque il est le formalisme idéal pour l'élaboration d'une théorie de jauge. De plus, il est à la base de la quantification par la méthode des intégrales de chemins. Dans le même chapitre le formalisme canonique, qui est une extension du formalisme lagrangien, nous donne une nouvelle gamme d'outils mathématiques pour l'étude des phénomènes physiques. Ces outils qu'on a testé par l'application de principe d'invariance de jauge pour vérifier quelles sont les grandeurs véritables physiques et celle qui ne sont que des artifices mathématiques. Les résultats et les concepts essentiels de ce premier chapitre ont été rappelés à la fin du chapitre sous forme d'un résumé dans le but de bien comprendre le lien avec

les chapitres suivants. Le deuxième chapitre aborde la quantification par le formalisme des intégrales de chemins qui permet non seulement le passage à la physique moderne, mais aussi à l'utilisation des méthodes numériques par application d'une rotation (rotation de Wick) de $\frac{\pi}{2}$ sur le plan pour passer du temps réel vers le temps imaginaire, et enfin à des calculs assistés par ordinateur après discrétisation de l'espace-temps. Les propagateurs des différents champs (scalaires et spinoriels) ont été mis en évidence dans ce chapitre pour pouvoir, par la suite, les comparer avec les propagateurs sur réseau. Le troisième chapitre nommé «invariance de jauge en théorie de champs » met en évidence le champ de jauge qu'on a discrétisé dans le chapitre quatre, et donne les lagrangiens invariants de jauge pour les champs scalaires et spinoriels respectivement .

Dans le chapitre quatre (la deuxième partie), on a discrétisé l'espace-temps en utilisant un réseau hypercubique à quatre dimensions, et on a construit les éléments de base de calcul mathématique (dérivées, intégrales, impulsions, transformées de Fourier) sur ce nouvel espace-temps. Ensuite on a discrétisé les champs scalaire, spinoriel et de jauge, respectivement en cherchant les actions et les propagateurs sur réseau correspondant pour chaque champ. Et enfin on a défini la dérivée covariante sur réseau.

Le mémoire est clôturé par une conclusion où on a discuté les avantages et les inconvénients de cette théorie et ses différentes applications.

Première partie
Théorie de jauge continue

Chapitre 1

Invariance de jauge en mécanique analytique

Bien que la découverte formelle de la symétrie de jauge a été mise en évidence par Maxwell dans sa théorie électromagnétique postérieurement aux formalismes lagrangien et hamiltonien, ces deux derniers sont les cadres parfaits pour l'élaboration de la théorie de jauge.

Le formalisme lagrangien, fondé sur un principe variationnel, permet des simplifications importantes des concepts des théories de jauge classiques et modernes. Sa puissance se manifeste dans les théories les plus récentes de la physique des particules.

Le formalisme Hamiltonien est un formalisme équivalent au formalisme lagrangien. Cependant, il nous offre des informations précieuses sur la signification physique de certaines variables. De plus, l'hamiltonien est le cœur de la mécanique quantique. Une transformation, mathématique dite transformation de Legendre, appliquée sur le lagrangien donne l'hamiltonien.

Dans ce chapitre, nous donnerons une introduction élémentaire à ces formalismes. Une documentation pédagogique plus détaillée peut être trouvée dans la référence [1]

1.1 Formalisme lagrangien et invariance de jauge

1.1.1 Le lagrangien

Soit un système physique à N degrés de liberté. Ce système est caractérisé par un lagrangien (fonction de N coordonnées généralisées $\{q_i\}_{i=1}^N$, leurs dérivées temporelles, et de temps) :

$$L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q_i, t) \quad (1.1)$$

La quantité notée $S[\{q_i\}]$ définit par

$$S[\{q_i\}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (1.2)$$

est l'action. Elle caractérise les trajectoires de système qui satisfont les conditions aux bords $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Ainsi toute l'information sur le système est contenue dans cette fonction.

1.1.2 Le principe d'Hamilton

Le principe de moindre action (principe d'Hamilton) postule que la trajectoire physique $q_i(t)$ choisie par le système est un extremum de S . Ce principe se traduit mathématiquement par l'équation :

$$\delta S = 0 \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

Nous aurons donc :

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (1.5)$$

On en déduit les équations de mouvement

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

Ce sont les équations d'Euler-Lagrange. Les solutions de ces équations ($q_i = q_i(t)$) sont les trajectoires que nous cherchons.

1.1.3 Invariance de jauge

Soit la transformation de lagrangien suivante :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{dF(q_i, t)}{dt} \quad (1.7)$$

F est la fonction génératrice de la transformation. La physique est invariante sous cette transformation puisque $\delta S' = \delta S$. En effet :

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L'(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (1.8)$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q_i, t)}{dt} \quad (1.9)$$

$$= \delta S + \underbrace{\delta F(q_i(t_2), t_2)}_{=0} - \underbrace{\delta F(q_i(t_1), t_1)}_{=0} \quad (1.10)$$

$$= \delta S \quad (1.11)$$

Où $\delta F(q_i(t_1), t_1) = \delta F(q_i(t_2), t_2) = 0$ puisque la variation de la trajectoire aux points de départ et d'arrivé est nulle ($\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$)

• *Si cette jauge est la même en tout point de l'espace, l'invariance est dite globale, par contre si elle dépend de l'espace, l'invariance est locale. Cette dernière produit des changements dans le lagrangien qu'on interprète comme des interactions.*

Revenons à notre transformation

$$\begin{aligned} L(q_i, \dot{q}_i, t) &\longrightarrow L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{dF(q_i, t)}{dt} \\ &= T - V(q_i, t) + \sum_i \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

En posant

$$V'(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t} \quad (1.13)$$

la forme de lagrangien L' devient :

$$L' = T - V'(q_i, t) + \sum_i \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (1.14)$$

Remarquons que la forme de L' est différente de la forme de L . Le terme $\sum_i \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i$ est la partie vectoriel de l'interaction de jauge.

Cependant une deuxième transformation appliquée sur L' à l'aide d'une fonction $G(q_i, t)$, ne change pas sa forme :

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow L''(q_i, \dot{q}_i, t) = L'(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{dG(q_i, t)}{dt} \quad (1.15)$$

$$= T - V''(q_i, t) + \sum_i \frac{\partial (G(q_i, t) + F(q_i, t))}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (1.16)$$

Avec :

$$V''(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial (G(q_i, t) + F(q_i, t))}{\partial t} \quad (1.17)$$

Donc, un lagrangien avec interaction de jauge est invariant de forme (invariant de jauge). Autrement dit, la forme d'un lagrangien avec interaction de jauge est la forme la plus générale. C'est ce dernier résultat qui a permis aux physiciens de poser le principe suivant : « **Les seules interactions possibles dans la nature sont les interactions de jauge** ». C'est le fil conducteur qui a conduit à l'unification des trois interactions fondamentales (électromagnétique, nucléaire faible et forte)

dans les théories modernes de la physique des particules.
Revenons une autre fois à notre lagrangien :

$$L = T - V(q_i, t) + \sum_i \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (1.18)$$

Le terme $\sum_i \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i$ est de la forme $\vec{q} \cdot \vec{A}(q_i, t)$, avec $\vec{A}(q_i, t) = \vec{\nabla} F$.
On peut donc réécrire le lagrangien sous la forme suivante :

$$L = T - V(q_i, t) + \vec{q} \cdot \vec{A}(q_i, t) \quad (1.19)$$

Dans le cas le plus général \vec{A} ne dérive pas d'un potentiel.
une transformation sur L donne :

$$L' = T - V' + \vec{q} \cdot \vec{A}' \quad (1.20)$$

Avec :

$$V' = V - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.21)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} F \quad (1.22)$$

On retrouve ainsi les mêmes formes de transformation que celle de l'électromagnétique.

1.2 Formalisme hamiltonien et invariance de jauge

1.2.1 L'hamiltonien

Comme déjà mentionné plus haut, l'hamiltonien est une transformation de Legendre de lagrangien. Il est donné par l'expression :

$$H(q_i; p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L \quad (1.23)$$

Avec :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1 \dots N \quad (1.24)$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_i, q_i, t), \quad i = 1 \dots N \quad (1.25)$$

p_i sont les impulsions généralisées.

Dans ce formalisme les équations équivalent aux équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1 \dots N \quad (1.26)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1 \dots N \quad (1.27)$$

On remarque tout de suite qu'on a un ensemble de $2N$ équations différentielles de premier ordre.

1.2.2 L'invariance de jauge et les grandeurs physiques

Le but recherché dans cette sous-section est la mise en évidence d'un grand principe de la physique moderne : « **Les quantités invariantes de jauge locale sont des véritables grandeurs physique** ». Pour se faire on va étudier l'exemple d'une particule chargée.

Soit une particule chargée de charge (q) plongée dans un champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} qui dérivent des deux potentiels $V(\vec{r}, t)$ et $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.28)$$

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.29)$$

Ces deux potentiels se transforment localement comme suit :

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla F \quad (1.30)$$

$$V \longrightarrow V' = V - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.31)$$

\vec{E} et \vec{B} sont invariants. En effet,

$$\begin{aligned} \vec{E} &\longrightarrow \vec{E}' = - \vec{\nabla} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ &= - \vec{\nabla} V + \vec{\nabla} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} F \\ &= - \vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \frac{\partial F}{\partial t} - \vec{\nabla} \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} \\ &= \vec{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &\longrightarrow \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \\
&= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} F}_{=0} \\
&= \vec{B}
\end{aligned}$$

On voit clairement que la modification d'un des potentiels est compensé par la modification de l'autre. C'est un nouveau pas vers la construction de les théories de jauge modernes.

