

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Université A. Mira- Béjaia
Faculté des Sciences exactes
Département de Recherche Opérationnelle

MÉMOIRE DE MAGISTER

En

Mathématiques Appliquées

Option:

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème:

Stabilité forte dans les systèmes
d'attente avec arrivées par groupes

$$M^{Geo(X)}/G/1$$

Présenté par:

M^{elle} Houa CHIBOUT

Devant le jury composé de :

Président	Mohammed Said Radjef	Professeur	U. A / Mira Béjaïa
Rapporteur	Djamil Aïssani	Professeur	U. A / Mira Béjaïa
Co-Rapporteur	Louiza Bouallouche	Dr	U. A / Mira Béjaïa
Examinatrice	Natalia Djellab	M.C.	U. Annaba

Béjaia, Mai 2008

Remerciement

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mes directeurs de thèse M^r D. Aïssani et M^{me} L. Bouallouche pour l'intérêt porté à ce travail, leur disponibilité, leur patience, leurs conseils et leur soutien moral.

je remercie également M^r M. S. Radjef pour avoir accepté de présider le jury et M^{me}. N. Djellab pour avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier vivement tous les membre de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements.

je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus sincères à mes enseignants, le chef de département de recherche opérationnelle, tous mes collègues pour leurs aides et leurs soutiens et tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, notamment M^r Z. Mouhoubi.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes	6
1.1 Introduction	6
1.2 Systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes	7
1.3 Application pratique des systèmes d'attente avec arrivées par groupes	10
1.4 Modèle mathématique des systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes 14	
1.4.1 Le modèle $M^X/M/1$	14
1.4.2 Le modèle $M^X/G/1$	20
1.4.3 Le modèle $M^{Geo(X)}/G/1$	24
1.5 Conclusion	27
2 Approche de stabilité forte	28
2.1 Théorie de stabilité forte	28
2.1.1 Critère de stabilité forte	28
2.2 Inégalités de stabilité forte	32
2.3 Application aux systèmes de files d'attente	33
2.3.1 Stabilité forte dans un système $M^{Geo(X)}/M/1$	34
2.3.2 Inégalités de stabilité	34
2.4 Conclusion	35
3 Stabilité forte dans un système d'attente $M^{Geo(X)}/G/1$	36
3.1 Stabilité forte	36
3.2 Inégalités de Stabilité	41
3.2.1 Déviation de l'opérateur de transition	41
3.2.2 Estimation quantitatives	42
3.3 Conclusion	43

4	Algorithme et application numérique	44
	Introduction	44
4.1	Algorithme STR-STAB-VAC	45
4.2	Simulation	46
	4.2.1 Modèle de simulation	46
	4.2.2 Validation de la simulation	47
4.3	Application de l'algorithme "STR-STAB-GRP"	48
	4.3.1 Application de l'algorithme au système $M^X/M/1$	48
	4.3.2 Discussion des résultats	49
	4.3.3 Application de l'algorithme au cas $M^X/E_2/1$	50
	4.3.4 Discussion des résultats	52
4.4	Conclusion	53
	Conclusion générale	54
	Bibliographie	56

Introduction générale

Plusieurs modèles de files d'attente ont été étudiés depuis Erlang et plusieurs formules "élégantes" ont été élaborées et proposées comme étant des solutions analytiques de certains types de problèmes de files d'attente. Néanmoins, il arrive que la complexité de ces formules analytiques ne permet pas de les exploiter dans la pratique. C'est pour cette raison qu'il existe une technique qui consiste à remplacer, lors d'une étude pratique d'un système de files d'attente, les éléments stochastiques réels mais compliqués gouvernant les systèmes par d'autres plus simples. Ces derniers sont supposés être, dans un certain sens, proches des éléments réels. Le modèle de files d'attente ainsi construit, représente une idéalisation du système réel, d'où l'apparition du problème de stabilité.

Les premiers résultats sur la stabilité des systèmes de files d'attente ont été obtenus par H.J. Rossberg [87], B.V. Gnedenkov [53] et P. Franken [50]. Par la suite, sont apparus les travaux de D. Kennedy [66], A. Borovkov [19](méthode de renouvellement), D. Stoyan [92](méthode de convergence faible), V.V. Kalachikov et G.G. Tsitsiachvihi [61](méthode des fonction tests), N.V. Kartashov et D. Aïssani(méthode de stabilité forte), S.T. Rachev [86], Ipsen et Meyer [60] (méthode de stabilité uniforme).

Tous ces travaux ont considéré différentes positions et différentes approches du problème. Ainsi, un système peut être stable par rapport à une approche et ne pas l'être par rapport à une autre approche. Ces dernières années, les besoins de la pratique ont orienté les chercheurs vers l'obtention des estimations quantitatives et surtout vers la "mesure" de la performance des méthodes.

L'intérêt de la "méthode de stabilité forte" est qu'elle permet à la fois de réaliser une analyse qualitative et quantitative de certains systèmes complexes. Élaborée au début des années 80 par D. Aïssani et N.V. Kartashov, cette méthode, également connue sous le nom de la "méthode des opérateurs", permet de rechercher l'ergodicité et la stabilité des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des chaînes de Markov induites. À la différence des autres approches, les auteurs supposent que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir de meilleures approximations pour les distributions stationnaires perturbées. De même, la méthode permet d'obtenir les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

L'application de la méthode aux systèmes de files d'attente a fait l'objet d'un cycle de recherche ayant considéré la perturbation de différents paramètres (intensité de service [6],...). Par ailleurs, une première tentative de "mesurer" la performance de la méthode a été réalisée sur un système simple très utilisé en pratique (voir [22]).

Le problème de stabilité, dans la théorie des files d'attente concerne le "domaine" dans lequel le modèle de files d'attente idéal peut être appliqué comme une bonne approximation du système de files d'attente réel considéré.

Un système de files d'attente est dit stable, lorsqu'une petite perturbation dans ces paramètres (entrée) entraîne une petite perturbation dans ces caractéristiques. Ainsi, l'écart entre les caractéristiques correspondantes de deux systèmes de files d'attente stables, s'obtient en fonction de l'écart entre leurs paramètres.

La plupart des problèmes rencontrés dans la théorie des files d'attente supposent que les clients arrivent un par un. Cependant, dans plusieurs situations rencontrées en pratique, les clients arrivent en groupes de taille aléatoire. Ces situations peuvent être modélisées par des modèles d'attente avec arrivées par groupes. Ces derniers ont été largement étudiés pour la modélisation des performances de plusieurs systèmes réels tel que les systèmes informatiques, systèmes de télécommunications, systèmes de transport, systèmes de production,...

Le système $M^X/G/1$ a été étudié par plusieurs auteurs: Medhi [80], Scholl et Kleinrock [89], Bhat [16], Gross et Harris [54], Doshi [46], Choi et Parks [37] et Madan [78], [77].

Dans ce travail, nous étudions la stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov incluse dans un système $M^{Geo(X)}/G/1$ après perturbation de la loi de la taille des groupes. Nous montrons que sous certaines hypothèses, les caractéristiques correspondantes du système de files d'attente $M^X/G/1$ peuvent être approximées par les caractéristiques correspondantes du système $M^{Geo(X)}/G/1$. Où (la taille des groupes) a déjà été perturbé dans [23] lors de l'étude du système $M^X/M/1$. L'intérêt de notre travail porte sur le fait que nous étudions un modèle plus général, en considérant les temps de service général $M^{Geo(X)}/G/1$, ce qui a fait que la chaîne de Markov induite de ce système est plus complexe et l'étude de la stabilité forte de ce système plus difficile. Par ailleurs nous réalisons l'étude algorithmique et comparons les résultats obtenus à ceux de la simulation.

Ce mémoire comporte une introduction, quatre chapitres, une conclusion. Dans le premier chapitre, nous présentons une synthèse bibliographique sur les systèmes de files d'attente avec arrivées par groupe.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov par rapport à des normes données dans des espaces de mesures et de noyaux de transition. Nous nous intéressons ensuite à la méthode de la v -stabilité forte et son applicabilité aux systèmes de files d'attente.

Le troisième chapitre concerne l'étude de la v -stabilité forte de la chaîne de Markov induite du système $M^{Geo(X)}/G/1$. Nous obtenons ainsi les inégalités de stabilité forte après avoir cerné les conditions de proximité des caractéristiques du système $M^X/G/1$ par celles du système $M^{Geo(X)}/G/1$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude algorithmique et l'application numérique. Nous obtenons les conditions sous lesquelles les deux systèmes peuvent être approximés et nous comparons les résultats obtenus par la méthode de stabilité forte à ceux obtenus par simulation. Nous terminons ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Systemes de files d'attente avec arrivées par groupes

1.1 Introduction

Dans le cadre général, lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les clients arrivent un par un. Cependant dans plusieurs situations rencontrées dans la pratique, les clients arrivent en groupes de taille aléatoire. Ces situations sont représentées par des modèles d'attente avec arrivées par groupes. Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse bibliographique des résultats analytiques et des applications des systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes. Nous présentons ensuite quelques modèles mathématiques des systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes.

1.2 Systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes

Dans les problèmes d'attente, l'intérêt est centré autour du calcul des mesures de performances (temps d'attente, le nombre de clients dans le système). Plusieurs méthodes (analytiques et approximatives) ont été développées à ce sujet. La théorie des files d'attente avec arrivées par groupes prend en compte une spécificité rencontrée dans la pratique. C'est pourquoi elle a fait l'objet de nombreux travaux: [8], [36], [80], [96], [82], [54], ...

L'approximation simple de la probabilité du temps d'attente a été donnée par Eikeboom et Tijms [47] pour des cas particuliers de service exponentiel et déterministe. Dans [100], Van Ommeren a donné deux approximations de la distribution d'attente pour un client arbitraire dans le système $M^X/G/1$.

Van Ommeren [99] a étudié le système $GI^X/G/1$. Il a analysé la distribution du temps d'attente d'un client d'un groupe d'arrivées et il a montré sous des conditions appropriées que la distribution du temps d'attente d'un client est asymptotiquement une expansion exponentielle. Chaudhry et Gupta [32], ont donné une méthode approximative pour l'étude de la distribution du temps d'attente du premier client et d'un client arbitraire d'un groupe donné dans le système $M^X/G/1$. Dans [25], Chaudhry et Brière ont réalisé des calculs numériques pour obtenir la distribution du temps de service dans le système $M^X/G/1$.

Pour le calcul de la distribution du temps d'attente dans les systèmes avec arrivées par groupes, Baba [10] a fait une analyse analytique pour quelques caractéristiques de plusieurs files. Les méthodes exactes pour le calcul de la distribution du temps d'attente dans le système $M^X/G/1$ ont été discutées par Chaudhry et Templeton [35], Neuts [84] et Tijms [95].

Dans [51], Gaver, en utilisant la théorie de renouvellement, a donné la fonction génératrice pour la distribution limite du nombre de clients (dans le système) à un instant aléatoire du système $M^X/G/1$. Sahbazov a calculé la fonction génératrice du nombre de clients dans le système aux instants de départ et la distribution du temps d'attente d'un client quelconque en utilisant la technique de la chaîne de Markov induite.

Dans [34], Agarwal, Chaudhry et Gupta ont calculé la distribution limite du nombre de clients dans le système, pour des files d'attente $M^X/G/1$, avec une méthode basée sur les racines de l'équation caractéristique associé du modèle.

Le système $Geo^X/G/1$ a été étudié par beaucoup de chercheurs : Dafermos et Neuts [43], Kobayashi [71], Hunter [59], Bruneel et Kim [27], Takagi [93], Chaudhry [31], Tsuchiya et Takahashi [97] et Sanjay Bose [21].

Artalejo et Atencia [57], ont étudié le système $M^X/G/1$ avec rappels. Aïssani [3], a étudié le système $M^X/G/1$ avec rappels et serveur non fiable et avec vacances.

Le système $M^X/G_1, G_2/1$ a été étudié par Choudhury [41], Madan et Al.Masri [77], avec deux distributions de service différentes. Dans [72], Konstantin, Ayesta et Brown ont étudié le système $M^X/G/1$ avec processor sharing. Altioek [8], a étudié le modèle $M^X/G/1$ avec une discipline de service exhaustive.

Le modèle $M^X/G/1$ à capacité finie a été étudié par Tijms et Van Ommeren [96].

Dans l'article [67](2007), les auteurs ont considéré un système BMAP/PH/N/0 opérant dans un espace d'états finie. Les Disciplines d'admission partielles et admission complète sont analysées. Ils ont obtenu la distribution stationnaire du système et la probabilité de perte et quelques mesures de performances du système. Ils ont aussi obtenu la transformé de Laplace–Stieltjes de la distribution du temps de séjour des clients.

L'article [13](2006), considère un système avec arrivées par groupes Markoviennes à capacité finie. Les auteurs ont obtenu la distributions de la longueur de la file à un instant aléatoire et quelques mesures de performance. Ils ont aussi obtenu la transformée de Laplace–Stieltjes du temps d'attente du premier client et d'un client arbitraire. Dans [58], les auteurs ont introduit et analysé un modèle avec arrivées par groupes Markoviennes. Ils ont montré que sous certaines conditions, le processus induit aux instants de départ des clients est de type M/G/1 . Ils ont dérivé des expressions pour le calcul de la distribution du temps d'attente.

Dans [103], les auteurs ont développé un ensemble d'équations pour le système BMAP/G/1 et ils ont obtenu la fonction génératrice de la longueur de la file et en se basant sur la forme de la fonction génératrice, ils ont proposé une approche pour le calcul des mesures de performance du système BMAP/G/1 à temps discret.

