République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté des Siences Exactes
Département de Physique

Mémoire de fin de Cycle

En vue de l'obtention d'un Master en Physique

Option

Physique Théorique

Thème

Sur une nouvelle méthode d'obtention d'une équation d'onde non relativiste pour une particule de spin 1.

Présenté par :
M^{elle} HADDAD Lynda

Devant le jury composé de :

Président	M^{r} Hend ZENIA	MCB	Université A/Mira, B
Examinateur	M^{r} Abdusalam HOUARI	MCA	Université A/Mira, B
Examinateur	M^{r} Soufiane AOUDIA	MCA	Université A/Mira, B
Raporteur	M^{r} Yazid KASRI	MCA	Université A/Mira, B

Promotion 2014/2015.

Remerciements

Avant tout, je remercie notre bon dieu, le tout puissant de m'avoir accordé volonté et courage pour mener à bien ce travail.

Je tien à remercier Monsieur Y.KASRI, maître de conférence à l'université de Béjaïa pour m'avoir proposé ce travail, pour l'avoir dirigé, pour la confiance qu'il m'a accordée et pour l'aide qu'il m'a apporté pendant toute la durée de ce mémoire.

J'exprime mes sincère remerciements à Monsieur H. ZENIA, maître de conférence à l'université de Béjaïa d'avoir accépter de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Monsieur S. AOUDIA, Monsieur A.HOUARI, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Qu'il me soit permis enfin, de remercier mes chers parents, à qui je dois ce succès pour leurs confiance et patience pendant toutes ces années d'étude, mes frères Zohir et Samir pour leurs encouragements , je remercie aussi mes amis, qui ont toujours été avec moi.

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est l'étude de la méthode de linéarisation pour l'équation d'onde. En utilisant la procédure faite par Dirac, et aprés par Levy-Leblond, et en la généralisant, on dérive l'équation d'onde non relativiste pour une particule de spin 1, en commançant par l'équation de Shrödinger. En introduisant une substitution dans l'impulsion on retrouve l'oscillateur harmonique avec l'addition du térme de couplage spin-orbite.

Mots-clés : linéarisation, équation de Levy-Leblond, oscillateur de Dirac.

ABSTRACT

The aim of this work is the study of the linearisation method for the wave equation making use of the procedure used by Dirac and later by Levy-Leblond, generalizing it, we derive the non relativistic wave equation for spin 1 particle, starting from the Shrödinger equation. Introducing a linear substitution in coordinates in the momentum, we establish the wave equation for the harmonic oscillator with spin orbit coupling.

Keywords : linearisation, Levy-Leblond equation, Dirac oscillator.

Table des matières

Introduction

Après la découverte de l'équation fondamentale en mécanique quantique " équation de Schrödinger ", qui décrit une particule non relativiste.Beaucoup de physiciens se sont intéressés à la recherche de la version relativiste de cette dernière, et plus précisément, ils cherchaient une équation relativiste qui décrit l'électron.

La première équation obtenue en 1926, par O. Klein et W. Gordon, l'équation de Klein Gordon (KG) qui décrit une particule sans spin, présentait quelques difficultés d'interprétation, car possédant des solutions en énergie négative, ainsi qu'une densité de probabilité non définie positive, ceci étant dû à l'asymétrie entre les variables spatiales et temporelles.

En 1928, Dirac introduisit une forme linéaire de la précédente équation, en proposant une méthode de linéarisation, il a obtenu alors une équation d'onde qui décrit une particule de spin 1/2, et qui décrit bien le comportement relativiste de l'électron. Ainsi, elle vient avec un nouveau concept, car elle n'agit plus sur une fonction à une seule composante comme était le cas avec l'équation de KG mais plutôt sur une à quatre composantes.

Après ces deux équations relativistes, en se basant sur le même concept de linéarisation, vient l'équation de Duffin Kemmer Petiau (DKP), qui décrit les particules de spin-0 et spin-1, dans une forme covariante similaire à celle de Dirac.

Suite à cette découverte, en 1967 Lévy- Leblond proposa la linéarisation de l'équation de Schrödinger, et établit ainsi l'équation non relativiste pour une particule de spin 1/2.

Dans ce manuscrit organisé comme suit : nous étudions dans le premier chapitre la linéarisation de l'équation de KG faite par Dirac, et nous présentons l'équation DKP pour une particule de spin-0 et spin-1. Ensuite, nous dérivons dans le deuxième chapitre l'équation non relativiste pour une particule de spin 1/2, en linéarisant l'équation de Schrödinger, et nous la généralisons dans la chapitre trois au cas d'une particule de spin 1. Nous consacrons le dernier chapitre à l'application des équations ci-dessus à l'oscillateur harmonique, et dans un deuxième temps faire une analyse sommaire des résultats obtenus.Enfin, nous terminons par une conclusion.

Chapitre 1

Linéarisation de l'équation de Klein-Gordon

1.1 Equation de Klein-Gordon

La première équation d'onde relativiste est l'équation de Klein-Gordon, qui décrit une particule de spin 0. Elle porte le nom des deux physiciens Klein et Gordon. Elle a été publiée en 1926 pour la première fois par O. Klein. Dans la même année, elle a été proposée par Schrödinger comme une généralisation relativiste de l'équation qui porte son nom. Et indépendamment, beaucoup de physiciens comme V. Fock, W. Gordon, de Broglie et d'autre, ont aussi développé cette équation [1].

Vers la fin de 1928, l'équation du second ordre devient connue et considérée par les physiciens. Bien qu'utile dans la théorie de l'effet Compton et dispersion, l'équation ne semblait pas être efficace dans la résolution de quelques problèmes physique car elle ne prenait pas en compte le spin de l'électron et était difficile à interpréter, quand on prend en considération l'interprétation probabiliste de Born, et le principe d'incertitude d'Heisenberg [2].

1.1.1 Etablissement de l'équation de Klein-Gordon

Durant toute la suite de ce travail, on adoptera la convention (sauf mention) $\hbar = c = 1$.

On sait que la relation relativiste entre l'énergie est l'impulsion pour une particule massive est donné par

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2. \tag{1.1}$$

En utilisant les relations de correspondances données par

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \\ \boldsymbol{p} &\rightarrow -i\boldsymbol{\nabla}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

et en substituant les opérateurs énergie et impulsion de l'équation (1.2) dans l'équation (1.1), on obtient l'équation de Klein Gordon [3] donnée par

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (-\nabla^2 + m^2)\phi. \tag{1.3}$$

Cette dernière admet des solutions

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \exp\left[-i\left(Et - \boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}\right)\right] \tag{1.4}$$

en énergie positive et d'autres négatives de forme $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$.

1.1.2 Equation de continuité

Pour pouvoir interpréter la fonction d'onde, il faut définir une densité de probabilité de présence ρ et une densité de courant $\boldsymbol{j}$. On va chercher donc une équation de continuité, en suivant une technique de multiplication par des quantités conjuguées, c'est à dire on multiplie l'équation et son équation adjointe par une quantité conjuguée. L'équation (1.3) par $-i\phi^*$ donne

$$i\phi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - i\phi^*\nabla^2\phi + im^2\phi^*\phi = 0, \tag{1.5}$$

et on multiplie la complexe conjuguée de l'équation (1.3) par $-i\phi$, on obtient

$$i\phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* - i\phi\nabla^2\phi^* + im^2\phi = 0. \tag{1.6}$$

En faisant la différence entre les deux équations (1.5) et (1.6) on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\left[-i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)\right] = 0, \tag{1.7}$$

l'équation (1.7) a la forme d'une équation de continuité qui est donné par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} . \boldsymbol{j} = 0, \tag{1.8}$$

où ρ et $\boldsymbol{j}$ présentent respectivement la densité de probabilité de présence et le courant de probabilité, tel que

$$\begin{aligned} \rho &= i \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right), \\ \boldsymbol{j} &= -i \left(\phi^* \boldsymbol{\nabla} \phi - \phi \boldsymbol{\nabla} \phi^* \right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

L'expression de la densité de probabilité comporte deux termes faisant intervenir des dérivés temporelles et par conséquent la densité n'est pas définie positive. Donc l'équation de Klein-Gordon possède un problème avec des énergies et des densités négatives.

1.1.3 Notation covariante

Maintenant, on va présenter les notations suivantes, pour donner à la fin la forme covariante de l'équation de KG. On définit le tenseur métrique par

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

On va utiliser le quadrivecteur contravariant pour la description des coordonné espace-temps

$$a^\mu = \left(a^0, a^1, a^2, a^3 \right), \tag{1.11}$$

et pour trouver la forme covariante du quadri-vecteur, on fait descendre l'indice μ à l'aide du tenseur métrique comme suit

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (a_0, \boldsymbol{a}). \tag{1.12}$$

On définit aussi le produit scalaire, en utilisant la convention de sommation d'Einstein : Les indices répétés (l'un en haut, l'autre en bas) sont sommés de 0 à 3

$$a^\mu a_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu a_\mu = a^0 a_0 + a^1 a_1 + a^2 a_2 + a^3 a_3 = a_0^2 - \boldsymbol{a}^2, \tag{1.13}$$

avec

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)\,. \tag{1.14}$$

Donc les quadrivecteurs position et impulsion s'écrivent

$$x^\mu = (t, x, y, z)\,, \tag{1.15}$$

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)\,, \tag{1.16}$$

et sous forme covariante

$$x_\mu = (t, -x, -y, -z)\,, \tag{1.17}$$

$$p_\mu = (E, -p_x, -p_y, -p_z)\,, \tag{1.18}$$

et pour les produits scalaires

$$x.x = x^\mu x_\mu = t^2 - \boldsymbol{x}^2, \tag{1.19}$$

$$p^\mu.p_\mu = E^2 - \boldsymbol{p}^2, \tag{1.20}$$

$$x.p = x^\mu p_\mu = Et - \boldsymbol{x}.\boldsymbol{p}, \tag{1.21}$$

le quadrivecteur impulsion s'écrit aussi comme

$$p^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial y}, -i\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(p^0, -\boldsymbol{\nabla}\right)\,, \tag{1.22}$$

Forme covariante de L'équation de KG :

En utilisant la dernière relation et (1.18), on écrit l'équation de KG sous forme covariante

$$(p^\mu p_\mu - m^2)\phi = 0. \tag{1.23}$$

1.2 Equation de Dirac

Le travail de Dirac a consisté à trouver une théorie relativiste pour l'électron. Après les difficultés rencontrées avec l'équation de Klein-Gordon causées par la présence d'un terme de dérivée second par rapport au temps, Dirac a pensé à écrire l'équation sous forme linéaire, et propose une méthode de linéarisation. Dirac a ainsi éliminé le terme quadratique par rapport au temps, et pour respecter l'invariance relativiste, il a aussi linéarisé le terme contenant les dérivées spatiales. Avec cette méthode, il arriva à l'équation relativiste avec une densité de probabilité complètement positive qui décrit l'électron.

