

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Abderrahmane Mira de Béjaia**  
**Faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur**  
**Département de Génie Civil**

# **MEMOIRE**

Présenté par M<sup>r</sup>  
HADDI Idir

Ingénieur d'état en Génie Civil

En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER en Génie Civil

Option : Matériaux et structures

**THEME**

**Modélisation par la méthode des éléments finis du problème de contact avec frottement en milieu élastique endommageable**  
*(Application au béton)*

Soutenu le :

Devant le jury composé de :

Président : M<sup>r</sup> CHELOUAH . N.  
Examineur : M<sup>r</sup> HANNACHI . N.  
Examineur : M<sup>r</sup> KADRI . M.  
Rapporteur : M<sup>r</sup> TAHAKOURT . A.  
Invité : M<sup>r</sup> BECHEUR . A.

M.C. Université de Béjaia  
Pr. Université de T.O  
M.C. Université de Béjaia  
M.C. Université de Béjaia  
C.C. Université de Béjaia

## *Table des matières*

<b>Introduction générale .....</b>	<b>04</b>
<b>Chapitre I : <i>Comportement du béton sous différentes sollicitations</i>.....</b>	<b>07</b>
<b>I.1) Introduction .....</b>	<b>08</b>
<b>I.2) Hétérogénéité du béton .....</b>	<b>08</b>
<b>I.3) Comportement mécanique du béton .....</b>	<b>10</b>
I.3.a) Comportement en compression .....	10
I.3.b) Comportement en traction .....	14
I.3.c) Comportement cyclique compression- traction .....	17
<b>I.4) Conclusion .....</b>	<b>18</b>
<b>Chapitre II : <i>Formalisme thermodynamique des processus irréversibles</i>...</b>	<b>19</b>
<b>II.1) Avant- propos .....</b>	<b>20</b>
<b>II.2) Equations de la mécanique des milieux continus .....</b>	<b>20</b>
<b>II.3) Lois de conservation, premier et deuxième principe .....</b>	<b>21</b>
<b>II.4) Méthode de l'état local .....</b>	<b>23</b>
II.4.1) Variables observables .....	24
II.4.2) Variables internes .....	24
II.4.3) Potentiel thermodynamique, lois d'état .....	25
II.4.4) Potentiel de dissipation, lois complémentaires .....	27
II.4.4.1) Dissipation intrinsèque, dissipation thermique .....	27
II.4.4.2) Potentiel de dissipation .....	27
<b>II.5) Application à l'élasticité .....</b>	<b>29</b>
II.5.1) Potentiel thermodynamique .....	29
II.5.2) Elasticité linéaire isotrope .....	30
<b>II.6) Conclusion .....</b>	<b>31</b>
<b>Chapitre III : <i>Mécanique de l'endommagement appliquée au béton</i> .....</b>	<b>32</b>
<b>III.1) Introduction .....</b>	<b>33</b>
<b>III.2) Domaine de validité, début et fin de l'endommagement .....</b>	<b>35</b>
<b>III.3) Aspects phénoménologiques de l'endommagement .....</b>	<b>35</b>
III.3.1) Variable d'endommagement .....	35
III.3.2) Variable d'états utilisées .....	37
III.3.3) Contraintes effectives .....	37
III.3.4) Principes d'équivalence en déformation .....	39
III.3.5) Principes d'équivalence en énergie élastique .....	39
III.3.6) Principes d'équivalence en énergie totale .....	39
III.3.7) Mesure de l'endommagement .....	40
III.3.7.1) Endommagement critique de rupture .....	40
III.3.7.2) Mesure de l'endommagement l'aide de la variation du module d'élasticité .....	41
III.3.8) Formulation thermodynamique de l'endommagement .....	42
III.3.8.1) Potentiel d'état - Lois d'état .....	42
III.3.8.1-a) Potentiel d'état .....	42
III.3.8.1-b) Loi d'état .....	43



V.1.1.4) Loi de comportement - Loi de Hook .....	92
V.1.1.4-a) Cas d'un matériau isotrope .....	92
V.1.1.4-b) Cas d'un matériau isotrope.....	92
V.1.2) Méthode énergétique en élasticité .....	93
V.1.2.1) Rappelle du théorème des puissances virtuelles .....	93
V.1.2.2) Les différentes formulations.....	93
V.1.2.2-a) Formulation P.P.V .....	94
V-1.2.2.b) Energie Potentielle .....	94
V-1.2.2.c) Energie Potentielle complémentaire .....	94
V-1.2.2.d) Formulation mixte.....	95
<b>V-1.3) Principe de la discrétisation .....</b>	<b>96</b>
V-1.3.1) Formulation de Galerkin .....	96
V-1.3.1.1) Formulation en déplacements .....	97
V-1.3.1.2) Formulation en contraintes .....	97
V-1.3.1.3) Formulation mixte .....	97
<b>V-1.4) Intégration numérique .....</b>	<b>98</b>
<b>V-1.5) Technique de résolution éléments finis .....</b>	<b>98</b>
<b>V-1.6) Quelques éléments finis .....</b>	<b>98</b>
V-1.6-1) Élément 1-D .....	98
V-1.6-1.a) Barre à champ linéaire (2 noeuds) .....	98
V-1.6-1.b) Barre à champ quadratique (3noeuds) .....	99
V-1.6-1.c) Barre à 2 noeuds et 4 ddl .....	100
V-1.6-2) Élément 2-D .....	100
V-1.6-2.a) Isoparamétrique linéaire.....	100
V-1.6-2.a.1) Le triangle .....	100
V-1.6-2.a.2) Le quadrangle .....	101
V-1.6-2.b) Isoparamétrique non inéaire.....	101
<b>V-2) Modélisation du comportement endommageable du problème de contact avec frottement « application au béton ».....</b>	<b>102</b>
V-2.1) Problèmes liés à la méthode des éléments finis (en théorie locale).....	102
V-2.1.1) Effet d'alignement .....	102
V-2.1.1) Dépendance des résultats en fonction du maillage .....	104
<b>Chapitre VI : Résultats et discussions.....</b>	<b>106</b>
<b>VI-1) Rappel du modèle de MAZARS .....</b>	<b>107</b>
VI-1.1) Récapitulatif du modèle de MAZARS en approche locale .....	107
VI-1.1-a) Lois d'endommagement.....	107
VI-1.1-b) Influence de la valeur des différents paramètres.....	108
VI-1.2) Récapitulatif du modèle de MAZARS en approche non locale.....	111
<b>VI-2) Modélisation du comportement d'un massif en béton selon le modèle de MAZARS.....</b>	<b>111</b>
VI-2.1) Comportement en compression en théorie locale.....	111

VI-2.2) Comportement en traction en théorie locale.....	112
<b>VI-3) Modélisation du problème de contact endommageable avec frottement .....</b>	<b>113</b>
VI-3.1) Résultats en théorie locale .....	114
VI-3.2) Résultats en théorie non locale.....	114
<b>VI-4) Effet d'alignement .....</b>	<b>117</b>
<b>VI-5) Simulation de l'essai de fendage (Effet de la localisation).....</b>	<b>121</b>
<b>Conclusion Générale.....</b>	<b>125</b>
<b>Annexe.....</b>	<b>128</b>

## *Liste des figures*

Figure.I.1:	Dimensions des pores et phases solides présentes dans la pâte de ciment (Mehta-1986).....	09
Figure.I.2:	Structure hétérogène du béton. Diamètre maximal des grains = 8 mm .....	09
Figure.I.3 :	Comportement du béton en compression simple (Extrait de Chen 1982).....	10
Figure.I.4	Comportement du béton en compression simple (Extrait de Chen 1982).....	11
Figure.I.5 :	Résultats d'observation aux rayons X d'une éprouvette en compression (Robinson 1965).....	12
Figure.I.6 :	Comportement cyclique du béton en compression simple (Karsan 1969).....	12
Figure .I.7 :	Essais de compression triaxiale (Jamet & al. 1984).....	13
Figure .I.8 :	Essais de compression triaxiale (Jamet & al. 1984).....	14
FigureI.9-a:	Comportement du béton en traction uni axiale.....	15
FigureI.9-b:	Comportement du béton en traction directe (Terrin 1980).....	15
Figure I.10 :	Comportement du béton en traction directe (Terrin 1980).....	16
Figure I.11 :	Enveloppe limite biaxiale du béton déterminée par Kupfer & al. [Kup69].....	17
Figure I.12 :	Essai P.I.E.D Comportement uniaxial du béton sous chargement Cyclique (Ramtani 1990).....	17
Figure II.1 :	Milieu matériel isolé .....	20
Figure III.1:	Représentation schématique de l'effet de l'endommagement sur la surface résistante.....	36
Figure III.2:	Élément endommagé.....	36
Figure III.3:	Représentation schématique du principe de l'équivalence en déformation.....	38
Figure III.4:	Représentation schématique du principe de l'équivalence en énergie totale.....	40
Figure III.5:	Représentation de la courbe $c(\omega)$ d'un matériau élasto – fragile dans le plan $\sigma_3 = 0$ .....	51
Figure III.6:	Représentation de la courbe $\sigma(\varepsilon)$ théorique en comparant avec la formule de Popovic issue des résultats expérimentaux.....	52
Figure III.7:	Représentation de la courbe $\sigma(\varepsilon)$ et des boucles d'hystérésis en compression cyclique uniaxiale par la théorie endochronique en comparant avec la théorie de Sinha et Col.....	53
Figure III.8:	Courbes contraintes – déformations longitudinales en compression simple et en sollicitation triaxiale (Benouniche.).....	55
Figure III.9:	Modèle de comportement de béton en traction.....	56
Figure III.10:	Représentation du domaine élastique du béton en définissant le seuil d'endommagement.....	58
FigureIII.11:	Comportement expérimental du béton sous a) compression, b) traction.....	59
FigureIII.12:	Représentation de deux modèles d'endommagement différents .....	61
FigureIII.13:	Adoucissement de contrainte.....	63
FigureIII.14 :	Profil de déformation obtenu analytiquement (Pijaudier-Cabot et Bazant 1987).....	72
Figure IV.1 :	Schéma de deux corps élastiques en contact unilatéral .....	76
Figure IV.2 :	Régularisation de loi de contact unilatéral .....	78
Figure IV.3:	Loi de Coulomb .....	78
Figure IV.4:	Cône de Coulomb en 2D .....	79
Figure IV.5:	Cône de Coulomb en 3D .....	79
Figure IV.6:	Représentation bidimensionnelle de la représentation d'un nœud dans un domaine délimité par un segment .....	83
Figure V.1:	Schématisation d'un milieu matériel isolé .....	89
Figure.V.2:	Schématisation des relations entre déplacements - contraintes – déformations .....	89
Figure V.3:	Schématisation de la déformation de deux points voisins suite à un chargement.....	90
Figure V.4:	Représentation des contraintes sur un parallélépipède .....	91
Figure V.5:	Élément barre à deux nœuds 1-D.....	99
Figure V.6:	Élément barre à trois nœuds 1-D.....	99
Figure V.7:	Élément barre à trois nœuds 1-D.....	100
Figure V.8:	Élément triangulaire isoparamétrique linéaire 2-D.....	100
Figure V.9:	Raccordement de deux maillages par des éléments triangulaires.....	101
FigureV.10:	Élément quadrangulaire isoparamétrique linéaire 2-D.....	101
Figure V.11:	Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement a) Alignement des éléments vers la gauche en local b) Alignement des éléments vers la droite en local.....	103
FigureV.12:	Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement a) Alignement des éléments vers la gauche en non local b) Alignement des éléments vers la droite en non local.....	103

	Effet du raffinement du maillage sur la valorisation d'endommagement	
Figure V.13:	a) Raffinement de la zone de contact avec 12 éléments triangulaires en non local ( $D_{\max} = 0,19$ ) b) Raffinement de la zone de contact avec 20 éléments triangulaires en non local ( $D_{\max} = 0,21$ )..	104
	Effet du raffinement du maillage sur la valorisation d'endommagement	
Figure V.14:	a) Raffinement de la zone de contact avec 12 éléments quadrilatéraux en non local ( $D_{\max} = 0,27$ ) b) Raffinement de la zone de contact avec 20 éléments quadrilatéraux en non local ( $D_{\max} = 0,31$ )	105
Figure VI.1 :	Influence des paramètres A et B .....	109
Figure VI.2:	Conséquence d'une variation de $\mathcal{E}_{DO}$ .....	110
Figure VI.3:	Conséquence d'évolution de A et B sur la forme de la courbe $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ en compression selon MAZARS .....	111
Figure VI.4:	Carte d'endommagement en compression selon le modèle MAZARS ( $D=0.91$ ).....	112
Figure VI.5:	Courbe efforts – déplacements en compression selon le modèle MAZARS.....	112
Figure VI.6:	Carte d'endommagement en traction selon le modèle MAZARS ( $D=0.97$ ).....	113
Figure VI.7:	Courbe efforts – déplacements en traction selon le modèle MAZARS.....	113
Figure VI.8:	Influence du frottement sur la localisation de l'endommagement.....	114
Figure VI.9:	Influence du frottement sur les valeurs des réactions normales et tangentielles .....	114
Figure VI.10:	Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement en local.....	117
Figure VI.11:	Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement en non local.....	118
Figure VI.12:	contraintes principales sigma 1-1 en local .....	118
Figure VI.13:	contraintes principales sigma 1-1 en non local .....	118
Figure VI.14:	contraintes principales sigma 2-2 en local .....	118
Figure VI.15:	contraintes principales sigma 2-2 en non local .....	119
Figure VI.16:	contraintes de Von Mises en local.....	119
Figure VI.17:	contraintes de Von Mises en non local.....	120
Figure VI.18:	Essai brésilien (Essai de fendage).....	122
Figure VI.19:	Distribution de l'endommagement dans un essai brésilien en théorie locale.....	123
Figure VI.20:	Distribution de l'endommagement dans un essai brésilien en théorie non locale.....	124

**Modélisation par la méthode des éléments finis du Problème de contact avec frottement en milieu élastique endommageable.**  
**« Application au béton »**

**RESUME :**

*L'endommagement du béton provient de modifications internes irréversibles au niveau de la microstructure. Il se traduit au niveau macroscopique par une variation, lors d'un chargement, des propriétés mécaniques notamment la diminution du module d'Young dans le domaine élastique. Par ailleurs, le phénomène de contact entre éléments de structure est inévitable voir indispensable pour la transmission de charges et des sollicitations. Les surfaces de contact sont de nature variable au cours d'un chargement. Ceci induit des non linéarités, dites de contact, dues à la variation des conditions aux limites. Le but de notre travail est de modéliser le couplage élasticité – endommagement et contact avec frottement entre éléments de structures en béton. Pour ce dernier, plusieurs lois de comportement endommageable existent dans la littérature. Il s'agit entre autres de théories locales et non locales. A cet effet, nous nous proposons de modéliser par éléments finis les modèles endommageables de MAZARS l'un en local l'autre en non local, et d'étudier parallèlement l'influence du contact avec frottement sur les résultats obtenus.*

**Mots clés :** *endommagement – contact – frottement – théories locales et non locales – béton.*

**ABSTRACT:**

*The damage of the concrete comes from irreversible internal modifications on the level of the microstructure (microscopic cracks, microscopic empties,). It is showed at the macroscopic level by a variation of the mechanical proprieties, during a loading, in particular reduction in the Young modular in the elastic range.*

*In addition, the phenomenon of contact between elements of structures is inevitable and indispensable for the transmission of sollicitations and loads. Surfaces of contact are of nature variable during a loading. That causes non linearity known as of contact due to the variation of the boundary conditions. In this paper, the goal of our work is to model the coupling elasticity - damage and contact with friction between elements of the concrete structure. For this material, several laws of endommageable behaviours exist in the literature. Among these laws, we can find the local and non local theories. For this purpose, we propose to model by finite elements the damage laws of MAZARS one in local and the other in no local theories, and in parallel, we will study the influence of the contact with friction on the results to be obtained.*

**Keywords:** *damage - contact - friction - local and no local theories - concrete.*



## *Introduction générale*

## Introduction générale

Les raisons essentielles faisant que le béton est devenu le plus utilisé des matériaux de construction jusqu'à présent, sont le fait qu'il est confectionné à base de matériaux suffisamment disponibles et sa simplicité de préparation mais aussi que, sans grande qualification, il est possible de réaliser un béton de qualité satisfaisante. Il n'est en conséquence pas surprenant que l'on se soit assez peu intéressé aux bases physiques des propriétés de ce matériau.

Néanmoins, les structures en béton deviennent aujourd'hui de plus en plus sophistiquées. Les conditions d'utilisation du matériau sont de plus en plus sévères. Il est donc essentiel pour que l'emploi du béton, tout en restant économique, se fasse en toute sécurité, que le comportement des ouvrages en service puisse être simulé avec précision.

La conception actuelle de la plus part des ouvrages s'effectue dans le cadre de code de calculs dont les principes sont basés sur la notion « d'états limitent », qui définissent la sécurité par rapport à un état de ruine des structures calculées. Cette façon d'aborder les problèmes est intéressante, cependant les modèles de calcul utilisés restent simples et limités. Si ces modèles sont suffisants dans bien des cas, des lacunes importantes apparaissent lorsqu'on doit assurer la sécurité et la durabilité d'ouvrages. Ces lacunes ont conduit au développement de recherches visant d'une part à mieux connaître les performances mécaniques du béton et d'autre part à améliorer les techniques de calcul.

Cependant, le choix d'un modèle adéquat au béton est très difficile, vu qu'il présente certaines particularités telles que :

- Non homogénéité
- La dissymétrie de comportement entre traction et compression
- L'endommagement par microfissuration qui constitue la phase essentielle du comportement mécanique.

L'endommagement du béton provient de modifications internes irréversibles au niveau de la microstructure. Il se traduit au niveau macroscopique par une variation, lors d'un chargement, des propriétés mécaniques notamment la diminution du module d'Young dans le domaine élastique. Par ailleurs, le phénomène de contact entre éléments de structure est inévitable voir indispensable pour la transmission de charges et des sollicitations. Les surfaces de contact sont de nature variable au cours d'un chargement. Ceci induit des non linéarités, dites de contact, dues à la variation des conditions aux limites.

Le but de cette étude a donc été de modéliser le couplage élasticité – endommagement et contact avec frottement entre éléments de structures en béton. Pour ce dernier, plusieurs lois de comportement endommageable existent dans la littérature. Il s'agit entre autres de théories

## Introduction générale

locales et non locales. A cet effet, nous nous proposons de modéliser par éléments finis les modèles endommageables de MAZARS l'un en local l'autre en non local, et d'étudier parallèlement l'influence du contact avec frottement sur les résultats obtenus.

Ce mémoire comprend six chapitres.

Le premier chapitre consiste en de brefs rappels des aspects phénoménologiques du comportement du béton sous différentes sollicitations après avoir donné sa définition.

Dans le second chapitre le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles sera exposé.

La question qui se posera ensuite est de savoir quand et comment l'endommagement évolue. La réponse sera donnée à partir d'une approche thermodynamique, où l'état local du matériau sera défini par la déformation macroscopique  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$  et la variable interne  $D$ . Cependant, plusieurs modèles en approche locale seront abordés. Nous signalerons au passage les limites et les insuffisances de cette approche locale, puis nous présenterons un modèle amélioré (modèle de MAZAR) issu de théorie récente appelée non locale en vue de remédier aux défauts de la théorie locale. Cela fera l'objet du chapitre trois.

Le quatrième chapitre est consacré au problème de contact unilatéral avec frottement entre plusieurs corps déformables. Dans ce chapitre, nous commencerons par la formulation du problème et les principales lois de frottement existantes. Ensuite nous aborderons le traitement numérique du problème de contact avec frottement de Coulomb par les différentes méthodes.

Au chapitre cinq, nous présenterons la modélisation par la méthode des éléments finis du problème de contact avec frottement en milieu élastique endommageable. Nous débuterons le chapitre par un bref aperçu sur la méthode des éléments finis et discuterons les problèmes qu'ils lui sont liés dans le cadre des théories locales. Par la suite nous présenterons la modélisation du couplage endommagement – contact et frottement.

Enfin le dernier chapitre présente des exemples d'applications numériques en deux dimensions. En plus de simulation de l'essai de fendage (essai brésilien) en vue de faire apparaître le phénomène de localisation en utilisant les deux approches locales et non locales et discuterons ainsi tous les résultats obtenus.

*Chapitre I :*

**Comportement du béton sous différentes  
Sollicitations**

## I-1) Introduction

Aujourd'hui, le béton est le matériau fréquemment utilisé dans la réalisation de plusieurs ouvrages, tels que les bâtiments, ponts, barrages, centrales nucléaires... Il est nécessaire d'assurer leur sécurité et de prédire de façon fiable leur tenue en service, une défaillance pouvant avoir des conséquences humaines et économiques graves. Les tests expérimentaux à une échelle réelle étant totalement irréalisables. Depuis ces trente dernières années, de nombreuses études ont été effectuées en vue de modéliser le béton de façon la plus réaliste possible. En effet, une modélisation précise permet non seulement d'évaluer le risque de ruine, mais aussi d'acquiescer une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Cependant, de par son hétérogénéité, le béton présente un comportement mécanique très complexe et la formation de fissures dans le matériau est indéniablement le phénomène qui gouverne la réponse d'une structure en béton. De nombreux modèles sont donc proposés dans la littérature mais bien souvent ces modèles ont été développés pour être appliqués à une étude de cas précis. En conséquence, choisir un modèle spécifique devient autant difficile que l'application à laquelle il est destiné.

## I-2) L'hétérogénéité du béton

Le béton est un composé multiphasique constitué d'un mélange de granulats et de pâte, elle-même constituée de ciment et d'eau. La pâte de ciment représente 25 à 40 % du volume total du béton. Chaque constituant a un rôle bien défini, celui de liant pour la pâte de ciment, celui de remplissage atténuateur de variations volumiques (retrait) et source de résistance pour les granulats (sable, gravier, cailloux.) La répartition et la géométrie des constituants ne sont pas connues a priori et présentent souvent une dispersion importante. A cette hétérogénéité de composition vient s'ajouter une hétérogénéité dite structurelle. Elle consiste en l'existence de défauts initiaux (microfissures) au sein de la microstructure. La plupart de ces défauts se situent à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment, cette zone est souvent le lien le plus faible du matériau. Il existe aussi des microfissures qui peuvent être générées dans le ciment par différents facteurs, tels que le retrait (diminution du volume apparent de la matière) hydraulique engendré par une évaporation d'eau et le retrait thermique engendré par une variation de température.

Les mécanismes d'hydratation du ciment créent au sein du béton un espace poreux. On distingue traditionnellement la porosité ouverte (dont les pores communiquent entre eux) de la porosité fermée (dont les vides se trouvent isolés les uns des autres.) Le schéma présenté à la

figure I.1 illustre la répartition des dimensions des différentes phases solides et poreuses que l'on rencontre au sein de la matrice cimentaire du béton.

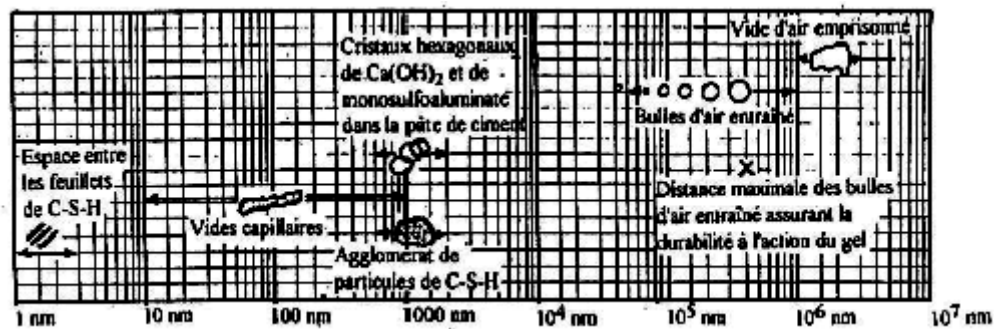


Figure I-1 : Dimensions des pores et phases solides présentes dans la pâte de ciment [1].

Lorsque cette structure est soumise à une sollicitation (chargement), des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées dues à des déformations incompatibles entre les granulats et la matrice de ciment. Lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent et se connectent éventuellement entre elles pour former une macrofissure entraînant la rupture du matériau, ce qui se traduit à l'échelle macrostructurale par une diminution des contraintes accompagnée d'une augmentation des déformations. Ce comportement dit adoucissant ou quasi-fragile est associé à un phénomène de localisation des déformations. En effet, le mode de déformation est non homogène, c'est-à-dire que les déformations se concentrent dans des zones localisées de faible dimension (le long des macrofissures dans le cas du béton) alors que tout le reste du matériau a tendance à se décharger. De part sa nature hétérogène, le béton présente donc un comportement mécanique très complexe englobant un comportement fortement non linéaire sous un état de contrainte multiaxial, une fissuration progressive induite par des contraintes ou des déformations de tension conjuguée à un adoucissement en déformation, et un comportement dépendant du temps tel que le fluage et le retrait.

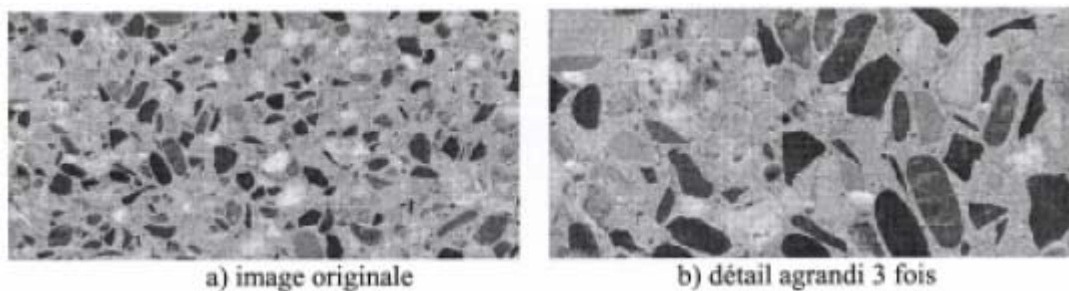


Figure I-2 : Structure hétérogène du béton. Diamètre maximal des grains = 8 mm

Dans ce qui suit, on présente un aperçu du comportement mécanique du béton à température ambiante sous divers types de sollicitations, en passant en revue son comportement sous sollicitation de compression simple et cyclique, traction simple et cyclique. Cette partie a pour but de mettre en évidence le lien entre la fissuration et l'endommagement. L'essai de traction-compression cyclique, par contre, a pour but de mettre en évidence l'effet de la refermeture de fissures (effet unilatéral).

### I-3) Comportement mécanique du béton

#### I-3.a) Comportement en compression

Le béton est un matériaux qui résiste mieux en compression qu'en traction. La limite d'élasticité ou la résistance à la rupture sont de l'ordre de 12 fois plus élevées en compression qu'en traction ce qui explique qu'on utilise le béton essentiellement en compression. L'essai de compression uniaxiale est un essai qui a largement été étudié afin de connaître la résistance en compression. L'allure générale de la courbe contrainte-déformation est donnée par la figure I.2. On observe principalement que la réponse est presque linéaire jusqu'à 30 % de la limite en compression simple  $f_c$ . En dépassant ce point, on observe que la courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75 % de la limite en compression simple. Au-delà, la courbe présente un pic suivi d'une branche post-pic correspondant à un comportement adoucissant (figure I.3-a.) Cette branche post-pic est associée à une forte dilatance (expansion latérale) (figure I.3-b), qui donne la variation de la contrainte appliquée en fonction de la variation de volume de l'éprouvette.

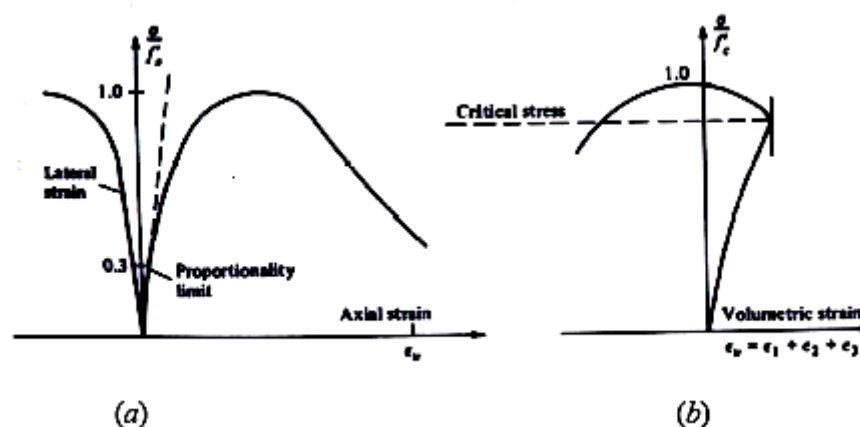


Figure I.3: Comportement du béton en compression simple [2].

La partie croissante de la courbe est indépendante de l'élancement du cylindre testé (rapport du diamètre sur la hauteur), ce qui n'est pas le cas pour le régime d'adoucissement où une

augmentation de la ductilité (en terme de contrainte et déformation) est observée expérimentalement (figure I.3) avec une augmentation de l'élancement (effet d'échelle) [3].

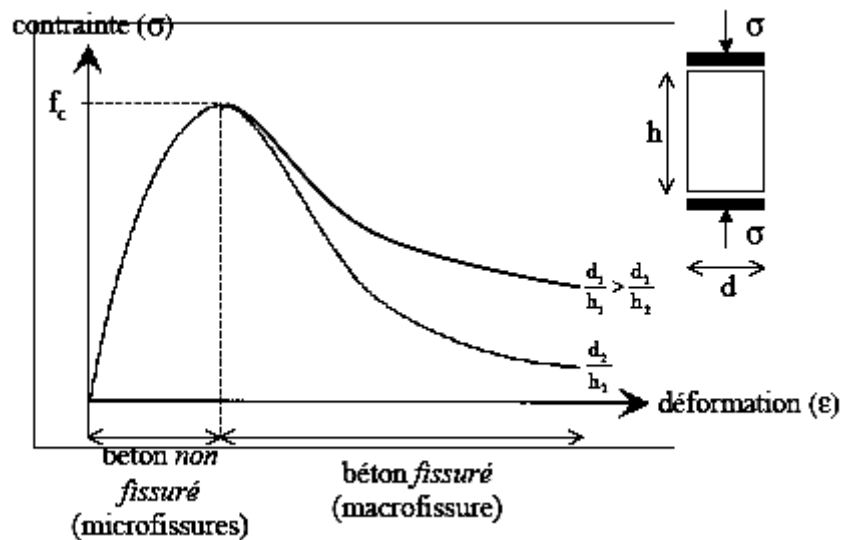


Figure I.4: Comportement du béton en compression uniaxiale

Le comportement du béton en compression uniaxiale peut être divisé en deux zones: la partie ascendante de la courbe contrainte-déformation décrit le comportement du béton non fissuré (présence uniquement de microfissures non visibles à l'oeil nu) alors que la partie d'adoucissement est associée au comportement du béton fissuré (les fissures sont observables à l'oeil nu). L'interprétation micro-mécanique de ce comportement a fait l'objet de nombreux travaux ([4], [5], [6]) et il est maintenant bien admis que la dégradation est essentiellement liée au développement de micro-fissures. Le développement des micro-fissures est lié selon plusieurs auteurs, ([4], [5]) à l'effet des extensions ( $\epsilon_e > 0$  déformation positive.) Des observations au microscope optique sur des tranches de matériaux présollicités ont montré que l'orientation privilégiée des micro-fissures est perpendiculaire aux directions d'extensions, créant dans un premier stade une anisotropie du comportement du béton, et dans un stade ultime des surfaces de rupture de même sens (figure I.4). De plus, il a été montré [7] que les déformations se localisent dans l'éprouvette au pic d'effort, ce qui montre que le comportement post-pic observé est celui d'une structure dans laquelle le matériau ne répond pas d'une manière homogène.



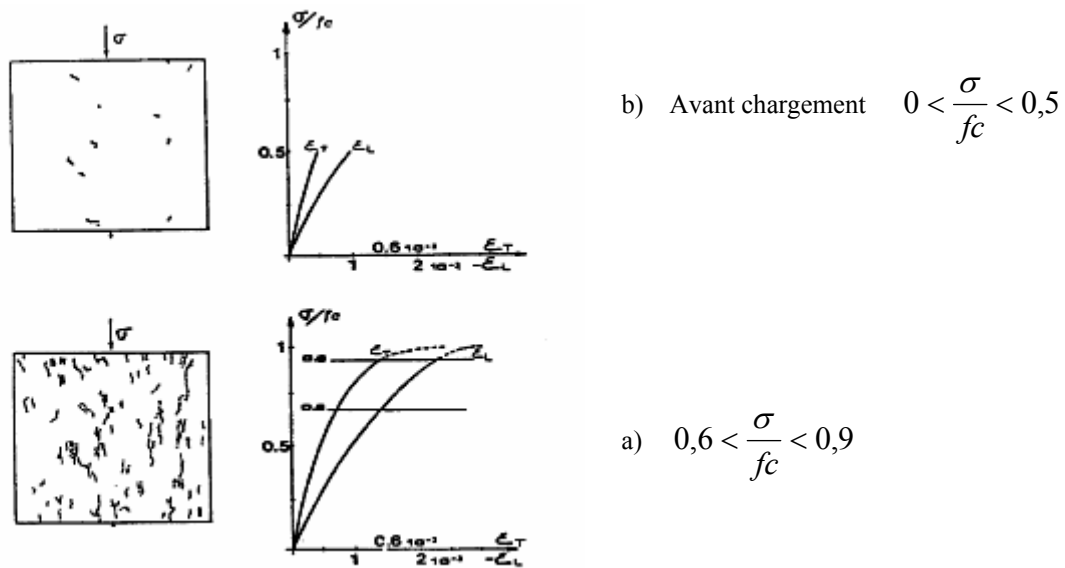


Figure I-5 : Résultats d'observation aux rayons X d'une éprouvette en compression [8].

L'essai cyclique en compression simple présenté à la figure I.5, permet d'obtenir d'autres renseignements sur le comportement du béton. D'une part, il permet de confirmer le rôle prépondérant du développement de la micro-fissuration qui provoque une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau, et d'autre part, de mettre en évidence le développement de déformations permanentes. Celles-ci sont le plus souvent expliquées par l'effet de frottement entre surfaces des micro-fissures et la non refermeture complète des micro-fissures après déchargement. Un autre renseignement peut être tiré de cette figure, il concerne le développement de boucles d'hystérésis. Ce phénomène peut être lié à deux aspects: d'une part, au frottement entre lèvres de micro-fissures en cours de refermeture ou réouverture de celles-ci, et d'autre part, au mouvement de l'eau dans la structure microporeuse de la pâte de ciment hydratée ([9], [10]).

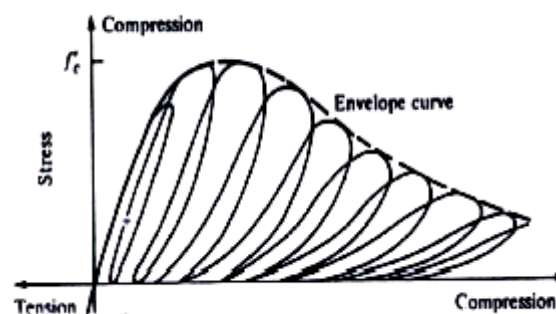


Figure I.6: Comportement cyclique du béton en compression simple [11].

De ce qu'on a vu précédemment, on peut s'attendre à une sensibilité du matériau béton à l'application de contrainte de confinement. C'est effectivement ce qui a été démontré par plusieurs auteurs ([12], [13], [14]). On peut constater sur la figure I.6 que la réponse du béton est d'autant moins fragile que le confinement est important et que l'on obtient un comportement ductile pour les très grands confinements. Ce gain de rigidité est lié à l'augmentation des contacts au sein de la micro-structure du matériau béton qui est une conséquence de la destruction des pores ([2], [15]).

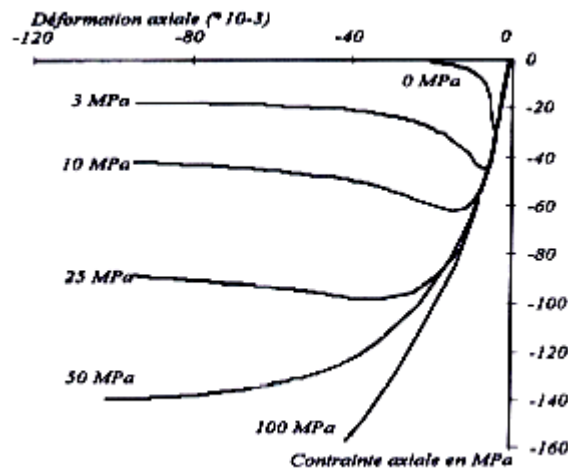


Figure I.7: Essais de compression triaxiale [14]

En ce qui concerne le comportement du béton sous chargements hydrostatiques, le béton présente un comportement non linéaire. La figure I.8, présente le comportement expérimental dans le cas d'une compression hydrostatique ([2]). On remarque sur cette figure trois phases de comportement: une phase élastique linéaire, une deuxième phase d'assouplissement correspondant à l'effondrement progressif de la structure micro-poreuse de la pâte de ciment hydraté et une dernière phase de raidissement liée à l'augmentation des contacts au sein de la matière qui est une conséquence de la destruction des pores.

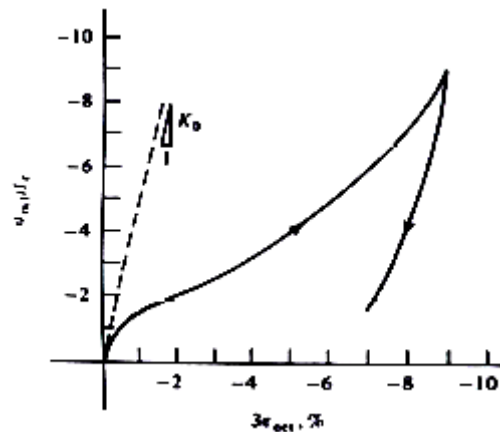


Figure I.8: Essai de compression hydrostatique du béton [2]

### I-3.b) Comportement en traction

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante pour une description complète de son comportement matériel. On peut faire la remarque ici sur la difficulté de la réalisation de ce type d'essais, c'est pourquoi on fait souvent appel à des essais indirects pour déterminer ce comportement. La courbe contrainte-déformation du béton obtenue en traction uniaxiale (figure I.9-a) est similaire à celle décrite pour la compression, mis à part le fait que la résistance limite en traction  $f_t$  est nettement plus faible que celle en compression ( $f_t \approx 0.1 f_c$ ). La courbe est linéaire jusqu'à environ 75% de  $f_t$ . Les microfissures commencent à se développer dans la région précédant le pic mais s'agrandissent plus rapidement que lors d'un test de compression et donc la rupture survient plus tôt (figure I.9-a.)

Des tests expérimentaux de traction directe d'éprouvettes en béton ont montré que, juste avant le pic, une décohésion des granulats les plus importants apparaissait et que les fissures nées de cette décohésion coalescent ensuite avec les microfissures existantes pour former une macrofissure continue [16]. De plus, les résultats révèlent la présence de nombreux grains reliant les surfaces de la fissure, ce qui explique la branche d'adoucissement de la courbe contrainte-déformation. La ruine des éprouvettes apparaît lors de la rupture de ces grains (figure I.9-a.)