Un intérêt majeur est porté à l'étude des modèles d'attente avec arrivées par groupes et avec vacances. Ces modèles ont été étudiés par Baba [11], Lee et Srinivasan [73], Lee et al [74, 75], Borthakur et Choudhury [20], Choudhury [39, 38], Madan et Al-Rawwah [78],

Chae et Lee [28], Medhi [81].

Thomo [94], a étudié le système $M^X/G/1$ à vacances multiples, Il a donné la fonction génératrice du nombre de clients dans le système juste après le départ d'un client et la transformée de Laplace du temps d'attente d'un client.

Choudhury [40], a analysé le système $M^X/G/1$ avec vacances multiples. Il a étudié le comportement de la distribution de la longueur de la file aux instants arbitraires et aux instants de départ des clients par une approche analytique. Il a obtenu la fonction génératrice de la longueur de la file aux instants de départ.

Aïssani [2] a étudié le système $M^X/G/1$ avec rappels et vacations exhaustives, Il a aussi considéré dans [3], le système $M^X/G/1$ avec rappels et serveurs sujets à des interruptions contrôlables (vacances) et des interruptions aléatoires (pannes). Dans [64], Kawasaki, Takagi, Hong et Hasegawa ont étudié le système $M^X/G/1$ avec priorité relative et priorité absolu, avec ou sans vacance, avec discipline de service aléatoire. Armero et Conesa (1998) ont fait une analyse statistique pour l'étude des mesures de performances du système $M^X/M/1$ par l'approche Bayésienne. Le point essentiel est dans la prédiction des mesures usuelles des performances du système à l'équilibre (exp: la distribution predictive à posteriori du nombre de clients dans le système, la distribution à posteriori du temps d'attente dans la file et dans le système, du premier client d'un groupe d'arrivées, ...). Ils ont illustré leurs procédures de calcul par la loi géométrique de la taille des groupes.

Pour l'étude du système $MMCPP/GE/c/L$ avec arrivées par groupes, Chakka et Harrison (2001) dans [30], se sont basés sur le fait que la distribution de la taille des groupes soit géométrique. Ils ont donné des solutions efficaces de la distribution stationnaire .

Dans [85], Tijms et Nobel (1999) ont fait un contrôle optimal du système $M^X/G/1$ avec deux modes de service. Ils ont donné des résultats numériques dans les deux cas : taille des groupes constante et géométriquement distribuée.

Dans [79](2003) Masuyama et al, ont analysé et calculé la distribution de la longueur de la file d'un système d'attente à un serveur et multiples arrivées de groupes Markovien. Leurs exemples numériques sont illustrés par une distribution géométrique de la taille des groupes.

1.3 Application pratique des systèmes d'attente avec arrivées par groupes

Les systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes ont été largement appliqués pour la modélisation des performances de plusieurs situations rencontrées en pratique où les clients arrivent en groupes de taille aléatoire, tels que les systèmes informatiques, les réseaux de communication, les systèmes de production, les systèmes de transport (trafic maritime et aérien, ...).

Beaucoup de chercheurs ont modélisé à l'aide des processus d'arrivées par groupes Markoviens: BMAP (Batch Markovian Arrival Process) des systèmes réels par une file d'attente BMAP/G/1 à capacité finie ou infinie où les requêtes arrivent en groupes dans le but d'évaluer :

- Loi du nombre de clients en attente,
- Loi du temps d'attente,
- La probabilité de perte dans le cas d'une capacité finie.

Les processus BMAP continus ont été introduit par Lucantoni [76](1991). La version discrète de ce type de processus noté D-BMAP était proposé par Blondia et Casals [17](1992) et ont reçu une très grande attention. Les processus D-BMAP appartiennent à la classe des processus Markoviens additifs. Ils possèdent de bonnes propriétés.

L'application des processus avec arrivées par groupes est très large dans le domaine des télécommunications. Prenons par exemple les réseaux IP, où les fonctions principales des routeurs consistent à envoyer les paquets aussi vite que possible ainsi que construire et échanger les informations de routage avec ses voisins. Les routeurs d'accès se chargent des fonctions de contrôle d'intégrité et d'admission des paquets dans le réseau.

Le réseau IP, accepte tout le trafic. Il fonctionne en mode datagramme. Le trafic consiste en une des entités discrètes (les paquets) produites par chaque source. Les processus d'arrivées, généralement utilisés dans ce contexte pour modéliser le trafic, sont des processus d'arrivées par groupes Markoviens : BMAP (Batch Markovian Arrival Process).

Donnons à présent quelques travaux où les phénomènes pratiques ont été modélisés par des systèmes d'attente avec arrivées par groupes avec une distribution générale de la taille des groupes.

Dans [29] Chakka (2002), a utilisé un système avec arrivées par groupes pour modéliser un routeur et il a donné un calcul efficace des mesures de performances (ex: taille moyenne de la file, nombre moyen de clients dans le système, ...) pour les noeuds opérationnels dans les réseaux MPLS.

Dans [18], Bonald et Roberts (2003) ont analysé les performances du système de transmission du trafic internet (les pages Web, MP3, e-mails, ...) avec la taille des groupes géométrique.

L'application au réseau ATM a été faite par : He et Sohraby (2001) dans [56] pour la modélisation du ATM multiplexeur (système à temps discret) par un modèle avec arrivées par groupes $G^X/D/m$. Quand à Chaudhry et Gupta (2001) dans [33], ils ont appliqué le modèle $GI^X/G/1$ dans les systèmes de télécommunication modernes basés sur ATM et B-ISDN.

La modélisation des systèmes à capacité finie a été élaborée par Tijms et Van Ommeren dans [36](1989) , pour analyser le comportement d'un buffer d'un système de communication informatique par $M^X/G/1$ à capacité finie.

Une application dans les systèmes de traitement parallèle centralisé a été faite par Nelson et al, pour analyser ces performances par un modèle d'attente $M^X/M/c$. Quant à Zhao et Compbell (1996), ils ont modélisé et analysé les performances du système de transmission par satellite par un modèle d'attente $D^X/D^m/1$.

Balay et Nilsson dans [12] (1995) ont modélisé le trafic d'un nœud ATM par un processus de Bernoulli avec arrivées par groupes. Ils ont proposé une méthode exact pour l'obtention des mesures de performances.

Klemm, Lindmann et Lohman dans [69] proposent une approche de modélisation d'un trafic UMTS (Universal Mobile Telecommunication system). Elle se base sur les mesures du trafic IP. L'idée clé était d'utiliser les processus des arrivées par groupes Markoviennes (BMAP) pour les différentes tailles des paquets IP. Dans [70](2003), ils ont introduit une méthode efficace pour estimer les paramètres du BMAP avec l'algorithme EM (Expansion Maximisation), et pour démontrer l'avantage des BMAPs, il ont fait une étude comparative avec les processus de Poisson.

Dans l'application de Van der Mai (2000), le serveur représente le serveur Web, les clients représentent les fichiers de demandes individuellement, et chaque fichier de demande est représenté par un groupe de clients.

Bruneel[26] (1993) a considéré un processus avec un seul serveur et de capacité infinie avec arrivées par groupes. La distribution du nombre de clients à chaque arrivées, ainsi que le temps de service de chaque client est une loi générale en utilisant la chaîne de Markov induite à deux dimensions. Les résultats de cet analyse inclus la fonction génératrice du nombre de clients dans le système à un instant quelconque, le temps d'attente des clients. Les résultats de cette analyse ont été appliqués au phénomène d'attente dans les systèmes de communication.

L'article [83] a étudié l'application des processus des arrivées par groupes dans le serveur Web. Les auteurs ont considéré une file d'attente à infinité de serveurs où les clients arrivent en groupes selon un processus de Markov. Les clients commence leurs services immédiatement après leurs arrivées. Ils ont donné la fonction génératrice du nombre de clients dans chaque nœud et le nombre de transitions dans le nœud. En utilisant la loi de Little, ils ont établi les performances du système, illustrés par un exemple numérique appliqué à un serveur Web.

Dans [107](1998), Nui et Takahashi ont modélisé le trafic IP pour le réseau ATM où les paquets IP arrivent en groupes par un système de files d'attente à capacité finie BMAP/G/1/k avec vacances, en utilisant la technique des variables supplémentaires. Ils ont exprimé la probabilité de perte des paquets, le délai moyen des paquets IP, taux d'utilisation des serveur,

L'article [105] (2003) développe un modèle d'attente à capacité finie et avec vacances dont les arrivées sont Markoviennes et en groupes (BMAP/G/1/k) pour modéliser un schéma ARQ (Automatic Repeat Request). Des résultats analytiques sont obtenus pour le calcul de la distribution de la longueur de la file, le temps d'attente et le taux d'utilisation d'un transmetteur pour toutes les stratégies ARQ. L'exemple numérique montre que la distribution de la taille des groupes est un facteur critique sur l'influence des performances du système.

Dans [101] (2000), Vomefeld dans traite la programmation des paquets dans les réseaux cellulaires sans fil SDMA. En se basant sur les processus de Markov avec arrivées par

groupes (BMAP). Pour dériver les mesures de performance, le multiplexeur est modélisé par un système de files d'attente BMAP/D/1.

L'article [102] (2004) propose un modèle de files d'attente D-BMAP/D/1/k pour modéliser un routeur avec un schéma de contrôle de congestion (RED) dont le flot d'arrivées des paquets est un (D-BMAP). Des formules analytiques sont dérivées pour explorer la distribution de la période de congestion et la période de non congestion en plus de la distribution du nombre de paquets perdus pendant la période de congestion.

Slosiar [90](1994) a présenté des résultats en rapport avec les performances exactes d'un multiplexeur ATM en utilisant l'approche de la matrice analytique où le trafic global est modélisé avec (D-BMAP). Les expressions des deux premiers moments ont été obtenues. Cependant, les mesures de performance pour le délai d'exécution et ses variations ne sont pas exprimées en fonction directe des paramètres de la source. Dans l'article [91], Slosiar a calculé les deux premiers moments de la distribution du nombre de cellules attendant dans le système, qui ont un impact direct sur la cellule bout en bout et sa variation pour un multiplexeur ATM en fonction des paramètres de la source et des probabilités limites.

Fonseca et Silvester [49](1995) ont modélisé le processus de sortie des commutateurs dans les nœuds ATM, par un système avec arrivées par groupes à temps discret (D-BMAP) et avec priorité (D-BMAP^[H,L]/D/1/K), où les arrivées sont classées selon l'ordre de priorité en deux classes: Ils ont introduit une procédure pour estimer la probabilité qu'une cellule appartienne à une classe de priorité.

Dans l'article [9] (2004), Trinh et Molnar ont utilisé les processus (D-BAMP) pour modéliser le trafic généré par la connection TCP. Ils ont présenté un nouveau concept, à savoir la matrice caractéristique pour la connection TCP, qui caractérise les probabilités de transition entre les états de TCP. Ils ont développé une technique pour le calcul de la distribution du temps de séjour dans un état quelconque. Le modèle a été validé par la simulation et l'analyse numérique.

Dans [106](2002) Zhao, Kok et Ishfaq, ont présenté la modélisation d'un transmetteur vidéo 3G. Les arrivées sont modélisées par un D-BMAP avec priorité. Le modèle d'attente avec priorité (D-BMAP/PH/1) est formulé pour la modélisation des transmissions vidéo. Les résultats de la simulation montrent qu'une meilleure qualité de service (QoS) peut être atteinte pour une requête de priorité élevée.

1.4 Modèle mathématique des systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes

1.4.1 Le modèle $M^X/M/1$

Le modèle $M^X/M/1$ a été étudié par plusieurs auteurs, Gross et Haris [54], Bose [21], Kleinrock [68], Gelenbe et Pujolle [52]. Ce modèle peut être décrit de la manière suivante:

Les clients arrivent en groupes de taille aléatoire C , selon un processus de Poisson de paramètre λ où: $P\{C = n\} = c_n$, et ils sont servis individuellement, les durées des services étant indépendantes et distribuées suivant une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

Soit la fonction génératrice de la taille des groupes, $C(z)$ définie comme suit :

$$C(z) = E(z^C) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \quad (|z| \leq 1).$$

Soit : A_i : le nombre de clients qui arrivent à l'instant t_i .

$$P(A_i = k) = c_k.$$

$$\text{On a } P(A_1 + A_2 + \dots + A_k = n) = \underbrace{c_n \otimes c_n \otimes \dots \otimes c_n}_{k\text{-produit de convolution}} = C_n^{(k)}$$

où $\{C_n^{(k)}\}$ est le k-produit de convolution de c_n ,

$$\text{tel que: } C_n^{(1)} = P(A_i = n) = c_n. \quad \text{et} \quad C_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

$$P_r\{n \text{ clients arrivent dans } (0,t)\} = p_n(t),$$

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_1 + A_2 + \dots + A_k = n) P(k \text{ arrivées } (0,t)),$$

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} C_n^{(k)}. \quad (n \geq 0).$$

Considérons les points de régénération suivants :

- L'instant de départ d'un client.
- Fin d'une période d'inoccupation.