La force de Lorentz pour le système est donnée par :

$$\vec{f} = q \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \quad (1.32)$$

L'hamiltonien de système est :

$$H(\vec{r}(t), \vec{p}(t), t) = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + qv(\vec{r}, t) \quad (1.33)$$

Avec :

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1.34)$$

est moment conjugué. La quantité de mouvement donc est

$$\pi(t) = \vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t) = m\vec{v} \quad (1.35)$$

et les équations d'Hamilton :

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \nabla_{\vec{p}} H(\vec{r}(t), \vec{p}(t), t) \quad (1.36)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = -\nabla_{\vec{r}} H(\vec{r}(t), \vec{p}(t), t) \quad (1.37)$$

On voit donc clairement que l'Hamiltonien et le moment conjugué dépendent de jauge choisie. Par contre la quantité de mouvement et la position sont indépendantes. D'autre par, la nature telle qu'elle est observée est invariante de jauge ce qui nous permet de conclure que l'Hamiltonien et le moment conjugué ne sont pas des véritables grondeurs physiques, comme la position et la quantité de mouvement. Pouvoir vérifier la nature des quantités mathématiques avec le principe de symétrie de jauge locale, prouve une autre fois la puissance de cette théorie.

1.3 Résumé du chapitre

A ce stade, on a déjà fait un grand pas dans la théorie de jauge. Les concepts et les résultats vus dans ce chapitre sont d'une importance capitale en science physique et particulièrement en physique des particules. Rappelons en les essentiels :

- Le formalisme lagrangien est l'outil parfait pour l'élaboration de la théorie de jauge .
- Le formalisme lagrangien est basé sur un principe variationnel.
- Dans ce formalisme, toute l'information concernant le système physique est entièrement contenue dans une fonction dite « *action* ».
- Un lagrangien accompagné d'une interaction de jauge est un invariant de jauge .
- les seules interactions possibles dans la nature sont de type interactions de jauge.
- Avec le formalisme lagrangien, on retrouve les mêmes formes de transformation qu'avec l'électromagnétisme.
- Le formalisme hamiltonien nous offre des informations importantes sur certaines grandeurs.

Chapitre 2

Intégrales de chemins et propagateurs

Les théories quantiques relativistes modernes comme la théorie de jauge sur réseau, sont basées sur le formalisme des intégrales de chemins. Cette approche permet une extension plus facile de la mécanique quantique au domaine relativiste, et de prendre en compte toutes les fluctuations quantiques une fois que l'on s'est donné l'action. Dans ce chapitre nous introduisons les notions élémentaires conduisant à ce formalisme en considérant le cas d'un système quantique non relativiste, dont l'évolution est régie par l'équation de Schrödinger. Ensuite nous définissons la notion du propagateur dont on calculera les fonctions dans le cas relativiste des champs de Klein Gordon et de Dirac. Une documentation plus complète peut être trouvée dans les références [9] et [8].

2.1 Intégrales de chemins

Considérons le cas simple d'un système quantique non relativiste à une dimension dont l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}) \quad (2.1)$$

et l'évolution est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.2)$$

Les vecteurs propres des opérateurs \hat{P} et \hat{X} vérifient les relations suivantes :

$$X|x\rangle = x|x\rangle \quad P|p\rangle = p|p\rangle \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \langle p'|p\rangle = \delta(p' - p) \\ \langle x'|x\rangle = \delta(x' - x) \end{cases} \quad \text{Relation d'orthogonalité} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle\langle x| = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle\langle p| = 1 \end{cases} \quad \text{Relation de fermeture} \quad (2.5)$$

Le passage de la base $|x\rangle$ à la base $|p\rangle$ se fait grâce à la relation

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad (2.6)$$

Dans la représentation $|x\rangle$ le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est représenté par la fonction d'onde

$$\psi(x, t) = \langle x|\psi(t)\rangle \quad (2.7)$$

L'évolution du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ peut être décrite à l'aide de l'opérateur d'évolution $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$ tel que $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$

Alors la fonction d'onde peut s'écrire

$$\psi(x, t) = \langle x|U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (2.8)$$

En injectant la relation de fermeture $\int_{-\infty}^{+\infty} |x_0\rangle\langle x_0| = 1$ dans (2.8)

On obtient

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x|U(t, t_0)|x_0\rangle \langle x_0|\psi(t_0)\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x|U(t, t_0)|x_0\rangle \psi(x_0, t_0) \quad (t > t_0) \end{aligned}$$

Donc l'évolution d'un système quantique au cours du temps peut être décrite par une équation intégrale.

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x|U(t, t_0)|x_0\rangle \psi(x_0, t_0) \quad (t > t_0) \quad (2.9)$$

On note

$$K(x, t, x_0, t_0) = \langle x|U(t, t_0)|x_0\rangle \quad (2.10)$$

qui représente la fonction de Green de l'équation de Schrödinger : C'est la valeur au point x à l'instant t de la solution de l'équation de Schrödinger qui se réduit à un instant $t = t_0$ à la distribution de Dirac.

C'est à dire

$$K(x, t_0, x_0, t_0) = \delta(x - x_0) \quad (2.11)$$

On appelle aussi $K(x, t, x_0, t_0)$ le propagateur de l'équation de Schrödinger.

En injectant les relations de fermeture $\int_{-\infty}^{+\infty} |x_j\rangle\langle x_j| = 1$ relatives aux instants intermédiaires t_1, t_2, \dots, t_n et avec

$$U(t, t_0) = U(t, t_j)U(t_j, t_{j-1})U(t_{j-1}, t_{j-2})\dots U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) \quad (2.12)$$

on déduit

$$K(x, t, x_0, t_0) = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \prod_{j=1}^{n+1} K(x_j, t_j, x_{j-1}, t_{j-1}) \quad (2.13)$$

Considérons le cas standard où l'hamiltonien est la somme de deux termes l'énergie cinétique $T(p, t)$ et l'énergie potentielle $V(x, t)$:

$$\hat{H}(p, x, t) = \hat{T}(p, t) + \hat{V}(x, t) \quad (2.14)$$

L'opérateur d'évolution dans un temps infinitésimale ε s'écrit :

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\varepsilon} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\hat{T}+\hat{V})} \quad (2.15)$$

comme les opérateurs \hat{T} et \hat{V} ne commutent pas on utilisera la formule de Baker-Campbell-Hausdorff pour factoriser (2.15) :

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\hat{T}+\hat{V})} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{T}} e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}} e^{-i\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\hat{R}} \quad (2.16)$$

avec :

$$\hat{R} = \frac{i}{2}[\hat{V}, \hat{T}] - \frac{\varepsilon}{\hbar} \left\{ \frac{1}{6}[\hat{V}, [\hat{V}, \hat{T}]] - \frac{1}{3}[[\hat{V}, \hat{T}], \hat{T}] \right\} + o(\varepsilon^2) \quad (2.17)$$

En négligeant les termes d'ordre $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$ on peut supprimer le terme en \hat{R} dans (2.16), il vient alors :

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\varepsilon} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\hat{T}+\hat{V})} \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{T}} e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}} \quad (2.18)$$

Dans cette approximation le propagateur pour un temps infinitésimale s'écrit :

$$K(x_j, t_j; x_{j-1}, t_{j-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_j (x - x_{j-1}) - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{H}(p_j, x_j, t_j) \right] \quad (2.19)$$

En substituant (2.19) dans (2.13) on obtient :

$$K(x, t; x_0, t_0) \simeq \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \prod_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \prod_{j=1}^{n+1} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_j (x_j - x_{j-1}) - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{H}(p_j, x_j) \right] \quad (2.20)$$

Soit :

$$K(x, t; x_0, t_0) \simeq \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \prod_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_n(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}, x_0, \dots, x_{n-1}) \right] \quad (2.21)$$

telle que S_n est la somme :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n+1} \left[p_j(x_j - x_{j-1}) - \varepsilon \hat{H}(p_j, x_j, t_j) \right] \quad (2.22)$$

Dans le cas ou l'énergie cinétique $T(p, t)$ est fonction quadratique de l'impulsion

$T(p, t) = \frac{p^2}{2m}$, on a :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x, t) \quad (2.23)$$

En substituant (2.23) dans (2.22) nous obtenons l'action discrétisée :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon \left[p_j \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right) - \frac{p_j^2}{2m} - V(x_j, t_j) \right] \quad (2.24)$$

Puisque S_n est quadratique par rapport aux moments p_j , donc on peut la réécrire sous la forme :

$$S_n \simeq \sum_{j=1}^{n+1} \left[-\frac{\varepsilon}{2m} \left(p_j - m \frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{m\varepsilon}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 - \varepsilon V(x_j, t_j) \right] \quad (2.25)$$