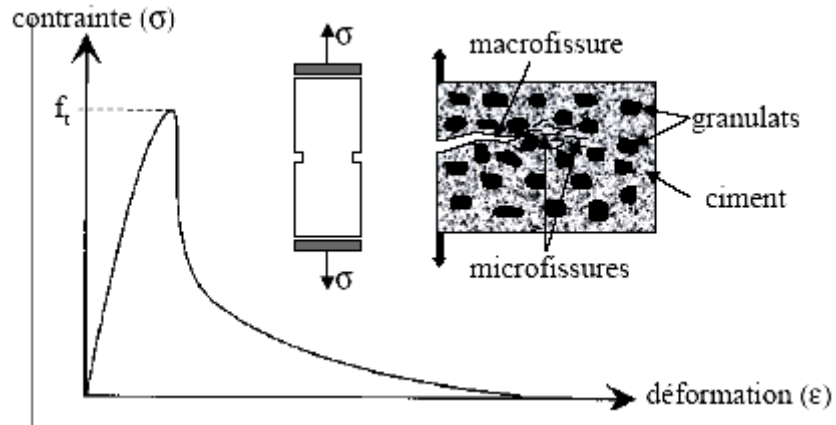


Figure I.9-a: Comportement du béton en traction uniaxiale

La figure I.8-b, présente la courbe contrainte-déformation pour le béton en traction simple (essai de traction directe à vitesse de déformation imposée). Dans cette figure, on peut distinguer deux phases importantes du comportement du béton: dans une première phase, le comportement est quasiment élastique linéaire avec une légère perte de raideur juste avant d'atteindre le pic. Une deuxième phase (phase adoucissante), après le pic, est caractérisée par une chute presque brutale de la contrainte. Durant cette phase, les micro-fissures bifurquent dans la pâte de ciment et se propagent en mode I essentiellement pour constituer une fissure continue perpendiculaire à l'extension principale.

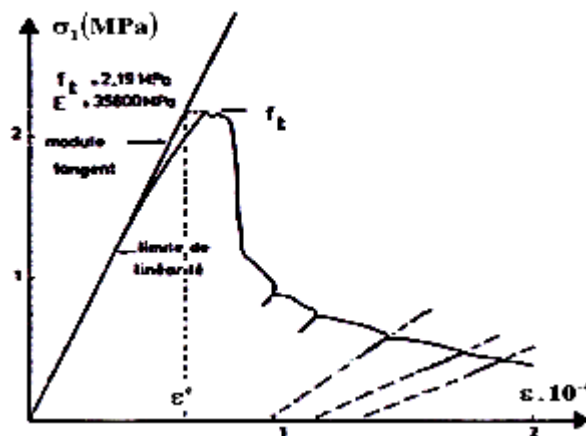


Figure I.9.b: Comportement du béton en traction directe [17].

Les cycles charge-décharge permettent de constater une chute importante de la raideur en fin d'essai ( $E \cong E_0/2$ ) et l'apparition de déformation résiduelle. Dans son état ultime, l'essai de

traction directe conduit à une fissure unique, localisée et perpendiculaire à la direction d'extension.

L'essai de traction cyclique présenté à la figure I.10, permet de confirmer le rôle prépondérant du développement de la micro-fissuration qui provoque une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau. On note sur la figure I.9 que les boucles d'hystérésis sont très faibles. Ceci paraît logique si l'on admet qu'elles sont principalement dues à des phénomènes de frottement entre lèvres de micro-fissures ; phénomènes peu importants dans ce type de sollicitation.

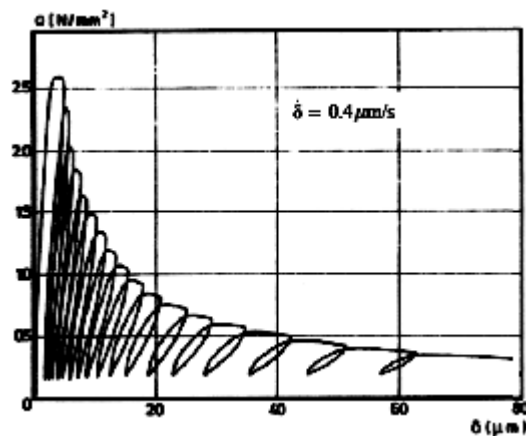


Figure I.10: Comportement cyclique du béton en traction [17]

Les données sur le comportement du béton sous un état de contrainte de traction multiaxial sont plus rares car les tests expérimentaux sont plus difficiles à mettre en oeuvre. Kupfer & al. ([18], [19]) ont étudié le comportement du béton soumis à des contraintes biaxiales et ont ainsi établi des relations entre les contraintes et les déformations en compression biaxiale, en tension biaxiale et en tension et compression combinées. De plus, les enveloppes à la limite d'élasticité et à la rupture ont été établies dans l'espace à deux dimensions des contraintes (figure I.11). Ces résultats ont été largement exploités pour établir des critères limites et des lois de comportement du béton utilisables dans des codes de calcul par éléments finis.

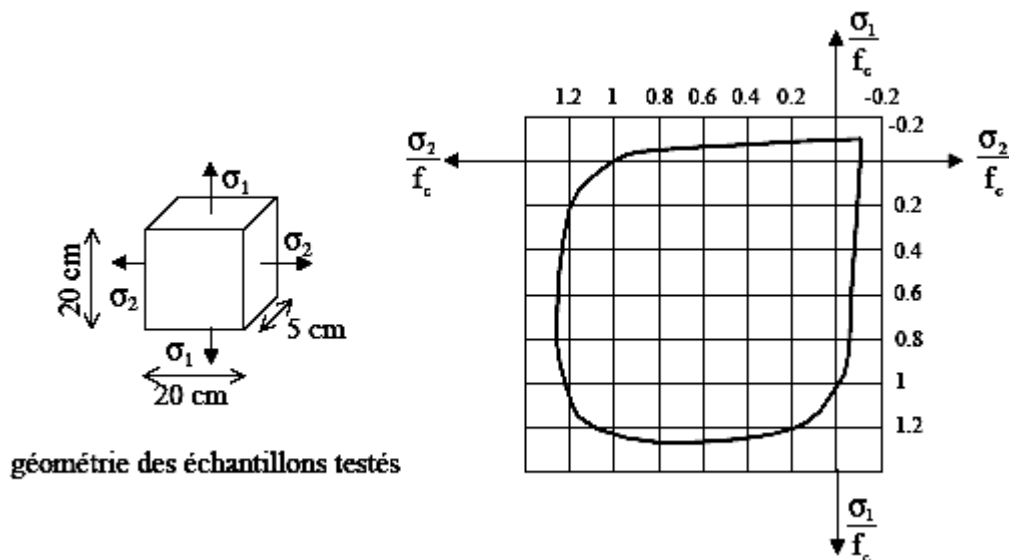


Figure I.11: Enveloppe limite biaxiale du béton déterminée par Kupfer & al. [18]

### I-3.c) Comportement cyclique compression - traction

Les essais cycliques de traction-compression permettent de mettre en évidence une propriété importante du comportement du béton, c'est le caractère unilatéral. Ce phénomène consiste en une restauration de la raideur lors du passage d'un chargement en traction, où cette raideur est initialement endommagée du fait de la fissuration, à un chargement en compression (figure I.12).

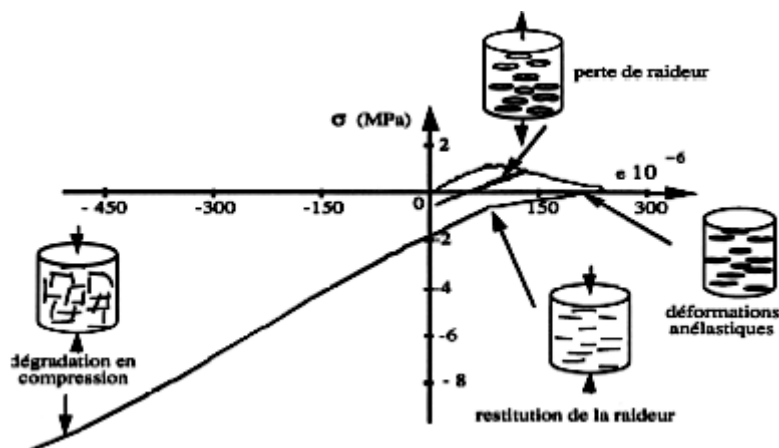


Figure I.12: Essai P.I.E.D Comportement uniaxial du béton sous chargement Cyclique [15]

Ce comportement est lié au fait que sous contrainte de compression les fissures de traction se referment faisant en sorte qu'il n'y ait aucune interaction avec celles qui vont se créer en compression dans une direction perpendiculaire. Le béton retrouve alors un comportement de matériau sain.

#### I-4) Conclusion

A l'issue de cette étude expérimentale du comportement du béton sous les différentes sollicitations, nous pouvons retenir essentiellement les phénomènes suivants :

- Un comportement non linéaire traduisant l'évolution de microfissures et de cavités.
- Une variation de volume en fonction de la sollicitation.
- Apparition d'une déformation irréversible en traction et en compression.
- Une anélasticité non linéaire engendrant des déformations permanentes.
- Une localisation des déformations lors de l'essai est menée à déplacements imposés.
- Une certaine viscosité constatée au niveau des cycles charges-décharges.
- Une dépendance de résistance du matériau des dimensions géométriques de celui-ci. Ceci peut être expliqué par les analyses statiques concernant la densité de répartition des défauts qui est variable en fonction du volume. Ce phénomène est connu sous le nom « effet d'échelle ».
- Une désactivation du dommage provoqué par un effort de traction grâce à un chargement de compression effectué dans le sens opposé. Cela s'explique par la restauration de la raideur initiale mais ce phénomène ne peut pas se faire par l'essai de traction sur un matériau préalablement endommagé par un essai de compression d'où le nom du « phénomène unilatéral ».
- Un comportement adoucissant constaté en phase post-pic où une augmentation intense des déformations avec la diminution du chargement est enregistrée.

Nous tenons à signaler deux phénomènes importants que nous n'avons pas décrit, à savoir : les phénomènes de fatigue et de fluage du béton.

Ainsi, nous pouvons dire que la modélisation d'un matériau composite tel que le béton est rendue difficile par la prise en compte de phénomènes si complexes qui se manifestent simultanément. Néanmoins, nous verrons que la mécanique de l'endommagement, via le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles, a ouvert les portes pour la représentation correcte de ces comportements notamment la déformation et la détérioration du matériau. Par ailleurs, les améliorations des modèles endommageables et la disposition des outils informatiques puissants vont actuellement dans le sens d'une simulation plus ou moins proche du comportement réel du matériau.

*Chapitre II :*

***Formalisme thermodynamique des processus  
irréversibles***



## II-1) Avant-propos

Afin de modéliser les phénomènes physiques de déformation et de rupture brièvement décrits au chapitre I, il est nécessaire de choisir une méthode fondée sur des principes généraux gouvernant les variables représentatives de l'état du milieu matériel. Deux types de modélisation sont nécessaires : l'une que l'on peut qualifier de cinématique ou de mécanique schématise les efforts et les mouvements dans le milieu, l'autre que l'on peut qualifier de phénoménologique ou de physique introduit les variables caractéristiques des phénomènes étudiés. La première repose le principe des travaux virtuels, tant que la deuxième repose sur la thermodynamique des processus irréversibles qui sera l'objet de ce présent chapitre.

En général l'état d'un milieu matériel dépend de toute l'histoire de ses variables mécaniques et son comportement peut se modéliser par des lois héréditaires ou intégrales. Afin d'obtenir un formalisme directement appréhendable par les méthodes de l'analyse fonctionnelle, nous préférons utiliser l'approche de la thermodynamique des processus irréversibles par variables d'état [20]. Le potentiel thermodynamique permet de définir les variables associées à partir des variables observables et des variables internes choisies en fonction des phénomènes à modéliser et conduit naturellement aux lois d'état. Le pseudo-potential de dissipation fournit les lois complémentaires d'évolution des variables décrivant les processus irréversibles selon le formalisme de Moreau (1970) [21].

## II-2) Equations de la mécanique des milieux continus

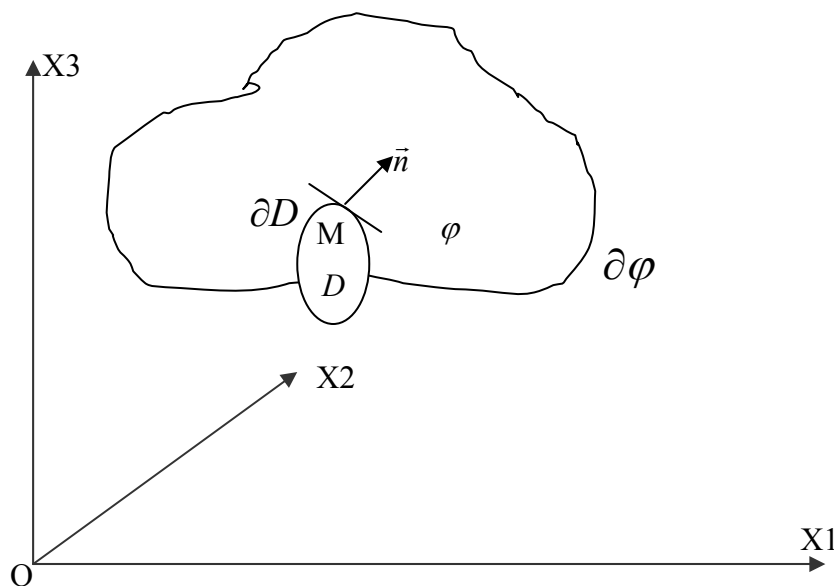


Figure II.1: Milieu matériel isolé

Soit un domaine  $D$  de frontière  $\partial D$  intérieur à un volume  $\varphi$  de frontière  $\partial\varphi$  et soit  $\vec{n}$  la normale extérieure en un point  $M$  de  $\partial D$  repérée dans un repère orthonormé  $(O, X_1, X_2, X_3)$ .  
Les équations de la mécanique des milieux continus en petites déformations ou en petits déplacements se résument à :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + \vec{f} &= \rho \cdot \vec{\gamma} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec  $\sigma$  : le tenseur de cauchy en un point

$\vec{f}$  : la force exercée par unité de volume

$\rho$  : la masse volumique

Par conséquent, pour résoudre un problème, il convient d'ajouter :

- Les conditions aux limites données en contraintes par  $\vec{T} = \sigma : \vec{n}$  et en déplacements par  $\vec{u} = \vec{u}^d$  sur la partie complémentaire de  $\partial\varphi$
- Les lois complémentaires à travers des relations entre les contraintes et les déformations.

### II-3) Lois de conservation, premier et deuxième principe

Premier principe de la thermodynamique

L'équation d'équilibre établie précédemment peut être interprétée comme une forme de la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot \vec{v} \cdot dv - \int_{\partial D} \vec{T} \cdot ds = \int_D \vec{f} \cdot dv \quad (\text{II.2})$$

La symétrie du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  qui résulte directement du principe des puissances virtuelles peut être considéré comme une conséquence de l'équation de conservation de moment cinétique.

La deuxième loi de conservation est la conservation de la masse qui avec les notions introduites, s'exprime par :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot dv = 0 \quad (\text{II.3})$$

En plus de la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment cinétique, le premier principe de la thermodynamique constitue la troisième grande loi de conservation qui est la conservation de l'énergie.

Considérons toujours le même domaine  $D$  de frontière  $\partial D$  intérieur au milieu  $\varphi$  étudié :

- Soit  $E$  son énergie interne,  $e$  son énergie interne spécifique

$$E = \int_D \rho \cdot e \cdot dv \quad (\text{II.4})$$

- Soit  $K$  son énergie cinétique

$$K = \frac{1}{2} \int_D \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot dv \quad (\text{II.5})$$

Avec  $\vec{v}$  représente la vitesse du point  $M$ .

- Soit  $Q$  le taux de chaleur reçu par le domaine  $D$  : il contient deux termes, la chaleur créée dans  $D$  par des actions intérieures à  $D$  et la chaleur reçue.

$$Q = \int_D r \cdot dv - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (\text{II.6})$$

$r$  :Densité volumique de production interne de chaleur à distance

$q$  :Vecteur flux de chaleur par conduction

$n$  :Normale extérieure à  $\partial D$

- Soit  $P(X)$  la puissance réelle des efforts extérieurs :

$$P(X) = \int_D \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dv + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{v} \cdot ds \quad (\text{II.7})$$

Le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P(X) + Q \quad \forall D \quad (\text{II.8})$$

En remplaçant les différentiels termes par leur valeurs respectives et en remarquant que :

$P(X) = P(a) - P(i)$  avec  $P(a) = \frac{dK}{dt}$ , on obtient :

$$\rho \cdot \dot{e} = \sigma \cdot \varepsilon + r - \text{div} \vec{q} \quad \text{avec} \quad \dot{e} = \frac{de}{dt} \quad (\text{II.9})$$

$p(a)$  et  $P(i)$  :les puissances virtuelles des quantités d'accélération et des efforts intérieurs respectivement.

*Deuxième principe de la thermodynamique :*

En introduisant deux nouvelles variables, la température  $T$  et l'entropie  $S$ , sachant que l'entropie exprime une variation d'énergie associée à une variation de température, on la définit à partir d'une densité d'entropie  $s$  [20].

$S = \int_D \rho \cdot s \, dv$ , on aboutit ainsi au second principe :

« Le taux de production d'entropie est supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température ». c-à-d :

$$\frac{ds}{dt} \geq \int_D \frac{r}{T} \, dv - \int_{\partial D} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} \, ds \quad \forall D \quad (\text{II.10})$$

ou encor en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_D \left( \rho \cdot \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) dv \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

Cette inégalité, vérifiée quelque soit le domaine D, entraîne la forme locale exprimant le taux de production irréversible de l'entropie :

$$\rho \cdot \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (\text{II.12})$$

L'inégalité fondamentale contenant le second et le premier principe s'obtient en remplaçant r par son expression tirée de l'équation de conservation d'énergie :

$$\rho \cdot \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \left( \rho \cdot \frac{de}{dt} - \sigma : D + \text{div} \vec{q} \right) \geq 0 \quad (\text{II.13})$$

En remarquant que :

$$\text{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{\text{div} \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T}{T^2} \quad (\text{II.14})$$

et en multipliant par  $T > 0$  on en déduit :

$$\rho \cdot \left( T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \sigma : D + \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \geq 0 \quad (\text{II.15})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'obtient en introduisant une nouvelle variable, l'énergie libre spécifique  $\psi$  définie par :

$$\psi = e - T \cdot s. \quad (\text{II.16})$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, l'inégalité fondamentale s'écrit comme suit :

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \left( \frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \geq 0 \quad (\text{II.17})$$

#### II-4) Méthode de l'état local

Cette méthode postule que l'état thermodynamique d'un milieu matériel en un point et à un instant donné est défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un certain nombre

de variables ne dépendant que du point considéré. Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas pour définir l'état, cette hypothèse implique que toute évolution puisse être considérée comme une succession d'états d'équilibre. On exclut les phénomènes ultra rapides (vibration atomiques). Les processus définis par un nombre de variables d'état seront thermodynamiquement admissibles si, à chaque instant de l'évolution, l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite. Les variables d'état sont les variables observables et les variables internes.

#### II-4.1) Variables observables

Un certain nombre des variables d'état sont imposées par le formalisme de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus ; ce sont les variables observables :

- La température  $T$
- La déformation totale  $\varepsilon$  (en petites déformations).

Ces deux variables observables sont les seules qui interviendront dans les phénomènes d'élasticité, d'endommagement et de rupture.

#### II-4.2) Variables internes

En plus des variables observables, la plasticité et viscoplasticité nécessitent l'introduction de la variable déformation plastique (ou viscoplastique). En petites déformations, la déformation plastique notée  $\varepsilon^p$  est la déformation permanente associée à la configuration relâchée. Elle résulte de la déformation totale par décharge élastique conduisant à la partition des déformations.

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e \quad (\text{II.18})$$

Cette équation de partition lie deux variables internes formellement définies : la déformation plastique  $\varepsilon^p$  et la déformation thermo élastique  $\varepsilon^e$  (comprenant éventuellement la dilatation thermique).

Les autres phénomènes, tel que l'écroutissage, l'endommagement, la rupture nécessitent l'introduction d'autres variables internes de nature plus cachée. Elles représentent l'état interne de la matière (microstructure cristalline, densité de dislocation, cavités, configuration de microfissures etc...) sans qu'il soit possible de les mesurer par des observations directes. Elles n'interviennent pas non plus dans les lois de conservation ni dans le second principe, on les traite comme des variables observables [20].

### II-4.3) Potentiel thermodynamique, lois d'état

Après avoir défini les variables d'état, on postule l'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérivent les lois d'état. La donnée d'une fonction à valeur scalaire concave par rapport à  $T$  et convexe par rapport aux autres variables d'état permet de vérifier a priori les conditions de stabilité imposées par les inégalités que l'on peut déduire du second principe.

Choisissons le potentiel énergie libre spécifique  $\psi$ , qui dépend des variables d'état observables et internes.

$$\psi = \psi(\varepsilon, T, \varepsilon^p, \varepsilon^e, V_k). \quad (\text{II.19})$$

$V_k$  Sont des variables internes pouvant représenter soit une variable scalaire, soit une variable tensorielle.

En élastoplasticité, les déformations n'interviennent que sous la forme de leur partition :

$$\psi = \psi([\varepsilon - \varepsilon^p], T, V_k). \quad (\text{II.20})$$

Ce qui montre que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p} \quad (\text{II.21})$$

Sachant que :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (\text{II.22})$$

(Si les variables  $V_k$  sont des tenseurs, on utilise l'indice : qui est le produit tensoriel)

En utilisant l'inégalité de Clausius Duhem, on obtient :

$$(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e}) : \dot{\varepsilon}^e + \sigma : \dot{\varepsilon}^p - \rho (s + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \geq 0. \quad (\text{II.23})$$

Une hypothèse classique [20] permet d'annuler certains termes de cette inégalité et ce, en imaginant des transformations élastiques à température constante ( $\dot{T} = 0$ ) et uniforme ( $\text{grad } T = 0$ ) qui ne modifie ni la déformation plastique  $\dot{\varepsilon}^p = 0$  ni les variables internes  $\dot{V}_k = 0$ .

L'inégalité de Clausius Duhem doit être vérifiée quel que soit  $\dot{\varepsilon}^e$ , cela implique :

$$\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = 0 \quad (\text{II.24})$$

En cas de transformation thermique telle que  $\dot{\varepsilon}^p = V_k = \overrightarrow{\text{grad}} T = 0$ , l'inégalité ne peut être vérifiée que si :

$s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0$  ce qui correspond à une dissipation nulle.

D'où les expressions définissant les lois de la thermo-élasticité :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \tag{II.25}$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \tag{II.26}$$

Notons que :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p} \tag{II.27}$$

Ce qui montre que la contrainte est la variable associée à la déformation élastique, à la déformation plastique (avec le signe moins) et à la déformation totale et l'entropie la variable associée à la température.

Les variables forces thermodynamiques associées aux variables internes sont définies par analogie avec les relations précédentes telles que :

$$A_k = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \tag{II.28}$$

Ces relations constituent les lois d'état.

S,  $\sigma$ ,  $A_1$ ,  $A_2, \dots$ ,  $A_k$ , constituent les variables associées qui forment un ensemble de variables normales en dualité avec les variables d'état observables et internes. Le tableau 1 résume l'ensemble des variables ainsi introduites.

Variables d'état		Variables associées
Observables	Internes	
$\varepsilon$ .....	.....	..... $\sigma$
T .....	.....	..... s
	$\varepsilon^e$ .....	..... $\sigma$
	$\varepsilon^p$ .....	..... $-\sigma$
	$V_k$ .....	..... $A_k$

Tableau 1 : Variables thermodynamiques

#### II-4.4) Potentiel de dissipation, lois complémentaires

Comme on l'a vu précédemment, le potentiel thermodynamique, permet d'écrire les relations d'état entre les variables observables et leurs variables associées. Mais pour les variables internes, il ne permet que la définition de leurs variables associées. Afin de décrire les processus dissipatifs, en particulier l'évolution des variables internes, il faut un formalisme complémentaire. C'est l'objet du potentiel des dissipations.

##### II-4.4.1) Dissipation intrinsèque, dissipation thermique

Compte tenu des lois d'état et en posant  $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}} T$  l'inégalité de Clausius Duhem se réduit à l'expression de la dissipation qui doit être positive :

$$\phi = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \cdot \dot{V}_k - \vec{g} \cdot \vec{q} / T \geq 0 . \quad (\text{II.29})$$

Avec  $\sigma$ ,  $A_k$  et  $\vec{g}$  : Variables forces ou duales

$\dot{\varepsilon}^p, -\dot{V}_k, -\vec{q} / T$  : Variables flux.

Soit  $\phi_1 = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \cdot \dot{V}_k$  : La dissipation mécanique ou intrinsèque.

Et  $\phi_2 = -\vec{g} \cdot \vec{q} / T$  : La dissipation thermique par conduction.

##### II-4.4.2) Potentiel de dissipation

Pour définir les lois complémentaires relatives aux processus dissipatifs, on postule l'existence d'un potentiel de dissipation (ou pseudo potentiel) s'exprimant comme une fonction à valeur scalaire continue et convexe par rapport aux variables flux, les variables d'état pouvant éventuellement intervenir comme paramètres :

$$\varphi (\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, \vec{q} / T) . \quad (\text{II.30})$$

Les lois complémentaires s'expriment alors par la propriété de normalité (ou dissipativité normale).

$$A_k = - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} ; \quad (\text{II.31})$$

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}^p} ; \quad (\text{II.32})$$



$$\bar{g} = -\frac{\partial \psi}{\partial (\bar{q}/T)}. \quad (\text{II.33})$$

La transformée de Legendre – Fenchel permet de définir le potentiel correspondant  $\varphi^*(\sigma, A_k, \bar{g})$ , dual de  $\varphi$  par rapport aux variables  $\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k$  et  $\bar{q}/T$ .

$$\varphi^*(\sigma, A_k, \bar{g}) = \text{Sup}_{(\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, \bar{q}/T)} \text{Sup} \left( \left[ \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \cdot \dot{V}_k - \frac{\bar{g} \cdot \bar{q}}{T} \right] - \varphi(\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, \bar{q}/T) \right). \quad (\text{II.34})$$

$\varphi^* = \varphi^*(\sigma, A_k, \bar{g})$  est le potentiel dual de  $\varphi$

On démontre que si la fonction  $\varphi^*$  est dérivable, la propriété de normalité est conservée pour les variables  $\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k$  et  $\bar{q}/T$ , les lois complémentaires d'évolution s'écrivent alors :

$$\dot{\varepsilon}^p = \rho \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} \quad ; \quad (\text{II.35})$$

$$-\dot{V}_k = \rho \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \quad ; \quad (\text{II.36})$$

$$-\frac{\bar{q}}{T} = \rho \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{g}} \quad (\text{II.37})$$

La première relation conduit aux lois de plasticité ou de viscoplasticité, la seconde exprime les lois d'évolution des variables internes, la troisième conduit à la loi de Fourier pour la thermostatique. Le tableau 2 résume les variables de dissipation.

Variables flux	Variables duales
$\dot{\varepsilon}^p$	$\sigma$
$-\dot{V}_k$	$A_k$
$-\bar{q}/T$	$\bar{g} = \overrightarrow{\text{grad}T}$

Tableau 2 : Variables de dissipation.

Tout le problème de la modélisation des phénomènes réside dans la détermination de l'expression analytique du potentiel thermodynamique  $\psi$  et du potentiel de dissipation  $\varphi$  ou de son dual  $\varphi^*$  et dans leur identification d'après des expériences caractéristiques. En fait les

valeurs de  $\varphi$  ou de  $\varphi^*$  sont quasi inaccessibles à la mesure car elles représentent une énergie le plus souvent dissipée sous forme de chaleur. Les variables flux et les variables duales se prêtent bien mieux à la mesure et c'est sur leurs relations que portent la modélisation et l'identification.

Les lois complémentaires d'évolution sont donc identifiées directement mais le potentiel de dissipation sert de guide ou de cadre pour leur écriture.

## II-5) Application à l'élasticité

Les variables d'état à faire intervenir dans la schématisation du comportement du solide élastique sont la température  $T$  et la déformation élastique  $\varepsilon^e$ . Si la transformation est isotherme, alors seule la déformation élastique est considérée avec la température comme paramètres dont dépendent les coefficients d'élasticité.

### II-5.1) Potentiel thermodynamique

Pour obtenir une théorie linéaire, il suffit de choisir comme potentiel thermodynamique convexe, une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations [20].

$$\text{Soit :} \quad \psi = \frac{1}{2\rho} \mathbf{a} : \varepsilon : \varepsilon \quad (\text{II.38})$$

$\rho$  étant la masse volumique

$\mathbf{a}$  est un tenseur symétrique du 4<sup>ème</sup> ordre dont les composantes sont les coefficients d'élasticité isothermes éventuellement fonction de la température.

Par définition de la variable associée, le tenseur des contraintes  $\sigma$  dérive du potentiel  $\psi$  pour donner la loi d'état :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = \mathbf{a} : \varepsilon. \quad (\text{II.39})$$

En dérivant, on obtient :

$$\sigma = \mathbf{a} : \varepsilon \quad (\text{II.40})$$

Qui est la loi de Hook généralisée du milieu élastique linéaire et isotrope.

Par inversion ou par définition d'un potentiel dual :

$$\psi^* = \frac{1}{2\rho} \mathbf{A} : \sigma : \sigma \quad (\text{II.41})$$

Avec  $\mathbf{A}$  tenseur de souplesse de 4<sup>ème</sup> ordre.

On aboutit à :

$$\varepsilon = A : \sigma \quad (\text{II.42})$$

Pour le cas d'élasticité non linéaire, on choisit d'autres formes du potentiel  $\psi$  qui doivent vérifier la convexité.

### II-5.2) Elasticité linéaire isotrope

L'isotropie et la linéarité imposent que  $\psi$  soit un invariant quadratique du tenseur des déformations, c'est-à-dire une combinaison linéaire du carré du premier invariant  $\varepsilon_1^2 = [Tr(\varepsilon)]^2$

et du second invariant  $\varepsilon_{II} = \frac{1}{2} Tr(\varepsilon^2)$  :

$$\psi = \frac{1}{2\rho} (\lambda \varepsilon_1^2 + 4 \mu \varepsilon_{II}) \quad (\text{II.43})$$

et

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = \lambda Tr(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (\text{II.44})$$

$\mu$  et  $\lambda$  sont les deux coefficients de Lamé.

$I$  est le tenseur unité d'ordre 2.

En travaillant avec la forme duale  $\varepsilon = A : \sigma$ , on obtient :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} Tr(\sigma) I. \quad (\text{II.45})$$

Avec  $E$  et  $\nu$  : module de Young et coefficient de Poisson respectivement.

Les relations entre parties sphériques et déviatrices sont les suivantes :

$$\sigma_H = \frac{1}{3} Tr(\sigma) \quad \text{et} \quad \sigma' = \sigma - \sigma_H I \quad (\text{II.46})$$

$$\varepsilon_H = \frac{1}{3} Tr(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_H I \quad (\text{II.47})$$

Sont également utiles :

$$\varepsilon_H = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_H \quad (\text{II.48})$$

$$\varepsilon' = \frac{1+\nu}{E} \sigma' \quad (\text{II.49})$$

Finalement les deux coefficients de Lamé peuvent être obtenus par les formules suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad (\text{II.50})$$

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (\text{II.51})$$

Pour que la loi d'élasticité dérive d'un potentiel quadratique, la seule condition que doivent vérifier les coefficients est que E soit positif et  $-1 < \nu < 1/2$  [2].

## II-6) Conclusion

Nous concluons que l'utilisation de l'approche thermodynamique permet d'obtenir un formalisme directement appréhendable. Le potentiel thermodynamique permet de définir les variables associés à partir des variables observables et des variables internes en fonction des phénomènes à modéliser, et conduits naturellement aux lois d'état décrivant le comportement réversible. Le potentiel de dissipation, quant à lui, fournit les lois complémentaires d'évolution des variables en décrivant le comportement irréversible du matériau. Cette description est à la fois simple et opérationnelle. Elle permet non seulement de présenter les modèles usuels dans un formalisme unitaire mais lorsque appliquée à des contextes nouveaux, est susceptible de conduire à nouvelles lois énergétiques [22].

*Chapitre III :*

*Mécanique de l'endommagement appliquée  
au béton*

### III-1) Introduction

Le phénomène de l'endommagement d'un matériau élastique est la conséquence de l'apparition et/ou du développement de défauts (microfissures, micro vides, décohésions inter granulaires,...) au niveau de la microstructure (échelle des grains pour un métal et des granulats pour un béton) qui se traduit à l'échelle macroscopique par une modification des propriétés mécaniques (élastiques). L'endommagement présente un caractère d'irréversibilité beaucoup plus prononcé, les traitements thermomécaniques classiques ne font disparaître que très partiellement les défauts ainsi créés. De nombreux critères de rupture (fonction des composantes des contraintes ou des déformations), caractérisent la rupture de l'élément de volume, ont été proposées (Coulomb, Rankine, Tresca, Von Mises, Mohr, Caquot...). Mais ce n'est que récemment que l'on s'est préoccupé de modéliser la détérioration progressive de la matière qui précède la rupture macroscopique. 1958 est sans doute la date historique pour la mécanique de l'endommagement : Kachanov [23] publie le premier mémoire consacré à une variable continue de l'endommagement, imaginée pour le cadre restreint de la rupture des métaux par sollicitation unidimensionnelle. Après cette publication, de nombreuses recherches plus récentes ont été menées sur divers aspects de l'endommagement. On cite notamment les travaux de Rabotnov [24], Lemaitre et Chaboche [20], Murakami et Ohno [25], Cordebois et Sidoroff [26], et beaucoup d'autres.

Afin de modéliser l'effet de l'endommagement sur le comportement global de la structure, deux approches principales sont utilisées.

La première, menée par Mc Clintock (1968) [27], Rice et Tracey (1969) [28], et développée plus tard par Gurson (1977) [29], Gelin (1985) [30], et autres. Elle est basée sur les *micromécanismes de nucléation et de croissance des vides*. A cette échelle microscopique, la modélisation de tels phénomènes conduit pour le béton à travailler sur un matériau biphasique (matrice-inclusion) avec tous les problèmes posés par le comportement de l'interface. La connaissance du comportement d'un volume élémentaire du matériau permet de modéliser le comportement global de la structure grâce à une technique d'homogénéisation qui s'avère complexe et difficile.

La seconde approche qui nous intéresse est de *nature phénoménologique* dans le sens où elle ignore les micromécanismes du dommage. Basée sur la mécanique de l'endommagement continue, et faisant suite aux travaux de Kachanov [23], elle associe quelques variables internes de l'endommagement aux équations constitutives du comportement en utilisant à la fois la thermodynamique des processus irréversibles, les concepts de contraintes ou de déformation effectives (voir mêmes de variables internes effectives). Au début, ce couplage

entre les processus de l'endommagement et de déformations (ou de contraintes) a été fait en négligeant l'effet du dommage sur les propriétés élastiques du matériau. Seul le couplage endommagement – viscoplasticité était considérée par Rabotnov en 1969 [24] et autres. Ce couplage peut être qualifié de partiel. Une théorie utilisant un couplage total où l'effet du dommage est pris en compte dans toutes les phases du comportement élastique et anélastique du matériau, a été présentée par Chaboche (1978) [20], Lemaitre (1984) [31] et Simo et Ju (1987) [32]. Par la suite, une formulation unifiée du couplage endommagement – thermoélastoviscoplasticité a été présentée en introduisant le principe d'équivalence en énergie totale généralisant ainsi le principe d'équivalence en énergie élastique (réversible) proposée par Cordebois et Sidoroff (1979) [26], et utilisée par Chow et Wong (1988) [33], et ce, en définissant les variables d'état effectives ainsi que les variables duales effectives correspondantes. L'utilisation de ces variables effectives dans les potentiels d'état et de dissipation (voir Chapitre II), a donné des équation constitutives au couplage total tout en complétant et améliorant la théorie couplée introduite par Chaboche en (1978) [20], qui est très largement utilisée. Cette nouvelle formulation a donné de nombreux résultats satisfaisants. C'est pour cela que nous la présentons de manière globale.

De façon générale, on peut dire que la complexité des phénomènes locaux peut être traduite par la notion de variables internes qui permet de caractériser à l'échelle de l'élément de volume les conséquences des évolutions structurelles du matériau. Dans cette approche, le matériau est alors considéré comme homogène et continu et des lois constitutives ont permettent la modélisation du comportement.

Dans ce chapitre, on aborde la mécanique de l'endommagement uniquement sur le plan macroscopique, en considérant le milieu endommagé homogène et continu. Les concepts de base sont rappelés, notamment les notions de contraintes et de variables internes effectives, les principes d'équivalence en déformation, en énergie élastique totale et la formulation thermodynamique dans le cas de l'isotropie. Nous présenterons également les critères et les lois d'évolution du dommage, le couplage élasticité – endommagement et son application au béton à travers différents modèles d'approche locale : Mazars, Marigo, Ladveze, etc.... Puis, au chapitre suivant, nous aborderons les problèmes numériques rencontrés lors de l'implémentation et dont certains trouvent leurs solution en utilisant une nouvelle approche non locale à travers des modèles plus récents.

### III-2) Domaine de validité – Début et fin de l'endommagement

Il est nécessaire de mettre au clair les notions de début et fin du processus de l'endommagement. D'après Lemaître et Chaboche [20], est considéré comme vierge de tout endommagement tout matériau dépourvu de fissures et de cavités à l'échelle microscopique ou se comportant à la déformation de la même manière que celui élaboré dans les meilleures conditions. Le stade final de l'endommagement est la rupture de l'élément de volume, c'est-à-dire l'existence d'une fissure macroscopique d'une taille de 0,1 à 1mm pour les métaux et les polymères, de l'ordre de 1 cm pour le bois et 10 cm pour le béton [20].

### III-3) Aspects phénoménologiques de l'endommagement

La définition d'une variable mécanique de l'endommagement pose un problème difficile dans la mesure où, macroscopiquement, aucune distinction entre un élément de volume endommagé et un élément de volume vierge. Pour cela, on est donc obligé d'imaginer une variable interne représentative de l'état de détérioration de la matière et plusieurs voies sont possibles selon les types de mesures de dommage envisagés :

- Les mesures physiques globales (densité de microfissures ou de cavités) conduisent à des modèles microscopiques que l'on peut intégrer sur l'élément de volume macroscopique à l'aide des techniques d'homogénéisation, mais il est difficile de définir une variable macroscopique d'endommagement et une loi d'évolution facilement utilisable dans les calculs de mécanique des milieux continus ;
- Les mesures physiques globales (densité, résistivité...) nécessitent la définition d'un modèle global pour les convertir en caractéristiques de résistance mécanique ;
- Un concept qui lie l'évolution du dommage à la durée de vie résiduelle, mais il ne conduit pas directement à la notion de loi de comportement de l'endommagement ;
- Les mesures mécaniques globales (modification des caractéristiques d'élasticité, de plasticité ou de viscoplasticité) sont plus faciles à interpréter en termes de variables d'endommagement grâce à la notion de contraintes effectives introduite par Rabotnov. C'est cette approche que nous suivrons.

#### III-3.1) Variable d'endommagement

Comme on a vu précédemment, la variable d'endommagement peut être interprétée comme la densité de surfaces des défauts affectant la matière (Kachanov 1958) [23], et peut alors être définie, comme la proportion de la surface occupée par les microfissures ramenée à



la surface totale. Cette définition signifie que le paramètre d'endommagement ne peut pas être décroissant.