La variable aléatoire X_n représentant le nombre de clients dans le système immédiatement après le $n^{\text{ième}}$ point de régénération est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus B_{n+1} " le nombre de clients qui arrivent pendant le temps du $(n + 1)^{\text{ième}}$ service". Les variables aléatoires B_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$k_n = P_r\{n \text{ arrivées durant la période de service}\}$$

Alors

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + B_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1, \\ C & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que X_{n+1} ne dépend que de X_n et de B_{n+1} et non des valeurs prises par X_{n-1} , X_{n-2} , \dots . Ceci signifie que la suite $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ ainsi définie est une chaîne de Markov induite du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Calculons maintenant k_n :

$$k_n = P_r\{ n \text{ arrivées durant la période de service } \},$$

$$\begin{aligned}
 k_n &= \int_0^\infty p_n(t) dB(t) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} C_n^{(k)} \mu e^{-\mu t} dt, \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \int_0^\infty \frac{\lambda^k \mu t^k e^{-t(\lambda+\mu)}}{k!} dt, \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \frac{\lambda^k \mu}{(\lambda + \mu)^{k+1}} \int_0^\infty \frac{(\lambda + \mu)^{k+1} t^k e^{-t(\lambda+\mu)}}{k!} dt, \\
 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \frac{\lambda^k}{(\lambda + \mu)^k}, \\
 k_n &= \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ sont données par :

$$P(X_{n+1} = j / \setminus X_n = i) = P(B = j - i + 1) = k_{j-i+1},$$

$$p_{ij} = \begin{cases} c_j & \text{si } j \geq 1 \text{ } i = 0, \\ k_{j+1-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et la matrice des probabilités de transition prend la forme suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ 1 & k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ 2 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}$$

Remarque 1.1. D'après la matrice de transition, la chaîne de Markov X_n est irréductible et apériodique. On peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si $\rho' < 1$.

La quantité ρ' est l'intensité du trafic. C'est le nombre moyen d'arrivées par durée moyenne de service.

$$\begin{aligned} \rho' = E(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} n k_n . \\ \sum_{n=1}^{\infty} n k_n &= \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}} \sum_{n=k}^{\infty} n C_n^{(k)}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}} k E(C), \\ &= E(C) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right), \\ &= E(C) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \times \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \\ \rho' &= \frac{\lambda}{\mu} E(C). \end{aligned}$$

Régime stationnaire

Supposons que $\rho' < 1$ et soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ la distribution stationnaire de la chaîne de Markov $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ où

$$\pi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{X_k = n\}.$$

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution π elle-même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi(z)$. Ceci en utilisant la définition de la distribution de probabilité discrète stationnaire par rapport à une matrice stochastique \mathbb{P} : $\pi \mathbb{P} = \pi$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \pi_i = \pi_j, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \pi_i, \\ \pi_j &= \pi_0 c_j + \sum_{i=1}^{j+1} k_{j-i+1} \pi_i. \quad (c_0 = 0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

En multipliant l'expression (1.15) par z^j et en sommant sur j , on trouve :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 c_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} k_{j-i+1} \pi_i z^j. \quad (1.2)$$

Si $\prod(z)$ et $K(z)$ sont définis telle que :

$$\prod(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

et

$$K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j.$$

Alors, de l'équation (1.2), on a :

$$\begin{aligned} \prod(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 c_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} k_{j-i+1} \pi_i z^j, \\ &= \pi_0 C(z) + \frac{K(z)}{z} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z^i, \\ &= \pi_0 C(z) + \frac{K(z)}{z} [\prod(z) - \pi_0]. \end{aligned}$$

D'où

$$\prod(z) = \frac{\pi_0 [K(z) - z C(z)]}{K(z) - z}.$$

Calcul de π_0 :

On a :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + B_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1, \\ C & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

De la relation :

$$X_{n+1} = X_n + B_{n+1} - \delta_n, \quad \text{avec} \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \geq 1, \\ B_{n+1} - C & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

On tire puisqu'on se trouve en régime stationnaire :

$$\rho' = E(B_{n+1}) = E(\delta_n) = 1 \times P(X_n \geq 1) + E(B_{n+1} - C) \times P(X_n = 0),$$

$$\rho' = 1 - P(X_n = 0) + [E(B_{n+1}) - E(C)] P(X_n = 0),$$

$$\rho' = 1 - \pi_0 + [\rho' - E(C)] \pi_0.$$

D'où

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho'}{1 - \rho' + E(C)}.$$

Calculons maintenant $K(z)$:

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j C_j^{(k)} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}} z^j, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} C_j^{(k)} z^j \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [C(z)]^k \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}, \\ &= \frac{\mu}{(\lambda + \mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda C(z)}{(\lambda + \mu)} \right]^k. \end{aligned}$$

$$K(z) = \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda C(z)}.$$

Les résultats obtenus pour la chaîne de Markov induite ne sont pas directement applicables au processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ à temps général.

Soit :

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = n\}$$

et

$$\pi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{X_k = n\}.$$

En faisant appel à quelques résultats des processus stochastiques semi Markovien pour le calcul de p_n , on obtient :

$$p_n = \left[\frac{\pi_0}{\lambda} + \frac{1 - \pi_0}{\mu} \right] \sum_{i=1}^n \pi_i \sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^{(k)} \frac{\lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}.$$

1.4.2 Le modèle $M^X/G/1$

Le système $M^X/G/1$ peut être décrit de la manière suivante:

Les clients arrivent en groupes de taille aléatoire C , selon un processus de Poisson de paramètre λ où: $P\{C = j\} = c_j$, et ils sont servis individuellement, les durées des services étant indépendantes et distribuées suivant une loi générale.

Soit la fonction génératrice de la taille des groupes, $C(z)$ définit comme suit :

$$C(z) = E(z^c) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j. \quad .$$

Soit : La probabilité pour que le nombre de clients qui arrivent dans un intervalle de longueur t soit égal à i est donné par:

$$a_i(t) = p_n(t) = \sum_{n=0}^i e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} C_i^{(n)}. \quad (i \geq 0).$$

où $\{C_i^{(n)}\}$ est le n-produit de convolution de c_i ,

$$C_i^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Le temps de service t_k du $k^{\text{ème}}$ départ des clients est conditionnée par le nombre de clients dans la file.

Les temps de service des clients qui débutent leurs services avec le même nombre n de clients dans le système sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués avec:

$$B_{T_n}(t) = Pr(T_n \leq t).$$

$\psi_n(z)$: dénote la transformée de Laplace-Stieltjes de la distribution du $n^{\text{ème}}$ temps de service:

$$\psi_n(z) = \int_0^\infty e^{-st} dB_{T_n}(t).$$

Le processus de départ de ce système:

$\{X_n, n = 1, 2, \dots / X_n = \text{nombre de clients dans le système immédiatement après le service du } n^{\text{ème}} \text{ client}\}$ est une chaîne de Markov, c'est-à-dire une chaîne de Markov induite. La matrice de probabilité de transition prend la forme suivante:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline 0 & k_{00} & k_{10} & k_{20} & k_{30} & \dots \\ 1 & k_{01} & k_{11} & k_{21} & k_{30} & \dots \\ 2 & 0 & k_{02} & k_{12} & k_{22} & \dots \\ 3 & 0 & 0 & k_{03} & k_{13} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{04} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{array}$$

tel que pour $s > 0$

$$\begin{aligned}
 k_{rs} &= Pr\{r \text{ arrivées pendant la période de} \\
 &\quad \text{services} \setminus \text{il y a } s \text{ client dans le système quand le service a débuté}\} \\
 &= \int_0^\infty a_r(t) dB_{T_s}(t) \\
 &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^r \frac{e^{(-\lambda t)^n}}{n!} c_r^{(n)} dB_{T_s}(t)
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$P_{0r} = k_{r0} = \sum_{n=1}^{r+1} c_n k_{r-n+1, n}$$

On voit clairement que pour $i > 0$

$$p_{ij} = \begin{cases} k_{j-i+1, i} & \text{si } j \geq i - 1 \\ 0 & \text{si } j < i - 1. \end{cases}$$

Cette chaîne est ergodique. Elle admet une distribution stationnaire si

$$\limsup_{j \geq 0} \{\rho'_j \equiv \sum_{i=1}^{\infty} i k_{ij}\} < 1.$$

pour $j > 0$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\infty} i k_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty \sum_{n=0}^i e^{(-\lambda t)^n} \frac{(\lambda t)^n}{n!} [i c_i^{(n)}] dB_{T_j}(t) \\
 &= \int_0^\infty e^{(-\lambda t)^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} E[C^{(n)}] dB_{T_j}(t) \\
 &= \lambda E[C] \int_0^\infty t dB_{T_j}(t) \\
 &= \lambda E[C] E[T_j],
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \rho'_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} i k_{i0} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{i+1} i c_n k_{i-n+1, n} \\
 &= E(C) - 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \rho'_i < \infty
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Cette condition suffisante est équivalente à

$$\limsup_{j>0} \{\rho'_j = \lambda E[C] E[T_j]\} < 1 \quad (1.6)$$

Si la distribution stationnaire $\{\pi_i\}$ de la chaîne existe, alors elle est solution du système

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \pi_i = \pi_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1.$$

De la matrice de transition

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \pi_i = k_{j0} \pi_0 + \sum_{i=1}^{j+1} k_{j-i+1,i} \pi_i. \quad (1.7)$$

En multipliant l'expression par z^j et sommant sur j , on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} k_{j0} \pi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} k_{j-i+1,i} \pi_i z^j. \quad (1.8)$$

Si les fonctions génératrices sont définies telle que:

$$\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

et

$$K_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_{ji} z^j.$$

Alors, on a :

$$\Pi(z) = \pi_0 k_0(z) + (1/z)[\pi_1 z K_1(z) + \pi_2 z^2 K_2(z) + \pi_3 z^3 K_3(z) + \dots]$$

On note pour $i > 0$

$$\begin{aligned} K_i(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^j e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} C_j^{(n)} dB_{T_i}(t) z^j \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} [C(z)]^{(n)} dB_{T_i}(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{(-\lambda t + \lambda t C(z))} dB_{T_i}(t) \\ &= \psi_i(\lambda - \lambda C(z)) \quad . \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.4.3 Le modèle $M^{Geo(X)}/G/1$

Le système $M^{Geo(X)}/G/1$ peut être décrit de la manière suivante:

Les clients arrivent en groupes de taille aléatoire \tilde{C} , selon un processus de Poisson de paramètre λ où: $P\{\tilde{C} = j\} = \tilde{c}_j$, et ils sont servis individuellement, les durées des services étant indépendantes et distribuées suivant une loi générale.

Soit la fonction génératrice de la taille des groupes, $\tilde{C}(z)$ défini comme suit :

$$\tilde{C}(z) = E(z^c) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j z^j. \quad .$$

Soit la probabilité pour que le nombre de clients qui arrivent dans un intervalle de longueur t soit égal à i est donnée par:

$$\tilde{a}_i(t) = p_n(t) = \sum_{n=0}^i e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tilde{C}_i^{(n)}. \quad (i \geq 0).$$

où $\{\tilde{C}_i^{(n)}\}$ est le n -produit de convolution de \tilde{c}_i ,

$$\tilde{C}_i^{(0)} = \begin{cases} 1 & si \quad i = 0, \\ 0 & si \quad i > 0. \end{cases}$$

Le temps de service t_k du $k^{\text{ème}}$ départ des client est conditionnée par le nombre de clients dans la file.

Les temps de service des clients qui débutent leurs services avec le même nombre n de clients dans le système sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec: $\tilde{B}_{T_n}(t) = Pr(T_n \leq t)$.

$\tilde{\psi}_n(z)$: dénote la transformée de Laplace-Stieltjes de la distribution du $n^{\text{ème}}$ temps de service:

$$\tilde{\psi}_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\tilde{B}_{T_n}(t).$$

Le processus de départ de ce système, $\{\tilde{X}_n, n = 1, 2, \dots | \tilde{X}_n = \text{nombre de clients dans le système immédiatement après le service du } n^{\text{ème}} \text{ client}\}$, est une chaîne de Markov, c'est-à-dire une chaîne de Markov induite. La matrice de probabilité de transition prend

la forme suivante:

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \hline 0 & \tilde{k}_{00} & \tilde{k}_{10} & \tilde{k}_{20} & \tilde{k}_{30} & \cdots \\ 1 & \tilde{k}_{01} & \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{31} & \cdots \\ 2 & 0 & \tilde{k}_{02} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{22} & \cdots \\ 3 & 0 & 0 & \tilde{k}_{03} & \tilde{k}_{13} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{k}_{04} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{array}$$

tel que pour $s > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{rs} &= Pr\{r \text{ arrivées pendant la période de} \\ &\quad \text{services} \setminus \text{il y 'a } s \text{ clients dans le système quand le service a débuté}\} \\ &= \int_0^\infty \tilde{a}_r(t) d\tilde{B}_{T_s}(t) \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^r \frac{e^{(-\lambda t)^n}}{n!} \tilde{c}_r^{(n)} d\tilde{B}_{T_s}(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

et

$$\tilde{P}_{0r} = \tilde{k}_{r0} = \sum_{n=1}^{r+1} \tilde{c}_n \tilde{k}_{r-n+1,n}$$

On voit clairement que pour $i > 0$

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} \tilde{k}_{j-i+1,i} & \text{si } j \geq i - 1 \\ 0 & \text{si } j < i - 1. \end{cases}$$

Cette chaîne est ergodique, le processus admet une distribution stationnaire si $\tilde{\rho}' < 1$ pour $j > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} i \tilde{k}_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty \sum_{n=0}^i e^{(-\lambda t)^n} \frac{(\lambda t)^n}{n!} [i \tilde{c}_i^{(n)}] d\tilde{B}_{T_j}(t) \\ &= \int_0^\infty e^{(-\lambda t)^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} E[\tilde{C}^{(n)}] d\tilde{B}_{T_j}(t) \\ &= \lambda E[\tilde{C}] \int_0^\infty t d\tilde{B}_{T_j}(t) \\ &= \lambda E[\tilde{C}] E[T_j], \end{aligned} \quad (1.11)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}'_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} i k_{i0} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{i+1} i \tilde{c}_n \tilde{k}_{i-n+1,n} \\
&= E(\tilde{C}) - 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{c}_i \tilde{\rho}'_i < \infty
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Cette condition suffisante est équivalente à

$$\limsup_{j>0} \{\tilde{\rho}'_j = \lambda E[\tilde{C}] E[T_j]\} < 1 \tag{1.13}$$