Remarque : Par linéarisation, on veut dire que les opérateurs doivent apparaître sous forme linéaire dans l'expression de l'équation d'onde.

1.2.1 Méthode de Linéarisation

Maintenant on va voir comment Dirac linéarise l'équation du seconde ordre de Klein-Gordon, pour arriver à l'équation relativiste pour l'électron. Dirac postulait une équation de type

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi, \tag{1.24}$$

avec $\boldsymbol{\alpha}$ et β sont des coefficients à déterminer.

En substituant les expressions (1.2) dans (1.24) on aura

$$(E - \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p} - \beta m)\psi = 0. \tag{1.25}$$

Pour déterminer $\boldsymbol{\alpha}$ et β, on impose à ψ de satisfaire l'équation de Klein-Gordon

$$(E^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2)\psi = 0, \tag{1.26}$$

en multipliant (1.25) à gauche par $(E + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p} + \beta m)$ ce qui donne

$$(E + \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p} + \beta m)(E - \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p} - \beta m)\psi = 0. \tag{1.27}$$

En utilisant la convention de sommation on peut écrire

$$[E^2 - \alpha_k^2 p_k^2 - \beta^2 m^2 - (\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k)\, p_k p_l - m\,(\alpha_k \beta + \beta \alpha_k)\, p_k]\psi = 0, \quad k, l = 1, 2, 3. \tag{1.28}$$

Par identification avec (1.26) on peut définir les relations suivantes

$$\begin{cases} \alpha_k^2 = 1 \\ \beta^2 = 1 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 0 & k, l, = 1, 2, 3 \qquad \text{et} \quad k \neq l \\ \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0 & \qquad (k = 1, 2, 3) \end{cases}. \tag{1.29}$$

Donc (1.25) représente l'équation de Dirac qui décrit une particule relativiste de spin 1/2, avec $\boldsymbol{\alpha}$ et β des opérateurs hermétiques satisfaisant aux relations (1.29).

La première relation dans (1.29) indique que ces matrices ont des valeurs propres +1 et -1, et si on rajoute la deuxième relation, on montre qu'elles sont de trace nulle. Dans ce cas il n'y a que les matrices de Pauli qui peuvent satisfaire ces relations, et elles sont données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

On représente alors les matrices $\boldsymbol{\alpha}$ et β par des matrices 4×4 en blocs

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

L'équation de Dirac s'écrit finalement sous la forme

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{1.32}$$

C'est l'équation relativiste qui décrit l'électron.

Puisque A, B et C sont des matrices 4×4, ψ est un spineur à quatre composantes, qu'on a représentées en bloc.

1.2.2 Equation de continuité et densité de probabilité

On utilise la même technique que pour l'équation de KG

En multipliant l'équation (1.24) par $-i\psi^+$

$$\psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-\psi^+ \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\nabla} - i\beta m \psi^+)\psi, \tag{1.33}$$

et aussi la conjuguée de (1.24) par $-i\psi$

$$-\psi^{+}\underleftarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\psi = (\psi^{+}\boldsymbol{\alpha}\underleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} - i\beta m\psi^{+})\psi, \tag{1.34}$$

la différence entre (1.33) et (1.34) donne

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^{+}\psi) + \boldsymbol{\nabla}(\psi^{+}\boldsymbol{\alpha}\psi) = 0. \tag{1.35}$$

D'où

$$\rho = \psi^{+}\psi, \tag{1.36}$$

$$\boldsymbol{j} = \psi^{+}\boldsymbol{\alpha}\psi. \tag{1.37}$$

Dans ce cas on voit que la densité de courant est positive. On a $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, $\psi^{+} = \begin{pmatrix} \varphi^{*} & \chi^{*} \end{pmatrix}$, si d'après ces définitions on calcule la densité, on la trouve complètement positive.

1.2.3 Forme covariante de l'équation de Dirac

On a vu précédemment l'équation de Dirac telle qu'elle a était proposée par Dirac lui-même, sous forme d'une équation linéaire, et utile dans l'étude du passage à la limite non relativiste. Nous allons donner une autre forme dite covariante, qui est plus utile dans les circonstances où la covariance relativiste joue un rôle prépondérant [3].

Pour cela, on multiplie l'équation (1.25) à gauche dans les deux côtés par β

$$(\beta E - \beta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p} - \beta^{2}m)\psi = 0. \tag{1.38}$$

On introduit de nouvelles matrices

$$\gamma^{0} = \beta, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{\gamma} \equiv (\gamma^{1}, \gamma^{2}, \gamma^{3}). \tag{1.39}$$

L'équation (1.38) devient

$$\left(\gamma^{0}E - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p} - m\right)\psi = 0, \tag{1.40}$$

et avec les définitions

$$\begin{array}{c} \gamma^{\mu} \equiv (\gamma^{0}, \boldsymbol{\gamma}) \\ p_{\mu} \equiv (E, \boldsymbol{p}) \end{array}, \tag{1.41}$$

on écrit

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} - m)\psi = 0. \tag{1.42}$$

Avec

$$p_{\mu} \equiv i\partial_{\mu}, \partial_{\mu} \equiv (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}), \tag{1.43}$$

finalement la forme covariante s'écrit

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0, \tag{1.44}$$

avec γ^{μ} vérifiant les relations de commutations suivantes

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g_{\mu\nu}. \tag{1.45}$$

Les matrices γ sont de dimension 4×4 et dont les propriétés s'obtiennent à partir de celles de $\boldsymbol{\alpha}$ et β. On donne les relations suivantes

$$(\gamma^{\mu})^{+} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}, \tag{1.46}$$

$$\gamma_{\mu} = g_{\mu\upsilon}\gamma^{\nu}. \tag{1.47}$$

On note que

$$\gamma_0 = \gamma^0, \qquad \gamma_k = -\gamma^k, \tag{1.48}$$

$$\gamma^{\mu} = \gamma_{\mu}^{+} = \gamma_{\mu}^{-1}. \tag{1.49}$$

1.2.4 Oscillateur de Dirac

L'oscillateur de Dirac ([4]-[6]) est étudié pour la première fois par Itô et al. [7], qui ont considéré l'équation de Dirac avec l'impulsion $\boldsymbol{p}$ qui est remplacée par $(\boldsymbol{p} - im\omega\beta\boldsymbol{r})$. Ensuite, ce problème a été examiné en détails par M.Moshinski et A. Szczepaniak

[8] en (1989), qui ont donné le nom de l'oscillateur de Dirac (DO), car à la limite non relativiste, il devient un oscillateur harmonique avec un terme du couplage spin-orbite. Le DO a beaucoup d'intérêts, ici il représente l'un des exemples de la solution exacte de l'équation de Dirac [9], et aussi il rentre dans beaucoup de recherches [10] qui ont une relation avec les symétries [11], les supersymetries [5, 12] , les généralisations au cas des systèmes à plusieurs particules ([13]-[15]) , et dans l'étude des particules avec des spins superieurs ([16]-[18]).

L'équation de Dirac s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p} + mc^2\beta\right)\psi. \tag{1.50}$$

avec

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.51}$$

On sait que les matrices de Pauli vérifient la relation suivante

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{1.52}$$

Les indices répétés sont sommés de 1 jusqu'à 3. On cherche une expression qui doit être linéaire en $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{r}$, et qui peut être interprétée comme un oscillateur harmonique dans la limite non relativiste. On choisit la substitution

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - im\omega\beta\boldsymbol{r}, \tag{1.53}$$

l'équation (1.50) devient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [c\boldsymbol{\alpha}\ .(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\beta) + mc^2\beta]\psi, \tag{1.54}$$

en remplaçant $\boldsymbol{\alpha}$, β et ψ dans (1.54) on aura

$$E\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[c\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} - imw\boldsymbol{r} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{p} + imw\boldsymbol{r} \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{1.55}$$

Sous forme de système d'équation, (1.55) s'écrit

$$\left(E - mc^2\right)\varphi = c\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}\right)\chi, \tag{1.56}$$

$$\left(E + mc^2\right)\chi = c\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\right)\varphi. \tag{1.57}$$

En multipliant (1.56) par $E+mc^2$, et en utilisant (1.57) et (1.52)

$$(E^2-m^2c^4)\varphi=\left[c\left(p^2+m^2\omega^2r^2\right)-3\hbar\omega mc^2-4mc^2\frac{\omega}{\hbar}\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}\right]\varphi, \tag{1.58}$$

avec $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ est le moment angulaire, $\boldsymbol{s}=\frac{\hbar}{2}\,\boldsymbol{\sigma}$ est le spin.