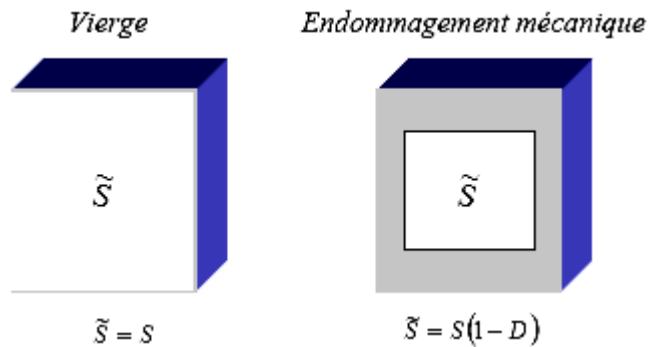


Figure. III.1 : Représentation schématique de l'effet de l'endommagement sur la surface résistante.

On considère un solide endommagé dans lequel on a isolé un élément de volume fini d'une taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu (Figure III.2).

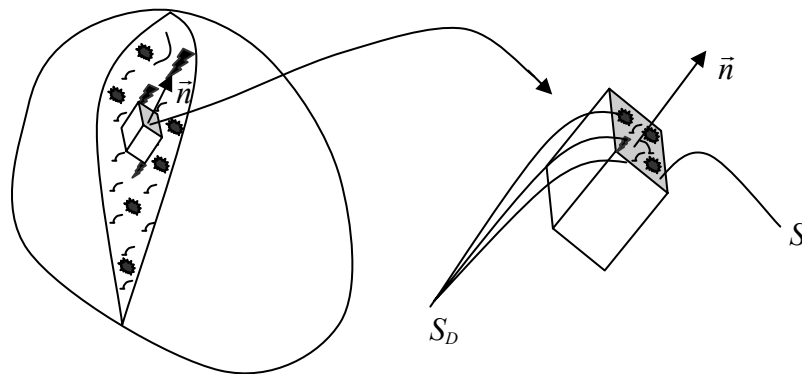


Figure. III.2 : Élément endommagé.

Soit  $S$  l'aire d'une section de l'élément repérée par sa normale  $\vec{n}$ . Dans cette section, les fissures et cavités qui constituent le dommage laissent des traces de formes diverses. Soit  $\tilde{S}$  l'aire résistante effective (Figure III.1) tenant compte de l'aire de ces traces, des concentrations de contraintes au voisinage des discontinuités géométriques et des interactions entre défauts voisins, et soit  $S_D$  la différence.

$$S_D = S - \tilde{S}$$

$S_D$  est l'aire totale de l'ensemble des traces des défauts corrigée des effets de concentration de contraintes et d'interactions.

Par définition :

$S_D/S = D_n$  est la mesure mécanique de l'endommagement local relativement à la direction  $\vec{n}$

-)  $D_n = 0$  correspond à l'état non endommagé ou vierge.

-)  $D_n = 1$  correspond à l'élément de volume rompu en deux parties selon un plan normal à  $\vec{n}$ .

-)  $0 < D_n < 1$  caractérise l'état d'endommagement.

Dans le cas de l'endommagement anisotrope constitué de fissures et de cavités dont l'orientation *privilegiée*, la valeur de la variable scalaire  $D_n$  dépend de l'orientation de la normale. La variable intrinsèque correspondante peut être représentée par un tenseur d'ordre 2 ou d'ordre 4.

Par contre, dans le cas de l'endommagement isotrope, l'orientation des fissures et cavités est *uniforme* dans toutes les directions. Dans ce cas, la variable  $D_n$  ne dépend pas de l'orientation de la normale  $\vec{n}$  et le scalaire  $D$  caractérise complètement l'état de dommage :

$$D_n = D \quad \forall \vec{n} .$$

### III-3.2) Variables d'état utilisées

Deux variables d'état externes sont utilisées :

- La déformation totale  $\varepsilon$  et sa variable associée  $\sigma$
- La température  $T$  avec l'entropie spécifique  $s$  comme variable associée.

Les variables d'état internes citées ci-dessous décrivent les phénomènes dissipatifs :

- $r$  : Une variable scalaire représentant l'écrouissage isotrope en plasticité avec  $R$  le rayon de la surface limite comme variable associée
- $\alpha$  : Tenseur déviatorique du second ordre représentant l'écrouissage cinématique en plasticité avec  $X$  la variable associée.  $X$  mesure la translation du centre de la surface limite seuil de plasticité dans l'espace des contraintes.
- $D$  variable d'endommagement et  $Y$  sa variable associée.

### III-3.3) Contraintes effectives

La contrainte effective est la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. Cette section est quantifiée en éliminant toutes les cavités et microfissures grâce à l'introduction de la variable  $D$ .

Dans le cas unidimensionnel, si  $F$  est la force appliquée sur une section  $S$  de l'élément de volume représentatif (Figure III.2),  $\sigma = F/S$  est la contrainte usuelle qui satisfait les équations d'équilibre. En présence d'un endommagement isotrope de mesure  $D$ , la section résistante effective est :

$$\tilde{S} = S - S_D = S (1 - D)$$

et on définit la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (\text{III-1})$$

$\tilde{\sigma} = \sigma$  : Pour un matériau vierge,

$\tilde{\sigma} \longrightarrow \infty$  : Au moment de la rupture.

Dans le cas tridimensionnel d'un endommagement isotrope, le rapport  $S/\tilde{S}$  ne dépend pas de l'orientation de la normale et l'opérateur  $(1 - D)$  s'applique à toutes les composantes. Pour le tenseur des contraintes effectives  $\tilde{\sigma}$ , on pourra écrire :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)}. \quad (\text{III-2})$$

### III-3.4) Principe d'équivalence en déformation

La distinction entre un état du matériau sain et endommagé, à la base de cette théorie a conduit au principe de contrainte effective, stipulant que la contrainte réelle s'appliquant sur la partie de matière encore résistante est supérieure à la contrainte macroscopique. Cette notion s'exprime souvent par le biais du principe d'équivalence en déformation (figure III.3). Dans ce principe, la contrainte effective [20] est celle qui produit dans une direction donnée la même déformation sur le matériau vierge que la contrainte macroscopique sur le matériau endommagé, soit dans le cas d'un endommagement scalaire (équation (III-2)).

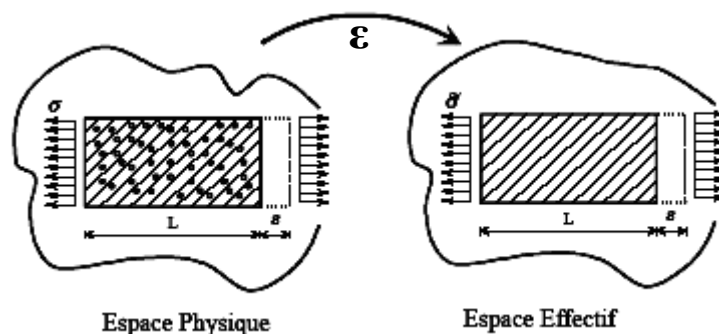


Figure. III.3 : Représentation schématique du principe de l'équivalence en déformation.

On site par exemple, pour un matériau endommagé, la loi d'élasticité linéaire s'écrit :

$$\varepsilon^e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D).E} \quad (\text{III-3})$$

E étant le module d'Young. Il s'agit d'une hypothèse non rigoureuse qui suppose que les différents comportements (élasticité, plasticité, viscoplasticité) sont affectés par la densité surfacique des défauts de dommage, corrigée de la même façon, mais sa simplicité permet d'établir un formalisme cohérent et efficace [20].

### III-3.5) Principe d'équivalence en énergie élastique

Une autre approche qui est celle du concept de contrainte effective associée au principe d'équivalence en énergie élastique a été utilisée par Sidoroff et Cordrbois [26] où ils supposent que la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  et la déformation  $\tilde{\varepsilon}$  effective sont telles que l'énergie élastique du matériau non endommagé soumis à  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\varepsilon}$  soit la même que celle du matériau endommagé sous  $\sigma$  et  $\varepsilon$ .

$$\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_e : \tilde{\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_e : \sigma \quad (\text{III-4})$$

### III-3.6) Principe d'équivalence en énergie totale

On considère un milieu endommagé  $\Omega$  représenté par la configuration réelle endommagée Cd. Son état mécanique est défini par les couples des variables d'état suivants :  $(\varepsilon, \sigma)$ ,  $(-s, T)$ ,  $(\alpha, X)$ ,  $(r, R)$  et  $(D, Y)$ . On introduit une configuration fictive non endommagée caractérisée par les variables d'état effectives  $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma})$ ,  $(\tilde{r}, \tilde{R})$  et  $(\tilde{\alpha}, \tilde{X})$  de telle sorte que ces derniers satisfassent le principe d'équivalence en énergie totale. C'est-à-dire que l'énergie totale devra rester inchangée pour les deux configurations précédentes.

En supposant que l'énergie totale  $W_T$  soit la somme de l'énergie élastique réversible  $W_e$  et de l'énergie anélastique irréversible  $W_a$  (phénomène d'écrouissage), on peut écrire :

- L'énergie élastique :

$$W_e(\varepsilon_e, D) = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_e : \tilde{\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_e : \sigma \quad (\text{III-5})$$

$$\text{Avec : } \tilde{\sigma} = \sigma / f(D) , \quad \tilde{\varepsilon}_e = f(D) \varepsilon_e \quad (\text{III-6})$$

Où  $f(D)$  est une fonction décroissante de la variable  $D$ .

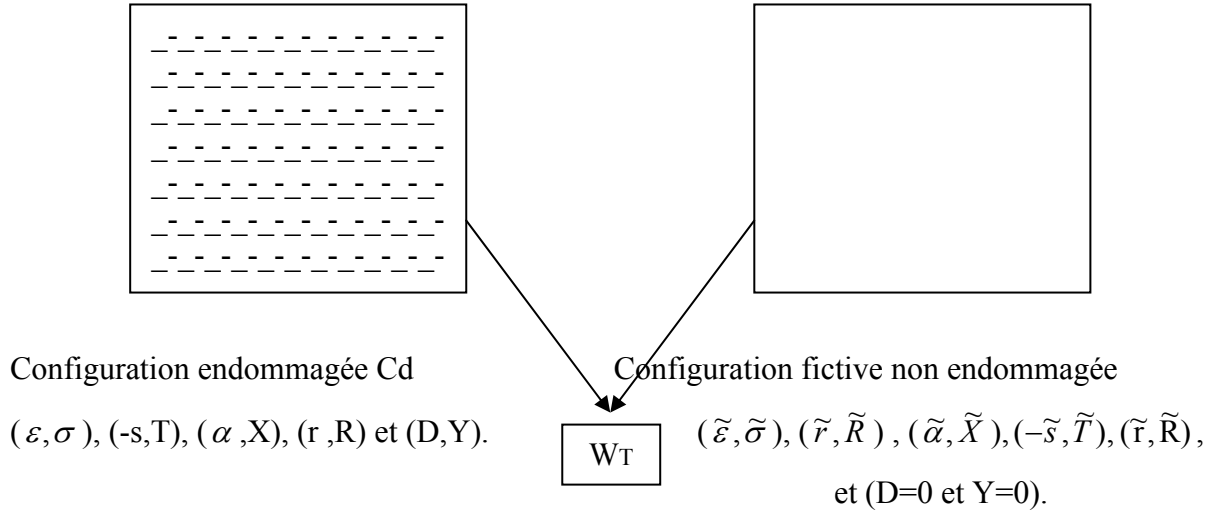


Figure. III.4 : Représentation schématique du principe de l'équivalence en énergie totale.

- L'énergie anélastique (emmagasinée ou dissipée) est décrite sous forme additive représentant la contribution de l'érouissage isotrope et cinématique :

-) érouissage isotrope :

$$W_a(r, D) = \frac{1}{2} \tilde{R} \cdot \tilde{r} = \frac{1}{2} R \cdot r \quad \text{(III-7)}$$

-) érouissage cinématique :

$$W_a(\alpha, D) = \frac{1}{2} \tilde{X} \cdot \tilde{\alpha} = \frac{1}{2} X \cdot \alpha \quad \text{(III-8)}$$

$$\text{Avec : } \tilde{R} = \frac{R}{h_1(D)}, \quad \tilde{r} = h_1(D) \cdot r \quad \text{(III-9)}$$

$$\tilde{X} = \frac{X}{h_2(D)}, \quad \tilde{\alpha} = h_2(D) \cdot \alpha \quad \text{(III-10)}$$

Où :  $h_1(D)$  et  $h_2(D)$  des fonctions positives décroissantes de  $D$  de nature phénoménologique. Elles sont réduites à l'unité si le dommage est existant et approche zéro si le dommage  $D$  atteint sa valeur critique ( $D = D_{cr} = 1$ ). Leur forme explicite peut être déterminée en concordance avec les valeurs expérimentales.

### III-3.7) Mesure de l'endommagement

#### III-3.7.1) Endommagement critique à rupture

En appliquant la notion de contraintes effectives à la rupture par décohesion, on définit la valeur critique de l'endommagement  $D_{cr}$  qui correspond à l'apparition de ce phénomène.

Si  $\tilde{\sigma}_u$  est la contrainte unidimensionnelle de rupture par décohesion et  $\sigma_u$  la contrainte de rupture ultime usuelle, on a :

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{1 - Dcr} \quad (\text{III-11})$$

d'où :

$$Dcr = 1 - \frac{\tilde{\sigma}_u}{\sigma_u} \quad (\text{III-12})$$

Pour les matériaux usuels,  $\sigma_u$  est de l'ordre de E/100 à E/250, Dcr est de l'ordre de 0.5 à 0.9.

Comment peut on mesurer l'endommagement ?

L'évaluation quantitative de l'endommagement n'est pas directement accessible aux mesures, elle est liée à la définition de la variable choisie pour représenter le phénomène. Ayant choisit une définition fondée sur le concept de contrainte effective, associé au principe d'équivalence en déformation, les mesures qui en découlent sont essentiellement liées au couplage déformation – endommagement, c'est-à-dire à la modification des caractéristiques mécaniques des matériaux engendrées par l'endommagement.

L'une des méthodes de mesure de l'endommagement la plus simple est la mesure de la variation du module d'élasticité.

### III-3.7.2) Mesure de l'endommagement à l'aide de la variation du module d'élasticité

On peut mesurer la variation du module d'élasticité avec deux méthodes :

- a) Méthode statique :

Selon la loi d'élasticité endommagée unidimensionnelle :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} = E \varepsilon_e \quad (\text{III-13})$$

Où :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon_e \quad (\text{III-14})$$

E est le module d'élasticité du matériau vierge de tout endommagement;  $E(1-D) = \tilde{E}$  peut être interprété comme le module d'élasticité du matériau endommagé.

Si le module d'Young est connu, alors :

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (\text{III-15})$$

- b) Méthode dynamique par ultra-sons :

Cette méthode est basée sur la mesure de vitesse ou de temps de propagation des ondes planes dans une éprouvette ou un cylindre d'un matériau endommagé conduit

au module d'élasticité endommagé  $\tilde{E}$  et à l'endommagement par  $D = 1 - \tilde{E}/E$ ,  $\tilde{E}$  s'exprimant en fonction des vitesses des ondes longitudinales  $\tilde{v}_L$  et transversale  $\tilde{v}_T$  par :

$$\tilde{E} = \rho \cdot \tilde{v}_T^2 \cdot \frac{3\tilde{v}_L^2 - 4\tilde{v}_T^2}{\tilde{v}_L^2 - \tilde{v}_T^2} \quad (\text{III-16})$$

Dans le cadre de l'hypothèse d'isotropie de l'endommagement (coefficient de poisson constant) et en négligeant la variation de  $\rho$  (ce qui n'entraîne pas d'erreur relative sur  $D$  supérieure à 5%), on aura :

$$D = 1 - \frac{\tilde{v}_L^2}{\tilde{v}_T^2}. \quad (\text{III-17})$$

### III-3.8) Formulation thermodynamique de l'endommagement

#### III-3.8.1) Potentiel d'état - Lois d'état

La formulation unifiée du couplage entre l'élasto(visco) - plasticité et l'endommagement suppose les hypothèses suivantes :

- Les déformations (élastiques et anélastiques) demeurent petites et s'écrivent  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ean}$  ( $\varepsilon_{ean}$  représente soit la déformation élastique ou viscoplastique).
- Le comportement thermoélastique est supposé linéaire et libre de l'effet anélastique.
- L'écoulement anélastique est être initialement isotrope avec écrouissage non linéaire isotrope et cinématique.
- L'endommagement est supposé isotrope et sans couplage direct avec les phénomènes thermiques.

#### III-3.8.1-a) Potentiel d'état

Le potentiel thermodynamique énergie libre est une fonction convexe de toutes les variables d'état et, en particulier, de l'endommagement.

$$\rho\psi(\varepsilon_e, r, \alpha, T, D) = \rho\psi_e(\tilde{\varepsilon}_e, T) + \rho\psi_{ean}(\tilde{r}, \tilde{\alpha}, T) \quad (\text{III-18})$$

En tenant compte des hypothèses précédentes, le potentiel suivant est obtenu :

$$\rho\psi_e(\varepsilon_e, T) = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_e : \partial : \tilde{\varepsilon}_e - (T - T_0) \cdot K : \tilde{\varepsilon}_e - \rho \cdot C_v \cdot T [\text{Log}(T/T_0) - 1] \quad (\text{III-19})$$

Où :

$\partial$  est le tenseur symétrique du 4<sup>ème</sup> ordre des propriétés élastiques.  $K$  est le tenseur symétrique du second ordre de conductivité thermique.  $\rho$  est la masse volumique du matériau.  $C_v$  est la chaleur spécifique et  $T_0$  la température initiale.

### III-3.8.1-b) Loi d'état

Les lois d'état sont classiquement tirées du potentiel d'état :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = \tilde{\partial} : \tilde{\varepsilon}_e - (T - T_0) \cdot \tilde{K} \quad \text{avec : } \tilde{\partial} = (1 - D) \cdot \partial_0 \quad (\text{III-20})$$

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \cdot \tilde{K} : \varepsilon_e + C_v \cdot \text{Log}(T/T_0) \quad \text{avec : } \tilde{K} = (1 - D)^{1/2} \cdot K \quad (\text{III-21})$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = Y_e + Y_{an} \quad (\text{III-22})$$

$$Y_e = -\rho \frac{\partial \psi_e}{\partial D} = \frac{1}{2} \varepsilon_e : \partial_0 : \varepsilon_0 - \frac{1}{2} (T - T_0) \cdot \frac{K}{(1 - D)^{1/2}} : \varepsilon_e \quad (\text{III-23})$$

$$Y_{an} = -\rho \frac{\partial \psi_{an}}{\partial D} \quad (\text{III-24})$$

### Remarques

- Si le dommage est nul ( $D=0$ ), alors les lois d'état classiques non couplées sont retrouvées.
- En tenant compte des propriétés de la fonction scalaire  $f(D)$ , la contrainte  $\sigma$  tend vers zéro quand  $D$  approche sa valeur critique  $D_{cr}$  et l'entropie  $S$  approche sa valeur  $C_v \cdot \text{Log}(T - T_0)$ .
- Contrairement à la théorie classique, le taux de restitution de densité d'énergie  $Y$  contient deux termes :  $Y_e$  et  $Y_{an}$ .

Où  $Y_e$  est la contribution d'énergie élastique et  $Y_{an}$  est le nouveau terme représentant la restitution d'énergie emmagasinée due à la croissance du dommage. Pour certains matériaux,  $Y_{an}$  représente plus de 50% du taux global  $Y$  [34].

### III-3.8.1-c) Cas de matériaux initialement isotrope

Dans le cas de matériaux (tels que le béton par exemple) dont le comportement initial peut être considéré comme thermoélastique et isotrope, seule l'équation du potentiel élastique est modifiée de la manière suivante :

$$\rho \psi_e = \frac{1}{2} \lambda \cdot [\text{Tr}(\tilde{\varepsilon}_e)]^2 + \mu \cdot \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}_e)^2 - (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu) \alpha (T - T_0) \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}_e) - \rho \cdot C_v \cdot T \left[ \log\left(\frac{T}{T_0}\right) - 1 \right] \quad (\text{III-25})$$



Ce qui donne :

$$\sigma = \tilde{\lambda}.Tr(\varepsilon_e).I + 2\tilde{\mu}.\varepsilon_e - (3.\lambda + 2.\mu)\tilde{\alpha}(T - T_0).I \quad (III-26)$$

$$S = \frac{1}{\rho}(3.\lambda + 2.\mu)\tilde{\alpha}.Tr(\varepsilon_e) + Cv.\log(T/T_0). \quad (III-27)$$

$$Ye = \frac{1}{2}\lambda.[Tr(\varepsilon_e)]^2 + \mu.Tr(\varepsilon_e)^2 - \frac{1}{2}(3.\lambda + 2.\mu).(T - T_0)\frac{\alpha.Tr(\varepsilon_e)}{(1-D)^{1/2}} \quad (III-28)$$

Dans les équations (III-25) et (III-28),  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes classiques de Lamé données par :

$$\lambda = \frac{\nu.E}{(1-2\nu).(1+\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2.(1+\nu)} \quad (III-29)$$

$\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\alpha}$  sont les propriétés effectives du matériau endommagé, avec :

$$\tilde{\lambda} = (1-D).\lambda; \quad \tilde{\mu} = (1-D).\mu; \quad \tilde{\alpha} = (1-D).\alpha \quad (III-30)$$

Nous tenons à signaler que tous ces coefficients sont dépendants de la température.

### III-3.8.2) Potentiel de dissipation

Le second principe de la thermodynamique et l'hypothèse du découplage entre la dissipation mécanique et thermique, imposent que la dissipation mécanique soit positive :

$$\phi = \sigma : \dot{\varepsilon}_p - Y.\dot{D} - R.\dot{r} - X.\dot{\alpha} > 0 \quad (III-31)$$

En supposant que la dissipation par endommagement soit indépendante de la dissipation par écoulement plastique, on doit donc avoir séparément :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}_p - R.\dot{r} - X.\dot{\alpha} > 0 \quad \text{et} \quad -Y.\dot{D} > 0 \quad (III-32)$$

On peut démontrer que  $\phi_D = -Y.\dot{D}$  correspond à l'énergie dissipée par le processus de décohésion transformée éventuellement en chaleur [35].

- Y étant une forme quadratique définie positive, le second principe impose que  $D > 0$ . Ainsi, l'endommagement tel qu'il a été défini ne peut que croître ou rester constant.

Par ailleurs, l'introduction d'un potentiel de dissipation  $\varphi$  associé à la fonction  $\phi$ , donne par l'intermédiaire de sa fonction duale  $\varphi^*$  la loi d'évolution:

$$\dot{D} = \frac{\partial \varphi^* (Y, (\text{grad} T) / T, \varepsilon, D, T)}{\partial Y} \quad (\text{III-33})$$

Nous verrons plus loin quelques expressions analytiques proposées par les auteurs pour la fonction  $\varphi^*$  afin de représenter l'évolution de la microfissuration du béton.

### III-3.9) Critères tridimensionnels d'endommagement

Nous définissons dans ce paragraphe les seuils d'endommagement en déformation ou en contraintes au-dessous desquels d'endommagement est nul ou négligeable. En unidimensionnel, le seuil d'endommagement en contraintes définit le domaine de résistance du matériau :

$$0 < \sigma < \sigma_D \Rightarrow D = 0$$

Lorsque  $|\sigma|$  atteint ou dépasse  $\sigma_D$ , il y a endommagement. En tridimensionnel, on généralise cette notion pour une surface seuil d'endommagement (analogue à celle de plasticité) :

$$g(\sigma, D) = 0 \quad (\text{III-34})$$

Si  $g < 0 \rightarrow$  pas d'évolution du dommage

Si  $g \geq 0 \rightarrow$  il y a évolution du dommage.

Dans ce qui suit, nous allons voir quelques exemples de telles surfaces, décrites au moyen d'invariants du tenseur de contraintes. L'endommagement est ici supposé isotrope.

A noter que dans certains cas, on pourra exprimer le critère en fonction de la déformation et la surface limite s'exprimera par:

$$g(\varepsilon, D) = 0 \quad (\text{III-35})$$

#### III-3.9.1) Critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique

Contrairement au critère de plasticité de VON MISES qui met en jeu uniquement l'énergie de cisaillement, l'endommagement dépend non seulement des déformations de cisaillement mais aussi des déformations volumiques, puisque la croissance des cavités et des Fissures sont

des mécanismes très sensibles à la contrainte hydrostatique. On pourra donc postuler que le mécanisme d'endommagement est gouverné par l'énergie de déformation élastique totale.

$$W_e = \frac{1}{2.E(1-D)} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + (1-2\nu)\sigma_h^2 \right] \quad (\text{III-36})$$

Avec  $\sigma_{eq}$  ; la contrainte équivalente de VON MISES

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{2}{3} \sigma' : \sigma' \right)^{1/2} \quad (\text{III-37})$$

et  $\sigma_h$  : la contrainte sphérique et  $\sigma'$  : le déviateur de  $\sigma$

Comme pour la contrainte équivalente en plasticité, on définit la contrainte équivalente d'endommagement  $\sigma^*$  en écrivant que cette énergie d'un état tridimensionnel est égale à celle de l'état unidimensionnel équivalent, défini par  $\sigma^*$ , donc ;

$$\frac{\sigma^{*2}}{2E(1-D)} = \frac{1}{2E(1-D)} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III-38})$$

$$\text{D'où : } \sigma^* = \sigma_{eq} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III-39})$$

Etant donné la relation entre cette contrainte équivalente et la variable  $Y'$  duale de  $D$  (telle que  $Y\dot{D}$  représente la dissipation). Cette variable représente le taux de restitution d'énergie élastique restituée lors d'un accroissement d'endommagement à contrainte et température constante avec :

$$\sigma^* = (1-D)\sqrt{-2EY} \quad \text{avec } Y = -\frac{1}{2} \left( \frac{dwe}{dI} \right) \quad (\text{III-40})$$

### III-3.9.2) Critère à trois invariants

Le critère précédent est très simple et formellement Justifié par la thermodynamique, mais il peut être mis en défaut pour l'endommagement de fluage où il donne la même réponse en traction qu'en compression [20].

Une forme plus générale, mais plus complexe consiste à exprimer le critère d'endommagement à partir des trois invariante élémentaires.

$$\sigma_H = \frac{J_1(\sigma)}{3} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) \quad (\text{III-41})$$

$$\sigma_{eq} = J_2(\sigma) = \left[ \frac{3}{2} \text{Tr}(\sigma'^2) \right]^{1/2} \quad (\text{III-42})$$

$$J_3(\sigma) = \left[ \frac{27}{2} \text{Tr}(\sigma'^3) \right]^{1/3} \quad (\text{III-43})$$

$$\text{avec } J_0(\sigma) = \text{Sup}(\sigma_i) \quad (\text{III-44})$$

Si on choisit une combinaison linéaire :

$$X(\sigma) = \alpha J_0(\sigma) + \beta J_1(\sigma) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma).$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  coefficients phénoménologiques

$X(\sigma)$  représente l'état de contrainte

Si  $X(\sigma) < 0 \rightarrow$  pas d'endommagement

$X(\sigma) = 0 \rightarrow$  début d'endommagement

### III-3.9.3) Critère non symétrique en déformation

Ce critère a été développé pour le béton qui présente la caractéristique d'être très résistant en compression et faible en traction. Les microfissures, grâce aux observations faites sur microscope, ont toujours une orientation préférentielle normale aux directions d'extension principales, d'où l'idée d'introduire un critère qui ne dépende que de la partie positive des déformations principales.

En effet, de nombreux auteurs [22], [36], [37] ont noté dans les expériences triaxiales l'importance des extensions ( $\varepsilon > 0$ ) dans le développement de la microfissuration. Des observations au microscope optique sur des tranches de matériaux pré sollicités [38] ont montré l'orientation privilégiée des microfissures perpendiculairement aux directions d'extension, créant dans un stade ultime des *Surfaces de rupture de même sens*.

Ces résultats ont conduit à considérer que les déformations d'extension sont à l'origine de l'endommagement et à supposer donc que le potentiel de dissipation ne dépende que de la partie positive des déformations. D'autre part, pour conserver un caractère simple aux formulations mathématique, on introduit pour les problèmes tridimensionnels la notion de déformation équivalente définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2} \quad (\text{III-45})$$

avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  les déformations principales

$i=1,2,3$  et  $\langle \varepsilon_i \rangle = \varepsilon_i$  si  $\varepsilon_i > 0$  cas de l'extension

$\langle \varepsilon_i \rangle = 0$  si  $\varepsilon_i < 0$  cas de la compression

La déformation équivalente est utilisée pour traduire la participation de l'état de déformation à l'endommagement Soit  $\varepsilon_{D_0}$  déformation seuil d'endommagement tirée de l'expérience unidimensionnelle à partir de laquelle nous constatons une variation du module d'élasticité (l'endommagement étant supposé isotrope, donc le coefficient de Poisson  $\nu$  sera constant.)

- Si  $\varepsilon < \varepsilon_{D_0}$ , domaine élastique ( $\dot{D}=0$ )

- Si  $\varepsilon > \varepsilon_{D_0}$ , domaine élastique endommageable ( $\dot{D} > 0$ )

A noter qu'il existe dans la littérature d'autres critères tels que le critère de limite de fatigue qui concerne essentiellement les aciers et leurs alliages.

### III-3.10) Couplage Elasticité - Endommagement

Une théorie prenant en compte à la fois l'ensemble des phénomènes d'élasticité, de viscosité, de déformation permanentes et d'endommagement serait très sophistiquée et peu facile à manipuler. Ayant pour but principal la contribution à la mise au point de méthodes de calcul utilisables, prenant en compte les phénomènes essentiels liés à la microfissuration du béton, des hypothèses simplificatrices négligeant la viscosité et la déformation permanente sont nécessaires d'une part, et d'autre part le béton est généralement considéré comme un matériau qui n'a pas d'effets de plasticité importants. Aussi, faut-il ajouter que les déformations non linéaires quelque fois irréversibles sont produites par des décohésions que l'on peut considérer au travers d'une théorie d'endommagement. Ainsi, il apparaît que le couplage élasticité - endommagement peut représenter de manière suffisante le comportement du béton.

Sachant que l'endommagement diminue la rigidité et la résistance du matériau, pour un état de contraintes donné (les déformations étant d'autant plus grandes que l'endommagement est élevé), il en ressort une importance majeure des calculs sous couplage où l'on calcule simultanément contraintes, déformations et endommagement dans les problèmes d'évolution.

A cet effet, la notion de contrainte effective associée au principe d'équivalence en déformation permettra d'écrire très simplement les lois de comportement couplées,

puisqu'il suffit de remplacer la contrainte usuelle  $\sigma$  par la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$ . En définitive, ne retenant que deux phénomènes, élasticité et endommagement, les deux variables qui s'imposent sont :

- Le tenseur des déformations élastiques  $\varepsilon$
- La variable d'endommagement  $D$

*Hypothèse de l'endommagement isotrope :*

Certains auteurs (Lemaitre et Mazars) estiment que l'hypothèse d'isotropie du dommage est suffisante pour la plupart des cas d'études. A cet effet, ils adoptent l'hypothèse selon laquelle une sollicitation donnée crée à un stade avancé de la déformation un endommagement qui se traduit par la même perte de résistance dans toutes les directions. Ceci ne fait évidemment pas l'unanimité. Mais il n'en demeure moins que les calculs s'y trouvent largement simplifiés : l'opérateur  $D$  étant réduit à un scalaire.

Notons par ailleurs, que l'hypothèse d'isotropie de l'endommagement n'entraîne pas l'isotropie du comportement. Par exemple, un béton endommagé d'une valeur  $D$  du continuera d'avoir une réserve de résistance en traction bien inférieure à celle de compression. Dans le cas de l'élasticité et de l'endommagement isotrope, la loi d'élasticité du matériau endommagé s'écrit :  $\varepsilon = A : \tilde{\sigma}$

$$\text{ou bien : } \varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{\sigma}{1-D} \right) - \frac{\nu \text{Tr}(\sigma)}{E(1-D)} I \quad (\text{III-46})$$

Relation qui doit être associée à la loi d'endommagement choisie. Les lois d'évolution peuvent être tirées de modèles tels ceux établis par Mazars, Benouniche, Ladeveze, etc..... et qui sont exposés dans le paragraphe suivant.

#### **III-4) Présentation de quelques modèles d'endommagement en approche locale**

Pour modéliser le processus d'endommagement, une variété de lois constitutives ont été proposées successivement, en utilisant tantôt la théorie endochronique (Bazant 1986 [39]), tantôt la théorie de rupture plastique (Dougill 1983 [40], Dragon et Mroz 1979 [41]) les modèles de déformations totales (Gerstle et col 1980 [41], Kostovos 1980 [43]) ou la théorie de plasticité avec limite d'élasticité décroissante (Wastiels 1980 [44]) et plus récemment les modèles microplans (Bazant 1980, Pande et Sharma 1982 [45]).

Dès le début des années 1980, il a été établi que la mécanique de l'endommagement pouvait modéliser correctement le comportement du béton, (Krajcinovic 1983 [46], Ladeveze 1983 [47], Lemaitre et Mazars 1982 [5]) et ce, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles qui a permis une formulation adaptée des lois constitutives.

Considérant le matériau comme un système décrit par un ensemble de variables et d'un potentiel thermodynamiques des lois constitutives qui sont systématiquement tirées de la cinématique de l'endommagement. Cependant, un choix adéquat du potentiel et des variables d'endommagement doit être fait.

Dans ce qui suit, des modèles en approche locale et aux complexités croissantes sont proposés. A signaler au passage que l'un des avantages de la méthode thermodynamique consiste en la variété d'expression de potentiels thermodynamiques que nous pourrions choisir.

#### III-4.1) Modèle de Dragon - Mroz (1979)

Pour modéliser le comportement du matériau élasto-fragile, Dragon et Mroz introduisent un paramètre de fissuration de caractère tensoriel  $\varpi$  fonction de l'ouverture des fissures. Les lois de comportement fissuré s'obtiennent en définissant un potentiel élasto-fissuré  $V(\sigma, \varpi)$  qui donne

$$\varepsilon(\sigma, \varpi) = \frac{\partial V(\sigma, \varpi)}{\partial \sigma} \quad (\text{III-47})$$

Les lois d'évolution s'obtiennent classiquement par une approche thermodynamique, en définissant une fonction seuil :

$$P(\sigma, \omega) \leq 0. \quad (\text{III-48})$$

qui entraîne les lois incrémentales :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_f \quad (\text{III-49})$$

$$\text{soit } \dot{\varepsilon} = A(\sigma, \omega) : \dot{\sigma} + B(\sigma, \omega) : \dot{\omega}. \quad (\text{III-50})$$

Pour tenir compte de la plasticité du matériau, Dragon et Mroz [41] introduisent également une variable d'écrouissage  $\alpha$ , et remplacent la fonction seuil (III-48) par

:

$$P(\sigma, \omega, \alpha) \leq 0. \quad (\text{III-51})$$

ce qui entraîne pour la vitesse de déformation totale :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_f + \dot{\varepsilon}_p. \quad (\text{III-52.})$$

Pour exprimer le degré de fissuration, ils introduisent en plus une variable  $c(\omega)$  dite "intensité de fissuration" fonction scalaire de  $\omega$ . En définissant ses valeurs critiques, on obtient la courbe critique de rupture du matériau. La figure III.5 représente schématiquement cette courbe critique dans le plan  $\sigma_3 = 0$ .

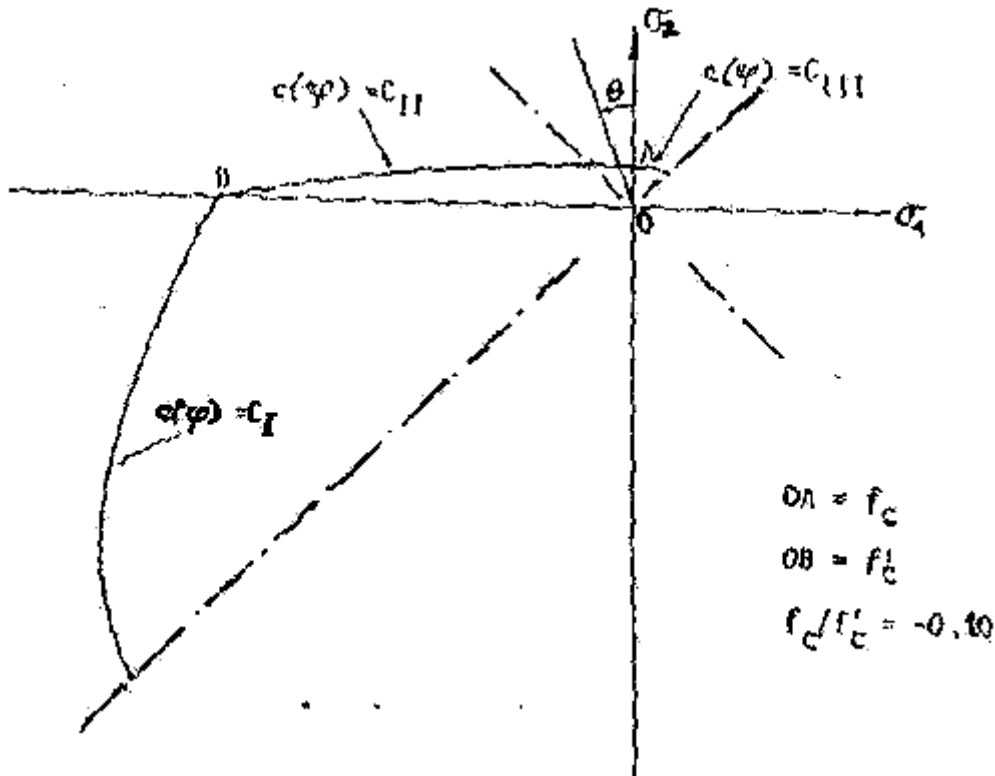


Figure. III.5 : Représentation de la courbe  $c(\omega)$  d'un matériau élasto – fragile dans le plan  $\sigma_3 = 0$ .

#### III-4.2) Modèle endochronique de Bazant (1986)

Une autre approche théorique est la modélisation basée sur la théorie endochronique, qui a été développée pour la modélisation du béton notamment par Bazant. Cette modélisation peut en général très bien prédire le diagramme contraintes - déformations, et aussi la courbe critique de la rupture du béton, sous sollicitation uniaxiale, biaxiale, triaxiale ainsi que la sollicitation combinée en torsion et compression, en prenant en compte l'ensemble des phénomènes élastiques, visqueux, pseudo plastiques (des déformations permanentes.) De la dilatance volumique  $c_l$  de l'endommagement.



La modélisation part d'un modèle de Maxwell monodimensionnel :

$$d\sigma = E_0 d\varepsilon - \sigma \frac{dt}{Z_1} \quad (\text{III-53})$$

avec  $Z_1$  : Caractéristique du matériau

Pour caractériser les déformations anélastique du matériau, on introduit pour remplacer le temps actuel  $t$ , une variable scalaire  $Z_1$  dite le temps "intrinsèque" et définie par :

$$(dZ)^2 = \left(\frac{d\xi}{Z_1}\right)^2 + \left(\frac{dt}{\tau_1}\right)^2 \quad (\text{III-54})$$

avec  $\tau_1$  : Temps de relaxation

$\xi$  est un paramètre que l'on peut imaginer comme représentant le degré d'endommagement du matériau, fonction de la vitesse de déformation.