Si la distribution stationnaire $\{\tilde{\pi}_i\}$ de la chaîne existe, alors elle est solution du système

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} \tilde{\pi}_i = \tilde{\pi}_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\pi}_i = 1.$$

De la matrice de transition

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} \tilde{\pi}_i = \tilde{k}_{j0} \tilde{\pi}_0 + \sum_{i=1}^{j+1} \tilde{k}_{j-i+1,i} \tilde{\pi}_i. \tag{1.14}$$

En multipliant l'expression par z^j et en sommant sur j , on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\pi}_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{k}_{j0} \tilde{\pi}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \tilde{k}_{j-i+1,i} \tilde{\pi}_i z^j. \tag{1.15}$$

Si les fonctions génératrices sont définies telle que:

$$\tilde{\Pi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\pi}_j z^j$$

et

$$\tilde{k}_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{k}_{ji} z^j. \tag{1.16}$$

Alors, on a:

$$\tilde{\Pi}(z) = \tilde{\pi}_0 \tilde{K}_0(z) + (1/z) [\tilde{\pi}_1 z \tilde{K}_1(z) + \tilde{\pi}_2 z^2 \tilde{K}_2(z) + \tilde{\pi}_3 z^3 \tilde{K}_3(z) + \dots]$$

On note pour $i > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_i(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^j e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tilde{C}_j^{(n)} dB_{T_i}(t) z^j \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} [\tilde{C}(z)]^{(n)} dB_{T_i}(t) \\
&= \int_0^{\infty} e^{(-\lambda t + \lambda t \tilde{C}(z))} dB_{T_i}(t) \\
&= \psi_i(\lambda - \lambda \tilde{C}(z)) \quad .
\end{aligned} \tag{1.17}$$

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synthèse des résultats analytiques sur les systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes, ainsi qu'une synthèse sur les applications possibles. Lors de l'étude de ces systèmes, on a constaté les difficultés de leurs analyses. Même dans le cas où des solutions analytiques existent, leurs exploitations restent difficile et nécessitent souvent des méthodes numériques laborieuses. C'est pour cette raison qu'on a recours à une autre approche d'analyse des systèmes de files d'attente. Cette dernière consiste à les approximer par des systèmes plus simples et pour lesquels plusieurs résultats exploitables sont disponibles.

Parmi les principales approches développées dans ce but, on trouve la méthode de stabilité forte, qui conduit à des estimations quantitatives des caractéristiques du système étudié. La présentation de cette approche fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 2

Approche de stabilité forte

Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov, suivant des normes données dans les espaces de mesures et des noyaux de transition. Ensuite, nous nous intéressons au cas particulier de la stabilité forte suivant une classe spéciale de normes définies par des fonctions v mesurables et bornées (pas nécessairement finies), et nous énoncerons certaines conditions nécessaires et suffisantes pour la v -stabilité forte.

2.1 Théorie de stabilité forte

2.1.1 Critère de stabilité forte

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$, une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace mesurable \mathbf{E} , muni d'une σ -algèbre \mathcal{E} dénombrablement engendrée, donnée par un noyau de transition régulier $\mathbf{P}(x, A)$, $x \in \mathbf{E}$, $A \in \mathcal{E}$ et admettant une probabilité invariante unique π .

Notons $m\mathcal{E}$ ($m\mathcal{E}^+$) l'espace des mesures finies (non négatives) sur \mathbf{E} , $f\mathcal{E}$ ($f\mathcal{E}^+$) l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives) sur \mathbf{E} . On munit l'espace $m\mathcal{E}$ d'une norme $\|\cdot\|$ et l'espace de Banach $\mathcal{M} = \{\mu \in m\mathcal{E} : \|\mu\| < \infty\}$ de norme $\|\cdot\|$ compatible

avec l'ordre structurel dans $m \mathcal{E}$, c'est à dire :

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\| \quad \text{pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \text{pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+, \quad i = 1, 2 \quad \text{et } \mu_1 \perp \mu_2. \quad (2.2)$$

$$|\mu|(\mathbf{E}) \leq k \|\mu\| \quad \text{pour } \mu \in \mathcal{M}. \quad (2.3)$$

où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ , k est une constante positive finie et $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\mathcal{E}^+)$.

Ces trois conditions (2.1), (2.2), (2.3) sont particulièrement satisfaites pour des normes de la forme suivante :

$$\|\mu\|_v = \int_{\mathbf{E}} v(x) |\mu|(dx), \quad (2.4)$$

où v est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive, (pas nécessairement finie) sur \mathbf{E} .

On associe à chaque noyau de transition $\mathbf{P}(x, A)$, les applications linéaires $\mathcal{L}_{\mathbf{P}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{P}}^* : f\mathcal{E} \rightarrow f\mathcal{E}$, dont les valeurs pour $\mu \in \mathcal{M}$ et $f \in f\mathcal{E}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{P}(A) &= \mathcal{L}_{\mathbf{P}}(\mu)(A) = \int_{\mathbf{E}} \mu(dx) \mathbf{P}(x, A), \quad \forall A \in \mathcal{E}, \\ \mathbf{P}f(x) &= \mathcal{L}_{\mathbf{P}}^*(f)(x) = \int_{\mathbf{E}} \mathbf{P}(x, dy) f(y), \quad \forall x \in \mathbf{E}. \end{aligned}$$

On définit le produit μf comme suit:

$$\mu f = \int_E \mu(dx) f(x)$$

Les normes induites sur $f\mathcal{E}$ et \mathcal{M} , sont données par :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}\| &= \sup_{x \in \mathbf{E}} (v(x))^{-1} \int_{\mathbf{E}} |\mathbf{P}(x, dy)| v(y), \\ \|f\| &= \sup_{x \in \mathbf{E}} (v(x))^{-1} |f(x)|. \end{aligned}$$

On suppose que l'opérateur $\mathbf{P} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, correspondant au noyau de transition de la chaîne X , est borné, i.e :

$$\mathcal{M}\mathbf{P} \subset \mathcal{M}, \quad \|\mathbf{P}\| < \infty. \quad (2.5)$$

Notons par $\Pi = \mathbb{I} \circ \pi$ le projecteur stationnaire du noyau \mathbf{P} , où \mathbb{I} est la fonction identiquement égale à 1, et \mathbf{I} l'opérateur identité sur \mathcal{M}

Remarque 2.1. De la condition (2.3), on a bien :

$$|\mu \mathbb{I}| = |\mu(\mathbf{E})| \leq k \|\mu\|, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}$$

d'où $\mathbb{I} \leq k < \infty$

Notons enfin $\mathbf{P}^t = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{P}^s$, $t \geq 1$ l'opérateur de Césaro.

Dans notre travail, l'espace des états \mathbf{E} est discret (\mathbb{N}), alors introduisons les notations suivantes :

Soit $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ l'espace des mesures finies sur \mathbb{N} et $\eta = \{f(i)\}$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur \mathbb{N} .

Le noyau de transition $P = (p_{ij})_{i,j}$ donne une application linéaire:

$$p_{ij} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

$$\mu \rightarrow (\mu P)_k(j) = \sum_{i \geq 0} \mu_i p_{ik}(j).$$

Le symbole Pf , pour $f \in \eta$ désignera la fonction

$$Pf(k) = \sum_{i \geq 0} f(i) p_{ki}. \quad (2.6)$$

et l'action de la mesure μ sur la fonction f sera notée par μf , qui vaut $\sum_{j \geq 0} \mu_j f(j)$

On introduit sur \mathcal{M} une classe spéciale de norme:

$$\|\mu\|_v = \sum_{j \geq 0} v(j) |\mu_j|. \quad (2.7)$$

vérifiant les propriétés (2.1), (2.2) et (2.3) introduites précédemment dans le chapitre 2, et v est une fonction mesurable, bornée inférieurement par une constante strictement positive (pas nécessairement finie).

Cette norme induit dans l'espace η la norme

$$\|f\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{f(k)}{v(k)}. \quad (2.8)$$

Considérons enfin l'espace \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |p_{kj}|. \quad (2.9)$$

Définition 2.1. La chaîne de Markov X est uniformément ergodique par rapport à une norme $\|\cdot\|$, si elle possède une unique mesure invariante Π et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{P}^{(t)} - \Pi\| = 0.$$

Définition 2.2. On dit que la chaîne de Markov X est fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si chaque noyau stochastique \mathbf{Q} dans un certain voisinage $\{\mathbf{Q} : \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\| < \epsilon\}$ admet une probabilité stationnaire unique ν et :

$$\|\nu - \pi\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\| \longrightarrow 0.$$

Théorème 2.1 (Kartashov, Aissani). *La chaîne de Markov X est fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.*

Remarque 2.2. Une chaîne de Markov peut être fortement stable (uniformément ergodique) par rapport à une norme donnée et ne pas l'être pour une autre (si ces normes ne sont pas équivalentes). Du théorème 2.1, il apparaît clairement que pour vérifier la stabilité forte d'une chaîne de Markov, il serait judicieux d'appliquer les résultats de l'ergodicité uniforme.

On introduit maintenant la définition d'une chaîne récurrente au sens de Harris. Cette définition joue un rôle important dans notre contexte.

Définition 2.3. Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur (E, \mathcal{E}) et de noyau de transition \mathbf{P} est récurrente au sens de Harris, s'il existe une mesure invariante μ^* σ -positive, telle que $\mu^*(A) > 0$, alors :

$$P_x \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_A(X_n) = +\infty \right\} = 1, \forall x \in E.$$

On dit alors que X est de Harris et le noyau de transition de X est de Harris. En d'autres termes, cela signifie que la chaîne passe par chaque ensemble d'états non négligeable par rapport à la mesure μ^* , un nombre infini de fois presque sûrement pour tout x dans E .

Propriété 2.1. :

- Une chaîne irréductible, discrète et récurrente est une chaîne de Harris.
- Une chaîne de Harris est une chaîne récurrente irréductible.

Pour les chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2 (Kartashov, Aissani). *Une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris, est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et apériodique si et seulement s'il existe un entier $n \geq 1$, une mesure positive $\alpha \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites:*

$$\bullet \quad \pi h > 0, \alpha \mathbb{I} = 1, \alpha h > 0, \tag{2.10}$$

$$\bullet \quad \text{Le noyau } T = \mathbf{P}^n - h \circ \alpha \text{ est non négatif,} \tag{2.11}$$

$$\bullet \quad \|T^m\| \leq \rho \text{ pour un certain entier } m \geq 1, \rho < 1. \tag{2.12}$$

De plus, la condition (2.12) s'obtient de l'ergodicité uniforme et de l'apériodicité, pour tout α, n, h vérifiant les conditions (2.10), (2.11).

Réciproquement, une chaîne de Markov arbitraire vérifiant les conditions (2.10), (2.11), (2.12) est apériodique et uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 2.4. La chaîne de Markov X sera dite fortement v -stable, si elle est fortement stable par rapport à une norme $\|\cdot\|_v$ définie par :

$$\|\mu\|_v = \int_{\mathbf{E}} v(x) |\mu|(dx), \tag{2.13}$$

où v est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive, pas nécessairement finie sur \mathbf{E} , $\mu \in m \mathcal{M}$ et $|\mu|$ est la variation de la mesure μ .

Remarque 2.3. Pour la classe des normes $\|\cdot\|_v$, définies par la formule (2.13), la condition (2.12) du théorème (2.2) sera équivalente à la condition suivante:

$$T^m v(x) \leq \rho v(x), \forall x \in \mathbf{E}, \text{ pour un entier } m \geq 1 \text{ et } 0 < \rho < 1. \tag{2.14}$$

En prenant la condition suffisante du théorème 2.2 (cas où $m = n = 1$) et en tenant compte de l'équivalence des conditions (2.12) et (2.14), on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.1. (critère de stabilité) *Pour que la chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris soit fortement v -stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1. $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+, \exists h \in f\mathcal{E}^+$ telles que: $\pi h > 0, \alpha \mathbb{I} = 1, \alpha h > 0$,
2. Le noyau $T = \mathbf{P} - h \circ \alpha$ est non négatif,
3. $\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x), \forall x \in \mathbf{E}$.

2.2 Inégalités de stabilité forte

La possibilité d'obtenir des inégalités avec un calcul exact des constantes est la particularité de la méthode de la stabilité forte.

Théorème 2.3. [*Kartashov*] Soit une chaîne de Markov X , de noyau de transition \mathbf{P} , et de mesure invariante π , fortement ν -stable et vérifiant les conditions du théorème 2.2. Alors, pour un noyau stochastique \mathbf{Q} , de mesure stationnaire ν appartenant à un certain voisinage de \mathbf{P} , on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \nu &= \pi [\mathbf{I} - \Delta R_0 (\mathbf{I} - \Pi)]^{-1}, \\ &= \pi + \sum_{r=1}^{+\infty} \pi [\Delta R_0 (\mathbf{I} - \Pi)]^r. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Où: $\Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ et $R_0 = (\mathbf{I} - T)^{-1}$.

Corollaire 2.2. Sous les mêmes conditions du théorème 2.2, on a:

$$\nu = \pi + \pi \Delta R_0 (\mathbf{I} - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2) \quad \text{pour} \quad \|\Delta\|_v \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Corollaire 2.3. Toujours sous les conditions du théorème 2.2 et pour Δ vérifiant la condition $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1 - \rho)$, on a:

$$\begin{aligned} \|\nu - \pi\|_v &\leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v C (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}, \\ \text{où} \quad C &= m \|\mathbf{P}\|_v^{m-1} (1 + \|\mathbf{I}\|_v \|\pi\|_v), \\ \text{et} \quad \|\pi\|_v &\leq (\alpha\nu)(1 - \rho)^{-1}(\pi h) m \|\mathbf{P}\|_v^{m-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

dans le cas où $m = 1$, on a: $C = 1 + \|\mathbf{I}\|_v \|\pi\|_v$.