Si on écrit $E=mc^2+\varepsilon$, le terme $E^2-m^2c^4$ dans l'équation (1.58) devient approximativement $2mc^2\varepsilon$ si $\varepsilon\ll mc^2$. Ainsi, dans la limite non relativiste l'énergie ε devient la valeur propre de l'opérateur du côté droit devisé par $2mc^2$, donc

$$\varepsilon\varphi=\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2-\frac{3}{2}\hbar\omega-\frac{2\omega}{\hbar}\left(\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}\right)\right]\varphi. \tag{1.59}$$

Ce résultat correspond à l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique de fréquence ω, avec un terme du couplage spin-orbite de force $-(2\omega/\hbar)$, et c'est à cause de ce comportement de l'équation de Dirac dans la limite non relativiste qu'on dit que l'équation (1.54) correspond à l'oscillateur de Dirac.

1.3 Equation de Duffin-Kemmer-Petiau

Le succès qu'ont connu les équations de Dirac et KG, a motivé d'autres physiciens à chercher une équation d'onde similaire qui décrit des particules de spin 0 et spin 1. Duffin Kemmer et Petiau arrivent à établir cette équation par linéarisation de l'équation de Proca [19, 20] . Cette équation est connue sous le nom de l'équation de DKP [[21]-[23]], [25], et elle est similaire à celle de Dirac, mais dans la forme covariante les matrices γ de Dirac sont remplacées par les matrices β qui vérifient l'algèbre de DKP [24, 25]. La forme de l'équation de spin 0 (particule scalaire) et spin 1 (vectorielle), est respectivement manipulé avec des représentations à cinq et dix dimension [26].

L'équation DKP relativiste qui décrit une particule libre de masse m est

$$(c\,\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{p}+mc^2)\psi=i\hbar\beta^0\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{1.60}$$

β^μ $(\mu=0,1,2,3)$ sont des matrices qui satisfont la relation de commutation

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda+\beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu=g^{\mu\nu}\beta^\lambda+g^{\nu\lambda}\beta^\mu. \tag{1.61}$$

1.3.1 Particule de spin 0

Dans la représentation de spin 0, les β^μ sont des matrices 5×5 données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \vartheta & \tilde{0} \\ \tilde{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \rho^i \\ -\rho^i_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.62}$$

Avec $\hat{0}, \tilde{0}, \mathbf{0}$ sont respectivement les matrices nulles $2 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 3$ et ϑ, ρ^i sont

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.63}$$

et ψ est un spineur à cinq composantes, qui s'exprime

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{upper} \\ i\psi_{lower} \end{pmatrix}, \text{avec} \quad \psi_{upper} = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \psi_{lower} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \tag{1.64}$$

1.3.2 Particule de spin 1

Dans la représentation de spin 1 les β^μ sont des matrices 10×10, et ψ est le spineur à dix composantes

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{1.65}$$

avec $\mathbf{1}$ et $\mathbf{0}$ sont respectivement les matrices 3×3 unitaire et nulle. s_i sont les matrices 3×3 pour le spin 1

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.66}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} i\varphi \\ \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}, \text{avec } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \tag{1.67}$$

1.3.3 Equation de continuité

L'équation (1.60) peut être écrite aussi sous la forme

$$\left(-i\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\nabla} - i\beta^0 \frac{\partial}{\partial t} + m \right) \psi = 0, \tag{1.68}$$

alors l'équation adjointe est

$$\psi^{+}\left(i\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\nabla}+i\beta^{0}\frac{\partial}{\partial t}+m\right)\psi=0, \tag{1.69a}$$

en multipliant (1.68) par $-i\psi^{+}$, et (1.69a) par $-i\psi$ on obtient

$$\begin{array}{c}\left(-\psi^{+}\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\nabla}-\psi^{+}\beta^{0}\frac{\partial}{\partial t}-im\psi^{+}\right)\psi=0\\ \psi^{+}\left(-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\nabla}-\beta^{0}\frac{\partial}{\partial t}-im\right)\psi=0\end{array}, \tag{1.70}$$

La soustraction de la deuxième équation dans (1.70) de la première donne

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^{+}\beta^{0}\psi)+\boldsymbol{\nabla}(\psi^{+}\boldsymbol{\beta}\psi)=0. \tag{1.71}$$

Et d'après l'équation de continuité (1.71) , on déduit une densité de probabilité et courant donnés par

$$\rho=\psi^{+}\beta^{0}\psi,\ \boldsymbol{j}=\psi^{+}\boldsymbol{\beta}\psi. \tag{1.72}$$

1.3.4 Forme covariante de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

On écrit l'équation DKP

$$\left(-i\beta^{0}\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{p}+m\right)\psi=0. \tag{1.73}$$

Avec

$$p^{\mu} = \left(p^{0},\boldsymbol{p}\right), \tag{1.74}$$

$$\beta^{\mu} = \left(\beta^{0},\boldsymbol{\beta}\right). \tag{1.75}$$

On écrit l'équation (1.73)

$$(\beta^{0}p_{0}-\beta^{1}p_{1}-\beta^{1}p_{1}-\beta^{1}p_{1}-m)\psi=0, \tag{1.76}$$

donc

$$(\beta^{\mu}p_{\mu}-m)\psi=0. \tag{1.77}$$

Finalement on écrit la forme covariante comme

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0, \tag{1.78}$$

on remarque que cette équation a la même forme covarinte que celle de Dirac, ici les matrices γ sont remplacées par les matrices β.

1.3.5 Oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau

Nous allons maintenant étudier un autre oscillateur qui est une généralisation de l'oscillateur de Dirac qu'on a déjà présenté dans la section précédente, c'est l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau. Comme pour l'oscillateur de Dirac, on va introduire une substitution linéaire en r.

Particule de spin 0

La substitution est donnée par

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - imw\eta^0 \boldsymbol{r}. \tag{1.79}$$

L'équation (1.60) devient donc

$$(c\ \boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{p} - imw\eta^0 \boldsymbol{r}) + mc^2) = i\hbar\beta^0 \frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{1.80}$$

où ω est la fréquence de l'oscillateur et η^0 la matrice donnée par

$$\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.81}$$

L'équation (1.80) peut s'écrire comme un système de trois équations

$$\begin{cases} mc^2\phi = E\varphi + ic(\boldsymbol{p} + imw\boldsymbol{r})\boldsymbol{A} \\ mc^2\varphi = E\phi \\ mc^2\mathbf{A} = ic(\boldsymbol{p} - imw\boldsymbol{r})\phi \end{cases} \tag{1.82}$$

Si on élimine A et φ en faveur de ϕ , on obtient

$$(E^2 - m^2c^4)\phi = \left[c^2\left(\boldsymbol{p}^2 + m^2w^2\boldsymbol{r}^2\right) - 3mc^2\hbar w\right]\phi, \tag{1.83}$$

en utilisant la relation $E = \varepsilon + mc^2$, et à la limite non-relativiste $\varepsilon \ll mc^2$, l'équation (1.83) devient

$$\varepsilon\phi = \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2\boldsymbol{r}^2 - \frac{3}{2}\hbar w\right]\phi. \tag{1.84}$$

Cette dernière représente l'oscillateur harmonique isotrope.

Particule de spin 1

La matrice η^0 dans ce cas est

$$\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.85}$$

L'équation (1.80) s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} mc^2 & 0 & c\boldsymbol{p}^- & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -ics_i\boldsymbol{p}^+ \\ -c\boldsymbol{p}^+ & 0 & mc^2 & 0 \\ 0 & -ics_i\boldsymbol{p}^- & 0 & mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\varphi \\ \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \boldsymbol{E} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \boldsymbol{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\varphi \\ \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}, \tag{1.86}$$

et la décomposition de cette équation nous donne ce système

$$mc^2\varphi = ic\boldsymbol{p}^-.\boldsymbol{B}, \tag{1.87}$$

$$mc^2\boldsymbol{A} = E\boldsymbol{B} - c\boldsymbol{p}^+ \times \boldsymbol{C}, \tag{1.88}$$

$$mc^2\boldsymbol{B} = E\boldsymbol{A} + ic\boldsymbol{p}^+\varphi, \tag{1.89}$$

$$mc^2\boldsymbol{C} = -c\boldsymbol{p}^- \times \boldsymbol{A}, \tag{1.90}$$

où $\boldsymbol{p}^\pm = \boldsymbol{p} \pm imw\boldsymbol{r}.$ Nous allons maintenant éliminé φ, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ en faveur de $\boldsymbol{A}$ pour dérivé une équation que satisfait le spineur $\boldsymbol{A}$.