Les figures (figure III.6 et figure III.7) représentent une bonne concordance entre les résultats théoriques

du modèle endochronique et les résultats expérimentaux.

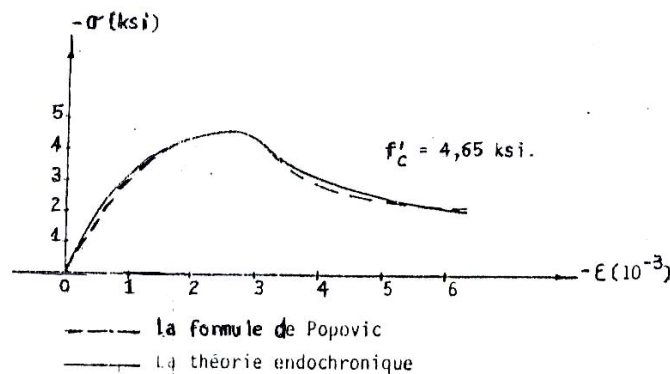


Figure. III.6 : Représentation de la courbe  $\sigma(\varepsilon)$  théorique en comparant avec la formule de Popovic issue des résultats expérimentaux [54].

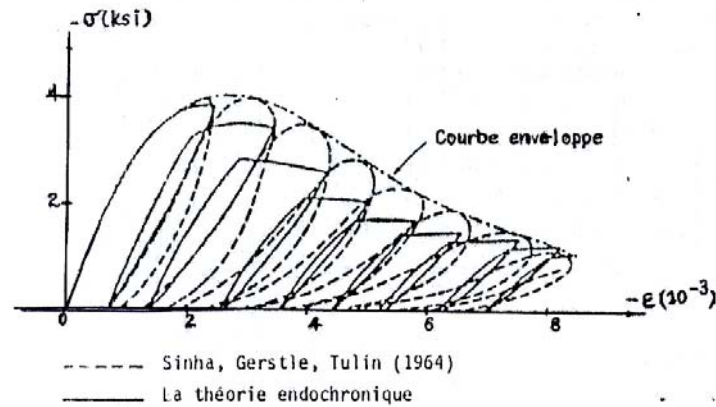


Figure. III.7 : Représentation de la courbe  $\sigma(\epsilon)$  et des boucles d'hystérésis en compression cyclique uniaxiale par la théorie endochronique en comparant avec la théorie de Sinha et Col.

### III-4.3) Modèle de Lolland

Lolland s'est intéressé au comportement en traction uniaxiale du béton. L'endommagement est lié à la notion de seuil en déformation et s'insère donc dans l'approche proposée par Marigo ( que nous verrons plus loin.) Pour Lolland, l'endommagement se décompose en deux phases (Chap I, Figure I.8.a.)

- L'endommagement diffus (avant le pic)

$$\epsilon < \epsilon_e : \quad \sigma = \epsilon E_0 (1 - D) \quad (\text{III-55})$$

$$\text{Avec : } D = D_0 + (1 + D_0) C_1 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_e} \right)^{\nu} \quad (\text{III-56})$$

- L'endommagement localisé (après le pic) :

pour  $\epsilon > \epsilon_r$   $\sigma = \text{cste} = E_0 \epsilon_r \rightarrow \sigma = \sigma_r (1 - D)$

$$\text{avec } D = D_0 + (1 - D) \left[ C_2 + C_3 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \right] \quad (\text{III-57})$$

$D_0$  : Endommagement initial

$C_1, C_2, C_3, \nu$  constantes déterminées à partir des données expérimentales,  $f_l$  (constante au pic de la courbe) ;  $E_0$  (module d'élasticité initial) et  $\epsilon_0$  (déformation ultime).

L'intérêt de cette modélisation est de décrire avec précision les phénomènes entrant en jeu dans un essai de traction. Par ailleurs, la liaison avec la mécanique de la rupture est

possible en considérant que la phase endommagement localisé est équivalente à une phase de développement d'une fissure unique.

#### III-4.4) Modèle de Benouniche (1979)

Benouniche [48] a proposé un modèle pour le béton *en compression* qui prend en compte les déformations permanentes, dans une description de l'endommagement tridimensionnel anisotrope.

Dans le cas d'une compression simple, il partait d'une hypothèse de l'endommagement supposé isotrope de révolution, qui ne dépend que des déformations "tendues". Il s'agit dans ce cas des déformations transversales maximales atteintes.

$$\varepsilon_{tm} = \varepsilon_l^e + \varepsilon_l^p \quad (\text{III-58})$$

Il caractérise les évolutions de l'endommagement anisotrope par trois phases de comportement en fonction de  $\varepsilon_{tm}$  :

- $\varepsilon_{tm} < \varepsilon_{D0}$  : Comportement élastique linéaire où l'endommagement et les déformations permanentes sont négligeables, avec  $\varepsilon_{D0}$  : seuil d'endommagement isotrope.
- $\varepsilon_{D0} < \varepsilon_{em} < \varepsilon_{D1}$  : une phase intermédiaire non linéaire qui correspond à l'apparition de l'endommagement isotrope et des déformations longitudinales et transversales permanentes, la déformation transversale permanente est toujours négligeable.  $\varepsilon_{D1}$  : Seuil d'endommagement anisotrope
- $\varepsilon_{tm} > \varepsilon_{D1}$  : une phase fortement non linéaire qui correspond à l'apparition de l'endommagement anisotrope et des déformations longitudinales et transversales permanentes.

Benouniche a formulé en plus des lois complémentaires qui dépendent également de  $\varepsilon_{tm}$  tout en permettant de coupler les phénomènes d'endommagement d'élasticité et de plasticité. Toutefois, ces lois complémentaires sont déterminées empiriquement à partir de données expérimentales et non par une approche thermodynamique. Il a également appliqué son modèle pour un essai triaxial, où l'endommagement est supposé orthotrope. La description de la modélisation est analogue à celle de la compression simple. La Figure III.8 représente le résultat des calculs à partir de son modèle, sur la courbe contrainte déformations longitudinales en compression simple et triaxiale.

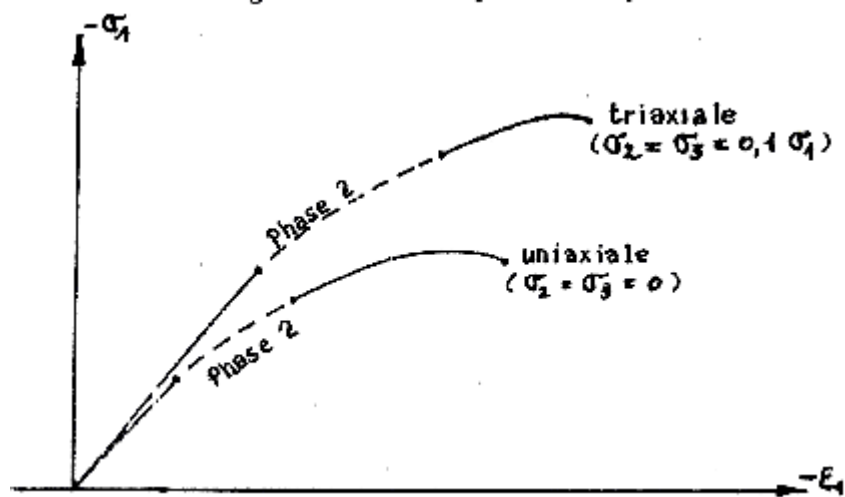


Figure. III.8 : Courbes contraintes – déformations longitudinales en compression simple et en sollicitation triaxiale (Benouniche.)

#### III-4.5) Modèle de Mazars (1982)

Tout en respectant la dissymétrie du comportement en traction et en compression. Mazars a proposé une modélisation de l'endommagement du béton en traction et son extension au cas tridimensionnel, et ce dans le cas isotherme et sous chargements monotones croissants.

Il l'a appliqué ensuite dans divers calculs de structures en béton telles les poutres et les plaques. Le résultat a montré que cette modélisation permettait de prévoir la localisation des dégradations, leur intensité, et leur développement, y compris lorsqu'elles représentent des fissures.

Dans le cas monodimensionnel, il a basé son modèle sur l'hypothèse que la valeur actuelle de la variable endommagement  $D$  dépendait uniquement de la déformation maximale atteinte  $\epsilon_m$  et ce suite à l'observation faite dans le diagramme  $\sigma - \epsilon$  sur lequel le module d'élasticité reste constant le long de l'intervalle  $[0, \epsilon_{D0}]$  (Figure III.9.)

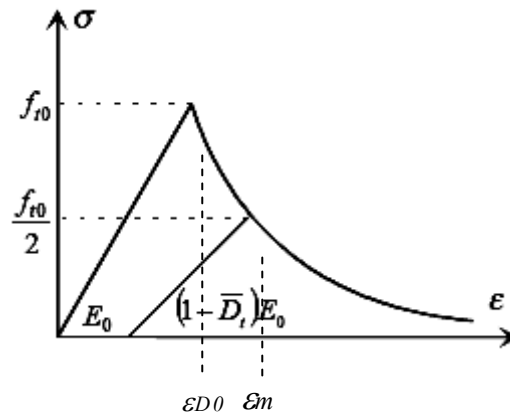


Figure. III.9 : Modèle de comportement de béton en traction (MAZARS).

Donc, soit  $D = f(\epsilon_m)$  si  $\epsilon_m \geq \epsilon_{D0}$

Dans le cas tridimensionnel, il remplace  $\epsilon_m$  par une déformation équivalente :

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle^2 + \langle \epsilon_2 \rangle^2 + \langle \epsilon_3 \rangle^2} \quad (\text{III-59})$$

$$\text{avec } \langle \epsilon_i \rangle = \epsilon_i \text{ si } \epsilon_i > 0$$

$$\langle \epsilon_i \rangle = 0 \text{ si } \epsilon_i \leq 0$$

$\langle \epsilon_i \rangle$  est la partie positive des déformations principales, c'est à dire qu'il est tenu compte uniquement des déformations dues aux extensions, faisant suite ainsi aux observations faites au microscope par certains auteurs [19], [4] selon lesquelles les phénomènes d'extension sont les plus importants dans le développement de la microfissuration dont l'orientation privilégiée se fait perpendiculairement aux directions d'extension, créant dans un stade ultime des surfaces de rupture de même sens. Ces résultats ont ainsi conduit l'auteur (Mazars) à supposer que le potentiel de dissipation ne dépende que de la partie positive des déformations.

En supposant que l'endommagement est isotrope, on a  $D = f(\epsilon_m)$ . Le modèle est complété par une expression de  $D$  pour  $\epsilon_m > \epsilon_{D0}$  :

$$D = 1 - \frac{A}{\exp[B(\tilde{\epsilon}_M - \epsilon_{D0})]} - \frac{\epsilon_{D0}(1-A)}{\tilde{\epsilon}_M} \quad (\text{III-60})$$

Avec  $\epsilon_{D0}$  : seuil d'endommagement correspondant à la contrainte ultime en traction simple  $A$  et  $B$  sont les paramètres caractéristiques du matériau. Ces trois constantes  $\epsilon_{D0}$ ,  $A$ ,  $B$

sont obtenues à partir de la courbe  $\sigma - \varepsilon$  en traction simple, qui est une donnée expérimentale. La loi de comportement élastique endommagée s'écrit dans ce cas :

$$\sigma = \bar{\sigma} : \varepsilon, \text{ avec : } \bar{\sigma} = \sigma_0 \cdot (1 - D)$$

La figure III.10 représente le domaine élastique du béton dans le plan  $\sigma_3 = 0$ , obtenu par cette modélisation en définissant le critère seuil d'endommagement :

$$\text{Si } \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2} < \varepsilon_{D0} \quad (\text{III-61})$$

Alors nous sommes dans le domaine élastique  $D = 0$ ,  $E = \text{cte}$

-Si  $\varepsilon_m \geq \varepsilon_{D0}$  domaine élastique endommageable ( $E$  diminue,  $D$  augmente,  $D > 0$ .)

Sont présentés également sur cette figure les résultats obtenus au cours des expériences biaxiales par K. upfer, Hilsdorf, Rucli [19] d'une part, et par Bascul Maso [50] d'autre part. Nous remarquons que la courbe est calée par rapport à la contrainte maximale en uniaxiale. La concordance peut être estimée assez bonne si l'on admet que la limite d'élasticité linéaire expérimentale est difficile à cerner car la courbe avant pic en traction s'écarte assez peu de la droite. Dans l'ensemble, cette courbe semble raisonnable comparée à ces résultats expérimentaux. Il est à remarquer que le coefficient de poisson reste constant dans ce modèle, l'endommagement étant supposé dès le départ, isotrope.

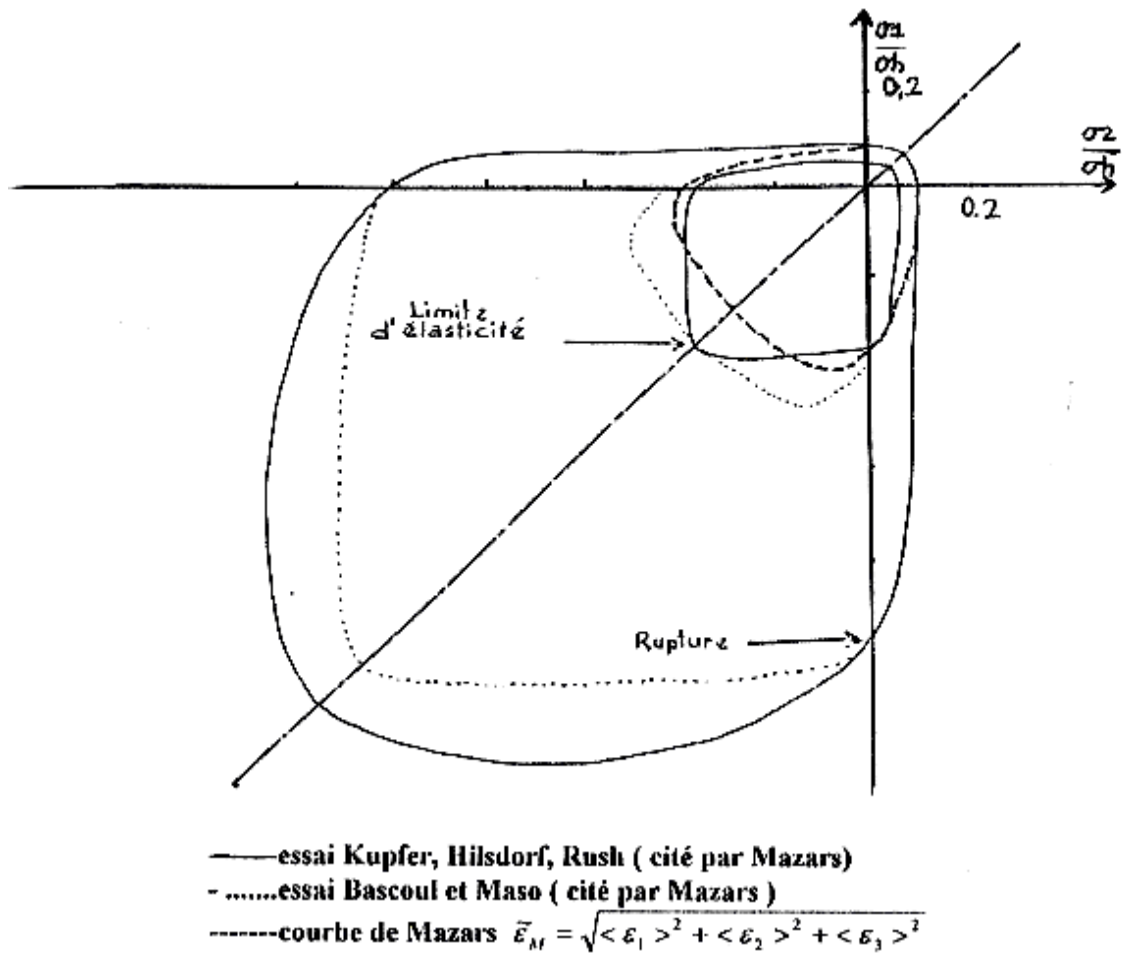


Figure. III.10 : Représentation du domaine élastique du béton en définissant le seuil d'endommagement.

#### III-4.6) Améliorations apportées à ce modèle par Mazars (1986)

La valeur  $\epsilon_{D0}$  est, cette fois considérée comme variable et dépendante de la valeur d'endommagement  $D$  et il est posé  $\epsilon_{D0} = K(D)$  : ce qui est du même titre que le paramètre d'écrouissage utilisé en plasticité.

D'autre part, l'auteur a essayé d'adapter ce modèle au cas de l'endommagement causé par les efforts de compression où la réponse en compression est décrite par des lois obtenues en couplant deux types de dommages  $D_t$  et  $D_c$  correspondant respectivement au dommage mesuré en traction uniaxiale et en compression uniaxiale.

A partir des réponses représentées dans les figures III.11.(a) et (b) et de leur évolution donnée dans une forme intégrale de  $F$  par deux fonctions  $F_t$  et  $F_c$  dans l'équation (III.64) le dommage total  $D$  est mesuré comme la somme de  $D_t$  et  $D_c$ . Dans l'équation (III.62), les coefficients  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  sont fonction de l'état de déformation.

$$D = \alpha_t \cdot Dt + \alpha_c \cdot Dc \tag{III-62}$$

$$Dt = Ft(\epsilon) \quad \text{et} \quad Dc = Fc(\epsilon) \tag{III-63}$$

$$F_i = 1 - \frac{(1 - A_i)K_0}{\epsilon} - \frac{A_i}{\exp[B_i(\epsilon - K_0)]} \quad (i = t, c) \tag{III-64}$$

On appelle  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  ( $\sigma = \sigma^+ + \sigma^-$ ) les tenseurs dans lesquels apparaissent seulement les contraintes principales positives et négatives respectivement  $\epsilon_t$  et  $\epsilon_c$  les tenseurs de déformation définis comme suit :

$$\epsilon_t = \partial^t : \sigma_+ \quad \text{et} \quad \epsilon_c = \partial^c : \sigma_- \tag{III-65}$$

Les coefficients  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  sont définis par les expressions suivantes (Mazars 1984) :

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\epsilon_{ti}(\epsilon_{ti} + \epsilon_{ci})}{\epsilon^2} ; \quad \alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\epsilon_{ci}(\epsilon_{ti} + \epsilon_{ci})}{\epsilon^2} \tag{III-66}$$

Avec  $H_i = 1$  si  $\epsilon_i = \epsilon_{ti} + \epsilon_{ci} > 0$  sinon  $H_i = 0$

Les paramètres  $K_0$ ,  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$  et  $B_c$  dans les lois d'évolution sont identifiés indépendamment à partir d'essais en compression sur cylindres, et d'essais de flexion sur des poutres. Puisque, deux types d'endommagements sont utilisés et qui dépendent du signe des contraintes principales,  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  sont donc des coefficients qui définissent la contribution de chaque type d'endommagement lors d'un chargement quelconque. De l'équation (III-66), on peut vérifier qu'en tension uniaxiale  $\alpha_t = 1$ ,  $\alpha_c = 0$  et  $D = Dt$  et vice versa en compression.

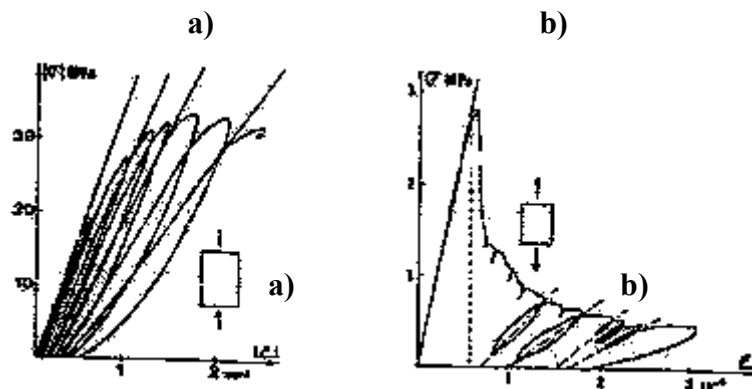


Figure. III.11 : Comportement expérimental du béton sous : a) compression, b) traction.



### III-4.7) Modèle du dommage unilatéral (Ladveze 1983, Mazars 1985)

Au lieu d'une évaluation moyenne de la cinématique de Endommagement, il est plus utile de distinguer le dommage dû à la compression. En particulier, quand le matériau est soumis à un chargement cyclique, la formulation précédente ne peut pas décrire le rétablissement de la rigidité observée durant l'inversion du signe de contrainte (Mazars, Laborderie 1987).

Puisque le dommage ne peut pas diminuer (inégalité de Clausius Duhem), deux variables scalaires et indépendantes d'endommagement  $D_c$  et  $D_t$  sont utilisées. Dépendant du signe de la contrainte, le dommage apparent sera soit  $D_t$  pour les contraintes positives ou soit  $D_c$  pour les contraintes négatives. Si les sollicitations sont complexes, le dommage sera une combinaison de  $D_t$  et  $D_c$ . Nous utilisons la décomposition du tenseur des contraintes en une partie positive  $\sigma^+$  et négative  $\sigma^-$ . Le matériau est supposé demeurer élastique et le potentiel  $\rho\psi$  est :

$$\rho\psi_e = \rho\psi_e(\sigma^+) + \rho\psi_e(\sigma^-) \quad (\text{III-67})$$

La traction et la compression sont reconnaissables par le signe de la contrainte.

L'équation  $\varepsilon = \frac{\partial(\rho\psi_e)}{\partial\varepsilon}$  peut être utilisée pour trouver les lois constitutives correspondantes dans l'équation (III-68) :

$$\varepsilon_e = \frac{1}{E_0(1-D_t)} [(1+V_0)\sigma_+ - V_0 \langle t\sigma \rangle + I] + \frac{1}{E_0(1-D_c)} [(1+V_0)\sigma_+ - V_0 \langle t\sigma \rangle - I] \quad (\text{III-68})$$

Dans l'inégalité de Clausius Duhem, deux taux de restitution de densité d'énergie sont reliés à chaque variable scalaire.

$$\phi_t = Y_t \dot{D}_t + Y_c \dot{D}_c ; \quad Y_t = \frac{\partial(\rho\psi_e)}{\partial D_t} ; \quad Y_c = \frac{\partial(\rho\psi_e)}{\partial D_c} \quad (\text{III-69})$$

La condition pour l'inégalité de Clausius Duhem est que les deux taux d'endommagements  $D_c$  et  $D_t$  doivent rester positifs. Il a été proposé d'utiliser pour chaque variable une surface seuil déférente exprimée en terme de taux d'énergie restituée :

$$g_t(\varepsilon_t, D_t, K_0) = Y_t - K_t(D_t) ; \quad g_c(\varepsilon, D_c, K_0) = Y_c - K_c(D_c) \quad (\text{III-70})$$

$K_t$  et  $K_c$  sont les paramètres d'écrouissage similaires à  $K(D)$

Les lois d'évolution pour chaque variable scalaire sont les fonctions suivantes de taux de restitution d'énergie :  $D_t = F_t(Y_t)$  et  $D_c = F_c(Y_c)$

La figure III-12.b montre l'allure correspondante du domaine dans l'espace des contraintes où la réponse du matériau est initialement élastique. C'est l'intersection du domaine élastique tiré île chaque surface. Similairement au modèle scalaire précédent, la dissymétrie entre la compression et la traction est retrouvée.

Comparées au modèle scalaire (figure III-12.a), les réponses cycliques sont très différentes malgré que l'enveloppe contrainte déformation soit identique. Pour le présent modelé, le dommage produit par la traction n'a pas d'effet sur la réponse en compression et vice versa. Les deux variables d'endommagement évoluent indépendamment, chacune décrivant la diminution de la raideur du matériau soumis aux charges uniaxiales de signes positifs ou négatifs.

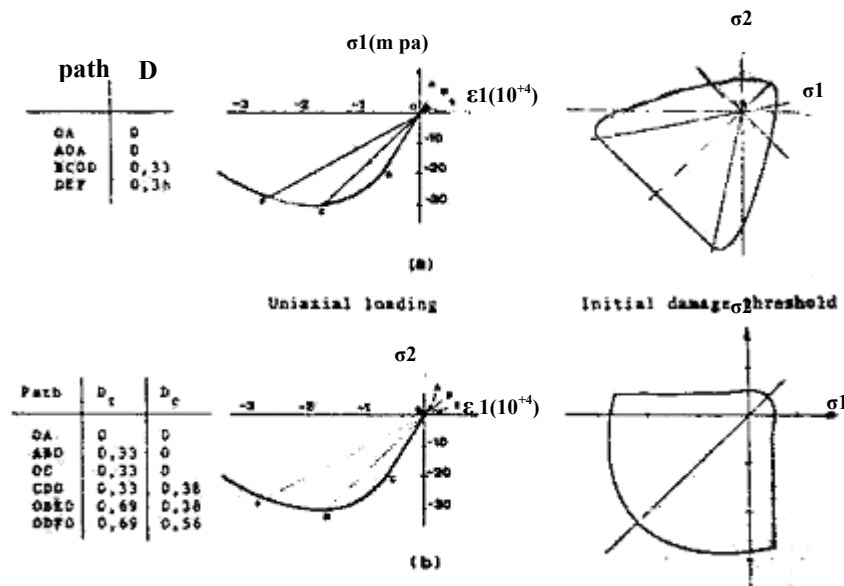


Figure. III.12 : Représentation de deux modèles d'endommagement différents :  
 a) Modèle à une seule variable d'endommagement scalaire ;  
 b) Modèle à deux variables d'endommagement scalaire  $D_t$  et  $D_c$ .

### III-5) Introduction aux théories non locales

Nous allons présenter dans ce qui suit quelques difficultés rencontrées et notamment les problèmes de la localisation des contraintes, la sensibilité aux maillages et l'effet d'alignement lors de la modélisation par la méthode des éléments finis en approche locale. Par la suite, nous aborderons l'ensemble des solutions proposées à ce jour. Parmi ces dernières, nous choisirons celles connues sous le nom de « théories non locales » où le calcul n'est pas seulement limité en un point d'un élément de volume représentatif comme en mécanique des milieux continus, mais tient compte de l'influence du voisinage dont le domaine est variable en fonction du degré d'hétérogénéité du matériau.

#### III-5.1) Problèmes liés à l'approche locale

##### III-5.1.1) Localisation des contraintes

La localisation des contraintes est un phénomène fréquemment observé dans une large classe de matériaux, notamment les matériaux granulaires et composites comme le béton. Lors d'expériences de laboratoire (compression simple ou triaxiales par exemple), nous constatons qu'à partir d'un certain stade de chargement, la déformation se concentre puis croît rapidement dans des bandes d'épaisseur faible mais non nulle [51].

Leur évolution dans le matériau (ou la structure) « homogène » reste régulière ou cesse même parfois [51]. D'un point de vue mécanique, l'apparition d'une bande de localisation est associée à une surface de discontinuité de la déformation.

L'instabilité matérielle est l'un des principaux facteurs qui ayant pour résultat le phénomène de localisation de déformation. Selon les références, le critère de stabilité matériel est que, le produit intérieur du taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  et du taux de contrainte  $\dot{\sigma}$  est positif, c.-à-d :

$$\dot{\epsilon}^T \dot{\sigma} > 0 \quad (\text{III-71})$$

Dans un essai uniaxial de traction, le produit intérieur ci-dessus devient négatif quand la pente à la courbe axiale homogénéisée de contrainte - déformation est négative, comme représenté sur la figure III.13. Ce phénomène est l'*Adoucissement de contrainte (Softening)*. En employant la terminologie ' homogénéisée ', on mentionne le fait que l'état initial et l'introduction des conditions aux limites induit nécessairement un état non homogène de contraintes dans l'éprouvette pendant l'essai. En particulier en cours de chargement

progressif, les effets de la concentration locale des contraintes causeront la déformation fortement non homogène de l'éprouvette.

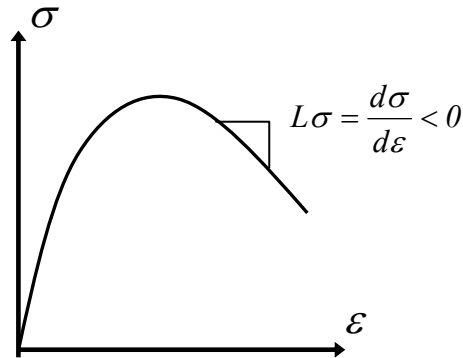


Figure III.13 : Adoucissement de contrainte

Limitant la discussion aux relations incrémentalement linéaires de contrainte - déformation, c'est la relation entre le taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  et le taux de contrainte  $\dot{\sigma}$  peut être écrit comme :

$$\dot{\sigma} = L\sigma : \dot{\epsilon} \quad (\text{III-72})$$

Là où  $L\sigma$  est la matrice tangentielle de raideur. Alors l'équation (III.71) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{\epsilon}^T L\sigma \cdot \dot{\epsilon} > 0 \quad (\text{III-73})$$

Mathématiquement, ceci est associé à la perte de positivité de la matrice de la raideur tangentielle  $L\sigma$ .

$$\det(L\sigma + L\sigma^T) = 0 \quad (\text{III-74})$$

L'instabilité matérielle peut mener à l'instabilité structurale. Pour une structure qui occupe un volume  $V$ , la définition de la condition garantissant la stabilité est :

$$\int_V \dot{\epsilon}^T \dot{\sigma} > 0 \quad (\text{III-75})$$

Pour tout champ de déformation cinématiquement admissible  $\dot{\epsilon}$ , un système mécanique discret atteint alors le cas de limitation d'un équilibre neutre stable (perte de la positivité de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$ ) si:

$$\det(K + K^T) = 0, \quad K = \int_V B^T L \sigma \cdot B dV \quad (\text{III-76})$$

là où  $\mathbf{B}$  est la matrice relie le taux de contrainte  $\dot{\varepsilon}$  au vecteur de vitesse nodales  $\dot{\mathbf{a}}$  :

$$\dot{\varepsilon} = B \dot{\mathbf{a}} \quad (\text{III-77})$$

Si la matrice de raideur matérielle  $L\sigma$  perd sa positivité localement, la matrice de rigidité structurale  $\mathbf{K}$  peut aussi bien cesser d'être définie positive.

Par ailleurs, la perte de positivité de la matrice de rigidité matérielle  $L\sigma$  peut avoir comme conséquence la *perte d'ellipticité* des équations d'équilibre. L'ellipticité est une condition nécessaire pour la position du problème. Mathématiquement la perte d'ellipticité se produit si:

$$\det(n_j L \sigma_{ijkl} n_l) = 0 \quad (\text{III-78})$$

La perte d'ellipticité du problème a comme conséquence beaucoup de propriétés indésirables des solutions éléments finies. Une des conséquences est la prétendue dépendance du maillage (*effet d'échelle*), et également *l'effet d'alignement* de mailles.

- *Critère de la localisation*

Du point de vue de la modélisation, il est maintenant largement admis depuis les travaux désormais classiques de Rice, que pour une large classe de modèles de comportement non visqueux, la perte d'ellipticité des équations d'équilibre continu en vitesses constitue un critère de bifurcation en mode localisé.

Considérons un matériau macroscopiquement homogène soumis à des contraintes ou à des déplacements homogènes sur ses frontières. A un certain stade de chargement, il se déforme de manière homogène (c-a-d que les contraintes, les déformations, et plus généralement tous les champs de variables internes sont homogènes.) Pour un certain niveau de chargement, la bifurcation du taux de déplacement  $u$  peut apparaître à travers une surface singulière fixée (bande localisée) menant ainsi à la localisation du dommage. Considérant le problème local, la localisation implique la différence entre la valeur de  $u_{ij}$ , au niveau des champs bifurques et primaires : la vitesse de déformation correspondante  $\dot{\varepsilon}$  devient discontinue au travers d'une surface localement plane de normale  $\bar{n}$ , telle que :

$$\left[ \dot{\tilde{\varepsilon}} \right] = h \cdot \bar{n} \quad (\text{III-79})$$

Avec  $h$  : l'amplitude du saut de taux de déformation.

En notant  $\sigma^1$  : la vitesse de contrainte à l'intérieur de la bande,

$\sigma^0$  : la vitesse de contrainte à l'extérieur de la bande,

La conservation de l'équilibre au travers de la surface implique :

$$\sigma^{-1} : n = \sigma^0 : n \quad (\text{III-80})$$

En tenant compte des définitions du taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  et de la matrice tangente  $L\sigma$  telles que :

$$\dot{\sigma} = L\sigma : \dot{\epsilon} \quad (\text{III-81})$$

Cette condition (III-81) peut s'écrire :

$$L^1\sigma(\dot{\epsilon}^0 + [\dot{\epsilon}]) : \vec{n} = L^0\sigma : \dot{\epsilon}^0 : \vec{n} \quad (\text{III-82})$$

Où  $\dot{\epsilon}^0$  est le taux de déformation à l'extérieur de la bande. Alors, deux cas de figure sont à distinguer :

**Premier cas** :  $L^1\sigma = L^0\sigma = H$  ("bifurcation continue" : chargement endommageable à l'intérieur et à l'extérieur de la bande)

Dans ce cas la relation (III-82) devient :

$$H : [\dot{\epsilon}] \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{III-83})$$

En tenant compte de (01) et de la symétrie de  $H$  ( $H_{ijkl} = H_{jikl}$ ), la relation (III.84) donne :

$$\det(\vec{n} : H : \vec{n}) = 0 \quad (\text{III-84})$$

**Deuxième cas** :  $L\sigma = H$  et  $L\sigma = \partial(D)$  ("bifurcation discontinue").

Dans un tel cas qui correspond à un chargement endommageable à l'intérieur de la bande et à un chargement élastique à l'extérieur, Borre et Maier [55] ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'apparition de la localisation peut être écrite comme :

$$\det(\vec{n} : H : \vec{n}) \leq 0 \quad (\text{III-85})$$

A noter qu'en raison du fait que cette inégalité ne soit pas stricte, la continuité et la discontinuité de la bifurcation peuvent apparaître simultanément. Une approche par analyse spectrale du problème par Ottosen et coll [56] permet néanmoins d'assurer que la bifurcation discontinue est toujours ultérieure à la bifurcation continue.

Bazant (1988) [52] a démontré aussi que dans le cadre de l'approche locale, la rupture est prédite sans dissipation d'énergie impliquant une localisation dans un volume nul. Ce qui est physiquement *irréel* et inacceptable car cette énergie dissipée constitue l'une des mesures de la ductilité des structures.

En dynamique, les équations différentielles du mouvement sont initialement hyperboliques et peuvent devenir elliptiques ou paraboliques à la localisation. D'après Hadamard (1903) [53], le problème d'équilibre aux valeurs limites demeure une fois de plus mal posé. A signaler que Bazant et Balystchko (1985) [54], ont également démontré que pour ce cas, la rupture se produit sans dissipation d'énergie.

### III-5.1.2) Sensibilité au maillage

Dans le cas de la modélisation par la méthodes des éléments finis en théorie locale des structures en béton, nous utilisons pour modéliser le comportement du béton une loi de comportement basée sur la mécanique de l'endommagement. Celle-ci est semblable aux relations d'élasticité. La fissuration du matériau induite par le chargement est représentée par une variable supplémentaire « D » qui vient pondérer le module d'Young du matériau.

La sensibilité des calculs par la méthode des éléments finis en approche locale vis-à-vis du maillage, n'est pas négligeable. Le choix de type d'élément et degrés de raffinement de maillage a un rôle très important dans les calculs. Que ce soit de point de vue convergence (temps de calcul) ou bien de point de vue précision des résultats, la discrétisation par éléments finis doit être bien étudiée selon le type de problème posé et le degrés de précision recommandé.

Dans la modélisation du problème de contact avec frottement en un milieu élastique endommageable, nous utiliserons des éléments isoparamétriques linéaires ayant les mêmes degrés d'interpolation pour la géométrie et pour les déplacements (triangles ou quadrangles). Cela a pour but convergence rapide des résultats car le problème présent beaucoup de non linéarités relatives au contact, frottement et endommagement.

L'illustration du problème de la sensibilité au maillage par deux exemples sera exposée au chapitre V.

### III-5.1.3) Effet d'alignement

Dans le cas d'un bloc de béton sollicité par une compression excentrée. Si nous choisissons deux types de maillage dont la direction d'orientation des éléments est différente, l'un à droite et l'autre à gauche. Nous constatons que les deux maillages utilisés contiennent des directions privilégiées qui influencent les modes d'endommagement. La distribution de l'endommagement dans les deux cas sera illustrée par la (figure V.10) au chapitre V.

### III-5.2) Solutions proposées

Pour remédier à ces problèmes, deux types de régularisation peuvent être envisagés, le premier, que l'on peut qualifier de numérique, nécessite de modifier la méthode des éléments finis de façon à lui permettre de traduire correctement la cinématique du phénomène de localisation. On peut ainsi citer la méthode des éléments finis mixtes proposée par Ortiz et coll (1987) [57] et adaptée aux modèles endommageables par Pham et Desoyer (1992) [58].

Le second consiste à « enrichir » les lois de comportement de façon à rendre accessible des paramètres caractéristiques de la localisation, et notamment la largeur de la bande. L'introduction d'une viscosité dans la loi de comportement couplée à la prise en compte des effets d'inertie est l'une de ces techniques. Mais, selon Desoyer et Leroux [59], s'ils peuvent se justifier dans un contexte plastique, les effets visqueux sont plus délicats à interpréter dans le cas des modèles endommageables. Les modèles d'endommagement non locaux ont eux aussi montré leur bonne aptitude à la régularisation du problème à la localisation. Ces derniers incorporent une longueur caractéristique dans la loi constitutive. Ce qui oblige l'énergie de dissipation à demeurer non nulle lors de la rupture.

#### III-5.2.1) Présentation de quelques modèles non locaux

Le principe du modèle élastique non local est que la dissipation d'énergie pour être non locale par certaines mesures telles que définir une ou différentes zones à l'aide des concepts du volume représentatif et de la longueur interne.

- *Modèle nonlocal de Pijaudier-Cabot-Bazant (1988) [61]*

Dans le modèle nonlocal de dommage présenté par Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987, Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988, la contrainte équivalente  $\bar{\varepsilon}$  nonlocal à un point  $\mathbf{X}$  est définie comme moyenne pesée de la contrainte équivalente locale  $\tilde{\varepsilon}$  dans le domaine entier  $\Omega$

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{y}) d\Omega \quad (\text{III-86})$$

Là où  $\mathbf{y}$  dénote la position du volume infinitésimal  $d\Omega$ . Le facteur  $1 / \Psi(\mathbf{x})$ , avec  $\Psi(\mathbf{x})$  défini par :



$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{III-87})$$

Le scalaire  $\bar{\varepsilon}$  tels qu'il est égale à  $\tilde{\varepsilon}$  pour les états homogènes de contrainte. La fonction poids  $\Psi(\mathbf{y}; \mathbf{x})$  est posée homogène et isotrope. Elle est habituellement définie comme distribution de gauss:

$$\psi(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2l^2}\right] \quad (\text{III-88})$$

Le facteur  $(2\pi)^{-3/2} l^{-3}$  dans cette expression normalise la fonction poids tels que sur  $\mathfrak{R}^3$

$$\int_{\mathfrak{R}^3} \psi(\rho) d\Omega = 1 \quad (\text{III-89})$$

Il y a Le paramètre *de longueur*  $l$  dans l'équation (III.88) détermine le volume qui contribue de manière significative à la contrainte équivalente nonlocale et doit donc être lié à la balance de la microstructure.