2.3 Application aux systèmes de files d'attente

La méthode de stabilité forte peut être appliquée pour l'étude de stabilité des systèmes de files d'attente (on parlera alors de stabilité dans les systèmes de files d'attente).

Un cycle de recherche a été réalisé, où la perturbation a concerné plusieurs paramètres tels que: le flot des arrivées, la durée de service, la structure du système. La perturbation de la taille des groupes a été faite dans [23]. En effet, L. Boukir a étudié la stabilité forte du système d'attente $M^{Geo(X)}/M/1$ avec arrivées par groupes

en perturbant la loi de la taille des groupes. Précisons alors les résultats obtenus pour le système $M^{Geo}/M/1$.

2.3.1 Stabilité forte dans un système $M^{Geo(X)}/M/1$

La stabilité forte dans le système $M^{Geo(X)}/M/1$ a été étudiée par L. Boukir [23]. Elle a montré la v -stabilité forte du système en choisissant:

$$v(k) = \frac{1}{\beta^k} + \frac{\lambda}{\mu}k, \quad \beta > 1,$$

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

$$\alpha_j = \widetilde{p}_{1j} = \widetilde{k}_j = \sum_{k=0}^j \widetilde{C}_j^{(k)} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}.$$

Théorème 2.4. *Supposons que la condition d'ergodicité $\frac{\lambda}{\mu}E(\widetilde{C}) < 1$ est vérifiée. Alors, la chaîne de Markov induite \widetilde{X}_n est fortement v -stable pour la fonction*

$$v(k) = \frac{1}{\beta^k} + \frac{\lambda}{\mu}k, \quad \text{avec } \beta > \beta_1.$$

Théorème 2.5. *Soient \widetilde{P} et P les opérateurs de transition des chaînes de Markov induites des systèmes: $M^{Geo(X)}/M/1$ et $M^X/M/1$. Alors, pour tout β tel que $\beta > \beta_1$:*

$$\|P - \widetilde{P}\|_v \leq \frac{2\mu}{\lambda} + \rho' + \widetilde{\rho}'.$$

où

$$\beta_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda\mu(1 - \widetilde{\rho}')}}{2\lambda(1 - \widetilde{\rho}')}.$$

2.3.2 Inégalités de stabilité

Théorème 2.6. *Supposons que la chaîne de Markov induite \widetilde{X}_n du système $M^{Geo(X)}/M/1$ soit fortement v -stable. Alors, sous la condition $\|\Delta\|_v < \frac{(1-\rho)}{C}$, et pour tout $\beta > \beta_1$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\|\pi - \widetilde{\pi}\|_v \leq (1 - \rho)\|\widetilde{\pi}\|_v(1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}.$$

Où

$$\|\widetilde{\pi}\|_v = \widetilde{\Pi}\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{\lambda}{\mu}E(\widetilde{X}_n).$$

$$C = 1 + \|1\|_v\|\widetilde{\pi}\|_v.$$

2.4 Conclusion

La recherche de la stabilité forte d'une chaîne de Markov donnée se ramène au choix de la fonction mesurable, bornée, non négative h , de la mesure finie non négative α , et d'une norme vérifiant les conditions (2.1), (2.2), (2.3).

Dans le cas de la v -stabilité forte, le choix de la norme appropriée se réduit à la recherche de la fonction test v . Cette dernière doit être mesurable, bornée inférieurement par une constante finie, strictement positive, pas nécessairement finie.

La construction de la fonction test v et α ainsi que le choix de h constituent la difficulté majeure dans l'étude de la v -stabilité forte. Ils dépendent essentiellement de la forme du noyau de transition de la chaîne de Markov étudiée.

Chapitre 3

Stabilité forte dans un système d'attente $M^{Geo(X)}/G/1$

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la v -stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov incluse dans un système de files d'attente $M^{Geo(X)}/G/1$ après perturbation de la loi de la taille des groupes (par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$). Ainsi, nous déterminons les conditions pour lesquelles il sera possible d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système de files d'attente $M^X/G/1$ par les caractéristiques correspondantes du système $M^{Geo(X)}/G/1$.

3.1 Stabilité forte

L'adaptation du théorème (2.2) à notre situation nous permet d'énoncer le corollaire suivant:

Corollaire 3.1. *Pour démontrer la v -stabilité forte de la chaîne \widetilde{X}_n , il est suffisant de trouver une mesure α , et une fonction mesurable h sur \mathbb{N} , telles que:*

$$\widetilde{\Pi} h > 0, \quad \alpha 1 = 1, \quad \alpha h > 0.$$

a) *L'opérateur $T_{ij} = \widetilde{P}_{ij} - h_i \alpha_j$ est non négatif.*

b) $\exists \rho < 1$ tel que $Tv(k) \leq \rho v(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

c) $\|\tilde{P}\|_v < \infty$

A présent appliquons ce corollaire à la chaîne de Markov \tilde{X} . Pour cela, choisissons:

$$v(k) = \beta^k, \quad \beta > 1,$$

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

$$\alpha_j = \tilde{p}_{0j} = \tilde{k}_{j0} = \sum_{n=1}^{j+1} \tilde{c}_n k_{j-n+1,n}.$$

où:

$$k_{rs} = \Pr\{r \text{ arrivées pendant la période de services } \setminus \text{ il y a } s \text{ clients dans le système quand le service a débuté}\} \quad (3.1)$$

$$\tilde{c}_n = P(\text{la taille du groupe est égale à } n) \quad (3.2)$$

A présent, énonçons le résultat suivant:

Théorème 3.1. *Supposons que la condition d'ergodicité*

$\limsup_{j \rightarrow \infty} \{\rho_j = \lambda\} E(\tilde{C}) E(T_j) < 1$ *est vérifiée. Alors, la chaîne de Markov induite*
 \tilde{X}_n *du système* $M^{Geo(X)}/G/1$ *est fortement v-stable pour la fonction*

$$v(k) = \beta^k, \quad \text{avec } \beta > 1.$$

Preuve.

Vérifions les conditions : $\tilde{\pi} h > 0, \quad \alpha 1 = 1, \quad \alpha h > 0.$

- $\tilde{\pi} h = \sum_{i \geq 0} \tilde{\pi}_i h_i = \tilde{\pi}_0.$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_j &= \sum_{i \geq 0} \tilde{p}_{ij} \pi_i, \\ \tilde{\pi}_0 &= \tilde{\pi}_0 \tilde{k}_{00} + \sum_{i=1}^{j+1} \tilde{k}_{j-i+1, i} \tilde{\pi}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{\pi}_0 &= \tilde{\pi}_0 \tilde{k}_{00} + \tilde{k}_{01} \tilde{\pi}_1, \\ \Rightarrow \quad \tilde{\pi}_0 &= \frac{\tilde{\pi}_1 \tilde{k}_{01}}{1 - \tilde{k}_{00}}. \end{aligned}$$

On a

$$\tilde{k}_{00} = \tilde{c}_1 \tilde{k}_{01} = q(1 - q) \tilde{k}_{01}$$

où q : le paramètre de la loi géométrique.

Alors, montrons que $\tilde{\pi}_0 \neq 0$:

On a:

$$k_{01} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dB_{T_1}(t) = E(e^{-\lambda t})$$

$e^{-\lambda t}$ est une fonction positive $\forall t \Rightarrow E(e^{-\lambda t}) > 0$

d'autre part:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_0 &= \frac{\tilde{\pi}_1 \tilde{k}_{01}}{1 - \tilde{k}_{00}}. \\ \Rightarrow \frac{\pi_0}{\pi_1} &= \frac{k_{01}}{1 - k_{00}} \end{aligned}$$

On a

$$k_{01} > 0 \text{ et } (1 - k_{00}) > 0 \Rightarrow \frac{\pi_0}{\pi_1} > 0$$

D'où

$$\tilde{\pi}_0 > 0$$

- $\alpha 1 = \sum_{j \geq 0} \alpha_j = \sum_{j \geq 0} \tilde{p}_{0j} = 1,$
- $\alpha h = \sum_{i \geq 0} \alpha_i h_i = \alpha_0 = \tilde{p}_{00} = \tilde{k}_{00}.$

On a

$$\tilde{k}_{00} = \tilde{c}_1 \tilde{k}_{01} > 0,$$

Appliquons le critère de stabilité forte :

a)

– Si $i = 0$ alors,

$$T_{0j} = \tilde{p}_{0j} - \tilde{p}_{0j} = 0.$$

– Si $i \geq 1$ alors,

$$T_{ij} = \tilde{p}_{ij} = \tilde{k}_{j-1+i,i} \geq 0.$$

D'où, T_{ij} est non négatif.

b) D'après l'équation (2.6), $Tv(k) = \sum_{j \geq 0} v(j) T_{kj}$.

– Cas: $k = 0$:

$$Tv(0) = \sum_{j \geq 0} v(j) T_{0j} = 0.$$

– Cas: $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} Tv(k) &= \sum_{j \geq 0} v(j) T_{kj}, \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j p_{kj} \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j k_{j-k+1,k} \\ &= \sum_{j \geq k-1} \frac{\beta^{j-k+1}}{\beta^{-k+1}} k_{j-k+1,k} \\ &= \frac{1}{\beta^{-k+1}} (K(\beta)) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} Tv(k) &\leq [\beta^{k-1} (K(\beta))] \\ &\leq \left[\beta^k \frac{(K(\beta))}{\beta} \right] \end{aligned}$$

Montrons alors que :

$$\rho(\beta) = \frac{(K(\beta))}{\beta} < 1 \quad (3.3)$$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\beta) &= \int_0^\infty e^{(-\lambda t + \lambda t \tilde{C}(\beta))} dB_T(t) \\ &= \psi(\lambda - \lambda \tilde{C}(\beta)) \quad . \end{aligned} \quad (3.4)$$

On a la transformée de Laplace-Stieltjes, $\psi(\lambda - \lambda \tilde{C}(\beta)) \leq 1$.

D'après 3.3, on a:

$$\begin{aligned}\rho'(\beta) &= \frac{d\rho(\beta)}{d\beta} \\ &= \frac{\beta K'(\beta) - K(\beta)}{\beta^2}\end{aligned}$$

d'autre part:

$$\rho'(1) = K'(1) - K(1) = E(S) - 1$$

tel que:

$E(S) = \lambda E(C)$ $E(T) < 1$ d'après la condition d'ergodicité géométrique.

$\rho'(1) < 1 \Rightarrow$ la fonction $\rho(\beta)$ est décroissante.

alors $\rho(\beta) < 1$

c) Montrons que $\|\tilde{P}\|_v < \infty$:

$$T = \tilde{P} - h \circ \alpha \Rightarrow \tilde{P} = T + h \circ \alpha ,$$

et :

$$\|\tilde{P}\|_v = \|T + h \circ \alpha\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \times \|\alpha\|_v.$$

On a

$$\begin{aligned}\|T\|_v &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |T_{kj}|, \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \rho v(k), \\ &= \rho < \infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) |\alpha_j|, \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j |\tilde{p}_{0j}|, \\ &= K_0(\beta) < \infty.\end{aligned}$$

Et

$$\|h\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

D'où

$$\|\tilde{P}\|_v < \infty.$$

■

Alors, le système d'attente $M^{Geo(X)}/G/1$ que nous avons considéré est fortement v-stable pour la fonction test $v(k) = \beta^k$.

3.2 Inégalités de Stabilité

La chaîne \tilde{X}_n étant fortement stable, d'après le critère de stabilité forte, elle peut approcher une autre chaîne de Markov dont le noyau de transition est au voisinage du noyau de transition \tilde{P} . En introduisant une petite perturbation au niveau de la loi de la taille des groupes dont la chaîne de Markov correspondante est X_n de noyau de transition P_n . Les caractéristiques de la chaîne (X_n) peuvent être approximées par celles de (\tilde{X}_n) avec une précision qui dépend de la perturbation.

3.2.1 Déviation de l'opérateur de transition

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov induites \tilde{X}_n et X_n , estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P par rapport à l'opérateur \tilde{P} .