En remplaçant (1.89) et (1.90) dans (1.88), on obtient

$$(E^2 - m^2c^4)\boldsymbol{A} = -c^2\boldsymbol{p}^+ \times (\boldsymbol{p}^- \times \boldsymbol{A}) - icEp^+\varphi. \tag{1.91}$$

En utilisant (1.87), le deuxième terme de (1.91) devient

$$-icEp^+\varphi = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}^+.(\boldsymbol{p}^-.E\boldsymbol{B}), \tag{1.92}$$

en utilisant (1.88) et (1.90), on aura

$$-icEp^+\varphi = c^2\boldsymbol{p}^+.(\boldsymbol{p}^-.\boldsymbol{A}) - \frac{1}{m}\boldsymbol{p}^+ \times (\boldsymbol{p}^- \times \boldsymbol{A}), \tag{1.93}$$

nous remplaçons ce résultat dans (1.91) , et nous obtenons

$$\begin{aligned}(E^2 - m^2c^4)\boldsymbol{A} &= -c^2\boldsymbol{p}^+ \times (\boldsymbol{p}^- \times \boldsymbol{A}) + c^2\boldsymbol{p}^+(\boldsymbol{p}^-.\boldsymbol{A}) \\ &\quad -\frac{1}{m^2}\boldsymbol{p}^+ \left\{\boldsymbol{p}^-.\left[\boldsymbol{p}^+ \times \left(\boldsymbol{p}^- \times \boldsymbol{A}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{1.94}$$

en utilisant les identités

$$\boldsymbol{p}^+ \times (\boldsymbol{p}^- \times \boldsymbol{A}) = p(p.\boldsymbol{A}) - p^2\boldsymbol{A} + m^2\omega^2(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{r}^2\boldsymbol{A}) + m\omega(2 + \boldsymbol{L}.\boldsymbol{s})\boldsymbol{A}, \tag{1.95}$$

$$\boldsymbol{p}^+(\boldsymbol{p}^-.\boldsymbol{A}) = p(p.\boldsymbol{A}) + m^2\omega^2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{A}) - m\omega(1 + \boldsymbol{L}.\boldsymbol{s})\boldsymbol{A}. \tag{1.96}$$

L'équation (1.94) s'écrit

$$\begin{aligned}(E^2 - m^2c^4)\boldsymbol{A} &= [c^2(m^2\omega^2r^2) - 3\hbar\omega mc^2 - \frac{2\omega}{\hbar}mc^2\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}]\boldsymbol{A} \\ &\quad -\frac{1}{m^2}\boldsymbol{p}^+ \left\{\boldsymbol{p}^-.\left[\boldsymbol{p}^+ \times \left(\boldsymbol{p}^- \times \boldsymbol{A}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{1.97}$$

avec $\boldsymbol{L}$ est l'opérateur du moment angulaire orbital, et $\boldsymbol{s}$ est l'opérateur d'une particule de spin 1.

Le troisième terme est négligeable dans la limite non relativiste $\varepsilon \ll mc^2$, on écrit alors l'équation d'onde pour $\boldsymbol{A}$

$$\varepsilon\boldsymbol{A} = \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{\omega}{\hbar}\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}\right]\boldsymbol{A}. \tag{1.98}$$

Cette équation caractérise l'oscillateur harmonique usuel pour une particule de spin 1 avec l'addition d'un terme du couplage spin-orbite.

Chapitre 2

Linéarisation de l'équation de Schrödinger pour S=1/2

En 1923, de Broglie émet l'hypothèse que : toute particule en mouvement a un comportement ondulatoire ; de Broglie leur associe une onde. En général, les physiciens posent d'abord des équations, puis ils cherchent à les résoudre ; dans ce cas de Broglie a postulé l'existence d'une onde sans en avoir posé l'équation. En 1925, Schrödinger propose une équation pour ces ondes, mais ne prend pas en compte la théorie de la relativité, l'espace et le temps n'interviennent pas de la même manière (le terme du temps est linéaire, alors que celui de l'espace est quadratique).

2.1 Linéarisation par la méthode de Dirac-Lévy-Leblond

On va faire une linéarisation de l'équation de Schrödinger, en suivant la méthode de Dirac refaite après par Lévy-Leblond [28], [29], afin de trouver l'équation d'onde non relativiste pour la particule de spin 1/2. L'opérateur de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta = E - \frac{p^2}{2m}. \tag{2.1}$$

L'équation de Schrödinger s'écrit alors

$$\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\psi = 0. \tag{2.2}$$

On voit directement qu'il y a une assymetrie dans l'équation (2.2), qui est dû au fait que le terme de dérivé par rapport au temps est linéaire, alors que celui de dérivé spatiale intervient quadratiquement. Pour enlever cette assymétrie , on essaie de construire une équation d'onde dont la forme générale est

$$\hat{\Theta}\ \psi = (AE + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + C)\psi = 0, \tag{2.3}$$

où $A, \boldsymbol{B}$ et C sont des quantités linéaires qui ne doivent pas dépendre de E ou $\boldsymbol{p}$. On exige aussi que les solutions ψ de l'équation(2.3) doivent être aussi solutions de l'équation de Schrödinger. Il existe alors un opérateur

$$\hat{\Theta}' = A^{'}E + \boldsymbol{B}^{'}.\boldsymbol{p} + C^{'}, \tag{2.4}$$

tel que la multiplication de (2.3) par cet opérateur redonne l'équation de Schrödinger c'est à dire

$$\hat{\Theta}'\hat{\Theta} = 2m\ \left(E - \frac{p^2}{2m}\right). \tag{2.5}$$

Où le facteur $2m$ est arbitraire.

Les opérateurs $A^{'}, \boldsymbol{B}^{'}$,et $C^{'}$ne doivent pas aussi contenir E ou p.Pour construire $A, A^{'}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{'} et\ C, C^{'}$, on multiplie l'équation (2.3) par (2.4)

$$(A^{'}E + B_i^{'}p_i + C^{'})(A\ E + B_j\ p_j + C) = 2mE - p_k p_k. \tag{2.6}$$

Les indices répétés sont sommés de 1 jusqu'à 3. En faisant l'identification des deux côtés de l'équation (2.6), nous obtenons les relations

$$\begin{cases} A^{'}A = 0, \\ A^{'}C + C^{'}A = 2m, \\ C^{'}C = 0, \end{cases} \quad , \begin{cases} A^{'}B_i + B_i^{'}A = 0, \\ B_i^{'}B_j + B_j^{'}B_i = -2\delta_{ij},\ \ (i,j = 1,2,3), \\ C^{'}B_i + B_i^{'}C = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour simplifier ces conditions. On définit des nouveaux opérateurs

$$\begin{cases} B_4 = i(A + \frac{1}{2m}C), & B_4^{'} = i(A^{'} + \frac{1}{2m}C^{'}), \\ B_5 = A - \frac{1}{2m}C & B_5^{'} = A^{'} - \frac{1}{2m}C^{'}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Donc (2.7) devient

$$B_\mu^{'}B_\nu + B_\nu^{'}B_\mu = -2\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1 \quad à \quad 5). \tag{2.9}$$

On peut encore avoir d'autres transformations pour ces relations. Soit M un opérateur arbitraire non singulier avec $M^{-1}M = 1$. On choisit

$$\begin{aligned} B_\alpha = M\gamma_\alpha, \qquad & B'_\alpha = -\gamma_\alpha M^{-1}, \alpha = 1 \quad \grave{a} \quad 4, \\ B_5 = -iM, \qquad & B'_5 = -iM^{-1}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

On insert (2.10) dans (2.9) , on trouve les relations d'anti commutation

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \qquad\qquad \alpha, \beta = 1 \quad \grave{a} \quad 4. \tag{2.11}$$

Les relations (2.11) définissent une algèbre connue sous le nom d'algèbre de Clifford [30], elles peuvent être représentées par des matrices et conduit à l'algèbre des matrices complexes 4×4 comme une représentation particulière [28]. En utilisant la relation (2.11) on montre que les matrices γ_α peuvent être représentées par

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.12}$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

Les σ_i sont les matrices de Pauli, et $0, \mathbf{1}$ sont respectivement les matrices 2×2 nulle et unitaire. Pour trouver la représentation matricielle des B_ν on prend

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = M^{-1}. \tag{2.14}$$

En remplaçant M, et M^{-1} dans (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} B_i = M\gamma_i &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3, \\ B_4 = M\gamma_4 &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \\ B_5 = -iM &= -i\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour trouver A et C on va résoudre (2.8), en tenant compte de (2.15), on écrit

$$A = \frac{1}{2}(B_5 - iB_4), \qquad\qquad C = -m\left(iB_4 + B_5\right). \tag{2.16}$$

Et on aura finalement

$$A = -i\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad C = 2mi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Puisque $A, \boldsymbol{B}$ et C sont des matrices 4×4, donc la fonction d'onde dans l'équation (2.3) doit être un objet à quatre composantes

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Et φ, χ sont des spineurs à 2 composantes.

En remplaçant les matrices $A, \boldsymbol{B}$ et C dans l'équation d'onde(2.3), et enfin l'équation d'onde s'écrit

$$\left[-i \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} + 2mi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{2.19}$$

C'est l'équation non relativiste linéaire adaptée à une particule de spin 1/2.

Les composantes du spineur $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger [28].

2.2 Nouvelle dérivation de l'équation de Lévy-Leblond

Maintenat on va dériver l'équation de Lévy- Leblond en se basant sur le même concept de linéarisation, dans le but est de trouver une équation d'onde pour une particule de spin 1/2 mais d'une façon qui peut être généralisée pour les spins supérieurs. L'équation (2.1) peut être écrite aussi sous forme

$$(2mE - \boldsymbol{p}^2)\psi = 0. \tag{2.20}$$

Pour ce faire on pose une équation de forme

$$(AE + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + C)\psi = 0, \tag{2.21}$$

si on multiplie l'équation (2.21) par

$$A^{'}E - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + C^{'}, \tag{2.22}$$

$A^{'}$ et $C^{'}$ sont deux autres inconnues. On aura

$$[A^{'}AE^2+\left(A^{'}B_i-B_iA\right)p_iE+(A^{'}C+C^{'}A)E-B_jB_ip_jp_i+(C^{'}B_i-B_iC)p_i+C^{'}C]\psi=0, \tag{2.23}$$

où $i,j,k=1,2,3$. ici on a utilisé la convention sommation où les indices répétés sont sommés.