- *Formulation nonlocale de Saanouni-Chaboche-Lesne pour des endommagements isotropes de fluage (1989) [62], [63]*

Saanouni, ainsi que Chaboche et Lesne, ont présenté une formulation nonlocale pour des endommagements isotropes de fluage (K. Saanouni, J.l. Chaboche, P.m. Lesne, 1989). Ou  $\dot{D}(\mathbf{x}, t)$  était la variable du taux de l'endommagement local dans n'importe quel point matériel M avec des coordonnées cartésiennes  $\mathbf{X}$  au temps  $t$  Il est défini alors le taux de l'endommagement non local  $\dot{\bar{D}}(\mathbf{x}, t)$  dans un point voisin P avec des coordonnées cartésiennes  $\mathbf{X}$  comme suit:

$$\dot{\bar{D}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Omega^*(t)} \int_{\Omega(t)} F(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \dot{D}(\mathbf{x}, t) dV \quad (\text{III-90})$$

Là où  $\Omega^*(t)$  est un élément représentatif de volume défini par "la fonction de localisation " $F(\mathbf{x}, \mathbf{X})$

$$\Omega^*(t) = \int_{\Omega(t)} F(\mathbf{x}, \mathbf{X}) dV \quad (\text{III-91})$$

Et  $\Omega(t)$  est le volume global du corps. Un choix simple pour la fonction  $F(\mathbf{x}, \mathbf{X})$  est une fonction gaussienne qui est caractérisée en mettant la taille centrale égale à la valeur critique de l'endommagement  $D_{cr}$  et du paramètre  $d^*$  :

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = D_{cr} \exp \left[ - \left( \frac{d}{d^*} \right)^2 \right] \quad (\text{III-92})$$

Là où  $d$  est la distance entre le point M et P, dans le cas général, donné par:

$$d^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - X_i)^2, \quad m \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{III-93})$$

Le paramètre  $d^*$  représente une longueur interne (microstructure du matériel) et doit être vu comme constante intrinsèque de matériel.

La loi locale d'évolution de dommage est choisie sur la base du modèle de Rabotnov-Kahanov:

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{A} \right\rangle (1 - D)^{-k(\Delta \tilde{\sigma})} \quad (\text{III-94})$$

avec

$$\Delta \tilde{\sigma} = \alpha \sigma_1 + 3\beta \sigma_H + (1 - \alpha - \beta) \sigma_{eq} \quad (\text{III-95})$$

$$k(\Delta \tilde{\sigma}) = k_0 + k_1 \left( \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{100} \right) + k_2 \left( \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{100} \right)^2 \quad (\text{III-96})$$

Là où  $\tilde{\sigma}$  est l'effort efficace, et les  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes matérielles.

Cette approche qui présente un paramètre de longueur  $d^*$  qui doit être déterminé correctement, s'avère un outil unifié pour la prévision de la vie globale des composants. On lui montre également que pour un matériau fragile, l'approche locale donne des résultats près de ceux donnés par l'approche globale classique à la rupture. Dans ce cas-ci, Saanouni et autres suggèrent que l'approche globale soit préférée pour sa simplicité.

- *Formulation nonlocale de Comi-Perego pour des endommagements isotropes [64], [65], [66], [67]*

Comi et Perego ont récemment présenté une version nonlocale d'un modèle isotrope d'endommagement (Comi et Perego). Dans leur modèle, les définitions suivantes sont données comme suit :

$\psi$  est le potentiel de densité d'énergie libre dans la condition isotherme et il est exprimé comme :

$$\Psi = \frac{1}{2}(1-d_G)2G_0\mathbf{e}:\mathbf{e} + \frac{1}{2}(1-d_K)K_0\varepsilon_v^2 + h(\xi) \quad (\text{III-97})$$

Là où  $G_0$  et  $K_0$  sont les modules élastiques initial et de cisaillement respectivement;  $d_G$  et  $d_K$  sont les variables d'endommagement volumétrique et de cisaillement et  $\xi$  est une variable scalaire de nature cinématique. Les équations d'état définissant les variables statiques conjuguées sont données par :

$$Y_G = -\frac{\partial\Psi}{\partial d_G} = \frac{1}{2}(2G_0\mathbf{e}:\mathbf{e}); \quad Y_K = -\frac{\partial\Psi}{\partial d_K} = \frac{1}{2}K_0\varepsilon_v^2 \quad (\text{III-98})$$

Là où  $Y_G$  et  $Y_K$  représente le taux de rejets élastique d'énergie en ce qui concerne  $d_G$  et  $d_K$  respectivement. L'activation des dommages est régie par les fonctions suivantes d'activation et les conditions chargement-déchargement :

$$f(Y_G, Y_K, \chi) \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0; \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (\text{III-99})$$

Là où  $\chi$  est une variable interne définissant la loi d'endommagement durcissant. Les lois d'évolution de l'endommagement sont données par :

$$\dot{d}_G = \frac{\partial f}{\partial Y_G} \dot{\gamma}; \quad \dot{d}_K = \frac{\partial f}{\partial Y_K} \dot{\gamma} \quad (\text{III-100})$$

La version non locale du modèle est obtenue par une substitution des variables constitutives dans le domaine entier  $\Omega$  de la structure. La quantité « moyenne non locale » reflète l'effet de l'interaction à la micro-échelle entre le point matériel considéré et les points voisins. La diminution de l'interaction avec la distance est prise en considération par la fonction poids. Dans ce modèle, deux variables non locales sont définies par :

$$\bar{Y}_G(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x}, \mathbf{s}) Y_G(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad \bar{Y}_K(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x}, \mathbf{s}) Y_K(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (\text{III-101})$$

avec

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \equiv \frac{W_0(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|)}{\bar{W}(\mathbf{x})}, \quad W_0(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|) \equiv \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}{2l_c^2}\right), \quad \bar{W}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} W_0(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|) d\mathbf{s} \quad (\text{III-102})$$

Là où  $l_c$  est la longueur interne qui s'est reliée à la largeur de la zone de localisation. La définition particulière de la fonction poids  $W$  explique l'effet de la frontière sur l'interaction non locale à la micro-échelle et laisse reproduire d'une manière simple un champ uniforme. En d'autres termes, si  $Y_G$  est constant au-dessus du corps, il semble logique et souhaitable que  $\bar{Y}_G$  soit également uniforme.

La version non locale de l'état d'activation et des équations d'évolution du modèle d'endommagement peuvent être écrites comme suit :

$$f(\bar{Y}_G, \bar{Y}_K, \chi) \leq 0, \quad \dot{\chi} \geq 0; \quad \dot{\chi} f = 0 \quad (\text{III-103})$$

$$\dot{d}_G = \frac{\partial f}{\partial \bar{Y}_G} \dot{\chi}; \quad \dot{d}_K = \frac{\partial f}{\partial \bar{Y}_K} \dot{\chi} \quad (\text{III-104})$$

et les variables non locales d'endommagement peuvent être écrites tel que :

$$\bar{d}_G(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d_G(\mathbf{s}) ds; \quad \bar{d}_K(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d_K(\mathbf{s}) ds \quad (\text{III-105})$$

Un essai unidimensionnel a été effectué pour un modèle non local plus simple basé sur une variable simple d'endommagement. La propriété de régularisation de la formulation non locale duelle a été évaluée. Il a été constaté que l'influence de la condition de frontière avec le développement d'une couche significative de frontière semble mériter davantage de considération.

Pour l'étude du problème à la localisation, nous nous limiterons aux techniques de régularisation introduisant une longueur caractéristique soit directement dans les équations constitutives du modèle (modèle non local de Pijaudier-Cabot et Bazant 1989) soit dans le modèle avec gradients d'ordre supérieurs (modèle de Desoyer et Leroux, 1994). À signaler que cette étude sera strictement comparative vis-à-vis de la sensibilité au maillage et du phénomène de localisation.

- *Relation entre l<sub>FPZ</sub>, l<sub>c</sub> et D<sub>0</sub>*

Tout d'abord nous rappelons les études qui ont été menées pour établir le lien entre la largeur de la zone de microfissuration l<sub>FPZ</sub> et la longueur interne l<sub>c</sub> du modèle d'endommagement non local de Mazars. Parmi ces études notons celle de Bazant et Pijaudier-Cabot (1989). Ils ont montré que la largeur de la zone de localisation est proportionnelle à la longueur caractéristique l<sub>c</sub>. Selon eux, lors d'un essai de traction directe, la déformation se localise dans une bande de largeur bien définie, précisément lorsque la contrainte s'approche de la contrainte maximale. L'énergie W<sub>f</sub> dissipée dans la zone de localisation est égale à l'aire sous la courbe effort-déplacement, obtenue au cours de l'essai, moins celle dissipée de manière

homogène et stable avant la localisation. Cette énergie rapportée à l'air de la section moyenne du faciès de rupture donne le taux de restitution d'énergie  $G_f = W_f/A$ . D'autre part l'énergie par unité de volume endommagé  $w_s$  (J/m<sup>3</sup>) est égale à l'aire sous la courbe contrainte-déformation moins l'énergie dissipée pendant la phase pré-pic. On admet que l'énergie dissipée par unité de volume localisé est égale à celle dissipée lorsque l'endommagement est homogène. Cette hypothèse conduit aux relations suivantes :

$$\frac{W_f}{A} = l_c \times w_s \quad \Rightarrow \quad l_c = \frac{G_f}{w_s} \quad (\text{III-107})$$

Si on considère la formulation d'endommagement non-locale de Pijaudier-Cabot et Bazant (1987) et en postulant une répartition uniforme des déformation dans une zone de largeur  $l_c$ , il est possible de calculer cette valeur en supposant que l'aire au dessous du profil de déformation (courbe a) est le même que celui au dessous du profil rectangulaire (courbe b), on a donc la relation :  $L_{FPZ} = L_c \times \alpha$ , avec  $\alpha > 1$ . (La valeur de  $\alpha = 1.93$  a été trouvé par les auteurs.

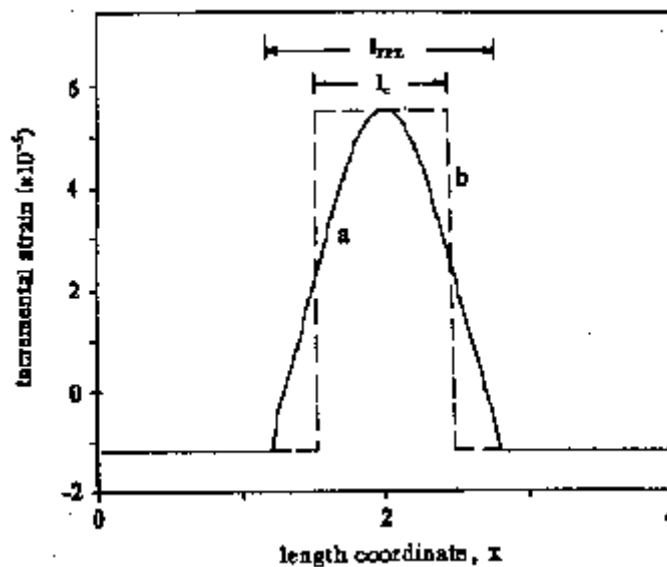


Figure III.14 : Profil de déformation obtenu analytiquement (Pijaudier-Cabot et Bazant 1987).

### III-6) Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire que le nom "non local" est attribué à l'approche non locale, dans le sens où la variable qui pilote l'endommagement n'est pas calculée au seul point considéré mais résulte d'un calcul tenant compte des variables locales régnant dans un certain voisinage autour de ce point. La variable d'endommagement non locale est alors la moyenne des variables d'endommagement locales. Cette moyenne est calculée dans une zone d'influence caractérisée par une longueur interne (longueur caractéristique) appelée «  $l_c$  ». Ce paramètre qui est très important en calcul non local est malheureusement difficile au choix. De nombreuses recherches ont été lancées dans ce sens, nous citons par exemple les travaux de Bazant « measurement of characteristic length 1989 [52] ». En général, la valeur prise est égale à trois fois le diamètre de la plus grande hétérogénéité (diamètre du plus gros granulat pour le béton). Les justifications physiques d'une telle description ont fait l'objet de nombreuses publications [60], [61], [65], [67].

Les simulations effectuées en approche non locale comparées aux résultats expérimentaux ont mis en évidence une description correcte de la réalité physique. Les modèles élaborés permettent d'accéder à des informations classiques (déplacements, contraintes, déformations) et l'écriture non locale de la loi de comportement rend le résultat objectif vis à vis du maillage et permet de rendre compte des effets parasites tels que l'effet d'échelle, l'effet d'alignement et l'effet de la localisation des contraintes.

*Chapitre IV :*

***Problème de contact avec frottement en milieu  
élastique endommageable***

### IV-1) Introduction

Dans les problèmes de mécanique des solides et des structures, il existe trois formes de non- linéarité :

- Les non - linéarités de type comportement qui portent sur la loi de comportement du matériau : plasticité, endommagement, . . .
- Les non - linéarités de type géométrique qui sont prises en compte dans le cas de grandes déformations ou de grand déplacements (lorsque la configuration déformée ne peut plus être confondue avec la configuration non déformée).
- Les non - linéarités de type contact associées au fait que dans un contact parfait entre deux solides du décollement ou du glissement peut apparaître. Elles se séparent en deux catégories, les non - linéarités de contact unilatéral et celles de frottement.

Les non - linéarités de type contact sont parmi les plus difficiles à traiter car elles mettent en jeux des changements brusques de comportement (au passage contact -décollement et au passage adhérence - glissement).

Les applications dans lesquelles interviennent des problèmes de contact avec frottement sont nombreuses, les plus connues étant les procédés de mise en forme des métaux, les problèmes d'impact, de frottement, interaction des éléments de béton préfabriqués . . .

Le traitement numérique des problèmes de contact engendre de nombreuses difficultés. Contrairement aux conditions aux limites classiques, de type déplacements imposés ou forces imposées, les problèmes de contact sont généralement définis comme des problèmes de conditions aux limites dans lesquels deux corps interagissent selon le principe des milieux continus. Les surfaces de contact et les intensités des contraintes sont les inconnues du problème. Avec les récents développements de la méthode des éléments finis associée à des méthodes numériques adéquates, aujourd'hui on peut traiter ce genre de problèmes avec précision et dans un temps record.

Les non – linéarités de type comportement dues à l'endommagement sont les conséquences de la localisation de contraintes qui est l'apparition des régions étroites où les contraintes sont concentrées, alors que les actions externes continuent à s'appliquer d'une façon mono tonique.



## IV-2) Formulation du problème de contact avec frottement de coulomb en milieu élastique endommageable

On considère deux solides élastiques  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On note  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  l'ensemble des deux corps. Ils sont soumis à des déplacements imposés  $\vec{u}_d$  sur la zone  $s_u = s_{u1} \cup s_{u2}$ , à des efforts imposés  $\vec{F}_d$  sur la zone  $s_F = s_{F1} \cup s_{F2}$  et à des forces de volume  $\vec{f}_d$  agissant sur les deux domaines.

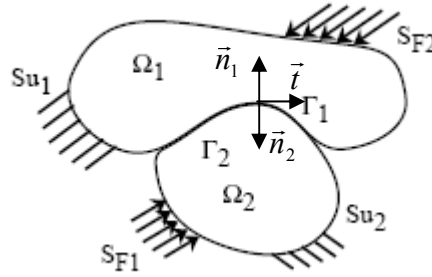


Figure IV.1 : Schéma de deux corps élastiques en contact unilatéral

Les deux solides sont en contact sur une zone  $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$  supposée connue. Les équations classiques du problème d'élasticité posé sont les suivantes :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f}_d = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{IV.1})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \vec{n} = \vec{F}_d \quad \text{sur } s_F \quad (\text{IV.2})$$

$$\vec{u} = \vec{F}_d \quad \text{sur } s_u \quad (\text{IV.3})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - D)a : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{IV.4})$$

Les équations supplémentaires qui définissent l'interaction entre les deux corps sur la zone de contact sont définies dans le paragraphe suivant.

On partitionne le champ solution  $\vec{u}$  en  $\vec{u}_1$  dans  $\Omega_1$  et  $\vec{u}_2$  dans  $\Omega_2$ . Il en va de même pour le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  et le champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Ce dernier est supposé linéaire et nous noterons  $a$ , l'opérateur d'élasticité du matériaux associé à  $\Omega$ .

On note  $\vec{n}_1$  la normale sortante de  $\Omega_1$  et  $\vec{n}_2$  celle de  $\Omega_2$ . Sur la zone de contact, lorsque les deux corps sont initialement en contact, les deux normales coïncident ( $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ ). Pour simplifier, on considère seulement la normale  $\vec{n} = \vec{n}_1$ .

Relativement à ces normales, on note les efforts normaux :

$$F_{n1} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 \vec{n}_1 \quad (\text{IV.5})$$

$$F_{n2} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 \vec{n}_2 \quad (\text{IV.6})$$

Et les efforts tangentiels :

$$\vec{F}_{t1} = \underline{\underline{\sigma}}_1 \vec{n}_1 - F_{n1} \vec{n} \quad (\text{IV.7})$$

$$\vec{F}_{t2} = \underline{\underline{\sigma}}_2 \vec{n}_2 - F_{n2} \vec{n} \quad (\text{IV.8})$$

Nous définissons les densités de forces à l'interface  $\Gamma$  tel que :

$$\vec{F}^i = F_n^i \vec{n} + \vec{F}_t^i \vec{t}^i \quad \text{avec } i=1,2 \quad (\text{IV.9})$$

Ainsi que le saut en déplacement qui joue un rôle similaire à celui de la déformation, avec :

$$\vec{u}^c = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \quad (\text{IV.10})$$

Pour tout vecteur  $\vec{Z}$ , soit les composantes normales et tangentielles :

$$\vec{Z}_n = \vec{Z}^T \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{Z}_t = \vec{Z} - \vec{Z}_n \vec{n} \quad (\text{IV.11})$$

Où la notion  $T$  indique la transposition.

Les relations d'interaction dans la direction normale sont associées au problème de contact unilatéral et celles dans le plan tangent au problème de frottement.

#### IV-2.1) Frottement

Le frottement est la relation qui existe entre les efforts tangentiels (forces de frottement) sur la zone de contact et le mouvement tangentiel relatif des deux corps (glissement).

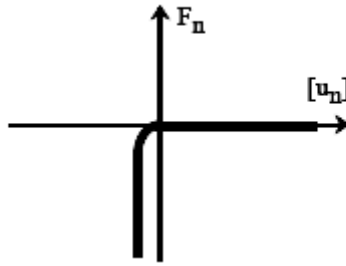


Figure IV. 2 – Régularisation de loi de contact unilatéral

### IV-2.1.1) Lois de Frottement

Dans une loi de frottement, il existe un *seuil d'effort* en dessous duquel aucun glissement n'est possible et une éventuelle dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux. Par ailleurs le déplacement de glissement semble irréversible ce qui pousse à imaginer, pour les lois de frottement, des relations entre les forces de frottement et la vitesse de glissement.

Par ailleurs, ces lois ne doivent intervenir que lorsqu'il n'y a pas de décollement sur la zone de contact.

Pour définir les lois de frottement, on définit le glissement et la vitesse de glissement par :

$$[\vec{u}_t] = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) - ((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (\text{IV.12})$$

$$\left[ \begin{array}{c} \vec{u}_t \\ \dot{\vec{u}}_t \end{array} \right] = \frac{\partial [\vec{u}_t]}{\partial t} \quad (\text{IV.13})$$

Il existe dans la littérature plusieurs lois de frottement, parmi elles la loi de coulomb qui est la plus utilisée.

#### IV-2.1.1.a) Loi de Coulomb

Dans la loi de Coulomb (1785), le seuil d'adhérence/glissement est proportionnel à l'intensité des efforts normaux :

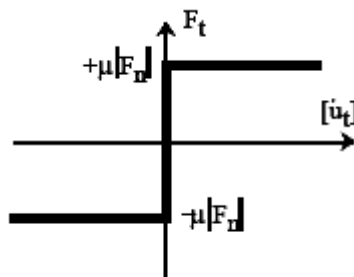


Figure IV.3 : Loi de Coulomb

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \|\vec{F}_t\| < \mu |F_n| \text{ alors } \left[ \begin{array}{c} \dot{\vec{u}}_t \end{array} \right] = 0 \quad (\text{Adhérence}) \quad (\text{IV.14}) \\ \text{Si } \|\vec{F}_t\| = \mu |F_n| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \left[ \begin{array}{c} \dot{\vec{u}}_t \end{array} \right] = \lambda \vec{F}_t \quad (\text{Glissement}) \quad (\text{IV.15}) \end{array} \right.$$

Où  $\mu$  est le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en présence et des états de surface. Le graphe de cette loi est tracé sur la figure IV.3.

On peut tracer le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact sous forme d'un cône, en 2D (fig. IV.4) ou en 3D (fig. IV.5). On l'appelle cône de Coulomb. L'enveloppe de ce cône est la surface seuil du glissement dont la définition et l'utilisation est à rapprocher de la définition de la surface seuil en plasticité.

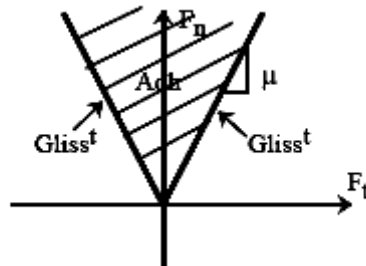


Figure IV. 4 : Cône de Coulomb en 2D

Les inconvénients majeurs de la loi de Coulomb sont :

- l'absence de relation biunivoque entre les forces de frottement et la vitesse de glissement,
- le caractère non différentiable de la loi,
- le changement brutal de comportement au passage adhérence/glissement.

Ces inconvénients sont les mêmes que ceux d'une loi de plasticité parfaite, par exemple.

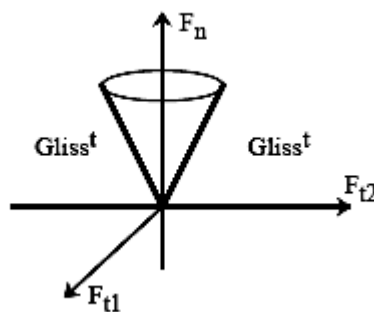


Figure IV. 5 : Cône de Coulomb en 3D

Pour étudier l'interaction dans la direction normale, deux cas de contact unilatéral sont envisagés. Cas du contact unilatéral sans frottement et le cas avec frottement.

### IV-2.3) Formulation du problème de contact

Le contact unilatéral est la relation qui existe, sur la zone de contact, entre les efforts normaux (pressions de contact) et le mouvement relatif des deux corps dans la direction normale (décollement).

Sur l'interface  $\Gamma$ , les conditions de contact unilatéral avec frottement de coulomb s'écrivent :

$$(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \geq 0 \quad (\text{IV.16})$$

$$F_n = F_{n1} = -F_{n2} \leq 0 \quad (\text{IV.17})$$

$$((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}) F_n = 0 \quad (\text{IV.18})$$

$$\|\vec{F}_t\| \leq \mu |F_n| \quad (\text{IV.19})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \|\vec{F}_t\| < \mu |F_n| \text{ alors } \left[ \vec{u}_t \right] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Adhérence}) \quad (\text{IV.20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \|\vec{F}_t\| = \mu |F_n| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \left[ \vec{u}_t \right] = \lambda \vec{F}_t \end{array} \right. \quad (\text{Glissement}) \quad (\text{IV.21})$$

L'équation (IV.16) indique qu'il ne peut y avoir que décollement et non pénétration. L'équation (IV.17) indique que les efforts normaux ne peuvent correspondre qu'à de la compression. L'équation (IV.18), appelée condition de complémentarité, indique qu'en un point il y soit contact, soit décollement. Les équations (IV.19), (IV.20) et (IV.21) sont les équations constitutives du modèle de coulomb, ou  $\vec{u}_t$  est la vitesse relative tangentielle et  $\mu$  est le coefficient de frottement de coulomb qui inclut tous les paramètres locaux, tel que la rugosité entre les deux corps, la température à l'interface, etc.....

Introduisons le potentiel convexe  $\varphi$  et son conjugué  $\varphi^*$ , tels que :

$$\varphi(V) = \begin{cases} 0 & \text{Si } V_n \geq 0 \\ +\infty & \text{Si } V_n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi^*(Z) = \begin{cases} 0 & \text{Si } Z_n \leq 0 \text{ et } |Z_t| \leq \mu |Z_n| \\ +\infty & \text{Si } Z_n > 0 \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

En appliquant l'inégalité de Legendre Fenchel, nous obtiendrons :

$$\varphi(V) + \varphi^*(Z) - Z^T V \geq 0 ; \quad \forall V, \forall Z. \quad (\text{IV.23})$$

Nous pouvons écrire la loi constitutive sous les trois formes équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} -\bar{u}^c \in \partial\varphi^*(\bar{F}^i) \\ \bar{F}^i \in \partial\varphi(-\bar{u}^c) \\ \phi(\bar{u}^i, \bar{F}^i) = \varphi(-\bar{u}^c) + \varphi^*(\bar{F}^i) + \mu |F_n^i| |\bar{u}_t^i| + \bar{F}_t^i \bar{u}_t^i + \bar{F}_n^i \bar{u}_n^c = 0 \end{cases} \quad i=1,2 \quad (\text{IV.24})$$

Nous concluons que le problème du contact avec frottement de coulomb, peut être posé comme suit :

Il s'agit de trouver les couples  $((\bar{\sigma}^i, \bar{F}^i); (\bar{u}_d^i, \bar{u}^i))$  définis dans  $\Omega_i$ , avec  $i=1,2$  et vérifiant :

- Les conditions cinématiques :

$$\bar{u}_d^i = 0 \text{ Sur } s_u^i \text{ et } \bar{u}_d^i = \bar{u}_i \text{ sur } \Gamma. \quad (\text{IV.25})$$

- Les équations d'équilibre :

$$- \int_{\Omega^i} \text{Tr}[\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\varepsilon}}(V^i)] d\Omega + \int_{\Omega^i} \bar{f}_d^i V^i d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^i} \bar{F}_d^i V^i d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{u}_d^i V^i d\Gamma = 0; \quad \forall V^i \in \bar{u}_0^i \quad (\text{IV.26})$$

Avec  $\bar{u}_0^i = \{\bar{u}_d^i$  définis suffisamment régulier sur  $\Omega^i$  tels que  $\bar{u}_d^i = 0$  sur  $\partial_1 \Omega^i\}$  et avec

$$\bar{F}^i = \underline{\underline{\sigma}}^i \bar{n}^i ; \quad i=1,2$$

- Et en fin les relations constitutives :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^i = (1-D) a^i \underline{\underline{\varepsilon}}(\bar{u}_d) \\ \phi(\bar{u}^i, \bar{F}^i) = \varphi(-\bar{u}^c) + \varphi^*(\bar{F}^i) + \mu |F_n^i| |\bar{u}_t^i| + \bar{F}_t^i \bar{u}_t^i + F_n^i \bar{u}_n^c = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

Avec  $\underline{\underline{\sigma}}^i$  représente le tenseur de contrainte dans un solide  $i$

Tan disque  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^i$  est le tenseur de contrainte effective  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^i = \frac{\underline{\underline{\sigma}}^i}{(1-D)}$  et  $D$  représente un scalaire

qui caractérise l'état de l'endommagement isotrope.

On a évidemment  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^i \geq \underline{\underline{\sigma}}^i$

$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^i = \underline{\underline{\sigma}}^i$  pour un matériau vierge ;

$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^i \rightarrow \infty$  au moment de la rupture.

### IV-3) Traitement numérique du problème de contact avec frottement

Le traitement numérique des problèmes de contact engendre de nombreuses difficultés. Ces problèmes viennent des fortes non linéarités géométriques et matérielles. Contrairement aux conditions aux limites classiques, de type déplacements imposés ou forces imposées, les problèmes de contact sont généralement définis comme des problèmes de conditions aux limites dans lesquels deux corps interagissent selon le principe des milieux continus. Les surfaces de contact et les intensités des contraintes sont les inconnues du problème. Avec les récents développements de la méthode des éléments finis associée à des méthodes numériques adéquates, aujourd'hui on peut traiter ce genre de problèmes avec précision et dans un temps record.

Un grand nombre de méthodes numériques utilisées pour résoudre ce problème est issu du domaine de l'optimisation. Le problème de contact peut être écrit comme un problème de minimisation sous contraintes. Les méthodes couramment associées à cette approche sont les méthodes des points fixes, de relaxation avec projection (méthode SORP), de gradient conjugué avec projection [68], la méthode de Gausse Seidel ([69], [70], [71], ..) Et les méthodes avec régularisation (pénalisation, multiplicateurs de Lagrange).

Les méthodes dites avec régularisation sont les plus couramment utilisées par les codes par éléments finis. Leur principe consiste à introduire une régularisation des lois de contact et de frottement. Les forces de contact sont définies comme des fonctions dépendant des déplacements. Ces expressions des forces sont ensuite reportées dans le travail virtuel des efforts de contact. Il s'agit des méthodes de pénalisation [72, 73, 74], de multiplicateurs de Lagrange [75, 76, 77] pour les deux approches les plus anciennes. Plus récemment une technique apparaissant comme une combinaison des deux dernières approches citées a été développée [78, 79, 80], la méthode du Lagrangien augmenté, la méthode du Lagrangien perturbé et la méthode par formulation du problème de complémentarité [81, 82, 83]. D'autres techniques ont été utilisées pour traiter les problèmes de contact. Dans [84, 85], une méthode alternative au schéma lagrangien augmenté est mise en œuvre : la méthode barrière modifiée. Une autre approche combinant la méthode barrière et la méthode de pénalisation est présentée dans [86].

Nous tenons à signaler que cette brève revue des méthodes numériques n'est pas exhaustive et bien d'autres approches ont été développées ([87], [88], [89],...) seul les principes de la méthode de pénalité, des multiplicateurs de Lagrange, Lagrangien augmenté et de Lagrangien perturbé seront présentés ici.

### IV-3.1) Les principales méthodes numériques appliquées au contact avec frottement:

#### IV-3.1.1) Méthode de pénalisation

La plus facile et plutôt la méthode qui était toujours utilisée dans la solution des problèmes de contact. Comme toutes les méthodes citées auparavant, elle gère le contact entre un nœud et une surface et n'est pas limitée au contact nœud à nœud. De plus cette méthode ne nécessite pas la définition de surfaces esclave et maîtresse car la procédure est la même pour tous les nœuds des corps déformables en contact.

Soit  $L$  un point de coordonnée  $X_L$  à l'instant  $t$  appartenant à la frontière d'un corps déformable. Soit  $g_t^L$  l'interstice associé au point  $L$  à l'instant  $t$  (figure II-1) défini en deux dimension par :

$$g_t^L = (X_t^L - X_t^P) \quad (\text{IV.28})$$

avec  $X_p$  les coordonnées du point  $P$ , projection orthogonale du point  $L$  sur le segment 1-2 et  $\vec{n}$  la normale au segment 1-2 dirigé vers l'extérieur du corps.

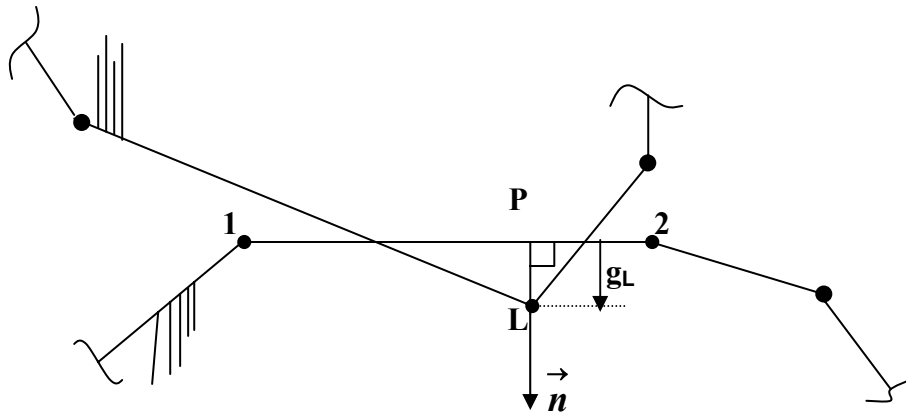


Figure IV. 6 : Représentation bidimensionnelle de la représentation d'un nœud dans un domaine délimité par un segment.

Le point  $L$  pénètre le domaine délimité par le segment 1-2 si :

$$g_t^L \geq 0 \quad (\text{IV.29})$$



Le but de cette méthode est d'introduire cette condition dans la fonctionnelle de l'énergie totale sous la forme suivante :

$$\varpi = (u_t) = \omega(u_t) + \frac{\varepsilon}{2} g_t^t \cdot g_t \quad (\text{IV.30})$$

Avec  $u_t$  le vecteur des déplacements nodaux à l'instant  $t$ ,  $g_t$  le vecteur des interstices nodaux à l'instant  $t$ ,  $\varepsilon$  le coefficient de pénalisation et  $\varpi(u_t)$  la fonctionnelle de l'énergie totale associée au corps en contact. La minimisation de la fonctionnelle (II-3) nous donne l'équation variationnelle discrète suivante :

$$\delta \omega(u_t) + \varepsilon \cdot g_t^t \cdot \delta g_t = 0 \quad (\text{IV.31})$$

Généralement deux coefficients de pénalisation sont considérés, le premier  $\varepsilon_n$  dans la direction normale, le second  $\varepsilon_t$  dans la direction tangentielle. Pour un incrément de temps  $\Delta t$ , les forces de contact normales  $F_{n_{t+\Delta t}}^L$  et tangentielles  $F_{t_{t+\Delta t}}^L$  au point L à l'instant  $t+\Delta t$  sont calculées comme suit :

$$F_{n_{t+\Delta t}}^L = F_{n_t}^L - \varepsilon_n \cdot (\Delta u_n^L - \Delta u_n^p) \quad (\text{IV.32})$$

$$F_{t_{t+\Delta t}}^L = F_{t_t}^L - \varepsilon_t \cdot (\Delta u_t^L - \Delta u_t^p) \quad (\text{IV.33})$$

Avec  $\Delta u_n$  et  $\Delta u_t$  les incréments de déplacement des points considérés dans les directions normale et tangentielle respectivement. Si la force normale de contact  $F_{n_{t+\Delta t}}^L$  est positive alors le point L n'est plus en contact à l'instant  $t+\Delta t$  par conséquent les forces de contact sont annulées. Dans le cas contraire où le point L est en contact, par conséquent la loi de frottement utilisée est appliquée et la force tangentielle est réactualisée en cas de glissement.

Il est important de noter que les forces de contact ne sont pas calculées exactement. D'un point de vue mathématique, le coefficient  $\mathcal{E}$  de pénalité doit tendre vers l'infinie pour obtenir une approximation la plus juste que possible. Numériquement, un paramètre de pénalisation trop important conduit à de sérieux problèmes de convergence. De ce fait, des pénétrations sont permises.

Cette méthode présente deux avantages principaux, le premier concerne son implémentation simple. Cette simplicité l'en fait l'une des méthodes les plus utilisées par les

codes de calcul par éléments finis ([90], [91], [92],...) car elle ne nécessite pas la modification de la structure du code. Le deuxième avantage vient du point que cette technique ne nécessite pas l'introduction de variables supplémentaires dans le problème.

Mais malgré ses avantages, la méthode de pénalisation a un inconvénient majeur, le choix du paramètre de pénalisation. Un paramètre élevé permet de satisfaire les conditions de contact.

Cependant, il conduit à des matrices de rigidité mal conditionnées et de fait à des problèmes numériques. Inversement un paramètre trop faible conduit à des pénétrations acceptables physiquement. Ainsi la précision de la solution du problème se trouve affectée.

Le choix de ce coefficient apparaît donc délicat même si certains auteurs ([93], [94], [95]) ont proposé de les déterminer en fonction de paramètres tel que:

$$\varepsilon \vec{n} = \varepsilon \vec{t} = \alpha \cdot \frac{A^2 \cdot K}{V} \quad (\text{IV.34})$$

avec  $A$  l'aire de la surface de l'élément en contact,  $V$  le volume de cet élément,  $K$  le module de flambage et  $\alpha$  un facteur d'échelle à régler et pris généralement égal à 0.1. Aussi, un algorithme d'ajustement automatique du paramètre de pénalisation basé sur la notion de distance normale ou pénétration acceptable peut être trouvé dans [96]. Dans cet algorithme, le paramètre de pénalisation de référence est déterminé à partir du terme maximal de la matrice de rigidité.

#### IV-3.1.2) Méthodes des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous permet d'éviter les problèmes liés au choix des coefficients de pénalisation. Elle consiste simplement à remplacer les forces de contact qui sont les inconnues par les multiplicateurs de Lagrange. La fonctionnelle de l'énergie totale de la structure est modifiée de la façon suivante:

$$\varpi(u_t) = \omega(u_t) + \lambda'_t \cdot g_t \quad (\text{IV.35})$$

avec  $\lambda'_t$  le vecteur ligne des multiplicateurs de Lagrange associés à chaque nœud en contact,  $u_t$  le vecteur des déplacements nodaux et  $g_t$  celui des interstices nodaux à l'instant  $t$ . En minimisant la fonctionnelle (II-6), les deux équations suivantes sont obtenues:

$$\delta \omega(u_t) + \lambda_t^t \cdot \delta g_t \quad (\text{IV.36})$$

$$\delta \lambda_t^t \cdot g_t = 0 \quad (\text{IV.37})$$

Dans la formulation du problème, les contraintes en déplacement sont imposées aux nœuds esclaves pour les empêcher de pénétrer dans le domaine délimité par la surface maîtresse et pour contrôler leur glissement tangentiel le long de ces surfaces.

Dans cette méthode, les conditions de contact sont parfaitement vérifiées. De plus, contrairement à la méthode de pénalisation, cette approche ne nécessite pas l'introduction d'un coefficient déterminé. L'inconvénient principal de cette technique vient du fait qu'elle introduit des inconnues supplémentaires dans le problème (Multiplicateurs de Lagrange en plus des déplacements nodaux).

### IV-3.1.3) Méthodes hybrides ou mixtes :

Ces méthodes sont issues de la combinaison des avantages de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et ceux de la méthode de pénalisation afin d'obtenir une efficacité et une précision optimale.

Nous contenterons de donner les principes de base des deux méthodes les plus utilisées: la méthode du Lagrangien perturbé [97], [98] et celles du Lagrangien augmenté [99], [100].

#### IV-3.1.2-a) Méthode du Lagrangien perturbé:

La méthode du Lagrangien perturbé apparaît comme un compromis entre la méthode de pénalisation et celle des multiplicateurs de Lagrange. Le principe de cette technique consiste à rajouter un terme pénalisé au multiplicateur de Lagrange. La fonctionnelle de l'énergie totale du Lagrangien perturbé est obtenue en régularisant celle développée pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec un terme quadratique:

$$\varpi(u_t) = \omega(u_t) + \lambda_t^t \cdot g_t - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \lambda_t^t \cdot \lambda_t \quad (\text{IV.38})$$

Dans la fonctionnelle ci dessus, lorsque le coefficient de pénalisation  $\varepsilon$  tend vers l'infini, la solution obtenue convergera vers la méthode classique des multiplicateurs de Lagrange.