En substituant (2.25) dans (2.21) on aura :

$$K(x, t; x_0, t_0) \simeq \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \exp \left\{ \frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_j, t_j) \right] \right\} \times \prod_{n=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar} \right) \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ p_j - m \frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right\}^2 \quad (2.26)$$

En utilisant la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{i\pi} \quad (2.27)$$

on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{2m\hbar} \left(p_j - m \frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar \varepsilon / m}} \quad (2.28)$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{2m\hbar} \sum_{j=1}^{n+1} \left(p_j - m \frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 \right\} = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \quad (2.29)$$

En portant ce résultat dans l'expression (2.26) on obtient

$$K(x, t; x_0, t_0) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \prod_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \varepsilon \sum_{n+1}^{j=1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_j, t_j) \right] \right\} \quad (2.30)$$

Soit

$$K(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \exp \frac{i}{\hbar} S_n \quad (2.31)$$

Avec

$$S_n = \varepsilon \sum_{n+1}^{j=1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_j, t_j) \right] \quad (2.32)$$

A la limite continue : $\varepsilon \rightarrow 0 : \frac{x_j - x_{j-1}}{\varepsilon} \rightarrow \dot{x}(t_j)$, $\varepsilon \sum_j f(t_j) \rightarrow \int d\tau f(\tau)$. Donc :

$$S[x] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_n = \int_{t_0}^t d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t) \right] \quad (2.33)$$

En introduisant la définition suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \equiv \int_{C(x_0, t_0, x, t)} Dx \quad (2.34)$$

tel que $C(x_0, t_0, x, t)$ est le chemin menant la particule de (x_0, t_0) vers (x, t) , on obtient alors l'amplitude de probabilité sous forme d'une intégrale de chemin

$$K(x, t; x_0, t_0) = \int_{C(x_0, t_0, x, t)} Dx e^{-\frac{i}{\hbar} S[x]} \quad (2.35)$$

Sous cette forme le propagateur apparaît comme étant la somme sur tous les chemins possible sur lesquels le système quantique peut évoluer pour aller de (x_0, t_0) vers (x, t) , telle que la contribution sur chacun des chemins est égale à $e^{-\frac{i}{\hbar} S}$.

La présence du facteur i dans l'exponentielle aboutit à des intégrales oscillantes qu'il est impossible de traiter numériquement. Pour résoudre ce problème on utilise un temps imaginaire $\tau = it$, en faisant une rotation de Wick. En suivant les

mêmes étapes que précédemment on trouve l'intégrale de chemin euclidienne :

$$\begin{aligned} K(x, -i\tau, x_0, -i\tau_0) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta\hbar/m}} \prod_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{2\pi\eta\hbar/m}} \exp \frac{-\eta}{\hbar} \left\{ \sum_{n+1}^{j=1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\eta} \right)^2 + V(x_j, t_j) \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta\hbar/m}} \prod_{j=1}^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{2\pi\eta\hbar/m}} \exp \left\{ -\frac{S_E^n[x]}{\hbar} \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$= \int_C Dx e^{-S_E(x)} \quad (2.37)$$

où S_E est l'action euclidienne

$$S_E[x] = \int_0^\tau d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right) \quad (2.38)$$

2.2 Propagateur d'un champ scalaire de spin 0

Dans le cas d'un champ de Klein Gordon en interaction avec un source extérieure $J(x)$, l'équation de mouvement s'écrit

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = J(x) \quad (2.39)$$

Cette équation peut s'obtenir avec la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \quad (2.40)$$

appliquée dans l'équation d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.41)$$

La fonction de Green ou le propagateur noté $\Delta_F(x - y)$ de l'équation différentielle inhomogène (2.39) est définie comme étant la solution de cette équation avec comme source la fonction delta de Dirac

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (2.42)$$

Si nous connaissons le propagateur de l'équation (2.42) la solution particulière de l'équation inhomogène (2.39) peut s'écrire

$$\phi(x) = - \int d^4y \Delta_F(x - y) J(y) \quad (2.43)$$

En effet

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) &= - \int d^4y (\partial_{x\mu} \partial_x^\mu + m^2) \Delta_F(x-y) J(y) \\
&= - \int d^4y (-\delta^4(x-y)) J(y) \\
&= J(x)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Le propagateur est par conséquent un concept important pour résoudre les équations de mouvement d'un système en présence d'interaction, et peut être déterminé plus aisément en traitant le problème dans l'espace réciproque. On peut définir la fonction delta et le propagateur en fonction de leurs transformés de Fourier comme suit

$$\delta^4(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \tag{2.45}$$

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k) \tag{2.46}$$

En substituant (2.45) et (2.46) dans (2.42) nous obtenons

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \tag{2.47}$$

ou

$$\frac{1}{(2\pi)^4} (-k^2 + m^2) \Delta_F(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \tag{2.48}$$

ou

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \tag{2.49}$$

Et enfin en substituant (2.49) dans (2.46) on détermine le propagateur de l'équation de l'équation de Klein Gordon

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2} \tag{2.50}$$

2.3 Propagateur d'un champ spinoriel de spin $\frac{1}{2}$

Dans le cas d'un champ de Dirac en interaction avec un source extérieure $J(x)$ l'équation de mouvement s'écrit

$$(i \not{\partial} - m)\psi(x) = J(x) \tag{2.51}$$

La fonction de Green ou le propagateur noté $S_F(x-y)$ de l'équation (2.51) est défini comme étant la solution de cette équation avec comme source la fonction delta de Dirac

$$(i \not{\partial} - m)S_F(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{2.52}$$

où $S_F(x-y)$ est une matrice (4×4) dans l'espace spinoriel. Considérons le calcul de $(i \not{\partial} - m)(i \not{\partial} + m)$: On a

$$(i \not{\partial} - m)(i \not{\partial} + m) = (i \not{\partial})^2 - m^2 = -\not{\partial}^2 - m^2 \quad (2.53)$$

et

$$\not{\partial}^2 = \gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \quad (2.54)$$

$$= \gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu \quad (2.55)$$

$$= \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \partial_\nu \quad (2.56)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \not{\partial}^2 &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} (2\eta^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \end{aligned} \quad (2.57)$$

En substituant (2.57) dans (2.53) on déduit

$$(i \not{\partial} - m)(i \not{\partial} + m) = (i \not{\partial})^2 - m^2 = -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \quad (2.58)$$

Sachant que le propagateur de l'équation de Klein Gordon satisfait l'équation

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$$

On peut écrire

$$(i \not{\partial} - m)(i \not{\partial} + m) \Delta_F(x-y) = -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_F(x-y) = \delta^4(x-y) \quad (2.59)$$

Ainsi on obtient par identification avec (2.52)

$$S_F(x-y) = (i \not{\partial} + m) \Delta_F(x-y) \quad (2.60)$$

Les propagateurs $S_F(x-y)$ et $\Delta_F(x-y)$ s'écrivent en fonction de leurs transformés de Fourier comme suit

$$S_F(x-y) = \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} S_F(k) \quad (2.61)$$

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k) \quad (2.62)$$

En substituant (2.61) et (2.62) dans (2.60) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} S_F(k) &= (i \not{\partial} + m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\not{k} + m) e^{-ik(x-y)} \Delta_F(k) \end{aligned} \quad (2.63)$$

ou

$$S_F(k) = (\not{k} + m) \Delta_F(k) \quad (2.64)$$

ou

$$S_F(k) = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} = \frac{1}{\not{k} - m} \quad (2.65)$$

Ainsi en substituant (2.65) dans (2.61) on détermine le propagateur de l'équation de Dirac

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\not{k} - m} \quad (2.66)$$

Chapitre 3

Invariance de jauge en théorie de champ continue

3.1 Champ scalaire et invariance de jauge

Soit le champ scalaire complexe :

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \\ \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

ϕ_1 et ϕ_2 sont des champs scalaires réels. La densité lagrangienne associée à ce champ est :

$$\mathcal{L}_1 = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \quad (3.2)$$

qui produit le lagrangien par une intégration :

$$L_1 = \int dx^3 \mathcal{L}_1 \quad (3.3)$$

L'étude des propriétés du lagrangien revient à étudier la densité lagrangienne. Dans ce qui suit on appelle , le lagrangien, la densité lagrangienne.

Soit une transformation de jauge locale sur les champs ϕ définit comme :

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \phi \\ \phi^* \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} \phi^* \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce qui implique pour les dérivées :

$$\begin{cases} \partial^\mu \phi(x) \longrightarrow \partial^\mu (e^{i\alpha(x)} \phi(x)) = e^{i\alpha(x)} \{ \partial^\mu \phi(x) + i(\partial^\mu \alpha(x)) \phi(x) \} \\ \partial^\mu \phi^*(x) \longrightarrow \partial^\mu (e^{-i\alpha(x)} \phi^*(x)) = e^{-i\alpha(x)} \{ \partial^\mu \phi^*(x) + i(\partial^\mu \alpha(x)) \phi^*(x) \} \end{cases} \quad (3.5)$$

On remarque que les champs et leurs dérivées ne se transforment pas de la même manière.