L'identification de l'équation (2.23) avec (2.20) donne les relations suivantes

$$A^{'}A=C^{'}C=0, \qquad A^{'}B_i-B_iA=0, \tag{2.24}$$

$$A^{'}C+C^{'}A=2m, \qquad C^{'}B_i-B_iC=0, \tag{2.25}$$

$$B_jB_ip_jp_i=\boldsymbol{p}^2. \tag{2.26}$$

On va maintenant dériver l'équation de Lévy Leblond d'une autre manière, et on va déterminer A, $\boldsymbol{B}$ (B_1,B_2,B_3), C pour le cas de spin 1/2.

On a les matrices de Pauli qui obéit à l'identité suivante

$$\sigma_i\sigma_jp_ip_j=\boldsymbol{p}^2 1_{2\times 2}. \tag{2.27}$$

où $1_{2\times 2}$ représente la matrice identité

Maintenant si on compare les deux équations (2.26) et (2.27) , on remarque qu'on ne peut pas poser $B_j=\sigma_j$. En effet, si on pose cette dernière, la deuxième condition dans (2.24) va donner $A^{'}=A$, ce qui contredit la première condition dans la même équation.

Alors, puisqu'on a dans (2.27) un produit de matrices $\boldsymbol{\sigma}$ qui vérifie l'équation (2.27), donc on doit choisir une autre forme de B_i qui vérifient toutes les conditions mais qui intervient toujours les matrices σ .

On prend

$$B_i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

avec 0 et σ_i sont respectivement matrice 2×2, et matrices de Pauli représentées en blocs.

si on remplace B_i dans (2.26) en tenant compte de (2.27), on aura

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j p_j \\ \sigma_j p_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j p_i p_j & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j p_i p_j \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}^2 1_{4\times 4} \tag{2.29}$$

B_i déterminés, on utilise les relations (2.24) et (2.25) pour trouver A et C. On obtient

$$\left(A' + \frac{C'}{2m}\right) B_i = B_i \left(A + \frac{C}{2m}\right), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2.30}$$

$$\left(A' + \frac{C'}{2m}\right)\left(A + \frac{C}{2m}\right) = \mathbf{1}, \tag{2.31}$$

$\mathbf{1}$ est la matrice identité 2×2. Si on prend (2.28) en considération on remarque qu'il suffit de choisir $\left(A + \frac{C}{2m}\right)$ égal à la matrice identité, et on détermine A et C directement

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

A et C sont des matrices 4×4 représentés en blocs, d'où la fonction d'onde $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ a quatre composantes, où φ et χ sont deux spineurs à deux composantes tel que : $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$.

Finalement (2.21) devient

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} + 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{2.33}$$

Cette dernière représente une équation de premier ordre qui n'est rien d'autre mais l'équation de Lévy-Leblond reproduit ici d'une autre manière, et qui décrit une particule non relativiste de spin 1/2.

On vérifie maintenant que φ et χ sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger, l'équation (2.33) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} E & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{2.34}$$

et sous forme d'un système on écrit

$$E\varphi + \sigma_i p_i \chi = 0, \quad (2.35)$$

$$\sigma_i p_i \varphi + 2m\chi = 0. \quad (2.36)$$

(2.36) nous donne

$$\sigma_i p_i \varphi = -2m\chi, \quad (2.37)$$

En remplaçant ce résultat dans (2.35), on aura

$$-2mE\chi + \sigma_i p_i \sigma_j p_j \chi = 0, \quad (2.38)$$

$$\left(E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\chi = 0. \quad (2.39)$$

Donc χ vérifie l'équation de Schrödinger, ainsi que φ

$$\left(E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\varphi = 0. \quad (2.40)$$

2.2.1 Equation de continuité

On va maintenant trouver l'équation de conservation, afin de trouver la densité de probabilité et le courant de probabilité. L'équation adjointe de (2.21) vérifie

$$\psi^+(EA + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + C) = 0. \quad (2.41)$$

En multipliant (2.21) par $-i\psi^+$ et (2.41) par $-i\psi$, on trouve

$$\left(\psi^+ A\frac{\partial}{\partial t} - \psi^+\boldsymbol{B}.\boldsymbol{\nabla} - iC\psi^+\right)\psi = 0, \quad (2.42)$$

$$\psi^+\left(-A\underleftarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\psi + \boldsymbol{B}.\underleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}\psi - iC\psi\right) = 0. \quad (2.43)$$

La soustraction de (2.43) de (2.42) donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^+ A\psi\right) + \boldsymbol{\nabla}\left(-\psi^+\boldsymbol{B}\psi\right) = 0. \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} = 0, \tag{2.45}$$

$$\rho = \psi^{+}A\psi,\ \boldsymbol{j} = -\psi^{+}\boldsymbol{B}\psi. \tag{2.46}$$

Avec ρ la densité de probabilité et $\boldsymbol{j}$ est le courant.

Avec A et B sont les matrice determinées dans la section précédente.

2.2.2 Particule de spin 1/2 soumise à un champs électromagnétique

On va maintenant prendre le cas d'une particule de spin 1/2 dans un champ électromagnétique.

En faisant la substitution

$$E \rightarrow E - eV(x,t), \quad \text{et} \quad \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x,t), \tag{2.47}$$

les équations (2.35) et (2.36) deviennent

$$\begin{array}{c} (E - eV)\varphi + \boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\chi = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi + 2m\chi = 0. \end{array} \tag{2.48}$$

La deuxième équation dans le système (2.48) donne

$$\chi = -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi, \tag{2.49}$$

en insérant (2.49) dans la première équation du système, on obtient

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\varphi = 0, \tag{2.50}$$

on développe le deuxième terme en utilisant l'identité suivante pour les matrices de Pauli

$$(\sigma.\boldsymbol{A})(\sigma.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}). \tag{2.51}$$

On aura

$$-\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] = -\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^{2} - \frac{i}{2m}\boldsymbol{\sigma}.\left[\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) \times \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right], \tag{2.52}$$

Le deuxième terme du côté droit s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{-i}{2m}\boldsymbol{\sigma}.\left[\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\times\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] &= \frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p}),\\ &= \frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}.\left[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p}\right] \quad (2.53)\\ \frac{-i}{2m}\boldsymbol{\sigma}.\left[\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\times\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] &= \frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}). \quad (2.54)\end{aligned}$$

En remplaçant (2.54) dans (2.52), on trouve

$$-\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]=-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}). \quad (2.55)$$

Finalement l'équation (2.50) s'écrit

$$\left[E-eV-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A})\right]\varphi=0. \quad (2.56)$$

Et maintenant on a $\boldsymbol{p}=-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ et $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$, l'équation (2.56) s'écrit finalement

$$\left[E-eV-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}\right]\varphi=0. \quad (2.57)$$

L'équation (2.57) n'est que l'équation de Pauli, et le dernier terme représente l'énergie d'interaction entre le champ magnétique et le moment magnétique interne de la particule [28].

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}=\mu_B\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.58)$$

μ_B représente le magnéton de Bohr.

On a l'opérateur de spin de la particule est donné par $S=(1/2)\sigma$, on peut écrire donc

$$\boldsymbol{\mu}=g_{spin}\mu_B\boldsymbol{S}=2\mu_B\boldsymbol{S}. \quad (2.59)$$

Le facteur g_{spin} représente le rapport gyromagnétique. Ainsi, en introduisant le champ électromagnétique dans l'équation non relativiste, on a trouvé la valeur correcte du moment magnétique intrinsèque d'une particule de spin 1/2 .

Chapitre 3

Généralisation pour une particule de spin 1

3.1 Position du problème

Afin de trouver l'équation pour une particule de spin 1, on va généraliser la méthode introduite dans le chapitre 2 pour le spin 1/2. On reprend les équations (2.21), (2.24), (2.25) et (2.26), du chapitre précédent

$$(AE + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + C)\psi = 0. \tag{3.1}$$

Après multiplication par $(A^{'}E - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + C^{'})$, et identification avec l'équation de Shrödinger, on aboutit au système d'équation suivant

$$\begin{array}{ll} A^{'}A = C^{'}C = 0, & A^{'}B_i - B_iA = 0, \\ A^{'}C + C^{'}A = 2m, & C^{'}B_i - B_iC = 0, \end{array} \tag{3.2}$$

ainsi que

$$B_jB_ip_jp_i = \boldsymbol{p}^2 \tag{3.3}$$

Le problème consiste à déterminer les inconnu A, $\boldsymbol{B}$ et C qui obéissent aux relations ci-dessus.

En suivant une approche similaire à celle de spin 1/2. On commence par résoudre l'équation 3.3, sachant que dans ce cas les opérateurs B_i doivent contenir des matrices 3×3 représentantes de spin 1. Ces matrices sont données dans la représentation standard par

$$(s_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}. \tag{3.4}$$

avec ϵ_{ijk} le symbole de Lévy-Cévita. On déduit donc les matrices $\boldsymbol{s}$

$$s_1 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ s_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ s_3 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

D'après (3.4) et la définition $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{u} = \epsilon_{ijk} p^j u^k$. On a

$$\boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{u} = -i\hbar^{-1}(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}. \tag{3.6}$$

Où $\boldsymbol{u}$ est le champ vectoriel $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Si on insert (3.6) dans l'identité $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) = \Delta\boldsymbol{u}$, ça donne la relation entre le carré de l'impulsion et les trois composantes de l'opérateur spin c'est à dire

$$\hbar^{-2}(N_j N_i^T + s_j s_i) p_j p_i = \boldsymbol{p}^2 1_{3\times 3}. \tag{3.7}$$

Où $i, j = 1, 2, 3$ et N_i^Tdécrit la matrice transposé de N_i, qui est une matrice 3×3 donnée par

$$N_i = \hbar \begin{pmatrix} e_i^T & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

On va démontrer l'équation (3.7). On a

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) = \Delta\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{u}, \tag{3.10}$$

en utilisant (3.6) on trouve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{p} \times (-i\hbar^{-1}(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{u}, & (3.11) \\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{u}) + \hbar^{-2}(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{u}. & (3.12) \end{aligned}$$

On calcule le premier terme dans (3.12)

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{u}) = (p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2u_1 + p_1p_2u_2 + p_1p_3u_3 \\ p_2p_1u_1 + p_2^2u_2 + p_2p_3u_3 \\ p_3p_1u_1 + p_3p_2u_2 + p_3^2u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

en décomposant la matrice dans la dernière équation, on peut écrire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{u}) \quad = \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_1^2\boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_2^2\boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p_3^2\boldsymbol{u} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_1p_2\boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_1p_3\boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_2p_1\boldsymbol{u} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_2p_3\boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_3p_1\boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} p_3p_2\boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

on trouve

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{u}) = \hbar^{-2}(N_j^T N_i p_j p_i)\boldsymbol{u}. \tag{3.15}$$

En insérant ce résultat dans (3.12), on arrive à la relation (3.7).