Les équations variationnelles associées à (II-9) sont de la forme:

$$\delta \omega(u_t) + \lambda_t^t \cdot \delta g_t = 0 \quad (\text{IV.39})$$

$$\delta \lambda_t^t \cdot \left( -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \lambda_t + g_t \right) = 0 \quad (\text{IV.40})$$

Si l'équation (II-10b) est résolue pour  $\lambda_t$  et substituée dans l'équation (II-10a), la méthode de la pénalisation est obtenue. Cependant, cette méthode conserve les défauts liés à la méthode de la pénalisation, notamment le choix du coefficient de pénalisation, même si elle permet d'évaluer les forces de contact plus précisément.

#### IV-3.1.2-b) Méthode du Lagrangien augmenté :

Le principe de la méthode du Lagrangien augmenté est le même que celui de la méthode citée précédemment, sauf que dans cette méthode, le choix du paramètre de pénalisation n'influe pas tellement sur le résultat.

La régularisation de la fonctionnelle de l'énergie totale avec cette technique est la suivante :

$$\varpi(u_t) = \omega(u_t) + \lambda_t^t \cdot g_t^t \cdot g_t \quad (\text{IV.41})$$

En minimisant la fonctionnelle (II-11), nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\delta \omega(u_t) + \lambda_t^t \cdot \delta g_t + \varepsilon \cdot g_t^t \cdot \delta g_t = 0 \quad (\text{IV.42})$$

$$\delta \lambda_t^t \cdot g_t = 0 \quad (\text{IV.43})$$

Par itération, la résolution de ces équations fournit les valeurs des multiplicateurs de Lagrange et la solution en déplacement. Le premier avantage de cette approche réside dans le fait que de tous petits paramètres de pénalisation peuvent être utilisés. Le second point positif vient du fait que la solution exacte du problème est déterminée. Néanmoins, ceci augmente fortement le nombre d'itérations nécessaires pour trouver cette bonne solution, ce qui apparaît comme un inconvénient majeur.

*Chapitre V :*

***Modélisation par la méthode des éléments finis du  
problème de contact avec frottement en milieu  
élastique endommageable***

V-1) Aperçu sur la méthode des éléments finis

V-1.1) Rappel sur la mécanique des milieux continus

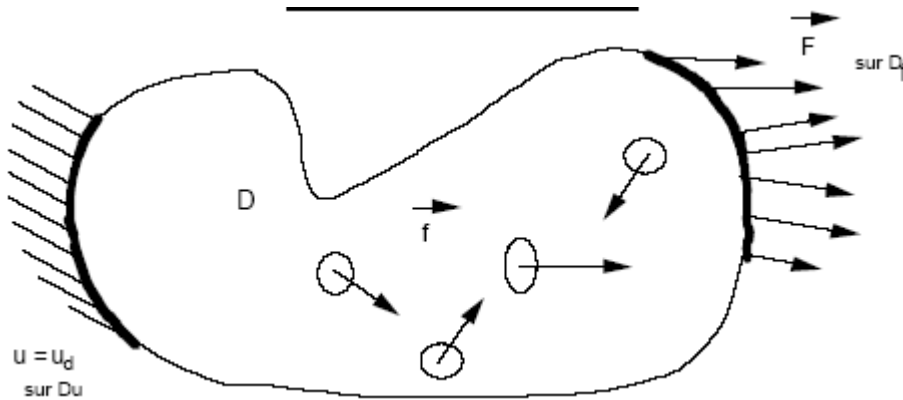


Figure V.1 : Schématisation d'un milieu matériel isolé.

Voici les notations utilisées:

Le repère fixe :  $R(0, X_1, X_2, X_3)$  ;

$i, j, k = \{1, 2, 3\}$  ;

$\alpha, \beta, \gamma = \{1, 2\}$ .

Si nous travaillerons dans le cadre des petites déformations, cela implique que la position de référence reste la position initiale. Les chargements peuvent être de type volumique ou de type surfacique dans le cas 3-D. La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leur relation :

- Le champ de déplacement, noté  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$
- Le champ des déformations noté  $[\mathbf{\epsilon}(\mathbf{X})]$
- Le champ des contraintes  $[\mathbf{\sigma}(\mathbf{X})]$

Les différentes relations entre ces quantités peuvent être schématisées par la figure suivante :

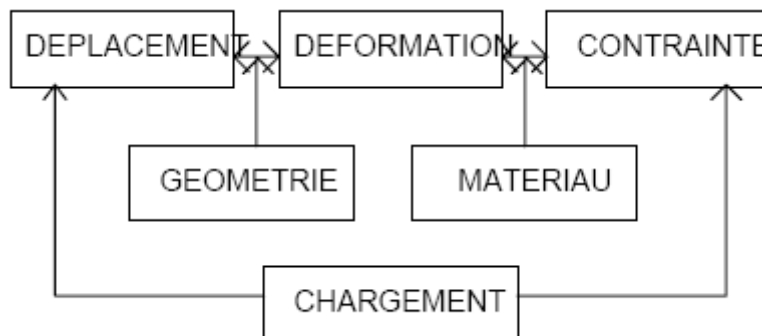


Figure V.2 : Schématisation des relations entre déplacements - contraintes - déformations.

Dans le cas général, on montre que les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \rho \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{V.1})$$

qui se simplifient dans le cas de la statique à :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f} = \vec{0} \quad (\text{V.2})$$

où  $\vec{f}$  est une force volumique dans le cas 3-D.

### V-1.1.1) Déformation

Nous considérons  $M_0$  un point dans la configuration de départ et  $M'_0$  un point voisin. Suite au chargement il se transforme respectivement en  $M$  et  $M'$ . Ce qui donne sur un dessin la figure suivante :

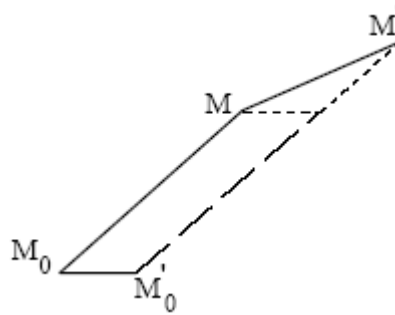


Figure V.3 : Schématisation de la déformation de deux points voisins suite à un chargement.

Si nous faisons une étude dans le cas 2-D, nous pouvons mettre en place la relation entre les déplacements et les déformations. Nous utilisons seulement des DL d'ordre 1.

$$[dU] = ([\varepsilon] + [\Omega]) \quad (\text{V.3})$$

$$\begin{cases} [\varepsilon] = \frac{1}{2} | \operatorname{grad}(U) + \operatorname{grad}(U)^T | \\ [\Omega] = \frac{1}{2} | \operatorname{grad}(U) - \operatorname{grad}(U)^T | \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

On montre alors que le tenseur des déformations  $H$  s'écrit d'une façon générale :

$$[H] = [\varepsilon] + \frac{1}{2} ([\varepsilon] - [\Omega])([\varepsilon] + [\Omega]) \quad (\text{V.5})$$

Dans le cadre des petites perturbations (faible rotation, faible déplacement), il suffit de prendre la partie linéaire de  $H$ .

$$[H] = [\varepsilon] \quad (\text{V.6})$$

Le tenseur des déformations  $[\boldsymbol{\varepsilon}]$  est symétrique par construction, il est défini positif et donc il a des valeurs propres réelles. Ces directions principales sont orthogonales. On les détermine à l'aide d'un cercle de Mohr et des mesures obtenues sur une rosette à  $45^\circ$ .

### V-1.1.2) Contrainte

Les contraintes n'ont de sens que par rapport à une facette que l'on oriente par sa normale. Si on prend comme élément de volume un parallélépipède.

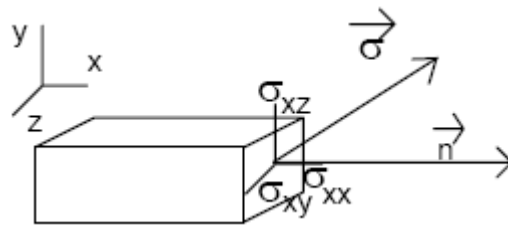


Figure V.4 : Représentation des contraintes sur un parallélépipède.

$\vec{\sigma}$  est la contrainte dans le solide sur la facette de normal  $\vec{n}$ . Dans le cas où le vecteur normal est colinéaire à un vecteur de base, on a:

$\sigma_{ij}$  où  $i$  correspond à la direction de la normal et  $j$  à la composante dans le plan de la facette.

### V-1.1.3) Relations de compatibilité

Quand on connaît les déplacements il est simple de déterminer les déformations, mais le Pb inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : le problème n'a pas de solution unique. Il existe des relations de compatibilité pour soulever ces indéterminations qui sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e_{ii}}{\partial j \partial k} = \frac{\partial}{\partial i} \left( -\frac{\partial e_{jk}}{\partial i} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial j} + \frac{\partial e_{ji}}{\partial k} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial i \partial j} = \left( \frac{\partial^2 e_{ii}}{\partial i \partial i} + \frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial j \partial j} \right) \end{cases} \quad (\text{V.7})$$

Ces formules sont données sans sommation de l'indice répété.



#### V-1.1.4) Loi de comportement - Loi de Hook

La loi de comportement relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes. A chaque catégorie de matériau correspond un type de loi. Par exemple, pour un matériau élastique linéaire, sa loi de comportement correspondante est la loi de Hook :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = [\underline{\underline{L}}] \cdot [\underline{\underline{\varepsilon}}] \quad (\text{V.8})$$

[L] est un tenseur d'ordre 4, mais comme les tenseurs des déformations et des contraintes sont symétriques, il est possible d'assimiler [L] à une matrice [6,6] en utilisant une représentation vectorielle des champs de déformations et de contraintes.

##### V-1.1.4-a) Cas d'un matériau isotrope

Aucune direction privilégiée, matériau macroscopiquement homogène

ex : Acier, inox, plastique ....

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{V.9})$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

##### V-1.1.4-b) Cas d'un matériau orthotrope

Un matériau est dit orthotrope s'il a deux plans de symétrie de comportement mécanique, il y a donc trois axes d'orthotropie. Dans ce cas il y 9 constantes mécanique pour définir la loi de comportement.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{V.10})$$

Avec E : Module d'Young  $\nu$  : coefficient de Poisson et G : Module de cisaillement.

### V-1.2) Méthode énergétique en élasticité

Avant d'effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- \* l'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués
- \* les conditions aux limites
- \* la loi de comportement

Les différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments constitutifs d'un problème de structure, et ainsi d'obtenir une formulation plus compacte et donc facile à discrétiser. Ce sont ces formulations qui sont à la base des méthodes par éléments finis.

#### V-1.2.1) Rappel du théorème des puissances virtuelles

Soit  $D$  le domaine 3-D,  $\vec{f}$  les forces de volume,  $\vec{F}$  les forces de surface (figure V.1).

Les champs virtuels vérifiant  $u^*(x) = 0 \quad \forall x \in Du$  sont dit cinématiquement admissible à 0, noté **C.A. {0}**

Les champs virtuels vérifiant  $u^*(x) = U_d \quad \forall x \in Du$  sont dit cinématiquement admissible, noté **C.A.**

$$\begin{cases} \forall u^*(x) \in \text{C.A.}\{0\} \\ P_{\text{int}}(u^*(x)) + P_{\text{ext}}(u^*(x)) = P_{\text{acc}}(u^*(x)) \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

où

$$\begin{cases} P_{\text{int}}(u^*(x)) = - \int_D \text{tr}(\sigma(x) \cdot \varepsilon^*(x)) d\Omega \\ P_{\text{ext}}(u^*(x)) = \int_D f(x) \cdot u^*(x) d\Omega + \int_{D_F} F(x) \cdot u^*(x) dS \\ P_{\text{acc}}(u^*(x)) = \int_D \left( \rho \frac{d^2(u^*(x))}{dt^2} \right) u^*(x) d\Omega \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

C'est à partir de ce résultat et en introduisant la loi de comportement du matériau que l'on obtient la formulation variationnelle d'un problème d'élasticité.

#### V-1.2.2) Les différentes formulations

Nous allons aborder le cas d'un problème d'élasticité isotherme statique.

### V-1.2.2.a) Formulation P.P.V

Nous allons définir les différentes relations permettant d'écrire un problème complet d'élasticité isotherme statique.

La loi de comportement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

Les tenseurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$ , ont des propriétés de symétrie.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C.A} \quad (\text{V.14})$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \mathbf{P}_{\text{donn}}(\mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{C.A.}\{\mathbf{0}\} \quad (\text{V.15})$$

où :

$$k(u, u^*) = \int_D \text{tr}(L \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*(x)) d\Omega \quad (\text{V.16})$$

$\mathbf{P}_{\text{donn}}(\mathbf{u}^*) =$  La puissance virtuelle des efforts donnés.

### V-1.2.2.b) Energie Potentielle

L'énergie potentielle est l'énergie de déformation par unité de masse ou densité d'énergie de déformation, notée  $\omega(\boldsymbol{\varepsilon})$ , est une fonction telle que la loi de comportement s'écrive :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \cdot (\partial\omega / \partial\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{V.17})$$

On appelle énergie potentielle la fonctionnelle suivante :

$$\mathbf{\Pi}_d(\mathbf{u}) = \mathbf{W}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}_d(\mathbf{u}) \quad (\text{V.18})$$

Avec :

$$W(u) = \int_D \rho \omega(\boldsymbol{\varepsilon}(u)) d\omega \quad (\text{V.19})$$

#### Remarque :

Cette formulation est très adaptée aux méthodes de discrétisation de type Galerkin ou Ritz. Elle est généralement le support pour la méthode par élément finis.

### V-1.2.2.b) Energie Potentielle complémentaire

Elle représente l'énergie de déformation par unité de masse ou densité d'énergie de déformation, notée  $w_c(\boldsymbol{\sigma})$ , est une fonction telle que la loi de comportement ( V.16) s'écrive dans le cas isotherme:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \rho \cdot (\partial\omega_c / \partial\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{V.20})$$

L'énergie potentielle complémentaire est définie par :

$$\Pi_c(\sigma) = W_c(\sigma) - \int_{D_u} (\sigma \cdot n) \cdot u_d ds \quad \text{Avec} \quad (V.21)$$

$$W_c(\sigma) = \int_D \rho \omega_c(\sigma) d\omega \quad (V.22)$$

$W_c$  : L'énergie de déformation complémentaire

**Théorème :**

Toute solution  $\sigma$  du problème initial réalise un minimum de l'énergie potentiel Complémentaire sur l'ensemble des champs statiquement admissibles. Cette solution est unique.

$$\begin{aligned} \sigma(x) &\in S.A\{f_d, F_d\} \\ \delta(\Pi_c(\sigma)) &= 0 \Leftrightarrow P.P.V \end{aligned} \quad (V.23)$$

**Remarque :**

La discrétisation à partir de cette formulation par la méthode de Galerkin ou Ritz est possible mais dans un cas général impossible à mettre en oeuvre. Car il faut identifier des champs de contrainte statiquement admissible. Il y a cependant deux exceptions notables [103] :

\*)- Les modèles à une dimension où l'ensemble des S.A. est de dimension finie égale au degré d'hyperstaticité.

\*)- L'élasticité plane sans chargement volumique.

**V-1.2.2.c) Formulation mixte**

Les méthodes en déplacement sont précises pour trouver  $u(x)$ , mais moins précises pour trouver les contraintes. Les méthodes en contraintes sont très séduisantes car précises en contrainte donc en déplacement, mais elles sont quasiment impossibles à mettre en oeuvre. D'où l'idée de mettre en place une fonctionnelle en  $(\mathbf{u}, \sigma)$ , pour cela il suffit d'introduire des multiplicateurs de Lagrange.

Le multiplicateur de Lagrange peut donc s'identifier au déplacement. De même en faisant varier  $\sigma$  sur le bord de D, on obtient :

$$\forall x \in D_u, u(x) = u_d(x). \quad (V.24)$$

Cette condition est facile à réaliser, elle correspond à la condition des cinématiquement admissibles. Nous pouvons donc écrire la fonctionnelle mixte,  $L(u, \sigma)$ , pour les champs cinématiquement admissible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in C.A. = \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) / \mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_d \forall \mathbf{x} \in D_u \} \\ L(\sigma, \mathbf{u}) = \Pi_c(\sigma) + \int_D \mathbf{u}(\mathbf{x})(f) d\omega + \int_{D_F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_d ds - \int_D \text{tr}(\sigma \boldsymbol{\varepsilon}) d\omega \\ L(\sigma, \mathbf{u}) = \Pi_c(\sigma) + P_d(\mathbf{u}) - \int_D \text{tr}(\sigma \boldsymbol{\varepsilon}) d\omega \end{array} \right. \quad (\text{V.25})$$

D'où :

$$\delta(L(\sigma, u)) = 0, \forall u \in C.A \Leftrightarrow P.P.V \Leftrightarrow \delta(\Pi_d) = 0 \forall \sigma \in C.A \Leftrightarrow \delta(\Pi_c) = 0 \forall \sigma \in S.A. \quad (\text{V.26})$$

### Remarque :

La discrétisation à l'aide de cette formulation est possible avec Galerkin ou Ritz. Elle entraîne l'utilisation des éléments mixtes pour la méthode éléments finis.

### V-1.3) Principe de la discrétisation

Les différentes formulations ont abouti à des formulations variationnelles compactes mais *continues*. Le principe des éléments finis étant de résoudre un problème *discrétisé* nous allons maintenant introduire des méthodes de discrétisation dans les différentes formulations.

#### V-1.3.1) Formulation de Galerkin

La méthode de Galerkin est adaptée à la formulation variationnelle découlant du P.P.V.

**Objectif :** On se donne  $\mathbf{n}$  fonctions de base  $\{\mathbf{P}_i(\mathbf{x})\}$  appartenant au cinématiquement admissible à zéro et on cherche la solution du problème comme une *combinaison linéaire* de ces fonctions, dans le cas où il existe des déplacements imposés on rajoute une fonction les réalisant.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) + u_d(x) \quad \in C.A \quad (\text{V.27})$$

$$u^*(x) = P_i(x) \quad \in C.A \{0\} \quad (\text{V.28})$$

Il suffit alors de faire varier  $\mathbf{i}$  de 1 à  $\mathbf{n}$ . Nous obtenons alors un système linéaire de  $\mathbf{n}$  équations à  $\mathbf{n}$  inconnues. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[K][Q] = [F] \quad (\text{V.29})$$

Avec

$[\mathbf{K}]$ : est la matrice de rigidité ;

$[\mathbf{Q}]$  : est le vecteur des inconnus ;

$[\mathbf{F}]$ : est le vecteur force.

La matrice  $\mathbf{K}$  est symétrique. L'équation mise sous sa forme matricielle correspond à la forme générale d'un problème discrétisé. En effet, nous sommes passé d'un problème continu à un problème discrétisé, de l'étude  $u(x,y,z)$  à l'étude de  $n$  inconnues  $Q_i$ .

### V-1.3.1) Formulation de Ritz

#### V-1.3.1.1) Formulation en déplacements

Il suffit d'introduire dans l'écriture de l'énergie potentielle la même discrétisation que celle utilisée dans la méthode de Galerkin. Pour obtenir les équations il suffit de calculer *la variation de l'énergie potentielle* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_d(\mathbf{x}) \quad \in \text{C.A.} \\ \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \delta Q_i P_i(\mathbf{x}) \quad \in \text{C.A.} \{0\} \\ \Pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x})) - P_{\text{dam}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \\ \delta(\Pi_p) = \delta \left( \frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x})) - P_{\text{dam}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \end{array} \right. \quad (\text{V.30})$$

D'où :

$$\delta(\Pi_p) = \delta[Q][K][Q] - \delta[Q][F] = 0. \quad \forall \delta[Q] \quad (\text{V.31})$$

Donc :  $[K][Q] = [F]$

Ce qui revient à écrire les différentes équations suivantes

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial Q_i} = 0 \quad (\text{V.32})$$

#### V-1.3.1.2) Formulation en contraintes

Il suffit de faire la même chose que pour la formulation en déplacement mais avec l'énergie potentielle complémentaire et une discrétisation sur le champ de contrainte. Il faut donc prendre des fonctions de base qui soient S.A. (c'est là que les athéniens s'atteignent).

### V-1.3.1.3) Formulation mixte

Il suffit de faire la même chose que pour la formulation en déplacement mais avec la fonctionnelle de Ellinger-Reisner et une discrétisation sur le champ de contrainte et sur le champ de déplacement. Il faut donc introduire deux bases.

### V-1.4) Intégration numérique

Il est clair que pour résoudre le système  $[K].[Q] = [F]$ , il y a des intégrations à faire. Si on utilise un ordinateur pour déterminer les solutions du système, il faut faire des intégrations numériques, car seuls les codes de calcul formel font des intégrations exactes. La grande majorité des codes E.F. n'utilisent pas le calcul formel.

Parmi les méthodes d'intégration numérique qui existent dans la littérature, on cite la méthode de Newton-Cotes et la méthode de Gauss.

### V-1.5) Technique de résolution éléments finis

On découpe une structure en élément de forme donnée simple : triangle, quadrilatère, tétraèdre ... Puis on cherche des solutions approchées vérifiant les conditions aux limites sur chaque élément et non plus sur la structure complète comme Ritz ou Galerkin. La méthode par éléments finis correspond donc à une méthode de Ritz ou Galerkin par morceau. L'ensemble de tous les éléments constitue le *Maillage*.

### V-1.6) Quelques éléments finis

Nous allons ici présenter complètement un certain nombre d'éléments, pour permettre une meilleure compréhension de la méthode par éléments finis et de ces résultats. Pour pouvoir assembler des matrices de rigidité élémentaire il faut pouvoir les expliciter, c'est ce que nous allons faire maintenant. Nous rappelons que dans un maillage il est possible d'*utiliser uniquement des éléments ayant les mêmes degrés d'interpolation* pour la géométrie et pour les déplacements.

#### V-1.6-1) Élément 1-D

##### V-1.6-1.a) Barre à champ linéaire (2 noeuds)

C'est l'élément le plus simple : il est composé de deux noeuds ayant chacun 1 ddl. L'interpolation des déplacements sur l'élément est linéaire. Cet élément est utilisé pour traiter les problèmes de traction-compression dans une barre.

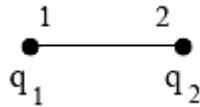


Figure V.5 : Élément barre à deux nœuds 1-D.

$q_i$  est le déplacement du nœud  $i$  dans le repère lié à la barre.

Pour ce type d'élément, les fonctions d'interpolation géométrique et les fonctions d'interpolation des déplacements sont identiques. C'est pourquoi on parle d'élément *Isoparamétrique*. L'interpolation en déplacement est la même que l'interpolation géométrique. Comme l'interpolation des déplacements est linéaire, les contraintes et les déformations sont constantes sur l'élément. Cet élément ne sera donc vraiment efficace que si le gradient de déformation est faible. Il donne une solution exacte dans le cas d'une force appliquée à l'extrémité de l'élément.

#### V-1.6-1.b) Barre à champ quadratique (3nœuds)

Cet élément est composé de trois nœuds ayant chacun 1 ddl et l'interpolation des déplacements sur l'élément est quadratique. Cet élément est utilisé pour traiter les problèmes de traction-compression dans une barre.

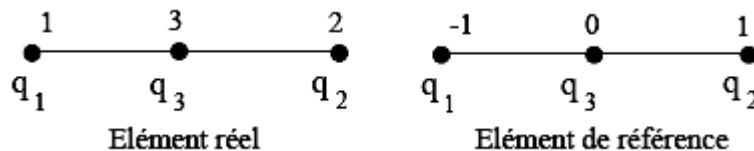


Figure V.6 : Élément barre à trois nœuds 1-D.

En cas d'utilisation de ce type d'élément, les intégrations se font entre 1 et -1, on peut donc calculer ces intégrales à l'aide des méthodes classique d'intégration numérique (Gauss ou Newton-Cotes). Il faut utiliser deux points de gauss pour obtenir une intégration exacte. On peut également faire une intégration réduite, en utilisant un seul point. La méthode des éléments finis

ayant une tendance à surestimer la raideur d'une structure, l'utilisation d'éléments à intégration réduite permet de compenser ce travers. Aussi pour faire un premier calcul sur une structure il est conseillé d'utiliser peut d'éléments mais à intégration réduite.



**V-1.6-1.c) Barre à 2 noeuds et 4 ddl**

Dans les problèmes de flexion, il est nécessaire de satisfaire les conditions de continuité  $C^1$ , et donc il faut introduire les dérivées des déplacements comme ddl.

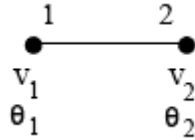


Figure V.7 : Elément barre à deux noeuds et quatre DDL.

Ces éléments sont dit de type Hermitte n Noeuds, 2n ddl, continuité  $C^1$ . Les deux présentés précédemment sont de type Lagrange (n+1) Noeuds, n+1 ddl, continuité  $C^0$  Toutes les remarques faites dans le cas 1-D sont valables dans les autres cas.

**V-1.6-2) Elément 2-D**

Nous présentons succinctement ici seulement quelques éléments 2-D. Les remarques que nous avons faites dans le cas 1-D reste valable. Il existe les mêmes familles d'éléments : isoparamétrique linéaire ou non et les non isoparamétrique.

**V-1.6-2.a) Isoparamétrique linéaire.**

**V-1.6-2.a.1) Le triangle**

Le triangle à trois noeuds est aux éléments 2-D ce que la barre à deux noeuds aux éléments 1-D. Il est inutile d'introduire un élément de référence dans ce cas, mais il est plus avantageux d'utiliser le système de coordonnées intrinsèques d'un triangle : le système des coordonnées barycentriques. La numérotation d'un élément se fait toujours dans le sens trigonométrique positif.

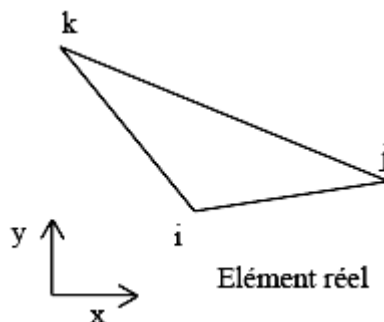


Figure V.8 : Elément triangulaire isoparamétrique linéaire 2-D.

Cet élément a 6 ddl qui sont les déplacements  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  à chacun des noeuds. *Le champ de contrainte sur cet élément est constant.* Le champ de contrainte est donc discontinu sur la structure discrétisée. Cette caractéristique fait que *cet élément est très rigide.* On utilise cet élément soit dans les régions à faible gradient de contraintes ou pour raccorder des maillages de taille différente [101].

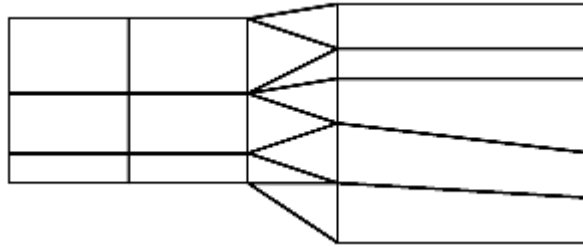


Figure V.9 : Raccordement de deux maillages par des éléments triangulaires

#### V-1.6-2.a.2) Le quadrangle

Le quadrangle à 4 noeuds et 8ddl est un élément *très souvent utilisé.* Son champ de contrainte n'est plus constant. On peut également choisir entre une intégration complète ou une intégration réduite de la matrice de rigidité. On trouve cet élément dans toutes les bibliothèques d'élément des softs utilisés.

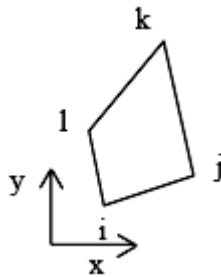


Figure V.10 : Élément quadrangulaire isoparamétrique linéaire 2-D.

#### V-1.6-2.b) Isoparamétrique non linéaire.

Il existe là aussi soit le triangle à 6 ou 9 noeuds ou le quadrangle à 8 ou 12 noeuds. Ces éléments sont de bonnes qualités pour qui sait les utiliser convenablement. Il est souvent recommandé de les utiliser avec une intégration réduite. Dans un cas on a une interpolation

quadratique (6-8) et dans l'autre cas une interpolation cubique. Le nombre de points de gauss ainsi que leurs positions sur l'élément sont donnés dans les documentations des logiciels.

## **V-2) Modélisation du comportement endommageable du problème de contact avec frottement « application au béton »**

### **V-2.1) Illustration des problèmes liés à la méthode des éléments finis (en théorie locale)**

#### **V-2.1.1) Effet d'alignement**

La méthode des éléments finis est généralement la plus utilisée lors de la discrétisation des structures, mais malheureusement cette méthode n'est pas seulement approchée, mais elle présente certains inconvénients tel que l'effet d'alignement.

La discrétisation en éléments finis tend à privilégier certains modes de rupture. Dans le paragraphe suivant sera exposé un exemple typique d'un bloc de béton sollicité par une compression excentrée. Les deux maillages utilisés contiennent des directions privilégiées qui influencent les modes d'endommagement. La distribution de l'endommagement sur la (figure V.10) correspond à la solution attendue du problème. Au même pas de chargement, la distribution d'endommagement obtenue avec le second maillage (figure V.11) est différente. Celle-ci est biaisée par le maillage et la direction des bandes de cisaillement correspond à l'une des directions privilégiées du maillage.

Nous avons remarqué en théorie locale que pour un même chargement, même évolution, même matériau, et même type d'éléments finis, une différence de comportement du matériau en fonction de la direction d'alignement des éléments dans le maillage. Pour remédier à ce phénomène, nous allons utiliser l'approche non locale qui élimine cette dépendance de la localisation des bandes d'endommagement de l'alignement des éléments.

Les figures suivantes vont nous permettre de bien constater les différentes orientations des bandes de localisation de l'endommagement (prise en compte du contact et de frottement) en théorie locale et en non locale. Ainsi nous saurons l'intérêt du calcul non local.

Nous tenons à signaler que les modèles d'endommagement et de frottement choisis, les conditions de chargement, les conditions de contact et de frottement ainsi que les résultats obtenus en théorie locale et non locale, seront exposés au chapitre VI.

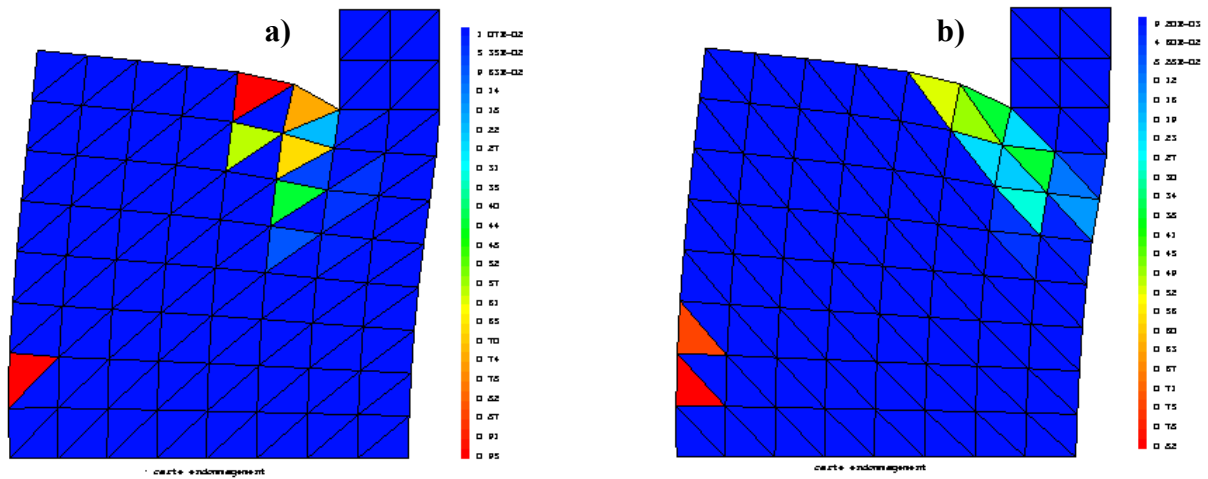


Figure V.11 : Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement  
 a) Alignement des éléments vers la gauche en local  
 b) Alignement des éléments vers la droite en local

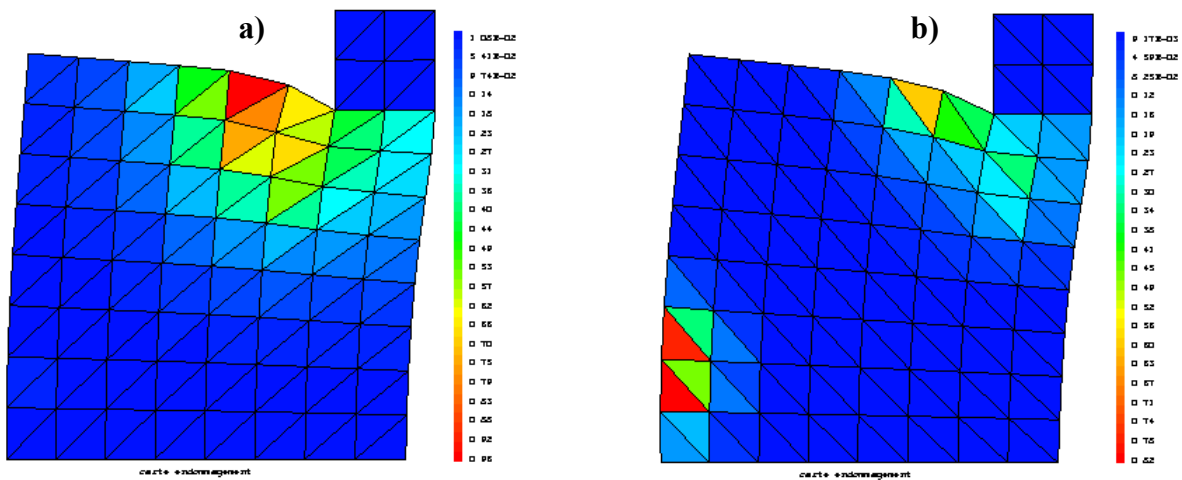


Figure V.12 : Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement  
 a) Alignement des éléments vers la gauche en non local  
 b) Alignement des éléments vers la droite en non local

### V-2.1.2) Dépendance des résultats en fonction du maillage

Le traitement numérique des modèles d'endommagement en approche locale montre une sensibilité extrême au maillage. Les travaux de SAOURIDIS (1988) [102] et ceux de PIJAUDIER-CABOT et MAZARS (1991) [61] illustrent bien un tel phénomène.

En effet, les deux maillages des figures (V.12 et V.13) représentent l'effet du raffinement du maillage en théorie locale. La première illustre cet effet en choisissant des éléments triangulaires isoparamétriques. Avec un rapport de raffinement de 66,67%, pour un même chargement, même évolution et mêmes caractéristiques du matériau, nous constatons une différence dans les valeurs d'endommagement (19% à 21%). De même, si nous choisissons des éléments quadrilatéraux (Figure V.13), avec un même rapport de raffinement, nous constatons encore une différence des valeurs d'endommagement (27% à 31%). Comme nous pouvons constater aussi une grande différence de ces valeurs lors du changement de choix d'éléments finis (triangulaires aux quadrilatéraux). Comme l'indique les figures ci-après, une différence de 10% d'endommagement entre les deux maillages utilisés.

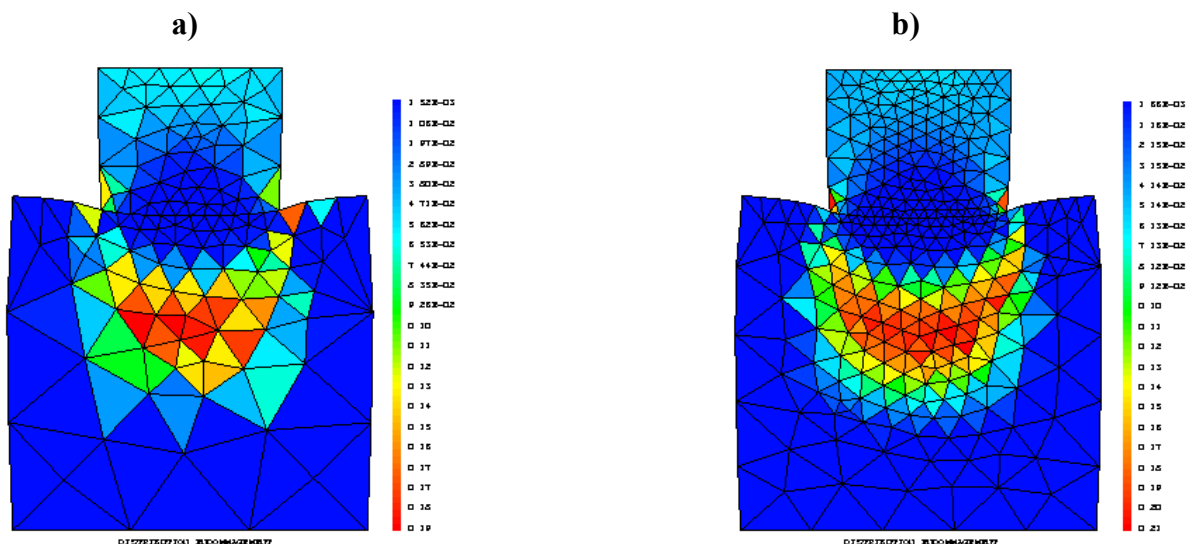


Figure V.13 : Effet du raffinement du maillage sur la valorisation d'endommagement

a) Raffinement de la zone de contact avec 12 éléments triangulaires en non local

( $D_{\max} = 0,19$  avec 237 éléments triangulaires)

b) Raffinement de la zone de contact avec 20 éléments triangulaires en non local

( $D_{\max} = 0,21$  avec 617 éléments triangulaires)

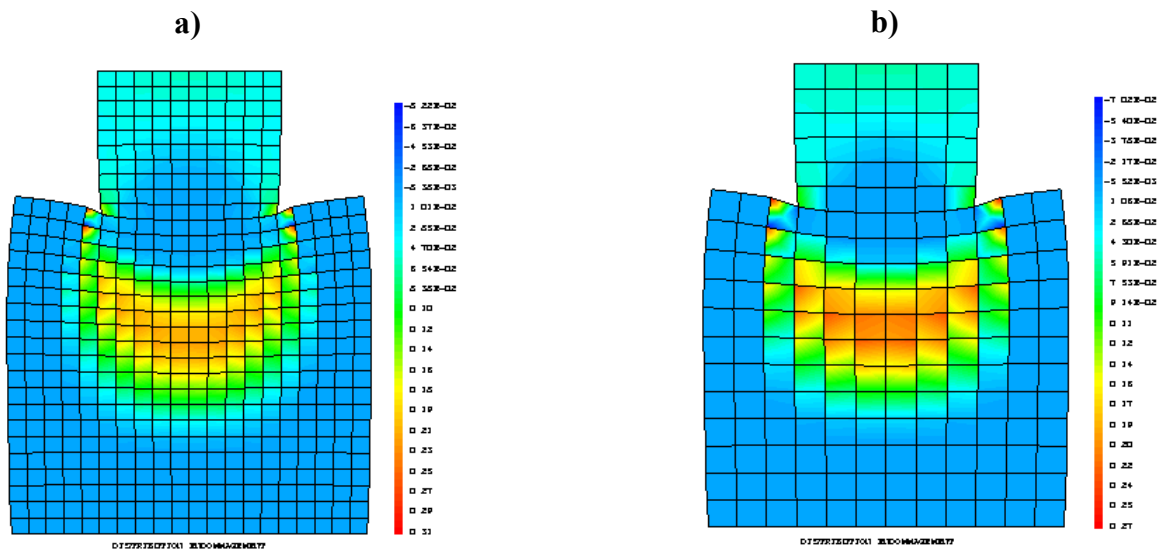


Figure V.14 : Effet du raffinement du maillage sur la valorisation d'endommagement  
 a) Raffinement de la zone de contact avec 10 éléments quadrilatéraux en non local  
 ( $D_{\max} = 0,31$  avec 500 éléments quadrilatéraux).  
 b) Raffinement de la zone de contact avec 6 éléments quadrilatéraux en non local  
 ( $D_{\max} = 0,27$  avec 180 éléments quadrilatéraux).