Ainsi, le lagrangien \mathcal{L}_1 n'est pas conservé sous cette transformation.

$$\mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 + i\partial^\mu\alpha(x)(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + (\partial^\mu\phi(x))(\partial_\mu\phi(x))\phi^*\phi \quad (3.6)$$

Pour que le lagrangien soit invariant de jauge, on remplace la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante $D_\mu \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu)$, avec A_μ le champ de jauge qui se transforme comme suit :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (3.7)$$

e est la constante de couplage. $(D_\mu\phi)$ se transforme maintenant de la même manière que ϕ

$$D_\mu\phi \longrightarrow D'_\mu\phi' = [\partial_\mu - ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha(x)]e^{i\alpha(x)}\phi \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi - \underbrace{i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}\phi + i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}\phi}_{=0} \\ &= e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le lagrangien invariant de jauge pour A_μ est donné par

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.11)$$

Le terme de couplage entre A_μ et ϕ est donné par :

$$\mathcal{L}_3 = e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \quad (3.12)$$

Le lagrangien total invariant de jauge est donc :

$$\mathcal{L} = \underbrace{(D_\mu\phi)(D^\mu\phi^*)}_{\text{terme cinétique pour } \phi} - \underbrace{m^2\phi^*\phi}_{\text{terme de masse pour } \phi} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{terme cinétique pour } A_\mu} + \underbrace{e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi}_{\text{terme de couplage}} \quad (3.13)$$

3.2 Champ spinoriel et invariance de jauge

l'équation de Dirac pour un champ spinoriel libre est :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (3.14)$$

avec ψ sont les spineur de Dirac et γ^μ les quatre matrices de Dirac. La densité lagrangien qui donne l'équation de Dirac par application de principe variationnel est :

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (3.15)$$

avec $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ le champ adjoint. Ce lagrangien n'est pas invariant sous une transformation de jauge locale.

$$\mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.16)$$

Comme dans le cas du champ scalaire, pour que ce lagrangien soit invariant en doit remplacer ∂_μ par la dérivée covariante

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu) \quad (3.17)$$

$D_\mu\psi$ maintenant se transforme de la même manière que ψ .

$$D_\mu\psi \longrightarrow e^{(-ie\alpha(x))} D_\mu\psi \quad (3.18)$$

Avec cette nouvelle dérivée, le lagrangien \mathcal{L}_1 est invariant de jauge

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \longrightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (3.19)$$

Le lagrangien libre du champ de jauge A_μ est :

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.20)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.21)$$

qui est invariant de jauge. En effet :

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x) - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\nu\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.22)$$

$$= F_{\mu\nu} \quad (3.23)$$

Un dernier terme invariant de jauge qu'on doit ajouter au lagrangien est le terme de couplage entre les champs spinoriels et les champs de jauge :

$$\mathcal{L}_3 = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (3.24)$$

Le lagrangien final invariant est donc :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (3.25)$$

Deuxième partie

Théorie de champ sur réseaux

Chapitre 4

La discrétisation à la Wilson

4.1 La discrétisation de l'espace-temps

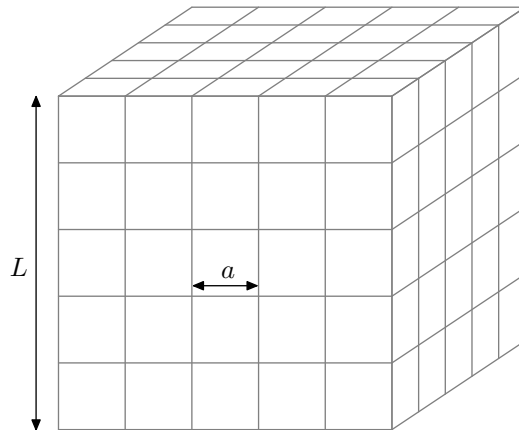


FIGURE 4.1: Exemple d'un réseau cubique à 3 dimensions

4.1.1 Réseau hypercubique

On définit le réseau hypercubique à quatre dimensions de l'espace-temps par

$$\Lambda = a\mathbf{Z}^4 = \{x/x_\mu = n_\mu, \text{ où } n_\mu = 0, 1, 2, \dots, N-1, \text{ et } \mu = 0, 1, 2, 3\} \quad (4.1)$$

Remarques :

- Le volume du réseau $V = L^3T$, avec L le côté spatial qui est isotrope, et T le côté temporel du réseau.
- On a choisi pour le côté temporel le même pas a que le côté spatial et $T = L = an_\mu$ donc $V = L^4$ mais ce choix n'est pas unique.
- L est un entier puisque il est noté en unités de réseau.

4.1.2 Conséquences sur les dérivées

Différences finies

La discrétisation de l'espace-temps implique le remplacement des dérivées par les différences finies :

$$\partial_\mu \phi(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla_\mu \phi(x) \equiv \frac{\phi(x+a\hat{\mu})-\phi(x)}{a} \\ \text{ou} \\ \nabla_\mu \phi(x) \equiv \frac{\phi(x+a\hat{\mu})-\phi(x-a\hat{\mu})}{2a}, \text{ (différences symétrique)} \\ \hat{\mu} \text{ est le vecteur unité dans la direction } \mu \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Dans les deux schémas de discrétisation, on retombera sur le cas continu si on fait tendre a vers zéro.

Le D'Alembertien

Le D'Alembertien sur réseau est donné par :

$$\begin{aligned} \square_L \phi(x) &= - \sum_\mu \nabla_\mu \nabla_\mu \phi(x) \\ &= - \sum_\mu \nabla_\mu \left(\frac{\phi(x+a\hat{\mu})-\phi(x)}{a} \right) \\ &= - \frac{1}{a} \sum_\mu (\nabla_\mu \phi(x+a\hat{\mu}) - \nabla_\mu \phi(x)) \\ &= - \frac{1}{2a} \sum_\mu (\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x) - (\phi(x) - \phi(x-a\hat{\mu}))) \\ &= - \frac{1}{a^2} \sum_\mu (\phi(x+a\hat{\mu}) - 2\phi(x) + \phi(x-a\hat{\mu})) \end{aligned}$$

4.1.3 Conséquences sur les intégrales :

Les intégrales sur les coordonnées de l'espace-temps sont remplacées par des sommes sur les points du réseau :

$$\int dx^4 \longrightarrow \sum_{x \in \Lambda} a^4 \quad (4.3)$$

4.1.4 Conséquences sur la transformée de Fourier

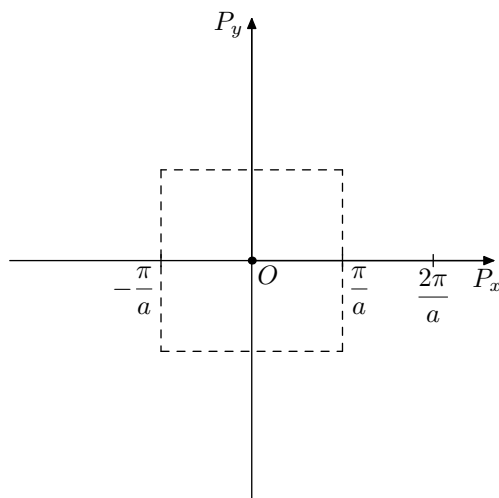


FIGURE 4.2: première zone de Brillouin.

La transformée de Fourier d'un champ $\phi(x)$ est défini par

$$\hat{\phi}(p) = \sum_{x \in \Lambda} a^4 e^{-ip \cdot x} \phi(x) \quad (4.4)$$

$$\text{Avec } p \cdot x = \sum_{\mu} p_{\mu} x_{\mu}$$

On voit facilement que la transformée de Fourier est périodique de période $\frac{2\pi}{a}$. En effet,

$$\begin{aligned} \forall \mu : \hat{\phi}\left(p_{\mu} + \frac{n2\pi}{a}\right) &= \sum_{x \in \Lambda} a^4 e^{-i(p_{\mu} + \frac{n2\pi}{a})x_{\mu}} \phi(x_{\mu}) \\ &= \sum_{x \in \Lambda} a^4 e^{-i(p_{\mu}x_{\mu})} e^{-i(\frac{n2\pi}{a}x_{\mu})} \phi(x_{\mu}) \\ &= \sum_{x \in \Lambda} a^4 e^{-i(p_{\mu}x_{\mu})} e^{-i(\frac{n2\pi}{a}n_{\mu}a)} \phi(x_{\mu}) \\ &= \sum_{x \in \Lambda} a^4 e^{-i(p_{\mu}x_{\mu})} \underbrace{e^{-in2\pi n_{\mu}}}_{=1} \phi(x_{\mu}) \\ &= \sum_{x \in \Lambda} a^4 e^{-i(p_{\mu}x_{\mu})} \phi(x_{\mu}) \\ &= \hat{\phi}(p_{\mu}). \end{aligned}$$

Ce qui implique qu'on peut restreindre les impulsions à la première zone de Brillouin :

$$\mathbf{B} = \left\{ p : -\frac{\pi}{a} < p_{\mu} \leq \frac{\pi}{a} \right\}$$

4.1.5 Conséquences sur les impulsions

L'utilisation d'un réseau de volume fini conduit à des impulsions discrètes dans les 4 directions avec un pas de $\frac{2\pi}{L}$

$$p = \pm n \frac{2\pi}{aL} \quad (4.5)$$

$$n = 0, 1, \dots, \frac{L}{2}$$

4.2 La discrétisation d'un champ scalaire

4.2.1 L'action d'un champ scalaire libre sur réseau

L'action d'un champ scalaire libre, dans le cas euclidien, s'écrit :

$$S_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \int dx^4 \{ (\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2 \} \quad (4.6)$$