Comme on a fait pour le spin 1/2, on choisit une forme de $\boldsymbol{B}$ qui vérifient les relations (3.2), et (3.3)

On prend

$$\boldsymbol{B} = \hbar^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{N}^T & 0 & 0 \\ \boldsymbol{s} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

D'après (3.16) on aura

$$B_j B_i p_j p_i = \hbar^{-2}\begin{pmatrix} N_j N_i^T + s_j s_i & 0 & 0 \\ 0 & N_j^T N_i & N_j^T s_i \\ 0 & s_j N_i & s_j s_i \end{pmatrix} p_j p_i. \tag{3.17}$$

Mais d'après (3.17), l'équation dans (3.3) qui n'est pas satisfaite, et cela est dû au fait que dans (3.7) il y a un terme additionnel qui n'existe pas dans le cas de spin 1/2.

3.2 Etablissement de l'équation du spin 1

Pour trouver une solution au problème qu'on a constaté précédemment, on impose dans l'identification que ψ soit inclut dans l'équation, qui devient donc

$$B_j B_i p_j p_i \psi = \boldsymbol{p}^2 \psi. \tag{3.18}$$

vue la dimension des matrices B_i, on déduit que ψ peut s'écrire comme suit

$$\psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}, \text{ avec } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Nous remplaçons la valeur de $B_j B_i p_j p_i$ donné par l'équation (3.17), et aussi ψ par ses composantes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$, dans l'équation (3.18), nous obtenons

$$\hbar^{-2} \begin{pmatrix} (N_j N_i^T + s_j s_i) p_j p_i & 0 & 0 \\ 0 & N_j^T N_i p_j p_i & N_j^T s_i p_j p_i \\ 0 & s_j N_i p_j p_i & s_j s_i p_j p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

On calcule les termes non diagonaux

$$\begin{aligned} N_j^T p_j s_i p_i &= (N_1^T p_1 + N_2^T p_2 + N_3^T p_3)(s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3) \\ &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p_2 p_3 - p_3 p_2 & -p_1 p_3 - p_3 p_1 & -p_1 p_2 - p_2 p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

aussi

$$\begin{aligned} s_j N_i p_j p_i &= \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p_3 p_2 - p_2 p_3 & 0 & 0 \\ -p_3 p_1 - p_1 p_3 & 0 & 0 \\ -p_2 p_1 - p_1 p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Donc on conclut que,

$$N_j^T s_i p_j p_i = s_j s_i p_j p_i = 0. \tag{3.23}$$

Maintenant on calcul les termes diagonaux,

$$\begin{aligned}
(N_j^T p_j N_i p_i)\boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

et d'après (3.20)

$$\begin{pmatrix} p^2 v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 v_1 \\ p^2 v_2 \\ p^2 v_3 \end{pmatrix}, \qquad (3.25)$$

et par conséquent,

$$v_2 = v_3 = 0. \qquad (3.26)$$

D'un côté

$$s_j p_j s_i p_i \boldsymbol{w} = (s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3)\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -p_3^2 w_2 - p_2^2 w_3 \\ -p_3^2 w_1 - p_1^2 w_3 \\ -p_2^2 w_1 - p_1^2 w_2 \end{pmatrix}, \qquad (3.27)$$

toujours selon (3.20) on a

$$\begin{pmatrix} -p_3^2 w_2 - p_2^2 w_3 \\ -p_3^2 w_1 - p_1^2 w_3 \\ -p_2^2 w_1 - p_1^2 w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 w_1 \\ p^2 w_2 \\ p^2 w_3 \end{pmatrix}, \qquad (3.28)$$

et puisqu'on a d'après (3.12)

$$p(p.w) + (s.p)(s.p)w = p^2 w, \qquad (3.29)$$

et

$$(s.p)(s.p)w = p^2 w, \qquad (3.30)$$

$$p(p.w) = 0, \qquad (3.31)$$

donc

$$\boldsymbol{p}.\boldsymbol{w} = 0. \qquad (3.32)$$

Alors l'équation (3.18) est vérifier si

$$\boldsymbol{p}.\boldsymbol{w} = 0, \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}(v_1, v_2 = v_3 = 0). \tag{3.34}$$

Les deux équations (3.33) et (3.34) indiquent respectivement que la divergence de la troisième composante de ψ est nulle, et que la deuxième doit être un scalaire.

En prenant en considération l'équation (3.16) et en utilisant les relations (2.30) et (2.31), Il suffit de prendre alors $A + \frac{C}{2m} = 1_{3\times3}$, on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Finalement, en remplaçant A, $\boldsymbol{B}$ et C dans (2.21) on trouve l'équation qu'on cherche qui s'écrit sous la forme

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} E - i \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{N}^T & 0 & 0 \\ \boldsymbol{s} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \boldsymbol{\nabla} + 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \psi = 0. \tag{3.36}$$

Où $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3)$ et $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Puisque les matrices N_i^T ont deux lignes composés entièrement de zéro, donc (3.36) peut se réduire à une équation à $6s + 1 = 7$ composantes ; et ce résultat coïncide avec l'équation d'onde établie par Hurley qui a utilisé une approche différente basée sur l'invariance Galiléenne [27], [31]-[33].

Remarque

On va vérifier que les composantes u, v et w du spineur satisfont l'équation de Schrödinger

L'équation (3.36) s'écrit aussi

$$\begin{cases} E\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{N}.\boldsymbol{p})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})\boldsymbol{w} = 0, \\ \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{N}^T.\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}/2m, \\ \boldsymbol{w} = -(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}/2m. \end{cases} \tag{3.37}$$

En remplaçant la deuxième et la troisième équation dans la première, on aura

$$\left(E - \frac{p^2}{2m} \right) \boldsymbol{u} = 0. \tag{3.38}$$

Et donc $\boldsymbol{u}$ vérifie l'équation de Schrödinger, ainsi que $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.

3.2.1 Particule de spin 1 dans un champ électromagnétique

On va maintenant introduire le champ électromagnétique pour la particule de spin 1.On reprend le système d'équations (3.37), en faisant la substitution

$$E \to E - eV(x,t), \quad \text{et} \quad p \to p - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x,t), \tag{3.39}$$

Le système devient

$$\begin{cases} (E - eV)\boldsymbol{u} + \left[\boldsymbol{N}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{v} + \left[\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{w} = 0, \\ \boldsymbol{N}^T.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{u} + 2m\boldsymbol{v} = 0, \\ \boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{u} + 2m\boldsymbol{w} = 0. \end{cases} \tag{3.40}$$

En éliminant $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ en faveur de $\boldsymbol{u}$, on obtient

$$\left\{E - eV - \frac{1}{2m}\left\{\left[\boldsymbol{N}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{N}^T.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] + \left[\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\right\}\right\}\boldsymbol{u} = 0, \tag{3.41}$$

Après développement, on aura

$$\left\{E - eV - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{i}{2m}\boldsymbol{s}\left[\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) \times \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\right\}\boldsymbol{u} = 0, \tag{3.42}$$

En tenant compte du résultat de l'équation (2.54) du chapitre précédant, on écrit

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{i}{2m}\frac{e}{c}\boldsymbol{s}.(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{A})\right]\boldsymbol{u} = 0, \tag{3.43}$$

Et avec $\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ et $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$, (3.43) devient

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{s}.\boldsymbol{B}\right]\boldsymbol{u} = 0, \tag{3.44}$$

avec l'introduction du moment magnétique, l'équation (3.44) s'ecrit

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B}\right]\boldsymbol{u} = 0.$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{s}. \tag{3.45}$$

$$\boldsymbol{\mu} = g_{spin}\boldsymbol{\mu}_B\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\mu}_B\boldsymbol{s}. \tag{3.46}$$

3.2.2 Equation de continuité

Comme pour le cas de spin 1/2, l'équation de conservation est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^{+}A\psi\right)+\boldsymbol{\nabla}\left(-\psi^{+}\boldsymbol{B}\psi\right)=0. \tag{3.47}$$

Tel que

$$\rho=\psi^{+}A\psi,\ \boldsymbol{j}=-\psi^{+}\boldsymbol{B}\psi. \tag{3.48}$$

Ici A, $\boldsymbol{B}$ sont les matrices déterminées dans le cas de spin 1.