*Chapitre VI :*  
***Résultats et discussions***

### VI-1) Rappel du modèle de MAZARS

Parmi les modèles d'endommagement que nous avons cité au chapitre III, nous avons choisi le modèle de MAZARS qui est l'un des plus adéquats au comportement du béton. Car ce modèle scalaire d'endommagement prend en compte la dissymétrie entre la traction et la compression (Mazars 1984) [5]. Dans ce modèle, le type d'endommagement traité étant directement lié à l'existence d'extensions, la traduction de ce phénomène dans le modèle intervient à deux niveaux :

- Seuils d'endommagement

La notion de déformation équivalente, introduite par Mazars (1984) [5], traduit l'état et l'intensité d'extension locale. L'expression d'une déformation équivalente est fonction des déformations principales positives (voir modèle de MZARS Chap III).

- Couplage de deux endommagements

Deux formes de lois d'évolutions ont été proposées pour caractériser la dissymétrie de comportement de béton en traction et en compression.

#### VI-1.1) Récapitulatif du modèle de MAZARS en approche locale

##### VI-1.1-a) Lois d'endommagement

- *Endommagement en compression*

En supposant que l'endommagement est isotrope, on a  $D_c = f(\varepsilon_m)$ . Le modèle est complété par une expression de  $D$  pour  $\varepsilon_m > \varepsilon_{D0}$  :

$$D_c = 1 - \frac{A_c}{\exp[B_c(\tilde{\varepsilon}_M - \varepsilon_{D0})]} - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A_c)}{\tilde{\varepsilon}_M}$$

Avec :

$\varepsilon_{D0}$  : seuil d'endommagement correspondant

$A_c$  et  $B_c$  sont les paramètres caractéristiques du matériau.

$\tilde{\varepsilon}_M$  : Déformation équivalente maximale atteinte.

- *Endommagement en traction*

L'endommagement en traction est identifié par MAZARS [5] à partir d'un essai de flexion où :



$$D_t = 1 - \frac{A_t}{\exp[B_t(\tilde{\varepsilon}_M - \varepsilon_{D0})]} - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A_t)}{\tilde{\varepsilon}_M}$$

$\varepsilon_{D0}$  : seuil d'endommagement correspondant, avec  $\varepsilon_{D0} = (W_0 / \int_V g^m dv)^{1/m}$

$W_0$  et  $m$  caractéristiques du matériau déterminées à partir de plusieurs types d'essais tels que flexion et traction.

$g$  : caractérise la géométrie et le mode de sollicitation.

$A_t$  et  $B_t$  sont les paramètres caractéristiques du matériau.

$\tilde{\varepsilon}_M$  : Déformation équivalente maximale atteinte.

- *Couplage entre les deux types d'endommagement en traction et en compression*

Dans le cas d'un chargement radial ou par flexion, un couplage des deux endommagements est inévitable. Le dommage total  $D$  est mesuré comme la somme de  $D_t$  et  $D_c$  où :

$$D = \alpha_t \cdot D_t + \alpha_c \cdot D_c$$

$$\text{Avec : } D_t = F_t(\varepsilon) \quad \text{et} \quad D_c = F_c(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_i = 1 - \frac{(1 - A_i)K_0}{\varepsilon} - \frac{A_i}{\exp[B_i(\varepsilon - K_0)]} \quad (i = t, c)$$

$$\text{Et } \alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ti}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\varepsilon^2} ; \quad \alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ci}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\varepsilon^2} \quad \text{avec } H_i = 1 \text{ si } \varepsilon_i = \varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci} > 0$$

Sinon  $H_i = 0$ .

### VI-1.1-b) Influence de la valeur des différents paramètres

- *En traction*

➤ Influences des coefficients  $A$  et  $B$

Ils gouvernent la forme de la courbe post-pic (Figure VI.1).

$A$  : Introduit une asymptote horizontale qui est l'axe des  $\varepsilon$  pour ( $A = 1$ ) et l'horizontale passant par le pic pour ( $A = 0$ ).

$B$  : Selon sa valeur peut correspondre à une chute brutale de contraintes ( $B < 10^4$ ) ou une phase préliminaire d'accroissement de contraintes suivie après passage par un maximum d'une décroissance plus ou moins rapide.

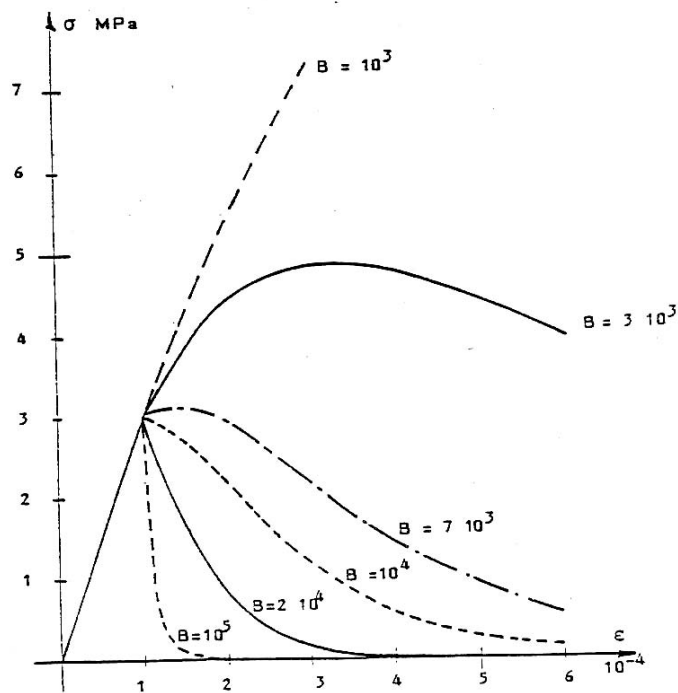
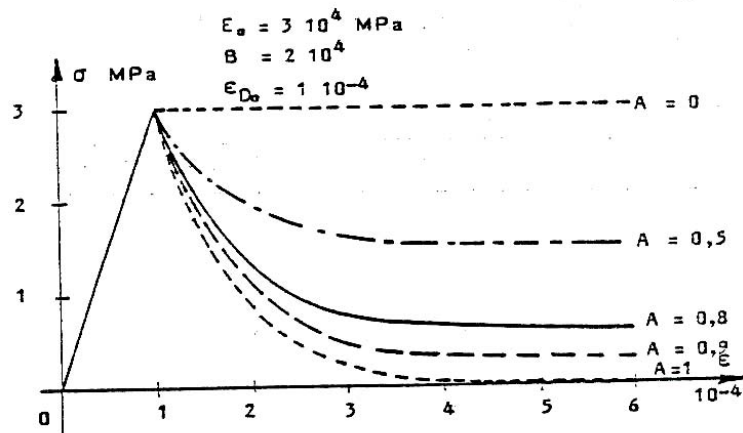


Figure VI.1 : Influence des paramètres A et B [5].

➤ Influences du seuil d'endommagement  $\epsilon_{D0}$

Ce paramètre agit sur la contrainte au pic mais également sur la forme de la courbe au-delà ; la chute de contraintes est d'autant moins brutale que  $\epsilon_{D0}$  est petit (Figure VI.2).

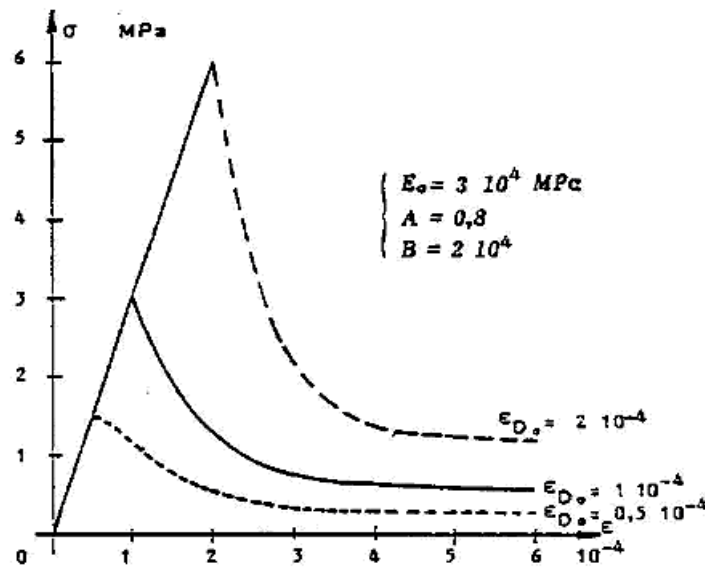


Figure VI.2 : Conséquence d'une variation de  $\varepsilon_{D0}$  [5].

La forme des courbes ci-dessous nous donne les plages de variation des différents paramètres qui sont à considérer pour modéliser le comportement en traction :

$$\begin{cases} 0,5 \cdot 10^4 < \varepsilon_{D0} < 1,5 \cdot 10^4 \\ 0,7 < A_T < 1 \\ 10^4 < B_T < 10^5 \end{cases}$$

- *En compression*

- Conséquence au niveau du seuil d'endommagement  $\varepsilon_{D0}$

La valeur de  $\varepsilon_{D0} = 1 \cdot 10^4$  est recommandée selon MAZARS [5], afin d'avoir des résultats corrects.

- Conséquences sur la phase post-pic

Le rapport des évolutions des déformations entre traction et compression n'est pas suffisant pour, partant des coefficients  $A_t$  et  $B_t$  définis pour un comportement en traction, retrouver un comportement classique de compression.

En effet, la contrainte au maximum de la courbe doit être, selon les observations expérimentales de MAZARS, sensiblement *trois fois* celle du seuil et la déformation  $\varepsilon_1$  correspondante est de l'ordre de  $-2 \cdot 10^{-3}$ .

Par conséquent, le choix des valeurs de  $A_c$  et  $B_c$  doit être adapté au comportement en compression et dont les plages de variation courantes sont comme l'indique la figure VI.3 :

$$1 < A_c < 1,5 \quad \text{et} \quad 10^3 < B_c < 2 \cdot 10^3$$

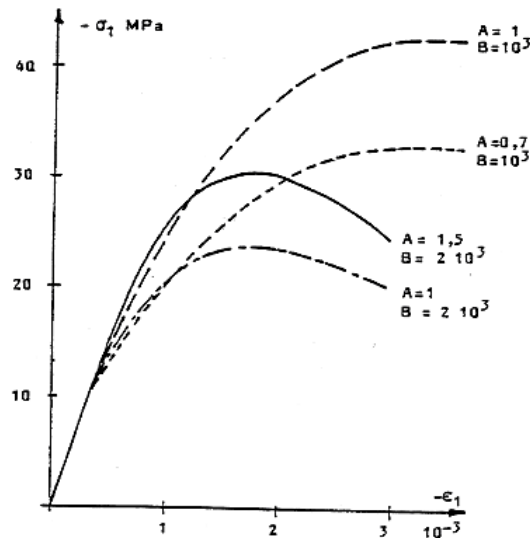


Figure VI.3 : Conséquence d'évolution de A et B sur la forme de la courbe  $\sigma_1 = f(\epsilon_1)$  en compression selon MAZARS [5].

### VI-1.2) Récapitulatif du modèle de MAZARS en approche non locale

En approche non locale, les paramètres mécaniques à identifier correspondent aux paramètres introduits dans la loi d'endommagement (Mazars 1984) en local. Ils sont au nombre de six :

- seuil d'endommagement  $\epsilon_{d0}$  ;
- paramètres d'endommagement en compression :  $A_c$  et  $B_c$  ;
- paramètres d'endommagement en traction :  $A_T$  et  $B_T$  ;
- longueur interne  $l_c$

Les constantes  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_c$  et  $B_c$  sont des paramètres du modèle. Un point important dans l'utilisation du modèle d'endommagement non local est la détermination de la longueur interne  $l_c$ . Ce paramètre est difficilement mesurable directement. Il peut être identifié à partir de l'interprétation des données issues d'essais à diverses échelles (Bazant et Pijaudier-Cabot 1987-1988).

## VI-2) Modélisation du comportement d'un massif en béton selon le modèle de MAZARS

### VI-2.1) Comportement en compression en théorie locale

- Les paramètres du modèle en compression:
  - $A_t = 8.e-01$ ;  $A_c = 1.4e0$ ;  $B_c = 1.9e+03$ ;  $B_t = 17000.$ ;  $\epsilon_{psd0} = 1.e-04$ ;
  - $Y_G = 31.E+9$  (Module d'Young) ;  $l_c = 3x_d = 7,5$  Cm.

La figure VI.4 nous montre la carte d'endommagement d'un massif en béton dans le cas plan (contraintes planes). Les dimensions du massif sont : 1.00 m x 1.00m. Ce dernier est supposé

reposer sur un socle rigide. Il est sollicité par un chargement de compression de type déplacement imposé.

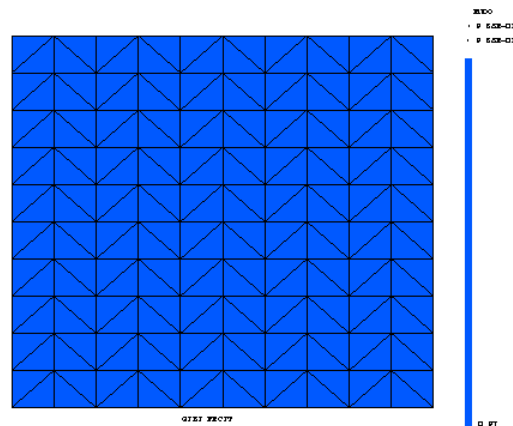


Figure VI.4 : Carte d'endommagement en compression selon le modèle MAZARS (D=0.91).

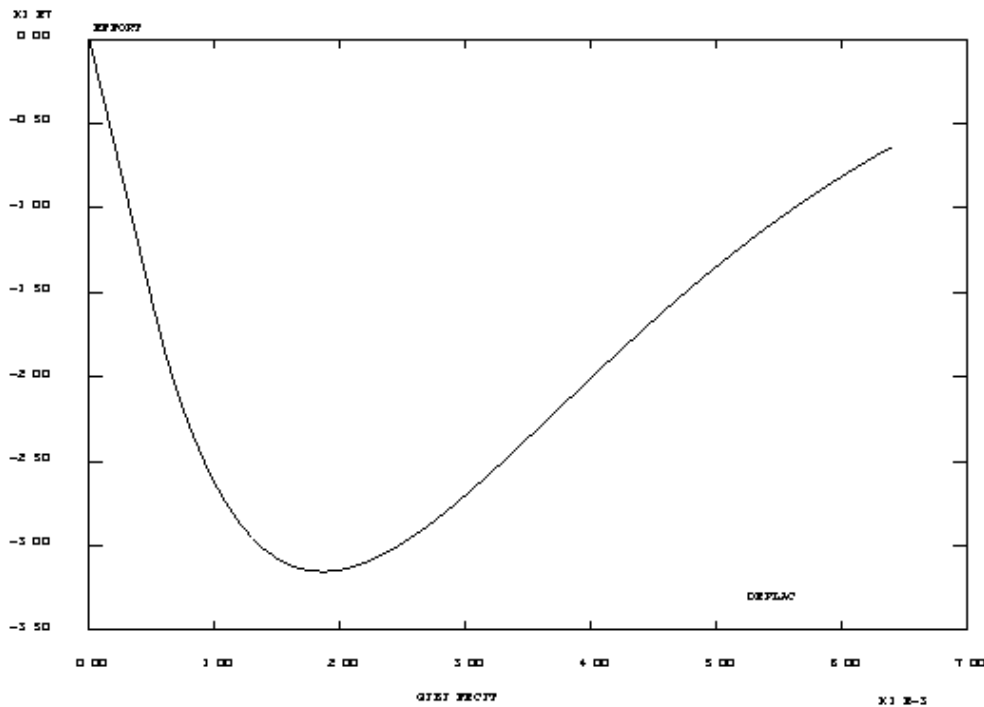


Figure VI.5 : Courbe efforts – déplacements en compression selon le modèle MAZARS.

### VI-2.2) Comportement en traction en théorie locale

- Les paramètres du modèle de MAZARS en traction:  
 $A_t=1.e0$ ;  $A_c=1.2e0$ ;  $B_c=1.5e+03$ ;  $B_t=10000.$ ;  $\epsilon_{psd0}=1.e-04$ ;  
 $Y_G=31.E+9$ ;  $l_c = 3x_d = 7,5 \text{ Cm}$ .

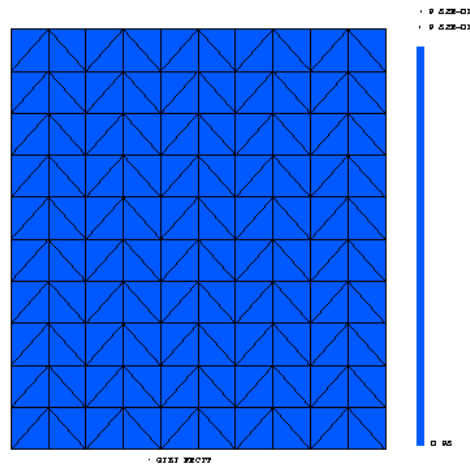


Figure VI.6 : Carte d'endommagement en traction selon le modèle MAZARS ( $D=0.97$ ).

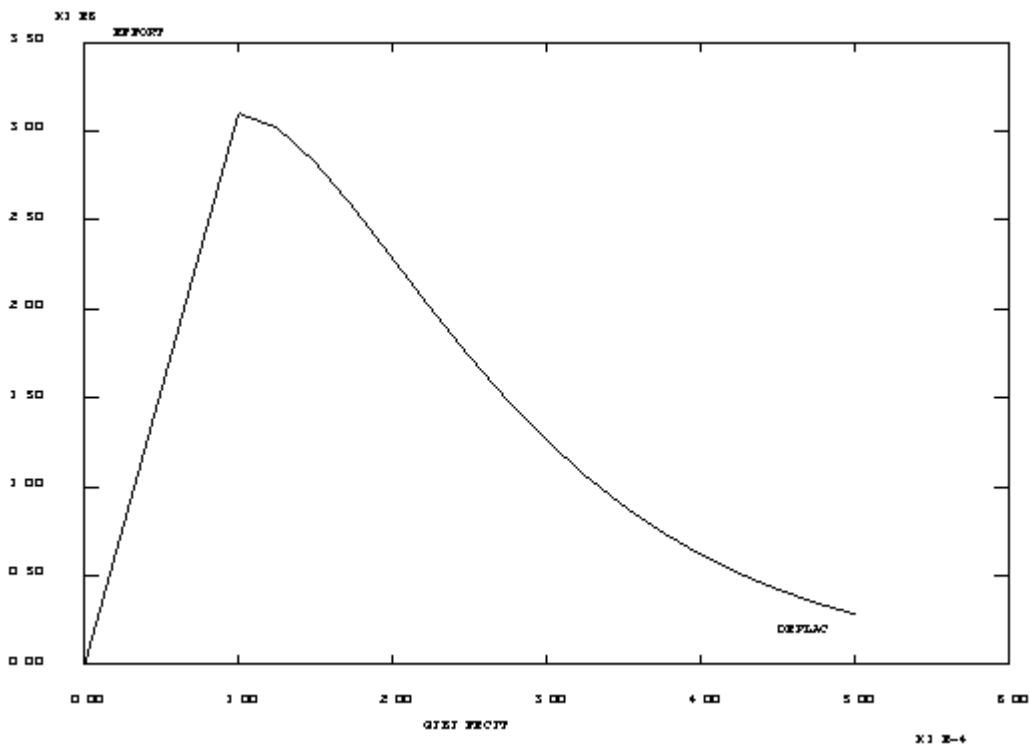


Figure VI.7 : Courbe efforts – déplacements en traction selon le modèle MAZARS.

### VI-3) Modélisation du problème de contact endommageable avec frottement

Dans ce paragraphe, nous allons exposer l'effet du contact avec frottement de Coulomb entre deux corps déformables ou entre deux corps l'un rigide et l'autre déformable (problème de Signorini). La démarche consiste à faire varier les valeurs du coefficient de frottement. Nous tenons à signaler que le modèle d'endommagement non local utilisé est le modèle de MAZARS tandis que la loi de frottement est celle de Coulomb.

### Modélisation du problème de contact avec frottement de Coulomb

#### VI-3.1) Résultats en théorie locale

- Influence du coefficient de frottement sur la localisation de l'endommagement en théorie locale:

#### VI-3.2) Résultats en théorie non locale

- Influence du coefficient de frottement sur la localisation de l'endommagement en théorie non locale:

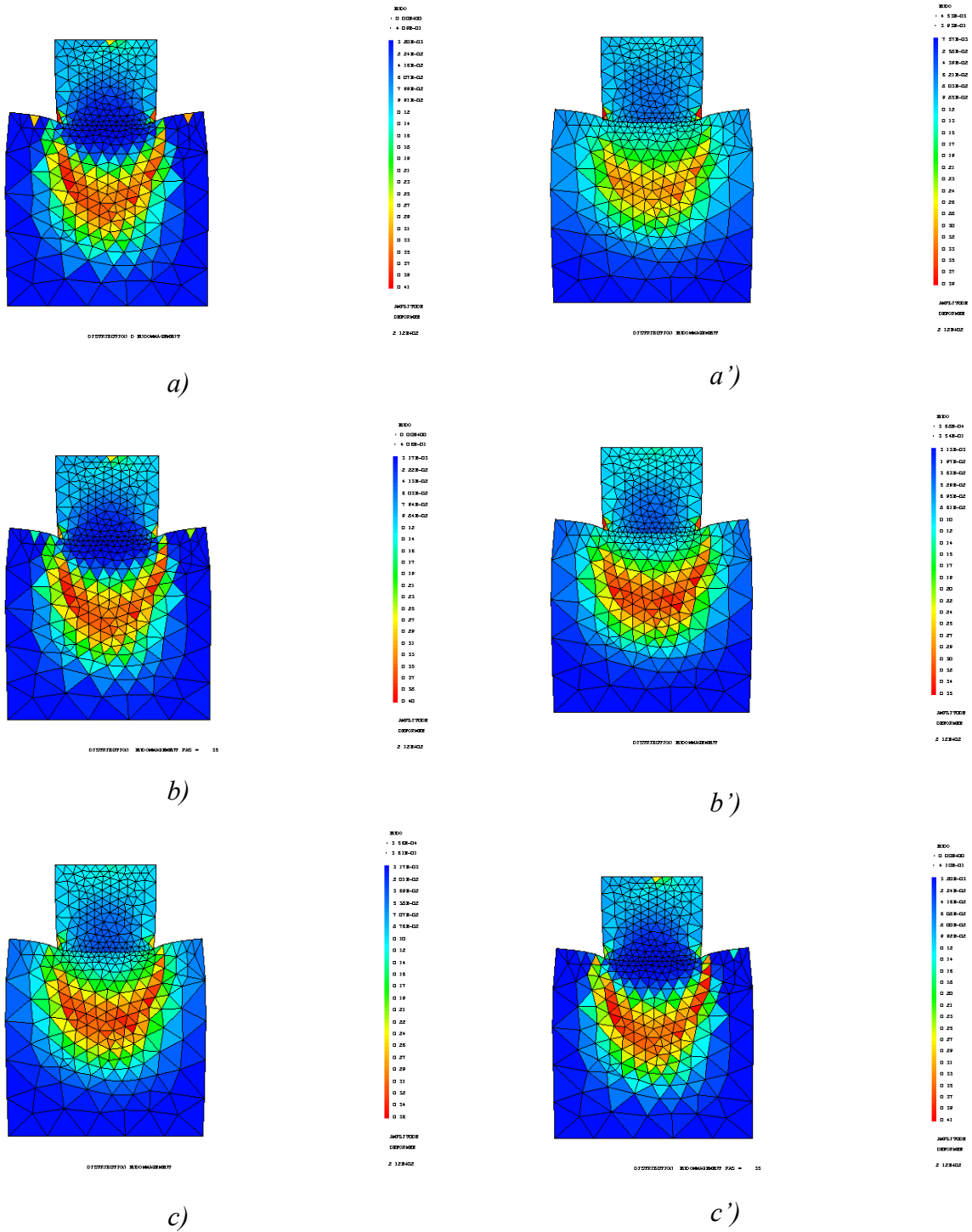
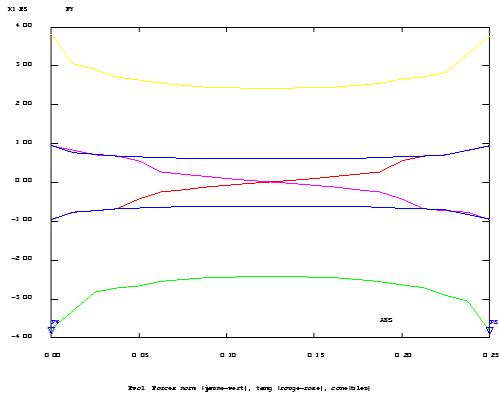


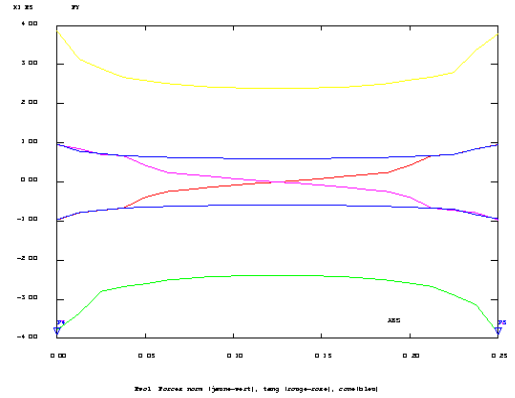
Figure VI.8 : Influence du frottement sur la localisation de l'endommagement  
*a-a')*  $C_{firt} = 0.25$  ; *b-b')*  $C_{firt} = 0.30$ ; *c-c')*  $C_{firt} = 0.50$

• Influence du coefficient de frottement sur la les réactions normales et tangentielles en théorie locale :

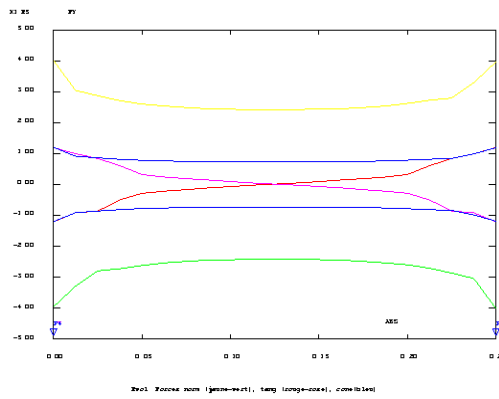
• Influence du coefficient de frottement sur les réactions normales et tangentielles en théorie non locale :



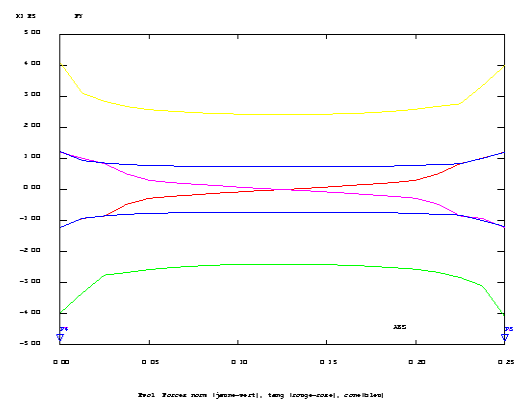
a)



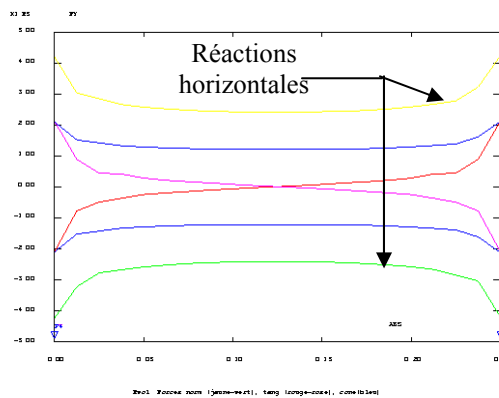
a')



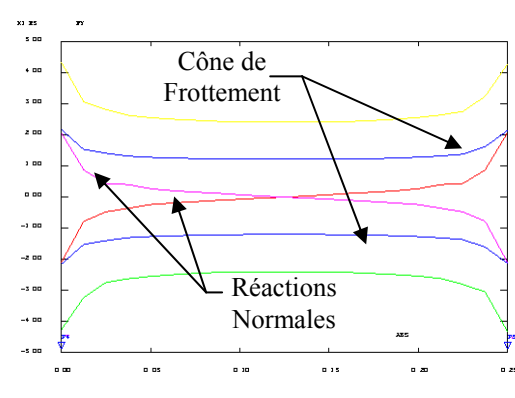
b)



b')



c)



c')

Figure VI.9 : Influence du frottement sur les valeurs des réactions normales et tangentielles  
*a-a')*  $C_{frt} = 0.25$  ; *b-b')*  $C_{frt} = 0.30$  ; *c-c')*  $C_{frt} = 0.50$



- Tableau VI.1 : Récapitulatif des résultats du problème de frottement en théorie locale

Coefficient de frottement	Convergence de calcul	Endommagement $D_{max}$	$\sigma_{max}$ 11 (Mpa)	$\sigma_{max}$ 22 (Mpa)	$\sigma_{max}$ Von mises (Mpa)
0.10	Non	-	-	-	-
a-a') : cfrt = 0.25	Itération 3	0.39	14	33	32
b-b') : cfrt = 0.30	Itération 3	0.35	12	33	32
c-c') : cfrt = 0.50	Itération 2	0.36	8	36	34

- Tableau VI.2 : Récapitulatif des résultats du problème de frottement en théorie non locale

Coefficient de frottement	Convergence de calcul	Endommagement $D_{max}$	$\sigma_{max}$ 11 (Mpa)	$\sigma_{max}$ 22 (Mpa)	$\sigma_{max}$ Von mises (Mpa)
0.10	Non	-	-	-	-
a-a') : cfrt = 0.25	Itération 6	0.41	15	33	32
b-b') : cfrt = 0.30	Itération 5	0.40	13	33	32
c-c') : cfrt = 0.50	Itération 4	0.41	8.7	36	34

D'après les tableaux ci-dessus, nous tirons les constatations suivantes :

- Le temps de convergence des calculs en non local est plus long que celui en local. Ceci est dû au temps de calcul supplémentaire des moyennes non locales effectuées pour chaque point de gauss de chaque élément du maillage. Par ailleurs, nous remarquons aussi que le coefficient de frottement a une très grande influence sur le temps de calculs. En effet, les calculs sont beaucoup plus stables (meilleure convergence) au fur et mesure que le coefficient de frottement augmente. Cette dernière remarque concernant le coefficient de frottement est aussi bien valable pour le calcul local ou bien non local.
- Les deux tableaux ci-dessous nous montrent aussi que l'effet de changement du coefficient de frottement est plus prépondérant dans le cas du calcul local que dans le cas du calcul non local. Ceci est montré dans les tableaux VI.1 et VI.2, où nous constatons une variation plus grande de l'endommagement de 0.35 à 0.39 pour l'approche locale et de 0.40 à 0.41 pour le non local. L'explication de ce résultat réside dans le fait que la théorie non locale constitue un limiteur de localisation et de ce fait, la variation de l'endommagement sera beaucoup moins accentuée dans le cas des modèles non locaux.
- Par ailleurs, nous remarquons que les résultats obtenus en approche non locale sont sensiblement supérieurs, au niveau des valeurs maximales, à ceux de l'approche locale. Ceci est nettement constaté au niveau des variables d'endommagement ainsi que des contraintes principales majeures. Tandis que pour les contraintes principales

mineures ainsi que les contraintes de VON MISES, ces valeurs sont sensiblement proches.

- Par ailleurs, nous confirmons le résultat théorique concernant le rapport entre le coefficient de frottement et l'aire des surfaces en contact-glissement (appelée également aire de glissement). En effet, plus le coefficient de frottement augmente, plus l'aire des surfaces en contact-glissement diminue. A signaler que ces surfaces en contact-glissement peuvent être repérées sur la figure VI.9, au niveau des zones où les réactions tangentes atteignent en intensité les limites du cône de frottement de Coulomb. A signaler que ces zones sont localisées au niveau des extrémités ou bords des surfaces de contact..

#### VI-4) Effet d'alignement

Comme nous l'avons expliqué au chapitre V, l'effet d'alignement du maillage sur la localisation des bandes d'endommagement est l'un des problèmes rencontrés au niveau de l'approche locale. Les figures ci-dessous sont issues de la modélisation du problème de contact avec frottement de deux massifs en béton. Le massif supérieur, chargé par une pression uniforme de compression sur sa face supérieure, se trouve excentré par rapport au centre de gravité du massif inférieur. Lors de la discrétisation, nous avons utilisé deux maillages triangulaires d'orientations différentes. Dans le premier, les éléments sont orientés vers la gauche tandis que dans le second, les éléments sont orientés vers la droite.

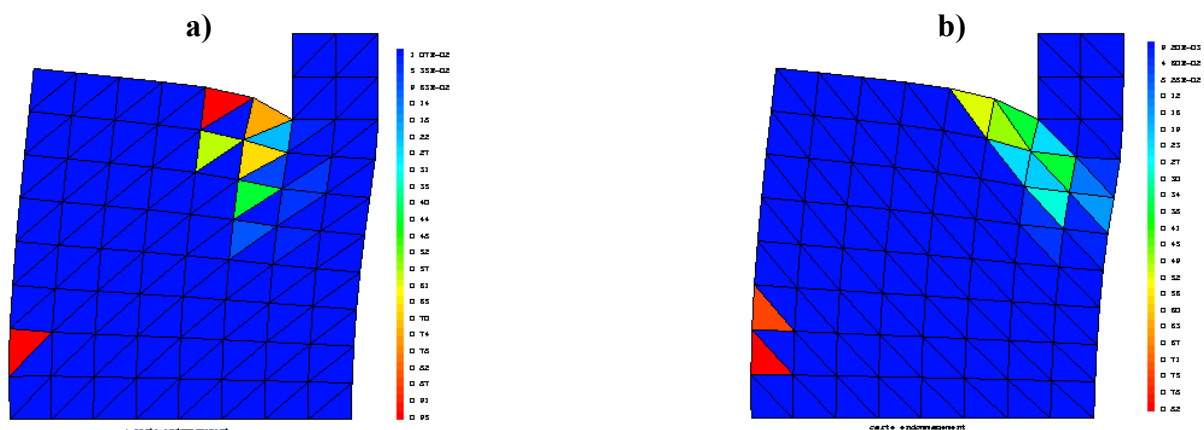


Figure VI.10 : Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement  
 a) Alignement des éléments vers la gauche en local  
 b) Alignement des éléments vers la droite en local

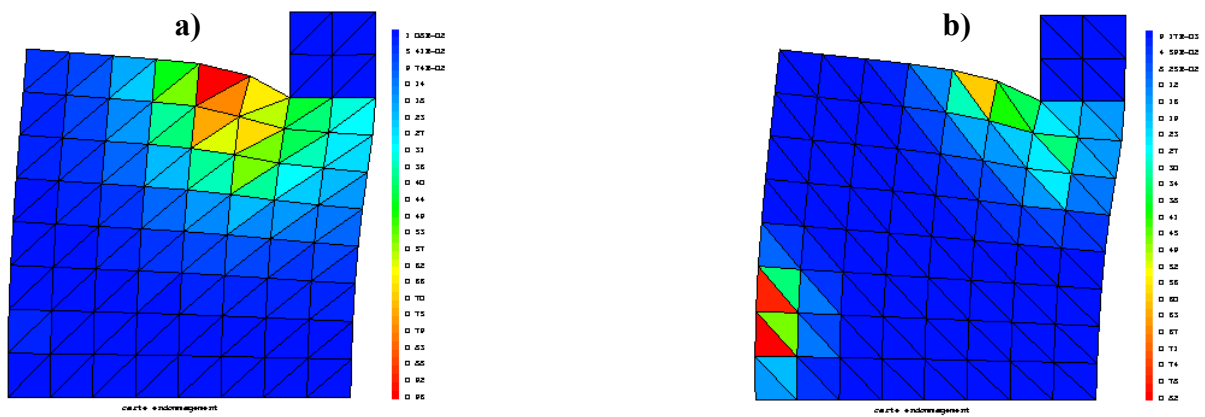


Figure VI.11 : Effet d'alignement sur la localisation des bandes d'endommagement  
 a) Alignement des éléments vers la gauche en non local  
 b) Alignement des éléments vers la droite en non local

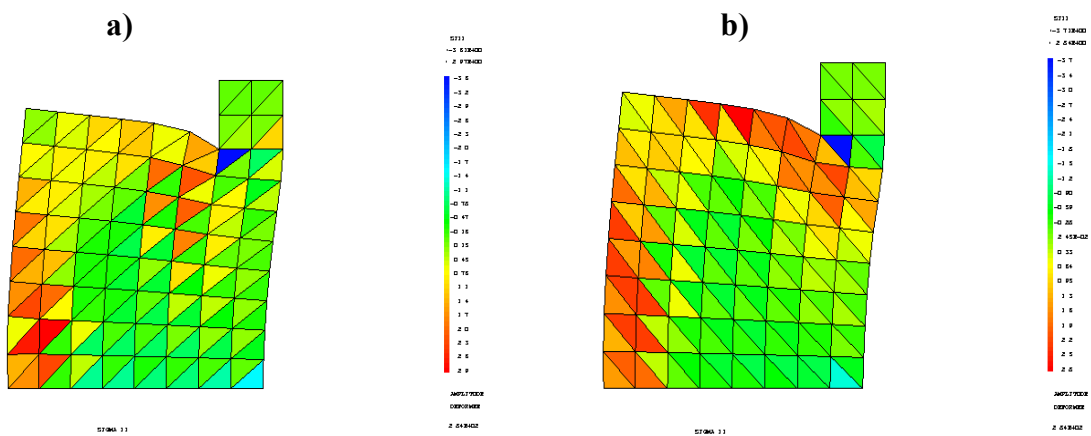


Figure VI.12 : contraintes principales sigma 1-1 en local  
 a) Alignement des éléments vers la gauche  
 b) Alignement des éléments vers la droite

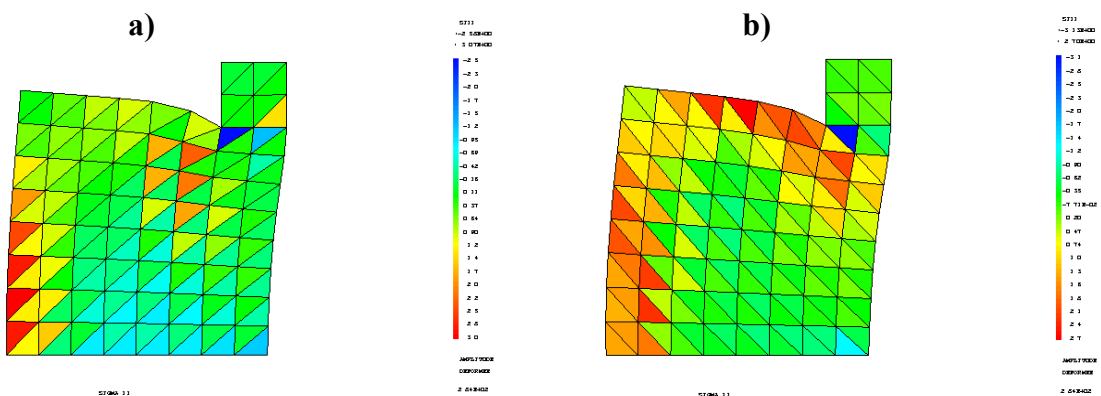


Figure VI.13 : contraintes principales sigma 1-1 en non local  
 a) Alignement des éléments vers la gauche  
 b) Alignement des éléments vers la droite