Preuve. D'après l'expression (2.9) on a :

$$\begin{aligned} \|P - \tilde{P}\|_v &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |p_{kj} - \tilde{p}_{kj}|, \\ \|P - \tilde{P}\|_v &= \sup \left\{ v(j) |p_{0j} - \tilde{p}_{0j}|, \sup_{k \geq 1} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |p_{kj} - \tilde{p}_{kj}| \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} v(j) |p_{0j} - \tilde{p}_{0j}| &= \sum_{j \geq 0} \beta^j |k_{j,0} - \tilde{k}_{j,0}|, \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \beta^j (|k_{j,0}| + |\tilde{k}_{j,0}|) \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \beta^j (k_{j,0} + \tilde{k}_{j,0}) \\ &\leq K_0(\beta) + \tilde{K}_0(\beta) \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{j \geq 0} v(j) |p_{0j} - \tilde{p}_{0j}| \leq K_0(\beta) + \tilde{K}_0(\beta).$$

Estimons maintenant :

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |p_{kj} - \tilde{p}_{kj}| &= \\ \sup_{k \geq 1} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) (|p_{kj}| + |\tilde{p}_{kj}|) &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq 0} \beta^j (p_{kj} + \tilde{p}_{kj}) \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \left[\sum_{j \geq 0} \beta^j p_{kj} + \sum_{j \geq 0} \beta^j \tilde{p}_{kj} \right] \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \left[\sum_{j \geq 0} \beta^j k_{j-k+1,k} + \sum_{j \geq 0} \beta^j \tilde{k}_{j-k+1,k} \right] \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \left[\sum_{j \geq 0} \frac{\beta^{j-k+1}}{\beta^{-k+1}} k_{j-k+1,k} + \sum_{j \geq 0} \frac{\beta^{j-k+1}}{\beta^{-k+1}} \tilde{k}_{j-k+1,k} \right] \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \left[\frac{K(\beta)}{\beta^{-k+1}} + \frac{\tilde{K}(\beta)}{\beta^{-k+1}} \right] \\ &= \frac{1}{\beta} (K(\beta) + \tilde{K}(\beta)) \end{aligned}$$

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq \sup \left\{ \frac{1}{\beta} (K(\beta) + \tilde{K}(\beta)), K_0(\beta) + \tilde{K}_0(\beta) \right\}.$$

D'où

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq K_0(\beta) + \tilde{K}_0(\beta).$$

3.2.2 Estimation quantitatives

Appliquons à présent le corollaire (2.3)

Estimation de $\|\mathbf{1}\|_v$: De l'expression (2.8), on a :

$$\|\mathbf{1}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

Estimation de $\|\tilde{\pi}\|_v$, On a :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\pi}\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) \tilde{\pi}_j, \\
&= \sum_{j \geq 0} \beta^j \tilde{\pi}_j, \\
&= \tilde{\Pi}(\beta).
\end{aligned}$$

D'où:

$$\|\tilde{\pi}\|_v = \tilde{\Pi}(\beta).$$

Théorème 3.2. *Supposons que la chaîne de Markov induite \tilde{X}_n du système $M^{Geo(X)}/M/1$ soit fortement v -stable. Alors, sous la condition $\|\Delta\|_v < \frac{(1-\rho)}{C}$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leq (1 - \rho)C\|\tilde{\pi}\|_v(1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}.$$

Où

$$\|\tilde{\pi}\|_v = \tilde{\Pi}(\beta).$$

$$C = 1 + \|1\|_v \|\tilde{\pi}\|_v.$$

Preuve. *On a :*

$$\|\tilde{\pi}\|_v = \tilde{\Pi}(\beta).$$

$$C = 1 + \|1\|_v \|\tilde{\pi}\|_v.$$

Imposons la condition $\|P - \tilde{P}\|_v < \frac{1-\rho}{c}$, ie $\|\Delta\|_v < \frac{1-\rho}{c}$

et remplaçons les constantes par leurs valeurs. On aura alors:

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leq (1 - \rho)\|\tilde{\pi}\|_v(1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}.$$

3.3 Conclusion

Après l'affirmation qualitative de stabilité, les estimations quantitatives nous donnent une borne supérieure de l'erreur d'approximation commise sur la distribution stationnaire de la chaîne de Markov \tilde{X} fortement v -stable.

Chapitre 4

Algorithme et application numérique

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme STR-STAB-GRP basé sur les résultats théoriques présentés dans le chapitre précédent, en s'inspirant de l'algorithme proposé par M^{me} Bouallouche [22]. Il nous permet de trouver l'erreur d'approximation d'un système $M^X/G/1$ par un système $M^{Geo(X)}/G/1$. Nous étudions les conditions de stabilité de notre système tout en discutant les résultats obtenus par application de l'algorithme STR-STAB-GRP et par application de la simulation.

Remarque A l'aide de l'environnement 'MATLAB 7.0', nous avons réalisé une application qui consiste en:

1. le calcul de l'erreur théorique commise lors de l'approximation d'un système $M^X/G/1$ par un système $M^{Geo(X)}/G/1$.
2. la simulation d'un système $M^X/G/1$ et $M^{Geo(X)}/G/1$. Ensuite, le calcul de l'écart entre les opérateurs stationnaires de ces deux systèmes.

4.1 Algorithme STR-STAB-VAC

Étapes de l'algorithme

ÉTAPE 1

Définition des paramètres d'entrées:

La distribution de la durée moyenne de service;

Le taux moyen des arrivées des groupes λ ;

Le paramètre de la loi de la taille des groupes (loi géométrique): q ;

Le paramètres de la loi de service.

ÉTAPE 2

Détermination de l'espérance $E(S)$ de la variable aléatoire S , caractérisant la durée de service;

Détermination de l'espérance $E(C)$ de la variable aléatoire C , caractérisant la taille des groupes.

ÉTAPE 3

Calcul du taux de service μ :

$$\mu = \frac{1}{E(S)}$$

ÉTAPE 4

Vérification de l'ergodicité géométrique:

si $\frac{\lambda}{E(C)\mu} \geq 1$, alors le système est instable aller à l'étape 7;

sinon aller à l'étape 5;

ÉTAPE 5

Détermination de la variation Δ

$$\bullet \|\Delta\|_v \leq K(\beta) + \tilde{K}(\beta),$$

où:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\beta) &= \int_0^\infty e^{(-\lambda t + \lambda t \tilde{C}(\beta))} dB_T(t) \\ &= \psi(\lambda - \lambda \tilde{C}(\beta)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

et

$$\begin{aligned} K(\beta) &= \int_0^\infty e^{(-\lambda t + \lambda t C(\beta))} dB_T(t) \\ &= \psi(\lambda - \lambda C(\beta)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ÉTAPE 6

- Déterminer un intervalle de $\beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$ dans lequel $\|\Delta\|_v \leq \frac{1-\rho}{c}$

Où

- $\rho = \frac{K(\beta)}{\beta} = \frac{\psi(\lambda - \lambda \tilde{C}(\beta))}{\beta}$,
- $C = 1 + \|\bar{\pi}\|_v$.

ÉTAPE 7

- Déterminer $\beta_{opt} \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$ qui correspond à une erreur d'approximation minimale de $\|\pi - \bar{\pi}\|_v$

Avec

$$\|\pi - \bar{\pi}\|_v \leq \frac{C\|\Delta\|_v\|\pi\|_v}{1-\rho-\|\Delta\|_v C}$$

4.2 Simulation

4.2.1 Modèle de simulation

Afin de simuler les écarts entre les distributions stationnaires des systèmes $M^{Geo(X)}/G/1$ et $M^X/G/1$ par rapport à une norme donnée, notre simulateur comportera deux procédures dont l'une permettra de simuler la distribution stationnaire du système $M^{Geo(X)}/G/1$ et l'autre la distribution stationnaire du système $M^X/G/1$. Après obtention des deux distributions stationnaires, les valeurs des paramètres de la norme donnée seront utilisées

pour calculer l'erreur simulée due à l'approximation. L'approche de simulation utilisée est l'approche orientée événements discrets, en suivant les étapes suivantes:

1. Simuler la distribution stationnaire $\pi = (\pi_i, i \geq 0)$ de la file $M^X/G/1$,
2. Simuler la distribution stationnaire $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_i, i \geq 0)$ de la file $M^{Geo(X)}/G/1$,
3. Calculer l'erreur $\sum_{i \geq 0} \beta^i |\pi_i - \tilde{\pi}_i|$.

Comparaison des résultats

Afin de comparer les résultats algorithmiques de la méthode de stabilité forte aux résultats simulés, nous implémentons l'algorithme ainsi que le simulateur. Dans un premier temps, nous implémentons l'algorithme pour obtenir l'erreur (sur la distribution stationnaire) due à l'approximation ainsi que la norme par rapport à laquelle celle-ci est obtenue. Cette norme sera introduite dans le simulateur afin d'obtenir l'erreur simulée (sur la distribution stationnaire) par rapport à la même norme.

4.2.2 Validation de la simulation

Avant d'exécuter la simulation, les deux simulateurs réalisés doivent être validés. Pour cela, on effectue un test statistique (test de Student) sur la moyenne, m , du temps moyen d'attente dans le système. Il s'agit de confronter la moyenne obtenue par la simulation à la valeur théorique, m_0 , du temps moyen d'attente dans le système.

Etant donné un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de taille n , le test de Student consiste à tester l'hypothèse

$$"H_0 : m = m_0" \text{ contre } "H_1 : m \neq m_0"$$

m : Est la moyenne du nombre de clients dans le système obtenu par le simulateur à l'aide de la formule suivante:

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} (i * \pi_i) \quad (4.3)$$

Donc, pour réaliser ce test, on doit exécuter le simulateur plusieurs fois (" n " doit être très grand dans l'objectif d'appliquer le Théorème Central Limite) pour générer des variables aléatoires m_i ; afin qu'on puisse estimer leur moyenne \bar{m} et leur variance S'^2 (estimateur sans biais de σ^2), et par la suite comparer les moyennes obtenues par le simulateur avec les moyennes données par Harris dans [55].

Enfin, on aura le domaine de rejet suivant:

$$D = \{(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n) / \frac{\sqrt{n} |\bar{m} - m_0|}{S'} > t_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}\}$$

Validation du système $M^X/G/1$

Soit:

- Le taux des arrivées des clients $\lambda=2$.
- La loi de la taille du groupe est une loi géométrique de paramètre $p= 0.2$.
- Les durées du service suivent une loi exponentielle de paramètre $\mu=5$;
- Temps de simulation est: $t_{max} = 100$.

Après l'exécution du simulateur 100 fois ($n=100$), on a obtenu les résultats suivants:

$$\bar{m} = 2.54;$$

$$S'^2 = 35.6995;$$

D'où la valeur de la statistique $T = \frac{\sqrt{n} |\bar{m} - m_0|}{S'} = 0.067$.

Au seuil du risque $\alpha = 0.05$ sur la table de la loi Student $t_{(99,0.025)} = 1.98$, on constate que $T_{99} < t_{(99,0.025)}$, ce qui signifie qu'on ne rejette pas l'hypothèse H_0 . Autrement dit, le simulateur est validé.

4.3 Application de l'algorithme "STR-STAB-GRP"

Comme application numérique, nous avons choisis de perturber la loi de la taille des groupes par une loi exponentielle.

La loi géométrique est l'analogie discrète de la loi exponentielle:

$$\Delta \leftarrow \int_{x=0}^{\infty} | -\ln(1 - \alpha)e^{-\ln(1-\alpha)x} - \alpha e^{-\alpha x} |;$$

4.3.1 Application de l'algorithme au système $M^X/M/1$

Dans ce cas, nous choisissons:

- Le flot des arrivées à une loi de Poisson de paramètre $\lambda=0.1$ clients/Unité de temps.
- La durée du service suit une loi exponentielle de paramètre $\mu=100$ client/Unité de temps..
- Le temps de simulation $t_{max}=1000$ unités de temps.

La fonction densité de la loi exponentielle de paramètre μ est donnée par:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Les résultats obtenus pour les différentes valeurs de *alpha* sont données dans le tableau 4.1.

Pour que la condition d'ergodicité géométrique soit vérifiée, on doit choisir les paramètres λ , μ et α tel que la charge du système: $\rho = \frac{\lambda}{\mu * \alpha} < 1$

Les valeurs de α	β_{min}	β_{max}	$\beta_{optimal}$	L'erreur théorique	L'erreur de simulation
0.001	1.0201	1.3301	1.0601	0.0313	0.0421
0.002	1.0201	1.2301	1.0501	0.0635	0.0784
0.003	1.0201	1.1801	1.0501	0.0968	0.142
0.004	1.0201	1.1501	1.0501	0.15	0.215
0.005	1.0201	1.1301	1.0501	0.2	0.235
0.006	1.0301	1.1101	1.0501	0.2033	0.295
0.007	1.0301	1.1001	1.0501	0.2412	0.309
0.008	1.0301	1.0901	1.0501	0.2804	0.350
0.009	1.0301	1.0801	1.0501	0.3210	0.462
0.0.1	1.0301	1.0801	1.0501	0.3631	0.521
0.015	1.0301	1.0501	1.0501	0.5983	0.644
0.019	1.0301	1.0401	1.0401	0.8758	0.934
0.0.02	1.0301	1.0401	1.0401	1.01	1.66
0.025	1.0301	1.0301	1.0301	1.9151	3.548
0.03	1.0301	1.0301	1.0301	2.6405	5.269

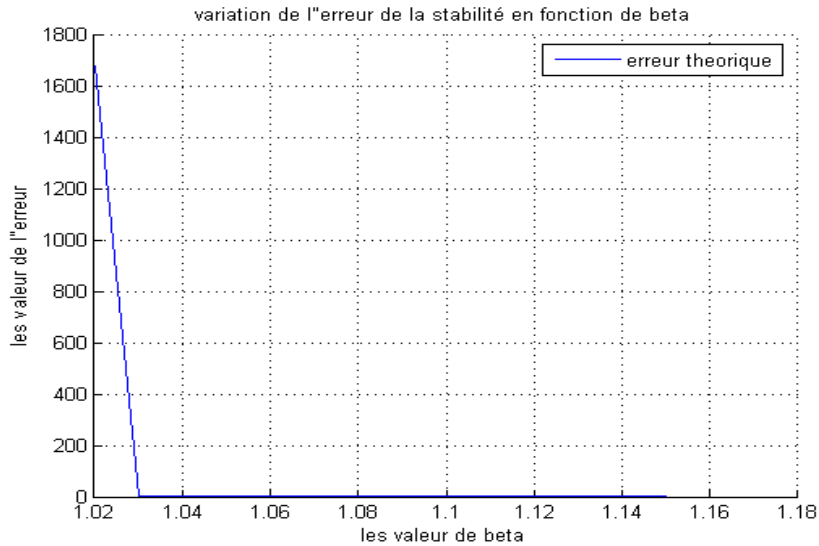
TAB. 4.1 – *Erreur d'approximation*

Pour les valeurs de $\alpha \in]0.03, 0.99[$, on ne peut pas approximer. Cela est dû au fait que la condition de suffisance du théorème sur les inégalités de stabilité ne se vérifie pas.