On va maintenant expliciter l'expression du courant. D'après (3.48) on a

$$\boldsymbol{j}=-\psi^{+}\boldsymbol{B}\psi. \tag{3.49}$$

Avec

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{N}^{T} & 0 & 0\\ \boldsymbol{s} & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

Donc on écrit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j} &= -\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^{+} & \boldsymbol{v}^{+} & \boldsymbol{w}^{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{N}^{T} & 0 & 0\\ \boldsymbol{s} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}\\ &= -\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}^{+}\boldsymbol{N}^{T}+\boldsymbol{w}^{+}\boldsymbol{s} & \boldsymbol{u}^{+}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{u}^{+}\boldsymbol{s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.51}$$

on obtient

$$\vec{\boldsymbol{j}}=-\left(\boldsymbol{u}^{+}\vec{\boldsymbol{N}}\ \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}^{+}\vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}^{+}\vec{\boldsymbol{N}}^{T}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}^{+}\vec{\boldsymbol{s}}\ \boldsymbol{u}\right). \tag{3.52}$$

On va exprimer la première composante du courant à l'aide de l'expression (3.52)

$$j_{1}=-\left(\boldsymbol{u}^{+}\boldsymbol{N}_{1}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}^{+}\boldsymbol{s}_{1}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}^{+}\boldsymbol{N}_{1}^{T}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}^{+}\boldsymbol{s}_{1}\boldsymbol{u}\right). \tag{3.53}$$

En calculant les deux premiers termes, on trouve

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{+}\boldsymbol{N}_{1}\boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix}u_{1}^{+} & u_{3}^{+} & u_{3}^{+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{1}\\ v_{2}\\ v_{3}\end{pmatrix},\\ &= u_{1}^{+}v_{1},\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{+}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{w} &= \begin{pmatrix} u_1^{+} & u_3^{+} & u_3^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \\ &= iu_3^{+}w_2 - iu_2^{+}w_3. \end{aligned} \tag{3.55}$$

De même pour les deux autres termes

$$\boldsymbol{v}^{+}\boldsymbol{N}_1^{T}\boldsymbol{u} = v_1^{+}u_1, \tag{3.56}$$

$$\boldsymbol{w}^{+}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{u} = iw_3^{+}u_2 - iw_2^{+}u_3. \tag{3.57}$$

On remplace dans (3.53)

$$j_1 = -(u_1^{+}v_1 + v_1^{+}u_1 - iu_2^{+}w_3 + iu_3^{+}w_2 - iw_2^{+}u_3 + iw_3^{+}u_2). \tag{3.58}$$

On calcule chaque terme

$$\begin{aligned} u_1^{+}v_1 &= -\frac{1}{2m}u_1^{+}(N_1\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2m}u_1^{+}\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2m}u_1^{+}(p_1u_1 + p_1u_2 + p_1u_3), \end{aligned} \tag{3.59}$$

et

$$\begin{aligned} u_2^{+}w_3 &= -\frac{1}{2m}(s_3\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2m}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{i}{2m}u_2^{+}(-p_2u_1 + p_1u_2). \end{aligned} \tag{3.60}$$

La même chose pour les autre termes, et on écrit les expressions suivantes

$$\begin{array}{r} u_1^{+}v_1 = -\frac{1}{2m}u_1^{+}(p_1u_1 + p_1u_2 + p_1u_3), \\ v_1^{+}u_1 = \frac{1}{2m}(p_1u_1^{+} + p_1u_2^{+} + p_1u_3^{+})u_1, \\ u_2^{+}w_3 = -\frac{i}{2m}u_2^{+}(-p_2u_1 + p_1u_2), \\ u_3^{+}w_2 = -\frac{i}{2m}u_3^{+}(-p_3u_1 + p_1u_3), \\ w_2^{+}u_3 = \frac{i}{2m}(p_1u_3^{+} - p_3u_1^{+})u_3, \\ w_3^{+}u_2 = \frac{i}{2m}(p_2u_1^{+} - p_1u_2^{+})u_2. \end{array} \tag{3.61}$$

On trouve donc pour la première composante du courant

$$j_1 = -(1/2m)\left[-u_1^{+}(\boldsymbol{p}u) + \left(\boldsymbol{p}u^{+}\right)u_1\right] + (1/2m)\left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{u}^{+}s_1\boldsymbol{u}\right)\right]_1. \tag{3.62}$$

Et on déduit l'expression du courant total

$$\vec{\boldsymbol{j}} = (1/2mi)\left[\vec{\boldsymbol{u}}^{+}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\right) + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{+}\right)\vec{\boldsymbol{u}}\right] + (1/2m)\,\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{u}^{+}\vec{s}\boldsymbol{u}\right). \tag{3.63}$$

L'équation (3.63) représente l'équation du courant, où le premier terme est le courant standard d'un champ obéissant à l'équation de Schrödinger, et le second terme représente le courant de spin.

Chapitre 4

Application à l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique [34] [35] est un exemple trés utile en physique [36, 37], il constitue un des systèmes importants, puisque il entre dans beaucoup de problèmes contenant des oscillations quantiques [38].

L'Hamiltonien de l'oscillateur simple est

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{4.1}$$

Avec m est la masse de l'oscillateur harmonique, et ω sa fréquence

Comme on le remarque dans l'expression de l'hamiltonien de cet oscillateur, il possède des termes quadratiques en r.et p Donc dans la substitution qu'on va faire, on impose qu'elle soit linéaire en r, pour qu'on puisse trouver le terme qui est similaire à l'expression de l'hamiltonien.

4.1 Particule de spin 1/2

Comme application de l'équation (2.33) en prend l'exemple du potentiel de l'oscillateur harmonique

On choisit donc la substitution suivante

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - im\omega\eta\boldsymbol{r}, \tag{4.2}$$

$\boldsymbol{p}$ étant l'impulsion de l'oscillateur, ω sa fréquence, et $\boldsymbol{r}$ est le vecteur position($\boldsymbol{r} \equiv x_i$) ,et η est une matrice tel que

$$\eta = 2A^2 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

On utilise la substitution (4.2) dans l'équation (2.21)

$$(AE + \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{p} - im\omega\eta\boldsymbol{r}) + C)\,\psi = 0, \tag{4.4}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},\ C = 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

et le spineur à deux composante s'écrit

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

l'équation (4.4) s'écrit donc sous la forme

$$\begin{pmatrix} E - im\omega\sigma_i r_i & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & im\omega\sigma_i r_i + 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

Avec $\sigma_i p_i = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$. On arrive finalement à écrire un système d'équation couplés en φ et χ

$$2m\chi = -\sigma_i\,(p_i - im\omega r_i)\,\varphi, \tag{4.8}$$

$$E\varphi = -\sigma_i\,(p_i + im\omega r_i)\,\chi. \tag{4.9}$$

Pour découpler le système d'équations on multiplie (4.8) par $\sigma_i\,(p_i + im\omega r_i)$ ce qui donne

$$2m\sigma_i\,(p_i + im\omega r_i)\,\chi = -\sigma_i\,(p_i + im\omega r_i)\,\sigma_j\,(p_j - im\omega r_j)\,\varphi, \qquad (i,\ j = 1, 2, 3). \tag{4.10}$$

En utilisant (4.9) on trouve

$$(2mE)\,\varphi = [\sigma_i\sigma_j\,(p_i + im\omega r_i)\,(p_j - im\omega r_j)]\,\varphi. \tag{4.11}$$

On a aussi les matrices de Pauli qui vérifient l'identité suivante

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{4.12}$$

δ_{ij} est le kronecker, et ϵ_{ijk} est le symbole de Levy-Cevita. On remplace $\sigma_i\sigma_j$ dans (4.11) on aura

$$(2mE)\varphi = (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k)\left(p_ip_j - im\omega p_ir_j + im\omega r_ip_j + m^2\omega^2 r_ir_j\right)\varphi, \qquad (4.13)$$

en développant le côté droit de (4.13)

$$\begin{aligned}(2mE)\varphi &= [\delta_{ij}p_ip_j + im\omega\delta_{ij}\left(r_ip_j - p_ir_j\right) + m^2\omega^2\delta_{ij}r_ir_j + i\epsilon_{ijk}\sigma_kp_ip_j \\ &\quad -m\omega\epsilon_{ijk}\sigma_k\left(r_ip_j - p_ir_j\right) + im^2\omega^2\epsilon_{ijk}\sigma_kr_ir_j]\varphi, \qquad (4.14)\end{aligned}$$

qu'on peut écrire de cette manière

$$(2mE)\varphi = \left[p^2 + m^2\omega^2r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - 2m\omega\sigma_k\epsilon_{ijk}(r_ip_j)\right]\varphi, \qquad (4.15)$$

en utilisant la relation $\epsilon_{ijk}r_ip_j = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_k$,on aura

$$2mE\varphi = \left[p^2 + m^2\omega^2r^2 - 3\hbar m\omega - 2m\omega(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\sigma\right]\varphi, \qquad (4.16)$$

l'équation en fonction de φ s'écrit

$$E\varphi = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{2\omega}{\hbar}\left(\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}\right)\right]\varphi. \qquad (4.17)$$

où

$$\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{2}\sigma, \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}. \qquad (4.18)$$

$\boldsymbol{L}$ représente le moment angulaire, $\boldsymbol{s}$ représente le moment intrinsèque ou spin de la particule. L'équation (4.17) correspond à l'oscillateur harmonique standard de fréquence ω avec l'addition de terme du couplage spin-orbite $(\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s})$, de force $-\frac{2\omega}{\hbar}$. Ce résultat coïncide avec celui obtenu par la limite non relativiste de l'oscillateur de Dirac.