Une intégration par partie de cette équation conduit à la forme :

$$S_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \int dx^4 (\phi(x) (\square + m^2) \phi(x)), \text{ Avec } \square = - \sum_{\mu} \partial_\mu \partial_\mu$$

Ce qui donne (par analogie) l'action de Klein-Gordon sur réseau suivante :

$$S_{\text{LKG}} = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Lambda} a^4 (\phi(x) (\square_L + m^2) \phi(x)) \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Lambda} S_{xy} \phi(x) \phi(y) \quad (4.8)$$

où

$$S_{xy} = a^4 (\square_L + m^2) \delta(x - y) \quad (4.9)$$

et $x, y \in \Lambda$

4.3 Le propagateur d'un champ scalaire libre

le propagateur est l'inverse de la matrice S_{xy} :

$$\sum_{y \in \Lambda} S_{xy} G_{yz} = \delta(x - z) \quad (4.10)$$

Avec :

$$G_{yz} = \frac{1}{L^4} \sum_{p \in B} e^{ip \cdot (y-z)} \hat{G}(p) \quad (4.11)$$

$\hat{G}(p)$ et la transformée de Fourier
en remplaçant (4.11) et (4.9) dans (4.10) on aura :

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in \Lambda} a^4 (\square_L + m^2) \delta(x-y) \frac{1}{L^4} \sum_{p \in B} e^{ip \cdot (y-z)} \hat{G}(p) = \delta(x-z) \\ & \Rightarrow \frac{a^4}{L^4} (\square_L + m^2) e^{ip \cdot (x-z)} \hat{G}(p) = \delta(x-z) \\ & \Rightarrow \frac{a^4}{L^4} (\square_L e^{ip \cdot (x-z)} + m^2 e^{ip \cdot (x-z)}) \hat{G}(p) = \delta(x-z) \\ & \Rightarrow \frac{a^4}{L^4} \left(-\frac{1}{a^2} \sum_{\mu} \left(e^{ip(x+a\hat{\mu})-z} - 2e^{ip(x-z)} + e^{ip(x-a\hat{\mu}-z)} \right) + m^2 e^{ip \cdot (x-z)} \right) \hat{G}(p) = \delta(x-z) \\ & \Rightarrow \frac{a^4}{L^4} \left(\frac{1}{a^2} \sum_{\mu} \left(-e^{ip_{\mu}a} + 2 - e^{ip_{\mu}a} \right) + m^2 \right) e^{-ip \cdot (x-z)} \hat{G}(p) = \delta(x-z) \\ & \Rightarrow \frac{a^4}{L^4} \left(\frac{1}{a^2} \sum_{\mu} (2 - 2 \cos(p_{\mu}a)) + m^2 \right) e^{-ip \cdot (x-z)} \hat{G}(p) = \delta(x-z) \\ & \Rightarrow \frac{a^4}{L^4} \left(\frac{1}{a^2} \sum_{\mu} (2 - 2 \cos(p_{\mu}a)) + m^2 \right) e^{-ip \cdot (x-z)} \hat{G}(p) = \frac{1}{L^4} \sum_{p \in B} a^4 p^{ip \cdot (x-z)} \\ & \Rightarrow \hat{G}(p) = \frac{1}{m^2 + a^{-2} \sum_{\mu} (2 - 2 \cos(ap_{\mu}))} \end{aligned} \quad (4.12)$$

C'est le propagateur sur réseau d'un champ scalaire libre.

4.3.1 La limite continue

Dans la limite continue ($a \rightarrow 0$) :

$$\cos(ap_{\mu}) \simeq 1 - \frac{(ap_{\mu})^2}{2!} + O(a^2) \quad (4.13)$$

En remplaçant (4.13) dans (4.12) on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{G}(p) &= \frac{1}{m^2 + a^{-2} \sum_{\mu} \left(2 - 2 \left(1 - \frac{(ap_{\mu})^2}{2!} \right) \right)} + O(a^2), \text{ où } \sum_{\mu} p_{\mu}^2 = p^2 \\ \Rightarrow \hat{G}(p) &= \frac{1}{m^2 + p^2} + O(a^2)\end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve le propagateur de Feynman de la théorie continue.

4.4 La discrétisation d'un champ spinoriel

4.4.1 La discrétisation de l'action spinorielle

La densité lagrangienne d'un champ spinoriel libre de la théorie continue est donnée par :

$$L = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi \quad (4.14)$$

Avec les ψ sont des spineurs, et les μ les indices de Dirac.

Ce qui nous donne l'action du continue :

$$\begin{aligned}S &= \int dx^4 L[\bar{\psi}; \psi; \partial_{\mu}\psi] \\ \Rightarrow S &= \int dx^4 (i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi)\end{aligned} \quad (4.15)$$

D'une manière analogue au cas du champ scalaire, la discrétisation de l'action du champ spinoriel libre donne :

$$S = \sum_{x \in \Lambda} a^4 \{ \bar{\psi}(x) i\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x) \} \quad (4.16)$$

Ce qu'on peut réécrire sous la forme :

$$S = \sum_{x \in \Lambda} a^4 \sum_{y \in \Lambda} a^4 \bar{\psi}(y) (i\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} + m) \psi(x) \delta(x, y) \quad (4.17)$$

4.4.2 Le propagateur de Dirac sur réseau pour un champ spinoriel libre

Le propagateur de Dirac est solution de l'équation suivante :

$$\sum_{y \in \Lambda} a^4 (i\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} - m) \delta(x, y) \mathbf{S}(y, z) = \delta(x - z) \quad (4.18)$$

Sa transformée de Fourier est :

$$\mathbf{S}(y, z) = \frac{1}{L^4} \sum_{p \in B} e^{i(y-z) \cdot p} \hat{\mathbf{S}}(p) \quad (4.19)$$

En remplaçant(4.19) dans l'équation (4.18) on aura :

$$\delta(x - z) = \sum_{y \in \Lambda} a^4 (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m) \delta(x, y) \frac{1}{L^4} \sum_{p \in B} e^{i(y-z) \cdot p} \hat{\mathbf{S}}(p) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^4}{L^4} \sum_{p \in B} (i\gamma^\mu \nabla_\mu(x) - m) e^{i(x-y) \cdot p} \hat{\mathbf{S}}(p) \\ &= \frac{a^4}{L^4} \sum_{p \in B} \left(\frac{i\gamma^\mu e^{i(x+a+\hat{\mu}-z) \cdot p} - i\gamma^\mu e^{i(x-a-\hat{\mu}-z) \cdot p}}{2a} - m e^{i(x-z) \cdot p} \right) \hat{\mathbf{S}}(p) \\ &= \frac{a^4}{L^4} \sum_{p \in B} \left(i\gamma^\mu \frac{e^{ip \cdot a \cdot \hat{\mu}} - e^{-ip \cdot a \cdot \hat{\mu}}}{2a} - am \right) e^{i(x-z) \cdot p} \hat{\mathbf{S}}(p) \\ &= \frac{a^4}{L^4} \sum_{p \in B} \left(i\gamma^\mu \frac{2i \sin(p_\mu a)}{2a} - m \right) e^{i(x-z) \cdot p} \hat{\mathbf{S}}(p) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L^4} \sum_{p \in B} a^4 e^{i(x-z) \cdot p} = \frac{1}{L^4} \sum_{p \in B} a^4 e^{i(x-z) \cdot p} \left(-\frac{\gamma^\mu \sin(p_\mu a) - am}{2a} \right) \hat{\mathbf{S}}(p) \quad (4.21)$$

De la dernière égalité on tire :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}(p) &= \frac{a}{-\gamma^\mu \sin(p_\mu a) + am} \\ &= \frac{m + \frac{1}{a} \gamma^\mu \sin(p_\mu a)}{m^2 - \frac{1}{a^2} (\gamma^\mu \sin(p_\mu a))^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

C'est le propagateur de Dirac sur réseau pour un champ spinorielle libre.

4.4.3 La limite continue

On peut retrouver le cas continue si on fait tendre a vers zéro et on fait un développement limité. $a \rightarrow 0 \implies \sin(p_\mu a) \simeq p_\mu a \dots$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \hat{\mathbf{S}}(p) &= \frac{m + \gamma^\mu p_\mu}{m^2 - (\gamma^\mu)^2 (p_\mu)^2} \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m} \end{aligned}$$

4.5 La discrétisation d'un champ de jauge

4.5.1 La variable de lien

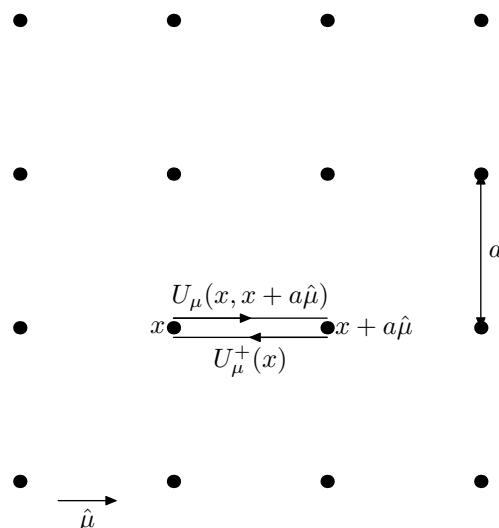


FIGURE 4.3: La variable de lien

Le point de départ qui a guidé Wilson à la formulation de la théorie de jauge sur réseau et l'équation du transport parallèle :

$$\psi(x_2) = \mathbf{P}e^{ig \int_{x_1}^{x_2} A_\mu(x) dx^\mu} \psi(x_1) \quad (4.23)$$

\mathbf{P} est le produit ordonné le long de chemin $x_1 \longrightarrow x_2$.