4.3.2 Discussion des résultats

Nous observons dans le tableau ci-dessus les valeurs des erreurs obtenues par les deux méthodes que nous avons étudiées (stabilité forte et simulation). Nous constatons ainsi que les erreurs dû à la méthode de stabilité forte sont nettement moins importantes que celles obtenue par simulation. Ceci confirme l'efficacité de la méthode de stabilité forte.

En faisant varier le paramètre de loi de la taille du groupe α on constate que la diminution de la valeur de ce paramètre implique la diminution des erreurs commises (théorique

FIG. 4.1 – Variation des erreurs en fonction de β

et simulé). Avec la diminution du paramètre α , la quantité $(\frac{1}{\alpha})$ qui représente la taille moyenne des groupes augmente et par ailleurs l'augmentation de la charge du système ρ . Par conséquent, l'approximation est meilleure lorsque la taille moyenne des groupes est grande (le système est plus chargé), dans ce cas, le système réel est proche de l'idéal.

4.3.3 Application de l'algorithme au cas $M^X/E_2/1$

Dans ce cas, nous choisissons:

- Le flot des arrivées à une loi de Poisson de paramètre $\lambda=0.1$ client/Unité de temps.
- La durée de service suit une loi Erlang à deux étapes de paramètre $b=100$ client/Unité de temps.
- Le temps de simulation $t_{max}=100$ unités de temps.

La fonction densité de la loi d'Erlang est donnée par:

$$f(t) = \frac{b^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-bt}$$

Dans le cas où $n=2$:

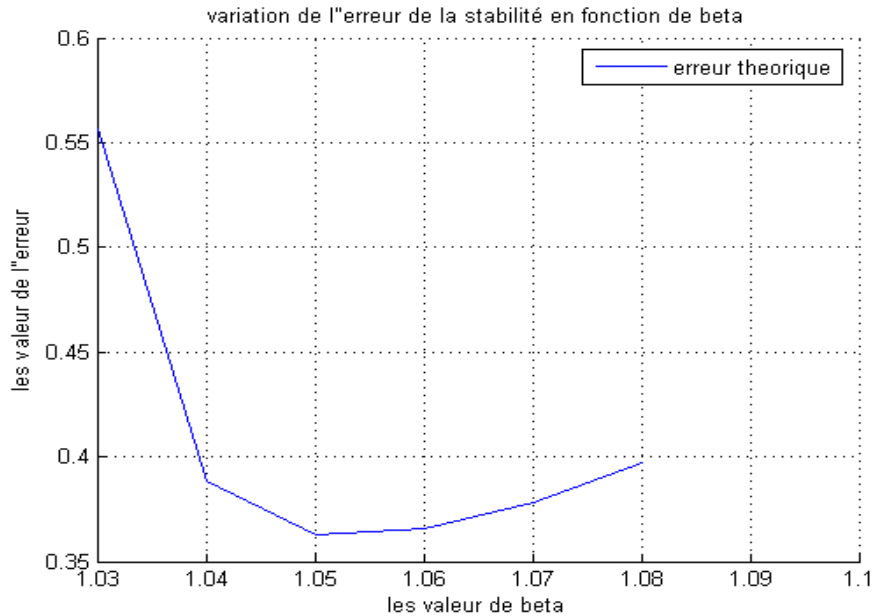
$$f(t) = b^2 t e^{-bt}$$

Les résultats obtenus pour les différentes valeurs de α sont classés dans le tableau suivant:

Les valeurs de α	β_{min}	β_{max}	$\beta_{optimal}$	L'erreur théorique	L'erreur de simulation
0.001	1.0201	1.3101	1.0601	0.0345	0.069
0.002	1.0201	1.2301	1.0501	0.0635	0.095
0.003	1.0201	1.1801	1.0501	0.0968	0.254
0.004	1.0201	1.1501	1.0501	0.112	0.312
0.005	1.02	1.1301	1.0501	0.203	0.290
0.007	1.0301	1.1001	1.05010	0.2412	0.362
0.009	1.0301	1.0801	1.0501	0.3210	0.412
0.01	1.0301	1.0801	1.0501	0.3631	0.652
0.015	1.0311	1.0501	1.05	0.5983	0.844
0.019	1.0301	1.0401	1.04	0.8758	2.450
0.02	1.0301	1.0401	1.04	0.9414	4.580
0.03	1.0301	1.0301	1.03	2.6405	7.658

TAB. 4.2 – *Erreur d'approximation*

Pour les valeurs de $\alpha \in]0.03, 0.99[$ on ne peut pas approximer. cela est dû au fait que la condition de suffisance du théorème sur les inégalités de stabilité ne se vérifie pas.

FIG. 4.2 – Variation des erreurs en fonction de β

4.3.4 Discussion des résultats

Nous observons dans le tableau ci-dessus les valeurs des erreurs obtenues par les deux méthodes que nous avons étudiées (stabilité forte et simulation). Nous constatons ainsi que les erreurs dû à la méthode de stabilité forte sont nettement moins importantes que celles obtenue par simulation. Ceci nous confirmons l'efficacité de la méthode de stabilité forte par rapport à la méthode de simulation.

Dans cet exemple, on a fixé la loi générale de service $B(\cdot)$ par une loi d'Erlang à deux étapes (la loi d'Erlang est très utilisée dans la théorie des file d'attente). En faisant varier le paramètre de la loi de la taille du groupe α on constate que la diminution de la valeur de ce paramètre, diminue les erreurs commises (théorique et numérique) et tend vers zéro. La diminution du paramètre α implique l'augmentation de la charge du système ρ . Par conséquent, plus le système est chargé plus le système réel est proche de l'idéal (l'approximation est meilleure).

4.4 Conclusion

L'étude numérique permet de déterminer l'erreur due à l'approximation des caractéristiques d'un système $M^X/G/1$ par celles correspondantes du système $M^{Geo(X)}/G/1$. La comparaison avec les résultats obtenus par simulation permet de confirmer la performance de la méthode de stabilité forte.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons mis en évidence l'intérêt et les applications de la théorie de stabilité forte pour l'analyse des systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes.

Dans un premier temps, nous avons effectué une étude bibliographique sur les systèmes d'attente avec arrivées par groupes et leur application pratique et nous avons présenté les modèles les plus classiques.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilité forte dans un système d'attente avec arrivées par groupes $M^{Geo(X)}/G/1$, après perturbation de la loi de la taille des groupes. Nous avons clarifié les conditions d'approximation des caractéristiques du système de files d'attente $M^X/G/1$ par celles correspondantes du système $M^{Geo(X)}/G/1$. La méthode de stabilité forte permet également d'obtenir les estimations quantitatives de stabilité. Après avoir obtenu les inégalités de stabilité, nous avons effectué une étude algorithmique afin de mesurer la performance de la méthode de stabilité forte pour le système $M^{Geo(X)}/G/1$. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par application de la simulation.

Précisons néanmoins que les difficultés principales dans l'application du critère de stabilité forte demeurent essentiellement : l'identification du paramètre à perturber, l'écriture des noyaux de transition des chaînes de Markov et le choix des normes poids.

L'obtention des résultats de ce mémoire ouvre de nombreuses perspectives de recherche. Parmi les directions les plus significatives :

- Confirmer l'application en estimant la fonction densité de loi générale par la méthode du noyau et correction des effets de bor.

- Application aux systèmes de files d’attente avec arrivées par groupe plus complexes souvent rencontrés dans des cas pratiques (avec vacances, avec rappels, avec vacances et rappels, ...) .
- Appliquer d’autres outils mathématiques pour établir les mesures de performance (le nombre moyen de clients dans le système, le temps moyen d’attente).

Bibliographie

- [1] I. Adiri. Cyclic queues with bulk arrivals. *Ass. for. compt. math.*, 20:416–428, 1973.
- [2] A. Aïssani. An $M^X/G/1$ retrial queue with exhaustive vacations. *Stat. and Manag. Syst.*, 3(3):269–286, 2000.
- [3] A. Aïssani. An $M^X/G/1$ retrial queue with unreliable server and vacation. *17 th European simulation SCS Europe BVBA*, pages 175–180, 2003.
- [4] A. Aïssani and D. Aïssani. Fiabilité des systèmes. systèmes de files d’attente non fiables. *U. E. R. Mathématique - informatique ENITA edition*, 1986.
- [5] D. Aïssani. Estimation de la stabilité forte dans un système $M/G/1$. *R.J.Matematika, Moscou, VINITI*, 1B83(4 119-82), 1982.
- [6] D. Aïssani. Ergodicité uniforme et stabilité forte des chaînes de Markov, application aux systèmes de files d’attente. *Séminaire mathématique de Rouen, CNRS Ed*, 167:115–121, 1990.
- [7] D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transitions kernels. *Dokl. Acad. Nauk. Kr. S.S.R, Serie A(11)*:3–5, 1983.
- [8] T. Altiok. Queues with group arrivals and exhaustive service discipline. *Queueing Systems*, 2:307–320, 1987.
- [9] A. Trinh and S. Molnar. A novel approach to model TCP traffic. *IEEE Communication Letters*, pages 660–664, 2004.
- [10] Y. Baba. An algorithmic solution to the $M/PH/c$ queue with batch arrivals. *Op. Res. Soc. of Japan*, 26:33–49, 1983.
- [11] Y. Baba. On the $M^X/G/1$ queues with vacation time. *Op. Res. Letters*, pages 93–98, 1986.
- [12] I. Balay and A. Nilsson. Performance modeling of an ATM multiplexer with heterogeneous speed links. *IEEE Center for Communications and Signal Processing*, pages 778–782, 1995.

- [13] A.D. Banik, U.C. Gupta, and S.S. Pathak. BMAP/G/1/N queue with vacations and limited service discipline. *App. Math. and Computation*, 180:707–721, 2006.
- [14] N. Bansal. Analysis of $M/G/1$ processor sharing queue with bulk arrivals. *Op. Res. Letters*, 31, Issue 5:401–405, Sep 2003.
- [15] D. Bertsimas and D. Nakazto. The distributional Little’s law its applications. *Op. Res.*, 43(2):298–310, 1995.
- [16] U. N. Bhat. Imbedded Markov chain analysis of single server bulk queues. *Aust. Math. Soc.*, IV, part2:244–263, 1964.
- [17] C. Blondia and O. Casals. Statistical multiplexing of vbr sources: a matrix-analytic approach. *Performance Evaluation*, 16(1–3):5–20, 1992.
- [18] T. Bonald and J. W. Roberts. Congestion at flow level and the impact of user behaviour. *Compt. Net.*, 42:521–536, 2003.
- [19] A. A. Borovkov. Théorème d’ergodicité pour une classe d’équations stochastiques et leurs applications. *Theory of Probability and their Applications*, 2(23), 1978.
- [20] A. Borthakur and G. Coudhury. On a batch arrival Poisson queue with generalised vacation. *Sankhya*, series B, 59:369–383, 1997.
- [21] S. K. Bose. *An introduction to queueing systems*. Plenum publishers, New York, 2002.
- [22] L. Bouallouche and D. Aissani. Performance analysis approximation in a queueing system of type $M/G/1$. *International journal MMOR (Mathematical Methods of Operations Research)*, 63(2):341–356, 2006.
- [23] L. Boukir. *Approximation dans les systèmes d’attente avec arrivées par groupes*. Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, Département de Recherche Opérationnelle, Bejaia, 2004.
- [24] A. Brandt, H. Sulanke, and M. Brandt. A single server model for packetwise transmission of messages. *Queueing Systems*, 6:287–310, 1990.
- [25] G. Brière and M. L. Chaudhry. Computational analysis of single serveur bulk arrival queues $M^X/G/1$. *Comput. Op. Res.*, 15(3):283–292, 1988.
- [26] H. Bruneel. Performance of discrete-time queueing systems. *Comput. Op. Res.*, 20(3):303–320, 1993.
- [27] H. Bruneel and K. G. Byung. *Discrete-time models for communication systems including ATM*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [28] C. K. Chae and H. W. Lee. $M^X/G/1$ vacation model with N-policy: Heuristic interpretation of the mean waiting time. *Op. Res. Soc.*, 46:258–264, 1995.

- [29] R. Chakka. Towards a generalised Markovian node mode: the $MM \sum_{k=1}^K CPP_k/GE/LG$ queue. *International Conference on Stochastic Models and the Fourth International Workshop on Retrial Queues, India, Decembre 2002*.
- [30] R. Chakka and P. G. Harrison. A Markov modulated multiserveur queue with negative customers - $MMCCP/GE/c/G$ queue. *Acta. Informatica*, 37:881–919, 2001.
- [31] M. L. Chaudhry. Exact and approximate numerical solution of steady-state single-server bulk arrival discrete-time queues: $Geom^X/G/1$. *International Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, 62:133–185, 1993.
- [32] M. L. Chaudhry and U. C. Gupta. Exact computational analysis of waiting time distribution of single serveur bulk arrival queues $M^X/G/1$. *Op. Res.*, 63(3):445–462, 1992.
- [33] M. L. Chaudhry and U. C. Gupta. Computing waiting time probabilities in the discrete time queue: $GI^X/G/1$. *Performance Evaluation*, 43:123–131, 2001.
- [34] M. L. Chaudhry, U. C. Gupta, and M. Agarwal. Computational analysis of the distribution of number in the system $M^X/G/1$ - an alternative approche -. *INFOR*, 30(1):30–43, 1992.
- [35] M. L. Chaudhry and J. G. C. Templeton. *A first cours in bulk queue*. Wiley, New York, 1963.
- [36] M. L. Chaudhry, J. G. C. Templeton, and J. Medhi. Computational Results of multiserveur bulk arrival queues with constant service time $M^X/D/C$. *Op. Res.*, 40(2), May-June 1992.
- [37] B. D. Choi and K. K. Park. The $M/G/1$ retrial queue with Bernoulli schedule. *Queueing Systems*, 7:219–228, 1990.
- [38] G. Choudhury. On a batch arrival Poisson queue with a random set up time and a vacation period. *Comput. Op. Res.*, 25:1013–1026, 1998.
- [39] G. Choudhury. An $M^X/G/1$ queueing system with a setup period and vacation period. *Queueing Systems*, 36:23–28, 2000.
- [40] G. Choudhury. Analysis of the $M^X/G/1$ queueing system with vacation times. *ind. stat.*, 64(series B, pt 1):37–49, 2002.
- [41] G. Choudhury. A batch arrival queueing system with an additional service channel. *Inf. and Mang. Scie.*, 14(2):17–30, 2003.
- [42] J. W. Cohen. On a single server queue with group arrivals. *App. Prob*, pages 619–622, 13 1976.