4.2 Particule de spin 1

On reprend l'equation l'équation pour la particule de spin 1

$$(AE + \boldsymbol{B}.\,\boldsymbol{p} + 2mC)\psi = 0. \qquad (4.19)$$

avec

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\hbar^{-1}\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{N}&\boldsymbol{s}\\\boldsymbol{N}^T&0&0\\\boldsymbol{s}&0&0\end{pmatrix},C=2m\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\tag{4.20}$$

On introduit dans (4.19) le potentiel de l'oscillateur harmonique via la substitution suivante

$$\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}-im\omega\eta\boldsymbol{r},\tag{4.21}$$

où

$$\eta=2A^2-1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\tag{4.22}$$

L'équation d'onde se transforme

$$\begin{pmatrix}E&h^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}+ih^{-1}m\omega\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}&h^{-1}\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}+ih^{-1}m\omega\boldsymbol{s}\boldsymbol{r}\\h^{-1}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{p}-ih^{-1}m\omega\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{r}&2m&0\\h^{-1}\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}-ih^{-1}m\omega\boldsymbol{s}\boldsymbol{r}&0&2m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{w}\end{pmatrix}=0,\tag{4.23}$$

cette dernière peut s'écrire sous forme de système d'équations couplées en $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$

$$\begin{aligned}E\boldsymbol{u}&=-\hbar^{-1}\left[(\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}+imw\boldsymbol{r})\boldsymbol{w}\right],\\2m\boldsymbol{v}&=-\hbar^{-1}\boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r})\boldsymbol{u},\\2m\boldsymbol{w}&=-\hbar^{-1}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

En multipliant la première équation dans le système (4.24) par $2m$, et en remplaçant $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ par leurs valeurs en utilisant la deuxième et la troisième, on obtient l'équation d'onde pour les champs $\boldsymbol{u}$ qui s'écrit sous la forme

$$2mE\boldsymbol{u}=\hbar^{-2}\left[(\boldsymbol{N}\boldsymbol{p}_+)(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{p}_-)+(\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}_+)(\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}_-)\right]\boldsymbol{u}.\tag{4.25}$$

Avec $\boldsymbol{p}_\pm=\boldsymbol{p}\pm im\omega\boldsymbol{r}$.

On utilise (3.7) et (3.8) du chapitre précédent, on montre que N_i et s_i vérifient l'identité suivante

$$N_iN_j^T+s_is_j=i\hbar\epsilon_{ijk}s_k+\hbar^2\delta_{ij},\tag{4.26}$$

l'évaluation du côté droit de (4.25) donne

$$\begin{aligned} 2mE\boldsymbol{u} &= \hbar^{-1}(N_i N_j^T + s_i s_j)[p_i p_j - im\omega p_i r_j + im\omega r_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j]\boldsymbol{u} \\ &= \hbar^{-1}(i\hbar\epsilon_{ijk}s_k + \hbar^2\delta_{ij})[p_i p_j - im\omega p_i r_j + imwr_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j]\boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

en utilisant l'expression (4.26) on obtient

$$\begin{aligned} 2mE\boldsymbol{u} &= \hbar^{-2}[i\hbar\epsilon_{ijk}s_k p_i p_j + \hbar^2 p^2 + \hbar m\omega\epsilon_{ijk}s_k(p_i r_j - r_i p_j) + i\hbar^2 m\omega\delta_{ij}(r_i p_j - p_i r_j) \\ &\quad -i\hbar m^2\omega^2\epsilon_{ijk}s_k r_i r_j + \hbar^2 m^2\omega^2 r^2]\boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

en utilisant les relations $[r_i, p_i] = i\hbar$, et $\epsilon_{ijk}r_i p_j = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_k$. On aura finalement

$$E\ \boldsymbol{u} = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{\omega}{\hbar}(\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s})\right]\boldsymbol{u}. \tag{4.29}$$

Cette équation décrit l'oscillateur harmonique isotropique avec addition d'un terme du couplage spin-orbite de force $(-\omega/\hbar)$. Ce résultat coïncide avec la limite non relativiste de l'oscillateur DKP.

Conclusion

A travers ce manuscrit, nous avons établi à l'aide de la généralisation de la procédure de linéarisation de Dirac-Lévy-Leblond l'équation d'onde non relativiste pour une particule de spin 1. Le premier chapitre a été consacré à l'étude de quelques équations relativistes, où on a remarqué les difficultés de l'équation de Klein-Gordon qui ont poussé Dirac à rechercher une forme linéaire en p et E. Et puis nous l'avons présenté telle qu'elle a été donnée par Dirac lui-même, et aussi on a vu la forme covariante de cette dernière, et trouvé les densités et courant de probabilité de chaque équation, après on a présenté une équation relativiste qui est similaire à celle de Dirac dans la forme covariante qui est l'équation de Duffin- Kemmer- Petiau avec les matrices γ sont remplacées par des matrices β qui sont à cinq dimension pour les particules de spin 0 et à dix pour les particules de spin 1.

Dans le deuxième chapitre, nous avons dérivé l'équation de Lévy- Leblond en utilisant une nouvelle méthode de linéarisation. Puis une généralisation de la méthode précédente a été faite dans le troisième chapitre, où la prise en considération de la fonction d'onde ψ dans l'identification, nous a permi de trouver une équation adaptée à une particule de spin 1, et qui est établi par Hurley, en utilisant une méthode différente basée sur l'invariance Galiléenne.

Une application à l'oscillateur harmonique dans le dérnier chapitre a été fait, où nous avons trouvé pour le cas de spin 1/2 la limite non relativiste de l'équation de Dirac, et celle de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau pour l'équation du spin 1.

La méthode de linéarisation de l'équation de Schrödinger peut se généraliser au spin supérieur, et l'application de l'oscillateur harmonique nous a aidé à conclure qu'avec la forme linéaire le terme du couplage apparait directement avec les calculs, sans avoir besoin de le rajouter d'une manière "ad hoc". Ce qui nous permet de remarquer que le moment magnétique est une conséquence de linéarisation de l'équation d'onde et non pas un terme relativiste. En introduisant le champ électromagnétique pour les particules de spin 1/2 et 1, on a pu déduire la valeur du facteur g de Landé, ainsi même une théorie non relativiste peut prévoir la valeur du moment magnétique intrinsèque d'une particule possédant un spin différent de zéro.

Bibliographie

[1] M. Woodhouse, thèse (2012).

[2] H.Kragh, A J Phys 52, 1024 (1984).

[3] A.Messiah :Mécanique Quantique,Tome 2 (Dunod edition 1995).

[4] Moreno, M, Zentella, A : J. Phys. A, Math.Gen. 22, L821 (1989).

[5] Bentez, J. Martinez y Romero, R. P, Nuez-Yepez, H.N, Salas-Brito, A.L : Phys. Rev. Lett. 64, 1643 (1990).

[6] Kukulin, V.I, Loyola, G, Moshinsky, M : Phys. Lett. A 158, 19 (1991).

[7] D.Itô,K.Mori,and E.Carriere,Nuovo Cimento A 51,1119(1967).

[8] M.Moshinsky and A .Szczepaniak,J.phys.A 22,L817(1989).

[9] A.Boumali,Thèse, Laboratoire de physique théorique appliquée(LPTA),(2008).

[10] M. Bednar, J. Ndimubandi, and A. G. Niktin Can. J. Phys. 75 : 283-290 (1997).

[11] C.Quesne and M.Moshinsky .J. Phys. A : Math Gen .23, 2263 (1990).

[12] J. Beckers and N. Debergh. Phys. Rev. D : Part. Fields, 42, 1255 (1990).

[13] M. Moshinsky, G. Loyola, and C. Villegas . J. Math. Phys. 32, 373 (1991).

[14] M. Moshinsky and G. Loyola. NASA Conf. Publ. 3197, 405 (1993).

[15] A. Del Sol Mesa and M.Moshinsky. Phys. A : Math.Gen .27, 4685 (1994).

[16] J. Beckers, N. Deberg, and A. G. Nikitin. J. Math. Phys. 33, 3387 (1992).

[17] N. Deberg, J. Ndimubandi, and D. Strivay. Z. Phys. C : Part. Fields, 56, 421 (1992).

[18] V.V.Dvoyeglazov. Nouvo Cimento, A, 107, 1785 (1994).

[19] A. Proca, Comp. Ren. Acad. Sci. Paris 202, 1366 (1936).

[20] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1964).

[21] G.Petiau,university of Paris thesis(1936).

[22] R.J.Duffin, phys.Rev 54,1114(1938).

[23] N. Kemmer, Proc.Roy.Soc.A 173, 91-116 (1939).

[24] Y. Nedjadi et R. C. Barrett J.Phys.A 27, 4301 (1994).

[25] W.Greiner,Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations (Springer, Berlin, 1990).

[26] H.Hassanabadi et Z.Molaee Chin.Phys Vol.21, No .12 (2012).

[27] Y.Kasri, A.Bérard, Y.Grandati and L.Chetouani, Int J Theor Phys (2012).

[28] W.Greiner, Quntum Mechanics :An Introduction (Springer, Berlin, 1989).

[29] J. M. Lévy-Leblond,commun Math.Phys. 6 286 (1967).

[30] R. G. Beil. Peirce, Clifford and Dirac.International Journal of Theoretical Physics, Vol, 43, No, 5, May 2004.

[31] Hagen, C. R. : Commun. Math. Phys. 18, 97 (1970).

[32] Hagen, C. R., Hurley, W. J. : Phys. Rev. Lett. 26, 1381 (1970).

[33] Hurley, W. J. : Phys. Rev. D 3, 2339 (1971).

[34] L. E. Balentine : Quantum Mechanics, Modern Developpement, World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd (1998).

[35] M.Le Bellac, Physique Quantique 2E Edition, CNRS Editions (2007).

[36] D.Sénéchal,departement de physique, faculté des sciences université de Sherbrook.

[37] C Aslangul,Mécanique quantique.(De Boeck, 2007)

[38] Y. Kasri, Thèse, Laboratoire de Physique Theorique (2008).