Dans cette équation on remarque que le champ de jauge A_μ agit comme une phase sur le champ de matière ψ qui se déplace du point x_1 au point x_2 de l'espace. Ainsi, dans la version sur réseau, on définit la variable de lien par :

$$U_\mu(x) = U(x, x + a\hat{\mu}) = \mathbf{P}e^{ig \int_x^{x+a\hat{\mu}} A_\mu(x) dx^\mu} \quad (4.24)$$

Ces variables (qui vont se situer sur les liens du réseau) remplacent la variable (potentiel vecteur) A_μ , elles se transforment comme suit :

$$U(x, x + a\hat{\mu}) \longrightarrow \hat{U}(x, x + a\hat{\mu}) = \Omega(x)U(x, x + a\hat{\mu})\Omega^+(x + a\hat{\mu}) \quad (4.25)$$

$\Omega(x)$ sont les matrices du groupe $SU(N)$.

On note $U_{-\mu}(x + a\hat{\mu})$ la variable de liens définit sur le lien $(x + a \longrightarrow x)$:

$$U_{-\mu}(x + a\hat{\mu}) \equiv U_\mu^+(x) \quad (4.26)$$

Avec

$$U_\mu^+(x) \longrightarrow \hat{U}_\mu^+(x) = \Omega^+(x + a\hat{\mu})U_\mu^+(x)\Omega(x) \quad (4.27)$$

On peut faire une approximations pour l'équation (4.24)

Cette approximation consiste à utiliser la méthode du point fixe :

$$U_\mu(x) = \text{P}e^{ig \int_x^{x+a\hat{\mu}} A_\mu(x) dx^\mu} \simeq e^{iagA_\mu(x+\frac{\hat{\mu}}{2})} \quad (4.28)$$

$$U_\mu^+(x) = \text{P}e^{ig \int_{x+a\hat{\mu}}^x A_\mu(x) dx^\mu} \quad (4.29)$$

$$= \text{P}e^{-ig \int_x^{x+a\hat{\mu}} A_\mu(x) dx^\mu} \simeq e^{-iagA_\mu(x-\frac{\hat{\mu}}{2})} \quad (4.30)$$

Où on a choisi A_μ où milieu de lien $x \longrightarrow x + a\hat{\mu}$.

● *L'avantage de cette approximation est le fait qu'on s'est débarrassé de l'intégrale dans l'exponentiel. On va faire appelle à ce résultat lors de la construction de l'action de jauge sur réseau*

4.5.2 Les invariants de jauge sur réseau

En exploitant les propriétés des matrices Ω du groupe $SU(N)$, on peut construire des objets invariants de jauge avec les variables de lien.

Les plaquettes de Wilson

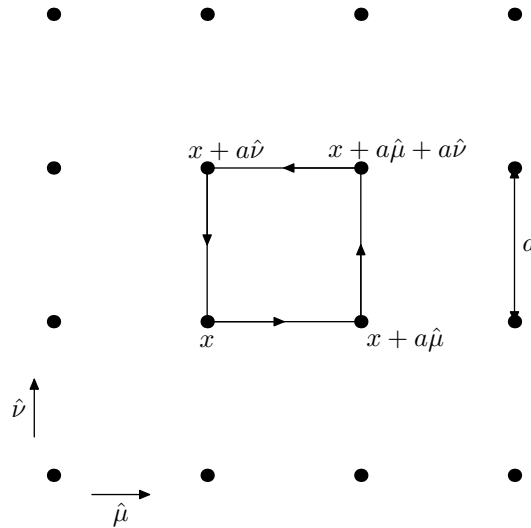


FIGURE 4.4: Boucle de Wilson

Soit un chemin fermé ($x \longrightarrow x + a\hat{\mu} \longrightarrow x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu} \longrightarrow x + a\hat{\nu} \longrightarrow x$) dans le réseau hypercubique de l'espace-temps.

Le produit :

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^{1\times 1}(x) &= U(x, x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + \hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x) \\
&= U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + a\hat{\mu})U_{-\mu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U_{-\nu}(x + a\hat{\nu}) \\
&= U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + a\hat{\mu})U_{\mu}^{+}(x + a\hat{\nu})U_{\nu}^{+}(x)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\tag{4.32}$$

est la boucle de Wilson. La trace de cette boucle est invariante sous la transformation (4.25) :

$$\begin{aligned}
\text{Tr } \acute{W}_{\mu\nu}^{1\times 1}(x) &= \text{Tr} \left[\acute{U}_{\mu}(x)\acute{U}_{\nu}(x + a\hat{\mu})\acute{U}_{\mu}^{+}(x + a\hat{\nu})\acute{U}_{\nu}^{+}(x) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\Omega(x)U_{\mu}(x) \underbrace{\Omega^{+}(x + a\hat{\mu})\Omega(x + a\hat{\mu})}_1 U_{\nu}(x + a\hat{\mu}) \underbrace{\Omega^{+}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})\Omega(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})}_{=1} \right. \\
&\quad \left. U_{\mu}^{+}(x + a\hat{\nu}) \underbrace{\Omega^{+}(x + a\hat{\nu})\Omega(x + a\hat{\nu})}_{=1} U_{\nu}^{+}(x)\Omega^{+}(x) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\Omega(x)U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + a\hat{\mu})U_{\mu}^{+}(x + a\hat{\nu})U_{\nu}^{+}(x)\Omega^{+}(x) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\underbrace{\Omega(x)\Omega^{+}(x)}_{=1} \right] \text{Tr} \left[U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + a\hat{\mu})U_{\mu}^{+}(x + a\hat{\nu})U_{\nu}^{+}(x) \right] \\
&= \text{Tr} \left[U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + a\hat{\mu})U_{\mu}^{+}(x + a\hat{\nu})U_{\nu}^{+}(x) \right] \\
&= \text{Tr } W_{\mu\nu}^{1\times 1}(x)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

On peut maintenant définir la plaquette de Wilson :

$$P_{\mu\nu}^{1\times 1}(x) = \frac{1}{3} \text{Re } \text{Tr } W_{\mu\nu}^{1\times 1}(x) \tag{4.34}$$

• *C'est cette plaquette qu'on va utiliser par la suite pour construire l'action de jauge sur réseau*

Les boucles complexes :

Autre que la boucle de Wilson, il existe des boucles plus complexes qui peuvent être utiles pour diminuer les effets de discrétisation sur l'action de jauge. Trois exemples sont montrés sur la figure ci-dessous :

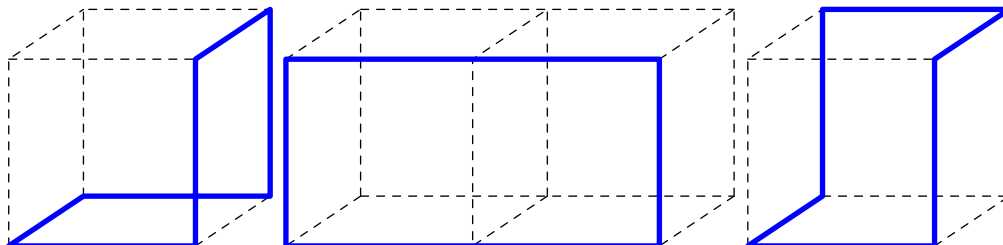


FIGURE 4.5: Exemples de boucles complexes

Les cordes :

La deuxième quantité invariante de jauge est appelée la corde. Elle est constituée à l'aide d'une variable de lien dont les deux extrémités sont attachées à des champs de matière. Soit par exemple le champ spinoriel ψ qui se transforme sous la rotation de jauge comme suit :

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \Omega(x)\psi(x) \quad (4.35)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\Omega^+(x) \quad (4.36)$$

L'expression de la corde sera donc :

$$\bar{\psi}(x)U(x, x + a\hat{\mu})\psi(x + \hat{\mu}) \quad (4.37)$$

Comme déjà mentionné plus haut, cette quantité est invariante de jauge :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x)\hat{U}(x, x + a\hat{\mu})\psi'(x + \hat{\mu}) &= \bar{\psi}(x) \underbrace{\Omega^+(x)\Omega(x)}_{=1} U(x, x + a\hat{\mu}) \underbrace{\Omega^+(x + a\hat{\mu})\Omega(x + a\hat{\mu})}_{=1} \psi(x + \hat{\mu}) \\ &= \bar{\psi}(x)U(x, x + a\hat{\mu})\psi(x + \hat{\mu}) \end{aligned}$$

Les cordes complexes :