- [43] S. C. Dafermos and M. F. Neuts. A single server queue in discrete time. *Cahier Centre Études Rech. Opér.*, 13:23–40, 1971.
- [44] J. Dagsvik. Stability and heavy traffic results for the general bulk queue. *Adv. App. Prob.*, 10:213–231, 1978.
- [45] J. N. Daigle, G. Purushothaman, V. Ramaswamy, and R. Wang. Queueing behavior of individual mobiles in tdma-based cellular systems. *IEEE Trans on Info.*, 7803-7954:717–721, 2003.
- [46] B. T. Doshi. Queueing systems with vacation a survey. *Queueing Systems*, 1:29–66, 1986.
- [47] A. M. Eikeboom and H. C. Tijms. Waiting time percentiles in the multiserver $M^X/G/c$ queue with batch arrivals. *Prob. Eng. Inf. Sci.*, 1:75–96, 1987.
- [48] N. Fonseca and J. A. Silvester. An approximate model for the output process of an ATM multiplexer with selective discard mechanism. *IEEE Trans. Commun.*, pages 783–787, 1995.
- [49] N. Fonseca and J. A. Silvester. Modelling the output process of an ATM multiplexer with correlated priorities. *IEEE Trans. Commun.*, pages 816–821, 1997.
- [50] P. Franken. Ein Stetigkeitssatz für verlustsysteme. *Operations-forschung und Math. Stat*, 11:1–23, 1970.
- [51] D. P. Gaver. Imbedded Markov chain analysis of waiting line process in continuous time. *Ann. Math. Stat.*, 30:698–720, 1959.
- [52] E. Gelenbe and G. Pujolle. *Introduction aux réseaux de files d'attente*. Paris, 1985.
- [53] B. V. Gnedenko. Sur certains problèmes non résolus de la théorie de files d'attente. *Technical report, Six International telegrafic congress, Munich*, 1970.
- [54] D. Gross and C. M. Harris. *Fundamentals of queueing theory*. John Wiley and Sons, New York, 1 edition, 1974.
- [55] C. Harris. Some results for bulk-arrival queues with state-dependent service times. *Management Science*, 16(5):313–325, January 1970.
- [56] J. He and K. Sohraby. A new analysis framework for discret time queueing systems with general stochastic sources. *IEEE INFOCOM*, pages 1075–1084, 2001.
- [57] D. F. Holman, W. K. Grassmann, and M. L. Chaudhry. Some results of the queueing system $e_k^X/M/C$. *Naval. Res. Log. Qual.*, 27(2):217–221, 1980.
- [58] G. Horvath and M. Telek. Analysis of a BMAP/D/1-timer multiplexer. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 128:25–44, 2005).
- [59] J. J. Hunter. *Mathematical techniques of applied probability: Discrete Time Models, Techniques and Applications*, volume II. Academic Press, New York, 1983.

- [60] C. F. Ipsen and D. Meyer. Uniform stability of Markov chains. *Matrix Ana. App.*, 15(4):1061–1074, 1994.
- [61] V. V. Kalashnikov and G. S. Tsitsiachvili. Sur la stabilité des systèmes de files d’attente relativement à leurs fonctions de répartition perturbées. *Journal Izu AN USSR Technique cybernétique*, (2):41–49, 1972.
- [62] N. V. Kartashov. Strongly stable Markov chains, Stability Problems for Stochastic Models. *VNISS, Moskov*, pages 54–59, 1981.
- [63] N. V. Kartashov. Strong stability Markov chains. *VSP. Utrecht*, 1996.
- [64] N. Kawasak, H. Takagi, Y. Takahashi, S. J. Hong, and T. Hasegawa. Waiting time analysis for $M^X/G/1$ priority queue with/without vacations under random order of service discipline. *App. Math. and Stoch. Anal.*, 13(4):365–392, 2000.
- [65] M. AL-Rawwash K.C.Madan. On the $m^X/G/1$ queue with feedback and optional server vacations based on a single vacation policy. *App. Math. and computation*, (160):909–919, 2005.
- [66] D. Kennedy. The continuity of the single server queue. *J. of Appl. Prob.*, 9(3), 1972.
- [67] C. S. Kim, A. Dudin, and V. Khramova. Erlang queuing system with batch arrival operating in a random environment. *Comput. Op. Res.*, 2007.
- [68] L. Kleinrock. *Queueing Systems (Computer Application)*, volume 2. 1976.
- [69] A. Klemm, C. Lindemann, and M. Lohmann. Traffic modeling and characterization for UMTS networks. *IEEE Trans. Commun.*, pages 1741–1746, 2001.
- [70] A. Klemm, C. Lindemann, and M. Lohmann. Modeling IP traffic using the batch markovian arrival process. *Performance Evaluation*, 54:149–173, 2003.
- [71] H. Kobayashi, G. Louchard, and G. Latouche. *Discrete-time queueing systems, in: Probability theory and computer science*, eds. Academic Press, New York, 1983.
- [72] A. Konstantin, U. Ayesta, and P. Brown. Batch arrival $M/G/1$ processor sharing with application to multilevel processor sharing scheduling. *INRIA, Rapport de recherche*, (N:5043), Decembre 2003.
- [73] H. S. Lee and M. M. Srinivasan. Control policies for $M^X/G/1$ queueing system. *Management Science*, 35:707–721, 1989.
- [74] H. W. Lee, S. S. Lee, and K. C. Chae. Analysis of $M^X/G/1$ queue with N-policy and multiple vacations. *App. Prob.*, 31:476–496, 1994.
- [75] S. S. Lee, H. W. Lee, S. H. Yoon, and K. C. Chae. Batch arrival queue with N-policy and single vacation. *Comput. Op. Res.*, 22:173–189, 1995.
- [76] D. Lucantoni. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Stoch Mod*, 7(1):1–46, 1991.

- [77] K. C. Madan, A. D. Al. Nasser, and A. Q. Al. Masri. On $M^X/G_1, G_2/1$, queue with optional re-service. *App. Math. and Computation*, 152(1):71–88, 2004.
- [78] K. C. Madan and M. Al. Rawwash. On the $M^X/G/1$ queue with feedback and optional server vacations based on a single vacation policy. *App. Math. and Computation*, 2004.
- [79] H. Masuyama and T. Takine. Analysis and computation of the joint queue length distribution in a FIFO single-server queue with multiple batch Markovian arrival streams. *Stoch. Mod.*, 19(3):349–381, 2003.
- [80] J. Medhi. Waiting time distribution in a poisson queue with a general bulk service rule. *Management Science*, 21:777–782, 1975.
- [81] J. Medhi. Single server queueing system with Poisson input : A review of some recent development. *Advances in Combinatorial Method and Applications in Probability and Statistics (Ed. N. Balkrishnan)*, pages 317–338, 1997.
- [82] Q. H. Ming, H. Li, and Y. Q. Zhao. Ergodicity of the BMAP/PH/s/s+k retrial queue with ph-retrial times. *Queueing Systems*, 35:323–347, 2000.
- [83] C. Nunes N. Autunes and A. Pacheco. A queueing network with markov modulated input. *IEEE International Telecommunication Symposium*, 2001.
- [84] M. F. Neuts. *Matrix geometric solution in stochastic models*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [85] R. D. Nobel and H. C. Tijms. Optimal control for an $M^X/G/1$ queue with two service modes. *Op. Res.*, 113:610–619, 1999.
- [86] S. T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, 4:287–318, 1989.
- [87] H. J. Rossberg. Über die vertielung von wartereiten. *Mathematisch Nachrichten*, 30(1/2):1–16, 1965.
- [88] P. Salvador, A. Pacheco, and R. Valadas. Modeling IP traffic: joint characterization of packet arrivals and packet sizes using BMAPs. *Computer Networks*, 44:335–352, 2004.
- [89] M. Scholl and L. Kleinrock. On the $M/G/1$ queue with rest periods and certain service independent queueing disciplines. *Op. Res.*, 31(4):705–719, 1983.
- [90] R. Slosiar. Exact results for an ATM multiplexer with infinite queue loaded with batch markovian arrivals. in *Proc. of the Second Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks, IFIP TC6, Working Group 6.4.*, 1994.

- [91] R. Slosiar. Moments of the queue occupancy in an ATM multiplexer loaded with on/off sources. *IEEE, ACM TRANSACTIONS ON NETWORKING*, pages 754–759, 1994.
- [92] D. Stoyan. Ein Stetigkeitssatz für einlinige wartemodlle der Bedienungstheorie. *Math. Operations forschu. Statist.*, (2):103–111, 1977.
- [93] H. Takagi. *Queueing analysis - A foundation of performance evaluation: Discrete-Time Systems*, volume 3. North- Holland, New York, 1993.
- [94] L. Thomo. *The $M^X/G/1$ queues with vacation in the service time*. The Buletin of Natural Sciences, in Albanian, 1987.
- [95] H. Tijms. *Stochastic modeling and analysis in a computational approach*. Wiley, chichester, 1986.
- [96] H. C. Tijms and J. C. W. Van. Ommeren. Asymptotic analysis for buffer behavior in communication systems. *Prob. in the Eng. and Info. Scie.*, 3:1–12, 1989.
- [97] T. Tsuchiya and Y. Takahashi. On discrete-time single-server queues with Markov modulated batch Bernoulli input and finite capacity. *Op. Res. Soc. of Japan*, 36:29–45, 1993.
- [98] R. D. Van der Mei. *Waiting time distribution in polling systems with simultaneous batch arrivals*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [99] J. C. W. Van. Ommeren. Exponential expansion for the tail of the waiting time probability in the single server queue with batch arrivals. *Adv. App. Prob.*, 20:880–895, 1988.
- [100] J. C. W. Van. Ommeren. Simple approximation for the batch arrival $M^X/G/1$. *Op. Res.*, 38(4):678–689, 1990.
- [101] U. Vomefeld. Packet scheduling in SDMA based wireless networks. *IEEE INFO-COM'*, pages 2132–2139, 2000.
- [102] Y.-C. Wang, J.-A. Jiang, and R.-G. Chu. Drop behaviour of random early detection with discrete-time batch markovian arrival process. *IEEE Proc.-Commun*, 151(4):329–336, August 2004.
- [103] H. W. Lee, J. M. Moon, B. K. Kim, J. G. Park, and S. W. Lee. A simple eigenvalue method for low-order D-BMAP/G/1 queues. *App. Math. Modelling*, 29:277–288, (2005).
- [104] G. Wolfner and M. Telek. Numerical Analysis of queues with batch arrivals. *Performance Evaluation*, 41:179–194, 2000.
- [105] Z. Niu Y. Wu, T. Shu and J. Zheng. A vacation model with setup and close-down times for transmitter buffer of ARQ schemes. *IEEE International Symposium on*

-
- Personal, Indoor and Mobile Radio Communication Proceedings*, pages 2054–2058, 2003.
- [106] J. Zhao, C. Kok, and A. Ishfaq. Analysis of priority based scheduling of real-time video over 3G wireless network. *IEEE ICME*, pages 248–253, 2002.
- [107] Y. Takahashi Z. Niu. An extended queueing model for SVC-based IP-over-ATM networks and its analysis. *IEEE NNSF*, 1998.

Résumé

L'objectif de cette thèse est de montrer que sous certaines conditions la chaîne de Markov induite dans le système $M^{Geo(X)}/G/1$ est fortement v-stable, après perturbation de la distribution de la taille des groupes. Ceci revient à clarifier les conditions pour lesquelles les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système de files d'attente $M^X/G/1$ peuvent être approximées par celles correspondantes du système $M^{Geo(X)}/G/1$, et nous obtenons également les inégalités de stabilité.

Afin de mesurer les performances de la méthode de stabilité forte et estimer la précision de l'approximation dans une situation réelle (proche de la réalité), nous avons proposé un algorithme qui nous donne la performance de la méthode de stabilité forte. Une étude comparative avec les résultats obtenus par simulation a été réalisée.

Mots clefs: Système de files d'attente avec arrivées par groupes, Stabilité forte, Ergodicité uniforme, Perturbation, Taille des groupes.

Abstract

The aim of this purpose is to show that under some conditions, the embedded Markov chain in the system $M^{Geo(X)}/G/1$ is strongly v-stable, after perturbation of of the distribution of bulks'size. This tends to clarify the conditions for which the stationary and no stationary characteristics of queueing system $M^X/G/1$ can be approximates by those corresponding of $M^{Geo(X)}/G/1$ system. We also obtained the inequality of stability.

In order to measure the performance of the strong stability method and estimate the precision of the approximation in a real situations, we have proposed an algorithm which give us the performance of that method. A comparative study with the obtained results by simulation method have been realized.

Key words: Queueing system with batch arrivals, Strong stability, Uniform ergodicity, Perturbation, Bulk size.