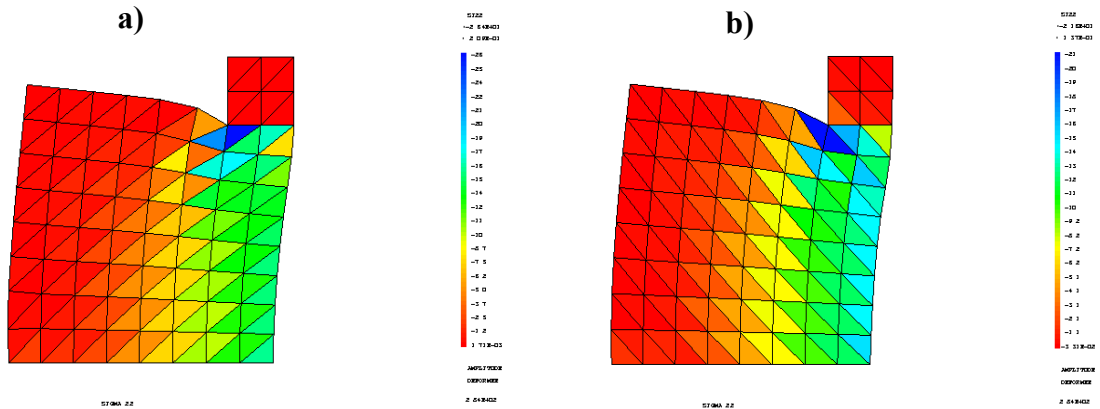


Figure VI.14 : contraintes principales sigma 2-2 en local  
 a) Alignement des éléments vers la gauche  
 b) Alignement des éléments vers la droite

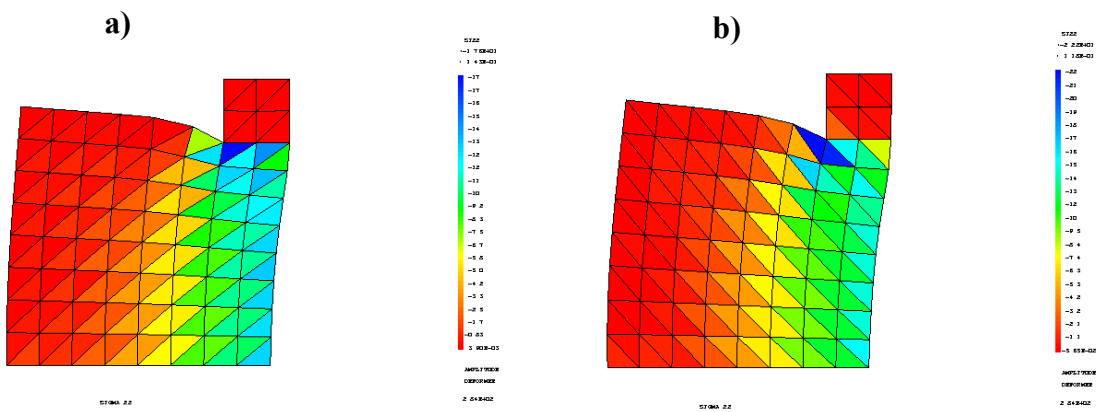


Figure VI.15 : contraintes principales sigma 2-2 en non local  
 a) Alignement des éléments vers la gauche  
 b) Alignement des éléments vers la droite

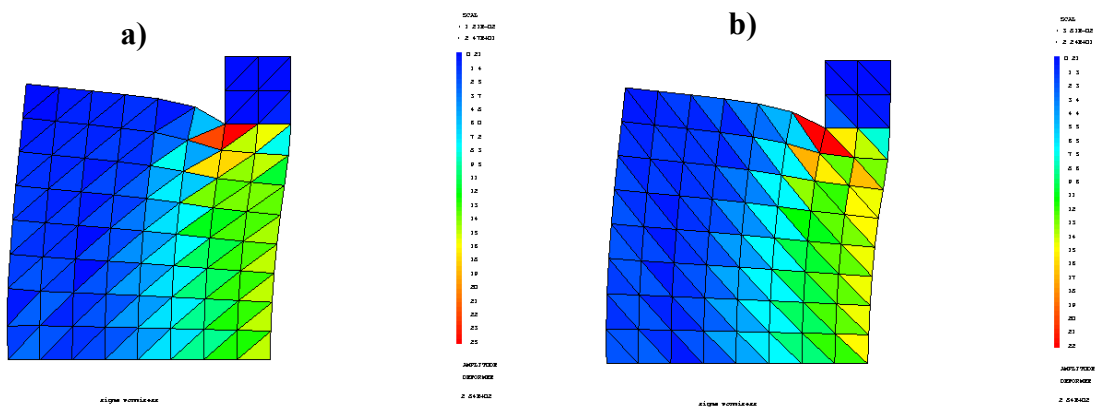


Figure VI.16 : contraintes de Von Mises en local  
 a) Alignement des éléments vers la gauche  
 b) Alignement des éléments vers la droite

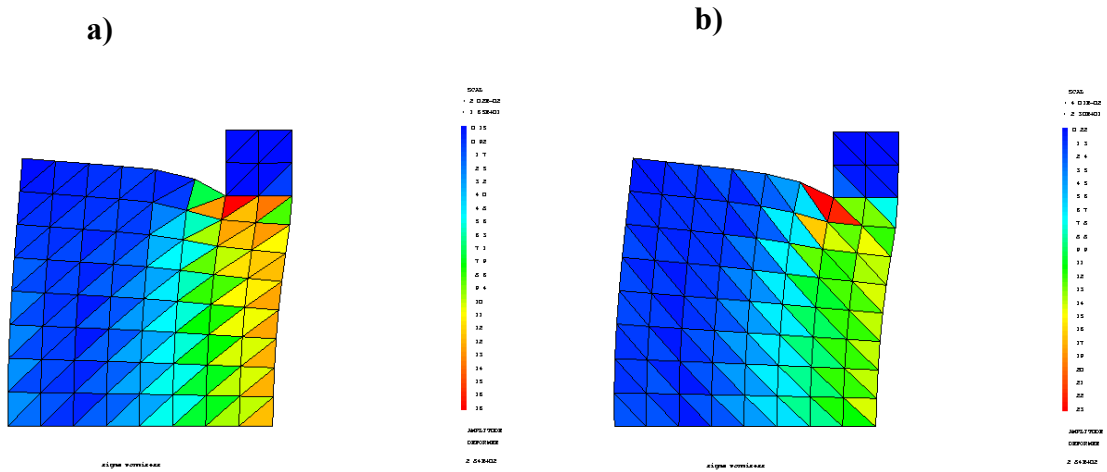


Figure VI.17 : Distribution des contraintes de Von Mises en non local  
 a) Alignement des éléments vers la gauche  
 b) Alignement des éléments vers la droite

- Tableau VI.3 : Récapitulatif des résultats de l’effet d’alignement en théorie locale

Direction de L’orientation	Convergence de calcul	Endommagement $D_{max}$	$\sigma_{max} 11$ (Mpa)	$\sigma_{max} 22$ (Mpa)	$\sigma_{max}$ Von mises (Mpa)
A gauche	Itération 15	0.96	36	26	24,7
A droite	Itération 28	0.82	37	21	22,4

- Tableau VI.4 : Récapitulatif des résultats de l’effet d’alignement en théorie non locale

Direction de L’orientation	Convergence de calcul	Endommagement $D_{max}$	$\sigma_{max} 11$ (Mpa)	$\sigma_{max} 22$ (Mpa)	$\sigma_{max}$ Von mises (Mpa)
A gauche	Itération 32	0.97	25	17	16,5
A droite	Itération 30	0.82	31	22	23

• **Commentaires :**

D’après les deux tableaux ci-dessous, nous pouvons tirer les remarques suivantes :

- Le temps de convergence des calculs en théorie non locale est plus long (32<sup>ème</sup> itération) que dans le cas du calcul local (15<sup>ème</sup> itération). Ceci est dû au temps supplémentaire, nécessaire pour le calcul de la moyenne non locale des variables d’endommagement au niveau des points d’intégration.
- Par ailleurs, nous constatons que l’effet d’alignement a été atténué au niveau de l’orientation des bandes de localisation de l’endommagement. Cette atténuation serait marquée d’avantage, avec un maillage plus raffiné notamment au niveau de ces bandes de localisation.

- En outre, nous remarquons que les résultats des calculs éléments finis sont nettement différents pour les deux cas d'alignement, et ce pour les deux approches locales et non locales. En effet, nous constatons que sous les mêmes conditions de chargement, mêmes conditions aux limites et mêmes caractéristiques du matériau, les contraintes principales et de Von Mises sont largement différentes (voir tableau VI.3 et VI.4). Tandis que les valeurs d'endommagement sont plus ou moins proches (0.96 à 0.97) ce qui s'explique par la prise en compte de la dissymétrie en traction et en compression (modèle de MAZARS), car la valeur d'endommagement  $D$  est prise comme la moyenne des deux valeurs d'endommagement en traction et en compression.

### **VI-5) Simulation de l'essai de fendage (Effet de la localisation)**

Dans le cas d'un calcul par la méthode des éléments finis, avec une modélisation classique, et lorsqu'il existe un fort gradient de sollicitation dans la structure modélisée, plusieurs auteurs ont mis en évidence la dépendance des calculs vis-à-vis du maillage [60]. La progression de l'endommagement est influencée à la fois par la taille des éléments (raffinement de maillage) et leur orientation (effet d'alignement) comme nous l'avons signalé précédemment.

Un exemple significatif est celui de l'essai « Brésilien » (Essai de fendage) dont le principe est décrit en figure VI.18-a, où la simulation d'une éprouvette en béton ( $R = 16$  Cm et  $H = 32$  Cm) selon la norme française (NF P 18-408 Décembre 1981 citée en annexe), conduit à une initiation de la fissuration directement sous la charge et à une rupture par écrasement de cette zone fortement comprimée. Ce mode de rupture est incompatible avec les données expérimentales (rupture par traction en demi coquilles) et le calcul sous-estime nettement la résistance ultime de l'éprouvette (figure VI.18-b) [104].

Dans l'essai de fendage, l'endommagement s'initie en compression mais il diffuse dans les éléments voisins et sa progression provoque la rupture en traction ce qui correspond à la réalité observée (figure VI.20).

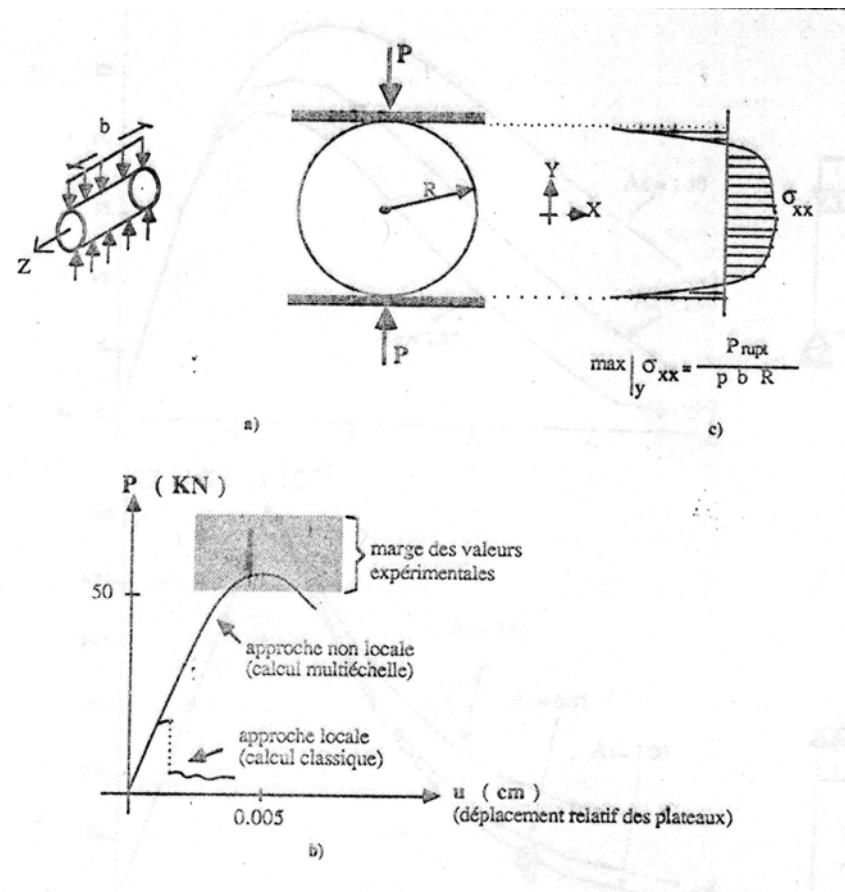


Figure VI.18 : Essai brésilien (Essai de fendage)

- a) Schéma de l'essai
- b) Comparaison des différentes approches de calcul
- c) Répartition des contraintes en élasticité

Dans cet essai, le calcul non local permet de retrouver les faciès de rupture expérimentaux, les raisons de cette amélioration sont :

- En approche locale, les éléments situés directement sous la charge s'endommagent les premiers en compression, et le reste des éléments restent déchargés. Cet endommagement restant confiné dans une zone limitée (les éléments en contact avec le corps de chargement seulement). Cela est illustré par la figure VI.19.

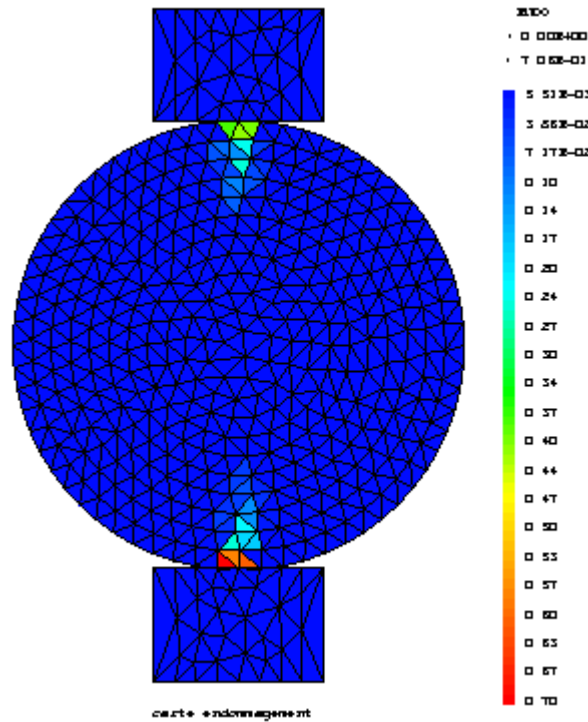


Figure VI.19 : Distribution de l'endommagement dans un essai brésilien en théorie locale  
( $D_{c_{max}} = 0,70$ . Endommagement par compression)

- En formulation non locale, le modèle empêche la localisation de l'endommagement dans une zone de taille contrôlée par une longueur caractéristique  $l_c = 2 \cdot R$  ( $R =$  rayon de l'éprouvette). Par conséquent, l'endommagement s'initie encore en compression mais il diffuse dans les éléments voisins et sa propagation finit par provoquer la rupture en traction, ce qui correspond à la réalité (voir figure VI.19).



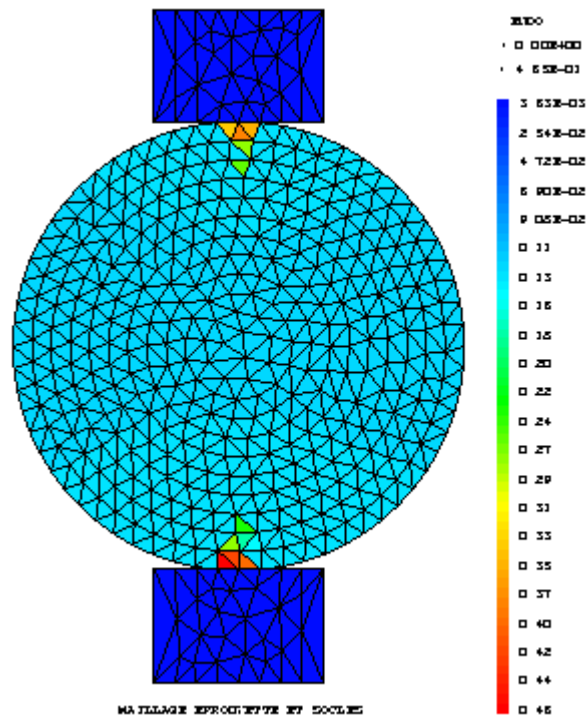


Figure VI.20 : Distribution de l'endommagement dans un essai brésilien en théorie non locale  
( $D_c = 0,42$  et  $D_t = 0,98$ . Endommagement par traction)

**N.B :**

- Nous tenons à signaler que les problèmes que nous avons étudié à savoir l'effet d'alignement, problème de localisation (Essai brésilien) et le problème de contact avec frottement, étaient implantés dans un code de calcul par éléments finis Cast3M.

## *Conclusion Générale*

La modélisation du problème de contact unilatéral endommageable avec frottement a été le but de ce mémoire. Afin de traiter efficacement le problème considéré, une formulation du problème couplant le comportement élastique endommageable du matériau béton et le contact avec frottement entre plusieurs corps déformables était nécessaire.

Nous avons vu au chapitre II, qu'à partir de la thermodynamique des processus irréversibles, la mécanique de l'endommagement permet de prévoir le comportement non linéaire du béton traduisant l'évolution des microfissures au sein du matériau.

Par la suite, nous avons traité au chapitre III le couplage élasticité – endommagement par un formalisme thermodynamique où nous avons exposé la manière avec laquelle l'endommagement affecte le matériau par son influence sur les caractéristiques élastiques (variation du module de Young) ainsi que les différentes méthodes de mesure de l'endommagement. Puis nous avons rappelé les différents modèles d'endommagement en approche locale avec la mise en présentation de quelques problèmes non résolus par cette approche tels que la localisation de l'endommagement, la sensibilité au maillage et l'effet d'alignement. En suite nous avons proposé des solutions qui peuvent remédier aux problèmes rencontrés en approche locale. Pour cela quelques modèles non locaux ont été cités, parmi eux le modèle de MAZARS pour lequel nous avons opté.

Après avoir étudié le problème du comportement élastique endommageable du béton dans les deux approches (locales et non locales) et afin de modéliser le problème de contact unilatéral avec frottement en milieu élastique endommageable, la formulation complète du problème a été établie. Pour cela nous avons supposé un contact unilatéral entre les corps déformables en utilisant la loi de frottement de Coulomb. Le problème de contact avec frottement induit de grandes non linéarités qui demandent un traitement numérique adéquat. Par conséquent, nous avons cité les différentes méthodes numériques de résolution du problème. Cela a fait l'objet du chapitre IV.

Nous avons illustré lors de la modélisation par la méthode des éléments finis du problème de contact avec frottement en milieu élastique endommageable, les problèmes de l'approche locale tel que le phénomène de la localisation de l'endommagement, la sensibilité au maillage et l'effet d'alignement. Comme nous avons montré l'intérêt du calcul non local afin de remédier aux problèmes de l'approche locale et cela était exposé au chapitre V.

Finalement, au chapitre VI, nous avons clarifié la modélisation du problème de contact avec frottement en milieu élastique endommageable par plusieurs exemples où nous avons fait apparaître la différence entre les deux approches locales et non locales. Nous avons illustré par des exemples l'effet de la variation du coefficient de frottement sur

l'endommagement, l'effet d'alignement en approche locale et sa diminution en approche non locale ainsi le problème de la sensibilité au maillage et celui de la localisation de l'endommagement. Une simulation de l'essai brésilien dans les deux cas (local et non local) a mis en évidence le phénomène de la localisation et son influence sur les résultats (manière de rupture) pour les deux approches.

Ainsi, nous concluons que l'approche non locale est beaucoup plus fiable pour la modélisation par la méthode des éléments finis du problème de contact avec frottement en milieu élastique endommageable, car elle donne des résultats non dépendant des phénomènes cités ci-dessus. Mais cette méthode exige des maillages adéquats au problèmes traités (raffinement des zones endommagées) afin d'approcher les résultats à ceux attendus.

En perspective, une amélioration de ces techniques non locales pour le problème de contact endommageable peut être effectuée par des techniques d'adaptation de maillage et d'estimation d'erreurs à posteriori.

*Références bibliographiques*

- [1] **METHA P.K.**, 'Concrete, structure, properties and materials'. *Englewood cliff (New Jersey): prentice hall*, 1986, 600p.
- [2] **CHENG, J.H., KIKUCHI, N.** An incremental constitutive relation of unilateral contact friction for large deformation analysis. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1982, vol. 52, pp; 639-648.
- [3] **VAN MIER, J.G.M., SHAH, S.P., ARNAUD, M., et al.** Strain softening of concrete in uniaxial compression. *Materials and Structures*, 1997, vol. 30, pp. 195-209.
- [4] **Lorrain. M.**- "Contribution à l'étude de la micromécanique des matériaux granulaires cohérents. Application au béton ". *Thèse de doctorat ès-sciences*. Toulouse (1974).
- [5] **Mazars J.**, 1984. 'Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure'. *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, Paris, France*.
- [6] **Berthaud. Y.**, " Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore " *Thèse de Doctorat de l'Univ Paris VI* (1988).
- [7] **TORRENTI J.M.** 'Comportement mécanique du béton – bilan de six années de recherche. *Mémoire d'habilitation à diriger des travaux de recherche*', : Université de Paris 6, 1993. 158p.
- [8] **Robinson IS.R.**- "Methods of detecting the formation and propagation of microcracks in concrete". Proceeding of the International Conference "The structure of concrete ". London (1965)
- [9] **Rossi. P.**, ' Fissuration du béton : du matériau à la structure. Application de la mécanique linéaire de la rupture ' *Thèse de Doctorat ENPC* (1986).
- [10] **Acker, P.**, ' Comportement mécanique du béton : apports de l'approche physico-chimique " *Thèse de Doctorat ENPC* (1987).
- [11] **KARSAN P. and JIRSA J.O.** behaviour of concrete under compressive loading. *J. Struct. Div. ASCE*, 1969, vol 95, n°. ST12, p 2543-2563.
- [12] **RICHART F.E., BRANDTZAEG A., BROWN RL.** 'A study of concrete under combined compressive stress', *Univ. Ill. Eng. Exp. St. Bull.* 1928. 6p.
- [13] **BALMER G.G.**. 'Shearing strength of concrete under high triaxial stress-computation of Mohr's envelope as curve'. *Struct. Res. Lab.*, 1949, SP-23, p 1-10.
- [14] **JAMET P. ? MILIARD A. and NAHAS G.** 'Triaxial behaviour of a micro-concrete complete stress-strain for confining pressures ranging from 0 to 100 Mpa, Proc. *International conference on concrete under multiaxial conditions*, Toulouse (France) : 1984. p 1236-1239.
- [15] **Ramtani. S.**, ' Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral' *Thèse de Doctorat de l'Univ Paris 6*, (1992).
- [16] **VAN MIER, J.G.M.** Mode I fracture of concrete: discontinuous crack growth and crack interface grain bridging. *Cement and Concrete Research*, vol. 21, n° 1, pp. 1-15.
- [17] **TERRIEN M.** 'Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *Bulletin de liaison des ponts et chaussées*, 1980, n° 105, p65-72.
- [18] **KUPFER, H., HILSDORF, H.K., RUSCH, H.** Behaviour of concrete under biaxial stresses. *Journal of American Concrete Institute*, 1969, vol. 66, n° 8, pp. 656-666.
- [19] **KUPFER, H.B., GERSTLE, K.H.** Behaviour of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 1973, vol. 99, n° 4, pp. 853-866.
- [20] **Lemaitre, J et Chaboche, J.L.** : 'Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement ' *Journal de mécanique appliquée*, 2 pp 317-365.(1978).
- [21] **Mor T. et Tanaka K.**, 1970. 'Average stress in matrix and elastic energy of materials with misfitting inclusions'. *Acta Metallurgica*, vol. 21, pp. 571 – 574.
- [22] **N.Q. Son.** Cours ENPC " *Thermodynamique des milieux continus* ".
- [23] **Kachanov L.M.** -" Time of the rupture process under creep conditions ". *I.z.vAkad-Nauk, SSR.OTd Teck Nauk* n°8, 1958.
- [24] **Rabotnov, Y.N.** - " Creep rupture " *Proc XII, Int, Cong, Appl, Mech Stanford, springer* (1968).
- [25] **Trues Dell, C.A.** "Rational thermodynamics". *Mc Graw-Hill, Newyork*, 1969.
- [26] **Cordebois J.P et F.Sidoroff.** - "Anisotropie plastique induite par endommagement ". *Colloque euromech 115, comportement mécanique des solides anisotropes* .Grenoble (1979).
- [27] **Mc Clintock. F.A.** -" Ductile Rupture by growth of holes " *J. of Appl. Mech.*, 35:36 (1968).
- [28] **Rice. J.R et D.M. Tracey** " On the ductile Enlargement of Voids in triaxial stress Fields " *J- Mech. Phys. solids*, 17:201 (1969).
- [29] **Gurson. A.L.** -" Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I : Yield criteria and flow rules for porous ductile media" *J. Engrg. Mat. Tech*, 44:2 (1977).
- [30] **Gelin. J.C.** -" Modèles numériques et expérimentaux en grandes déformations plastique et endommagement de rupture ductile" *Thèse d'état. Univ Pierre et Marie Curie*, Paris (1985).
- [31] **Lemaitre. J.** -" how to use Damage mechanics " *Nucl. Eng. Design*, 80:233 (1984).
- [32] **Simo, J.C and Ju. J.W.** -" Stress and strain based continuum damage Models. Part I : Formulation. Part II : Computational Aspects " *Int. J. Solids. Struct.* 23(7) 821-864 (1987).

- [33] **Chow, C.I and Wang, J** -" A finite element analysis of continuum Damage for ductile fracture " *Int. J. Fracture*, 38:83 (1988)
- [34] **Saanouni, K, Benhatira, F, Forster**- " On the anelastic flow with damage" *Int. J. of Damage Mech. Vol 13*- April 1994.
- [35] **Germain, P.** "Cours de mécanique des milieux continus", *Editions Masson*, Paris 1973
- [36] **Kachanov L.M** -" Time of the rupture process under creep conditions ".*I.z.vAkad-Nauk, SSR.OTd Teck Nauk* n°8, 1958.
- [37] **Lemaitre, J et Chaboche, J.L.**:"Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement " *journal de mécanique appliquée* ,2 pp 317-365.(1978).
- [38] **Cordebois J.P et F.Sidoroff**- "Anisotropie plastique induite par endommagement ". *Colloque euromech 115, comportement mécanique des solides anisotropes* .Grenoble (1979).
- [39] **Bazant, Z.P**- "Mechanics of distributed cracking". *Appl. Mech. Rev. ASME*, 39(5), 675-705 (1986).
- [40] **Dougill, J.W**- "Constitutive relations for concrete and rock. Applications and extension of elasticity and plasticity theory" *Preprints W.Prager Symp on mech of Geomaterials, Rocks, Concrete, Soils. Northwestern Univ, Evanston III* (1983).
- [41] **Dragon.A et Mroz.Z**- "A continuum model for plastic brittle behaviour of rock and concrete" *Int. J. Eng. Sci.* 17. 137-145 (1979).
- [42] **Gerstle, K.H, et coll**- " Behaviour of concrete under multiaxial state" *J. Engrg. Mech. Div., A S C E*, 106(6), 1383-1403. (1980).
- [43] **Kostovos, M.D**- " A mathematical model of the deformational behaviour of concrete under generalized stress based on fundamental material properties" *Matériaux et Constructions*, 13(76), 289-298 (1980).
- [44] **Wastiels, J**- " A softening plasticity model for concrete " *Proceedings Int. Conf. Numerical methods for non linear Problems. Pineridge Press. Swansea, U.K*, 481-493 (1980).
- [45] **Pande, G.N et Sharma, K.G**- " Multilaminat model of clays- A numerical evaluation of the influence of rotation of the principal stress axes" *Proc Symp on implementation of computer Procedures and stress strain laws in geotechnical Engrg. Acorn Press, Chicago III*, 590-595 (1982).
- [46] **Krajcinovic, D**- " Constitutive equations for Damaging material " *J. Appl. Mech. ASME*, 50, 355-360 (1983).
- [47] **Ladeveze, P**- " Sur une théorie de l'endommagement anisotrope " *Rapport interne n° 34, L.M.T Cachan, France* (1983).
- [48] **Benouniche, S.** "Modélisation de l'endommagement du béton hydraulique par microfissuration en compression".*Thèse 3ème cycle. Paris VI* (1979)
- [49] **Maso, J.C.** "La liaison pâte-granulats". *Le béton hydraulique, presses ENPC* , Paris ,France (1982).
- [50] **Maso J.C, Bascoul A**- "Influence de la contrainte intermédiaire sur le comportement mécanique du béton en compression biaxiale" *Matériaux et construction*, n°42, pp 411-419 (1977).
- [51] **J. Desrue, J. Lanier et P.** ' *Stutz, Engrg. Fract. Mech* ', 21, 1985, p. 909-921
- [52] **BAZANT, Z.P., PIJAUDIER-CABOT, G.** 'Non-local continuum damage, localization instability and convergence'. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1988, vol. 55, pp. 287-293.
- [53] **J. Hadamard (1903)** « *Leçons sur la propagation des ondes* » Hermann et Cie. France
- [54] **Z.P Bazant et T.B. Balytshko (1985)** « Wave propagation in a strain softening bar » *J.Engrg.Mech. ASCE* 111(3) 381-389.
- [55] **- Borré. G et Maier.G** -" On linear versus non linear flow rules in strain localization analysis " *Mécanica*, 24, 36-41 (1989).
- [56] **N.S Ottosen, K Ruesson (1991)** *Int. J. Solids Structures*, Vol 27, p 401
- [57] **M. Ortiz, Y.Leroy et A. Needleman**, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 61, 1987, p.189-214
- [58] **D.V Pham et T. Desoyer XI ème** 'congrès Français de Mécanique' . *Presses Univ Lille III*, 1993, p305-308
- [59] **T. Desoyer et Leroux** « Etude de la localisation par une loi de comportement élastique endommageable avec gradients d'ordre supérieurs » *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.318, Série II, p-277 282,1994
- [60] **BAZANT, Z.P., LIN, F.P.** 'Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture'. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1988, vol. 114, n°11, pp. 2493-2510.
- [61] **Jacky Mazars and Gilles Pijaudier-Cabot**, 'From damage to fracture mechanics and conversely: a combined approach'. *International Journal of Solids and Structures Volume 33, Issues 20-22*, August 1996 Pages 3327-3342.
- [62] **Saanouni K., K. Nesnas, Y. Hammi**, 'Damage modelling in metal forming processes', *Int. J. Dama. Mech.* 9(2000), 196-240.
- [63] **Sidoroff, F., A. Dogui**, 'Some issues about anisotropic elastic-plastic models at finite strain'. *International Journal of Solids and Structures Volume 38*, 2001, Pages 9569-9578.
- [64] **Comi C., A. Corigliano**, 'On uniqueness of the dynamic finite-step problem in gradient-dependent softening plasticity', , *Inter. J. Solids Structures*, 33(1996), 3881-3902.
- [65] **Comi C., U. Perego**, 'A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity'. *Int.*

- J. Numer. Meth. Engng.*, 39(1996), 3731-3755.
- [66] **Comi C., U. Perego**, 'Numerical aspects of the nonlocal damage analyses'. In: *Numerical Modelling in Damage Mechanics, NUMEDAM'00*, K. Saanouni (Ed.), (Special issue of *European Journal of Finite Elements*, 2001, 10(2/3/4): 227-242).
- [67] **Creus, G.J.** 'Instability and damage effects in the modeling of metal forming'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Feb 2000.
- [68] **M.W. Heinsten and T, A Laursen**. 'An algorithm for the matrix-free solution of quasistatic frictional contact problems'. *International Journal for Numerical Methodes in Engineering*, 44 (9) : 1205-1226, 1999.
- [69] **P.Chabrand, F. Dubois**, and M. Raous. Variation numerical methods for soluving unilateral contact problems with friction. *Mathematical Computer and Modeling*, 28 (4-8):97-108,1998.
- [70] **M. Raous**. Méthodes de résolution numérique. Ecole CEA-EDF-INRIA, Problèmes non linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique de problème de contact et frottement, INRIA Rocquencourt (France), 15-18 novembre 1999.
- [71] **M. Raous, P. Chabrand, and F. Lebon**. Numerical methods for frictional contact problems and application. *Journal of theoretical and applied mechanics*,7(11):111-128,1988.
- [72] **CHANG, J.H., KIKUCHI, N.** An incremental constitutive relation of unilateral contact friction for large deformation analysis. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1985,vol.52, pp. 639-648.
- [73] **HALQUIST, J.O., GOUDREAU, G.L., BENSON, D.J.** Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985,vol.51,p 107-137.
- [74] **SIMONS, J.W., BERGAN, P.G.** A finite element formulation for three-dimensional contact problems with slip and friction. *Computational Mechanics*, 1986,vol 1, pp. 153-164.
- [75] **HUGES, T.G.R., TAYLOR, R.L., SACKMAN, J.L., CURNIER, A., KANKNUKULCHAI, W.** A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1976,vol.8, pp. 249-276.
- [76] **BATHE, K.J.; CHAUDHARY, A.** Solution method for planar and axisymetric contact problems. *International Journal for Numerical Methodes in Engineering*, 1985, vol. 21, pp. 65-88.
- [77] **CHAUDHARY, BATHE, K.J.**, A solution method for static and dynamic analysis of three dimentional contact problems with friction. *Computers and Structures*, 1986, vol. 24 ,N° 6, pp. 855-873.
- [78] **CESCOTTO, S., ZHU, Y.Y.** Large strain dynamic analysis using solid and contact finite element based on a mixed formulation; application to metal forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 1994, vol. 45, pp. 657-663.
- [79] **CHANG, TY., SALEEB, A.F., SHYU, S.C.** Finite element solution of two dimentional contact problems based on a consistent mixed formulation. *Computers and Structures*, 1987, vol. 27, N° 4, pp. 455-466.
- [80] **SIMO, J.C., LAURSEN, T.A.** An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 1992, vol. 42, N° 1, pp. 97-116.
- [81] **KWAK, B.M.** Complementarity problem formulation of three dimentional frictional contact. . *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1991,vol.58, pp. 134-140.
- [82] **KIM, J.O., KWAK, B.M.** Dynamic analysis of two dimentional frictional contact by linear complementarity problem formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, vol. 33, N° 30, pp. 4605-4624.
- [83] **KWAK, B.M.** Nonlinear complementarity problem formulation of three dimensional frictional contact and its numerical implementations. *Computational Methods in Contact Mechanics III*, Madrid-Espagne, 1-3 juillet 1997. Edité par M.H. Aliabadi et A.Samartin. Southampton : *Computational Mechanics Publications*, 1997. pp. 159- 169.
- [84] **G. Kloosterman, A.H. Van Den Bogaard, and J. Huétink.** A variational regularisation approach to contact algorithms. In the 4<sup>th</sup> Iternational ESAFORM conference on MATERIAL FORMING, vol 1, pp. 195-198. *University of Liège, Belgium, April 23-25, 2001.*
- [85] **G. Kloosterman, R.M.J. Van Damme, A.H.Van Den Boogaard, and J. Huétink.** A geometrical-based contact algorithm using a barrier method. *International Journal for Numerical Methodes in Engineering*, 51(7): 865-882, 200.
- [86] **G. Zavarise, p. Wiggers, and B.A. Schrefler.** A methode for solving contact problems. *International Journal for Numerical Methodes in Engineering*, 42(3): 473-498, 1998.
- [87] **K.J. Bathe and P.A. Bozinov.** On the constraint function method for contact problems. *Computers and Structures*, 64(5-6): 1069-1085, 1997.
- [88] **P.W. Christensen, A.Klarbring, J.S.Pang, and N. Strömberg.** Formulation and comparison of algorithms for friction contact problems. *International Journal for Numerical Methodes in Engineering*, 42(1): 145-173, 1998.
- [89] **P.Papadopoulos and R.L.Taylor.** A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94: 373-389, 1992.



- [90] **T.Belytschko and M.O.Neal.** Contact-Impact by the piball algorithm with penalty and Lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31: 547-572, 1991.
- [91] **R.L.Taylor and P. Papadopoulos.** On a finite element method for dynamic contact /impact problems. *International Journal for Numerical Methodes in Engineering*, 36: 2123-2140, 1993.
- [92] **P. Papadopoulos and R.L.Taylor.** A simple algorithm for three dimensional finite element analysis of contact problems. *Computers and Structures*, 46: 1107-1118, 1993.
- [93] **HALLQUIST, J.O., GOUDREAU, J.L. BENSON, D.G.** Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, vol. 51, pp. 107-137.
- [94] **BELYTSCHNKO, T., NEAL, M.O.** Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol. 31, pp. 547-572.
- [95] **SCHWEIZERHOF, K., HALLQUIST, J.O.,** Explicit integration schems and contact formulation for thin metal forming. *FE-simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry, VDI Berichte 894, Zürich-switzerland, may 14-16-1991. Dusseldorf: VDI Verlag*, 1991. pp. 405-439.
- [96] **CHAMORET. D.** Modélisation du contact: Nouvelles approches numériques. Thèse de Doctorat, *Ecole Centrale de Lyon (MEGA)*, 2002.
- [97] **WRIGGERS, P., SIMO, J.C.** A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. *Communications in Applied Numerical methods*, 1985, vol. 1, pp. 199-203.
- [98] **SIMO, J.C., WRIGGERS, P; TAYLOR, R.L.** A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, vol. 50, pp. 163-185.
- [99] **PIETRZAK, G., CURNIER, A.** Continuum mechanics modeling and augmented lagrangian formulation of multibody, large formulation frictional contact problems. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30-1997. Edited by D. R.J. OWEN, E. ONAT and E. Hinton. Barcelona: CIMNE*, 1997. pp. 878-883.
- [100] **WALTER. H.** Modélisation 3D par éléments finis du contact avec frottement et de l'endommagement du béton : Application à l'étude de fixations ancrées dans une structure en béton. *Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, 1999.
- [101] **COOREVITS P,HILD P, AND J.P. PELLE.** (1999). Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral. *Revue Europ eenne des Elements finis*,8:7-29.
- [102] **Saouridis Ch,-** " Identification et numérisation objectives des comportements adoucissants : une approche multiéchelle de l'endommagement du béton".*Thèse de doctorat de l'Univ Paris 6* (1988).
- [103] **FREY P.J. & GEORGE P.-L.** (1999). Maillages : applications aux éléments finis. *HERMES Sciences Publications, Paris*.
- [104] **Davenne L, Saouridis Ch, Piau J.M -**" Un code de calcul pour la prévision du comportement des structures endommageables en béton, en béton armé ou en béton de fibres" *Ann. ITTBTP*, n°478. pp38-54 (1989)