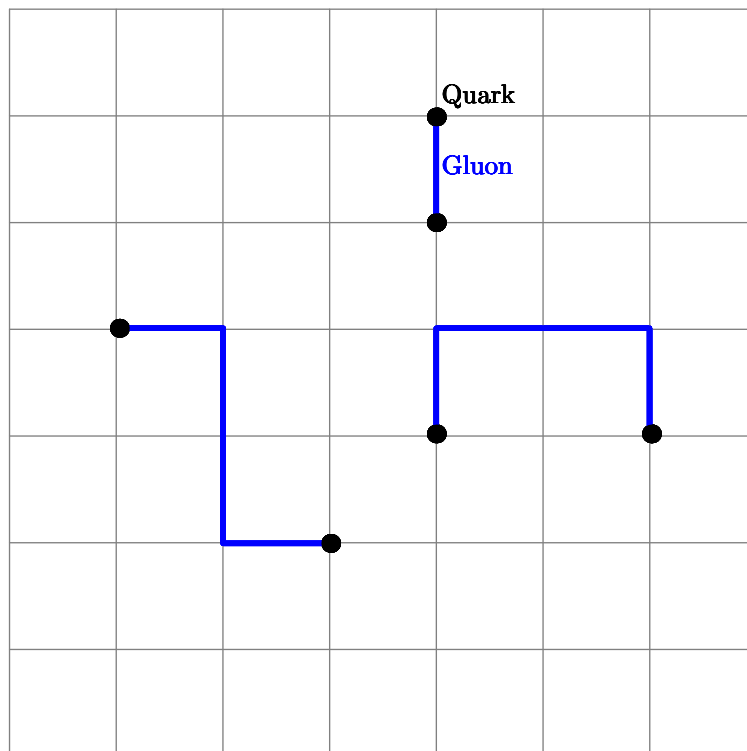


FIGURE 4.6: cordes simples et complexes

Comme dans le cas des boucles fermées, on peut former des cordes plus complexes que la corde élémentaire. L'expression la plus générale pour les cordes est donnée par :

$$\text{Tr} \bar{\psi}(x) \left[\prod_{z=x}^{z-a\hat{\mu}(z)} U(z, z + a\hat{\mu}(z)) \right] \psi(y) \quad (4.38)$$

Remarques :

- Dans le cas où les ψ sont des quarks la trace est prise sur les indices de couleur et de spin. Le $\bar{\psi}$ est un antiquark .
- La notation $\mu(z)$ indique la direction de lien partant de site z .

4.5.3 L'action de Wilson

À ce stade, on a tous les éléments nécessaires pour la formulation d'une version sur réseau de l'action de jauge. Pour se faire Wilson a utilisé la plaquette définie dans (4.34) .

Par exemple dans le cas simple de groupe $U(1)$, considérons la boucle de Wilson :

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^{1\times 1}(x) &= U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})U_\mu^+(x+a\hat{\nu})U_\nu^+(x) \\
&= \left\{ \exp \left[iagA_\mu \left(x + \frac{a\hat{\mu}}{2} \right) \right] \exp \left[iagA_\nu \left(x + \hat{\mu} + \frac{a\hat{\nu}}{2} \right) \right] \exp \left[-iagA_\mu \left(x + \hat{\nu} + \frac{a\hat{\mu}}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \exp \left[-iagA_\nu \left(x + \frac{a\hat{\nu}}{2} \right) \right] \right\} \\
&= \exp \left[iag \left(A_\mu \left(x + \frac{a\hat{\mu}}{2} \right) + A_\nu \left(x + \hat{\mu} + \frac{a\hat{\nu}}{2} \right) - A_\mu \left(x + \hat{\nu} + \frac{a\hat{\mu}}{2} \right) - A_\nu \left(x + \frac{a\hat{\nu}}{2} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

En faisant un changement de variables $x_0 = x + \frac{a\hat{\mu}+a\hat{\nu}}{2}$ (x_0 est le centre de la boucle) on obtient :

$$W_{\mu\nu}^{1\times 1}(x_0) = \exp \left[iag \left(A_\mu \left(x_0 - \frac{\hat{\nu}}{2} \right) + A_\nu \left(x_0 + \frac{a\hat{\mu}}{2} \right) - A_\mu \left(x_0 + \frac{a\hat{\nu}}{2} \right) - A_\nu \left(x_0 - \frac{a\hat{\mu}}{2} \right) \right) \right] \quad (4.39)$$

$$\simeq \exp \left[iag(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{ia^4g}{12} \partial_\mu^3 A_\nu - \partial_\nu^3 A_\mu + \dots \right] \quad (4.40)$$

$$\simeq 1 + iagF_{\mu\nu} - \frac{a^4g}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + O(a^6) \quad (4.41)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu}^{1\times 1}(x_0) &= \frac{1}{3} \text{Re Tr } W_{\mu\nu}^{1\times 1}(x_0) \\
&= \frac{1}{3} \text{Re Tr } [1 + iagF_{\mu\nu} - \frac{a^4g}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + O(a^6)] \\
&= \frac{1}{3} \underbrace{\text{Re Tr } [iagF_{\mu\nu}]}_{=0} + \frac{1}{3} \text{Re Tr } [1 - \frac{a^4g}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + O(a^6) \\
&= \frac{1}{3} \text{Re Tr } [1 - \frac{a^4g}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + O(a^6) \quad (4.42)
\end{aligned}$$

De la dernière expression, on vérifie l'action de jauge discrète proposée par Wilson :

$$S_w = \sum_{\text{plaquettes}} \beta [1 - P_{\mu\nu}^{1\times 1}(x)] \quad (4.43)$$

$$= \sum_{x, \mu < \nu} \beta \left[1 - \frac{1}{3} \text{Re Tr } [1 - \frac{a^4g}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \right] \quad (4.44)$$

En Posant $\beta = \frac{6}{g^2}$ on obtient :

$$S_w = \frac{1}{4} \sum_{x \in \Lambda} a^4 \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.45)$$

On voit facilement que cette action tend vers l'action continue lorsque a tend vers 0 :

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_w = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4} \sum_{x \in \Lambda} a^4 \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.46)$$

$$= \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.47)$$

$$= S_g \quad (4.48)$$

4.5.4 La dérivée covariante sur réseau

Comme dans le cas de la théorie continue, la dérivée du champ doit être covariante pour construire des lagrangiens invariants de jauge.

On définit la dérivée covariante vers l'avant comme suit :

$$D_\mu^+ \psi(x) = \frac{1}{a} [U_\mu(x) \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)] \quad (4.49)$$

et vers l'arrière

$$D_\mu^- \psi(x) = -\frac{1}{a} [\psi(x) - U_\mu^+(x - a\hat{\mu}) \psi(x - \hat{\mu})] \quad (4.50)$$

La dérivée covariante totale est :

$$D_\mu = \frac{D_\mu^+ + D_\mu^-}{2} \quad (4.51)$$

$$= \frac{1}{2a} [U_\mu(x) \psi(x + a\hat{\mu}) - U_\mu^+(x - a\hat{\mu}) \psi(x - \hat{\mu})] \quad (4.52)$$

C'est la dernière brique dans notre introduction à la théorie de jauge sur réseaux sous sa forme générale. On a donc tous les éléments nécessaires pour traiter des problèmes physiques et faire les calculs mathématiques qui conviennent. Cependant l'application naïve (directe) de ces résultats, pour construire par exemple un lagrangien sur réseau invariant de jauge pour la QCD, conduit à un problème de doublement des fermions (16 particules). La solution proposée par Wilson pour régler ce problème est d'ajouter un terme à l'action discrète et, qui tend vers zéro dans la limite continue. La discussion détaillée de ce problème sort du cadre de ce travail, et peut être trouvée dans les références [2], [5], [6] et [11].

Troisième partie

Conclusion

Conclusion

Le présent travail est une introduction à la théorie de jauge sur réseaux. En discrétisant l'espace-temps en un réseau hypercubique à quatre dimensions, on a reconstruit les éléments du calcul mathématique de base, les actions sur réseaux pour les champs scalaires, spinoriels et de jauge, les propagateurs sur réseau pour chaque champ (*"On peut dire que si toutes les fonctions de Green d'une théorie des champs sont connues la théorie est résolue". Olivier pène*). Et, en faisant tendre le pas du réseau vers zéro, on a pu retrouver les équivalents de la théorie continue qu'on a déjà discutée dans la première partie. Le but de cette méthode est le passage à des calculs numériques assistés par ordinateur (Une partie qui n'est pas prévue dans notre travail).

Les avantages et les inconvénients essentiels de cette méthode sont mentionnés par le professeur Olivier Pène [10] à l'occasion de l'École Gif 2010.

Les points positifs de cette méthode sont donc :

- La méthode résout la QCD rigoureusement, c'est à dire que l'on ne connaît que des limites pratiques à la précision de ses prédictions : moyens de calcul insuffisants, etc, mais pas de limite de principe.
- Lié au points précédent, il y a autant de paramètres libres en QCD sur réseau que dans la QCD en général.
- On a un bon contrôle des incertitudes statistiques et systématiques.
- Le domaine d'application de la méthode est vaste, essentiellement les propriétés des hadrons, mais aussi celles du plasma de quarks et de gluons à haute température, les propriétés du vide, etc.

Les points négatifs sont :

- Cette méthode exige des moyens de calcul très lourds et des algorithmes puissants. Les besoins en moyens de calcul ont incités beaucoup de chercheurs à s'impliquer dans la conception d'ordinateurs. Des ordinateurs dédiés ont été développés.
- La méthode est limitée à des systèmes à peu de hadrons à cause de la difficulté à traduire les résultats en temps imaginaire vers le temps réel pour des systèmes plus complexes. C'est une difficulté générale dans la QCD.
- La précision des résultats est médiocre. Quelques pour cents est de nos jours un exploit, alors que la QED parvient à des précisions très supérieures.

Ainsi la théorie de jauge sur réseaux cherchant à s'approcher des paramètres de la nature, étendre son domaine d'application et sa précision, à observer de nouveaux phénomènes et à améliorer ses algorithmes[10].

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Réseau réciproque et zone de Brillouin

A.1 Réseau réciproque

Un réseau cristallin parfait est caractérisé par les trois vecteurs de base $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, telle que la structure du réseau reste invariante pour toute translation.

$$\vec{a} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3 \quad (\text{A.1})$$

où n_1, n_2 et n_3 sont des entiers relatifs. Par rapport à un système de coordonnées cartésiennes chaque \vec{a}_i est caractérisé par ses trois composantes a_{ix}, a_{iy} et a_{iz} . Pour représenter le vecteur \vec{a} du réseau, on peut adopter la notation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

* Les réseaux invariants par translation sont classés en 14 réseaux de Bravais.

-Le réseau réciproque est défini comme l'ensemble des points

$$\vec{b} = m_1\vec{b}_1 + m_2\vec{b}_2 + m_3\vec{b}_3 \quad (\text{A.3})$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers relatifs et les vecteurs fondamentaux \vec{b}_i sont donnés par :

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3}{V_d} \quad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1}{V_d} \quad \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{V_d} \quad (\text{A.4})$$

avec $V_d = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3)$ est le volume de la cellule de base du réseau direct. On vérifie que :

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i = 2\pi \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

et

$$V_r = \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \wedge \vec{b}_3) = \frac{(2\pi)^3}{V_d} \quad (\text{A.6})$$

où V_r est le volume de la cellule de base du réseau réciproque.

Matriciellement on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Exemple : Dans le cas d'un réseau cubique simple

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{2\pi}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Chaque vecteur \vec{b} du réseau réciproque est perpendiculaire à un ensemble de plans réticulaires du réseau direct.

A.2 Les zones de Brillouin

Construisons dans l'espace réciproque (des vecteurs d'onde \vec{k}) le réseau réciproque engendré par $\{\vec{b}_i\}$ du réseau cristallin engendré par $\{\vec{a}_i\}$. En utilisant la relation (A.5) on obtient

$$(\vec{k} + \vec{K}) \cdot \vec{a} = \vec{k} \cdot \vec{a} + 2\pi n \quad (\text{A.8})$$

Comme les fonctions d'onde $\psi_{\vec{k}}$ sont des fonctions de Bloch (les fonction d'onde de l'équation de Schrödinger d'un potentiel périodique)

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}} \psi(\vec{r}) \quad (\text{A.9})$$

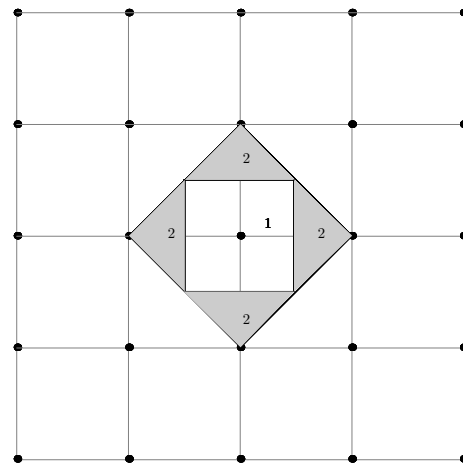
Il est évident que les états correspondant aux vecteurs d'onde \vec{k} et $\vec{k} + \vec{K}$ sont physiquement équivalents. Par conséquent, les électrons se trouvant dans ces deux états doivent avoir la même énergie.

$$E(\vec{k}) = E(\vec{k} + \vec{K}) \quad (\text{A.10})$$

Ceci nous amène à recouvrir l'espace réciproque de zones, appelées zones de Brillouin, dont l'ensemble des points représente des états physiquement équivalents. La première zone de Brillouin (PZB) est définie comme le plus petit volume délimité par les plans médiateurs (où plans de Bragg) des vecteurs du réseau réciproque tracés à partir d'un nœud d'origine, partant de l'origine les points de la PZB sont atteints sans traverser aucun plan médiateur. La n 'ième zone de Brillouin est définie comme l'ensemble des points de l'espace réciproque qui peuvent être atteints à partir de l'origine en traversant $(n - 1)$ plans de Bragg.

Remarques - Les zones de Brillouin possèdent le même volume.

- Le volume de la PZB est égale au volume de la maille primitive.



1: la PZB
2: la seconde zone de Brillouin

FIGURE A.1: Illustration des deux premières zones de Brillouin pour un réseau bidimensionnel carré

Annexe B

Les groupes de jauge

B.1 Le groupe $U(n)$

Un groupe unitaire $U(n)$ à n dimensions est défini par

$$U(n) \equiv \{U_{n \times n} : UU^+ = 1, \det U \neq 0, u_{ij} \in \mathcal{C}\} \quad (\text{B.1})$$

C'est l'ensemble de matrices complexes $n \times n$ unitaires (conservent la norme et le produit scalaire). L'ordre du groupe $U(n)$ est n^2 .

B.1.1 Le groupe $U(1)$

C'est le groupe le plus simple. Il inclut l'ensemble de tous les facteurs de phase complexes : $U(\theta) = e^{i\theta}$, où θ est un paramètre scalaire réel.

Le groupe $U(1)$ est commutatif.

B.2 Le groupe $SU(n)$

Le groupe unitaire unimodulaire $SU(n)$ à n dimensions est défini par

$$SU(n) \equiv \{U_{n \times n} : UU^+ = 1, \det U = 1, u_{ij} \in \mathcal{C}\} \quad (\text{B.2})$$

C'est le groupe de matrices complexes $n \times n$ unitaires et unimodulaires. L'ordre et le nombre de générateurs de ce groupe est $n^2 - 1$ et ses matrices peuvent être représentées par l'intermédiaire de générateurs T_a ($a = 1, 2, \dots, n^2 - 1$) comme suit :

$$U(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n^2-1}) = e^{i\tau_a T_a} \quad (\text{B.3})$$

Les générateurs T_a obéissent à l'algèbre $[T_a, T_a] = i f^{abc} T_c$, où f^{abc} sont les constantes de structure du groupe.

B.2.1 Le groupe SU(3)

Le groupe SU(3) est composé de matrices complexes 3×3 unitaires et unimodulaires et sa représentation fondamentale est un triplet. Le groupe SU(3) possède 8 générateurs donnés en terme de matrices de Gell-Mann

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (\text{B.4})$$

où

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bibliographie

- [1] P. Amiot et L.Marleau, *Mécanique Classique II*, Département de physique, de génie physique et d'optique. Université Laval Québec, Canada, (1998-2006).
- [2] I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, (Cambridge University Press, 1994).
- [3] L.Marleau, *Introduction à La physique des particules*, Département de physique, de génie physique et d'optique. Université Laval Québec, Canada,(1997).
- [4] L.Marleau,*Théories De Jauge sur Réseau*, Département de physique, de génie physique et d'optique. Université Laval Québec, Canada,(2012).
- [5] C.Gttringer end C.B.Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice : An Introductory Presentation*, Lect. Notes Phys. 788(Springer, Berlin Heidelberg 2010).
- [6] Heinz J.Rothe, *LATTICE GAUGE THEORIES(Third Edition) : An Introduction*, Université Heidelberg,Germany,Vol.74, (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.2005).
- [7] W.Greiner end S.Schramm end E.Stein , *Quantum Chromodynamics (Seconde Edition)*,(Springer,2002).
- [8] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics* , Singapor World Scientific(1995).
- [9] A.Das, *Field Theory-A Path Integral Approach*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd(2006).
- [10] O. Pène, *QCD sur réseau : L'interaction forte sur une grille*, Cours pour l'Ecole de Gif 2010 : "Saveurs lourdes" (Besse, 6-10 septembre 2010) Laboratoire de Physique Théorique, CNRS et Université Paris-Sud XI, France, (2010).
- [11] R.Baron, *Chromodynamique quantique sur réseau et propriétés du nucléon*.Thèse Doctorat, Université de Paris-Sud XI, France,(2009)
- [12] G.HERDOIZA, *Couplage Des Mésons Lourds Au Pion Sur Réseau*, thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay,(2004).

-
- [13] Jan Smit, *Introduction to quantum fields on a Lattice* , University of Amsterdam, (cambridge university press ,2002).
 - [14] S.Bachmann, *Champs Quantiques Relativistes(Notes du cours du Professeur Mikhail Shaposhnikov)*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne,(2005).
 - [15] Rajan Gupta,*Introduction To Lattice QCD*, Los Alamos National Laboratory ,(arXiv. 9807028v1[hep-lat]] 2012).