

# Mémoire

Présenté par

**BOUZIT LOUCIF**

Pour l'obtention du diplôme de Magister

Filière : **GENIE CIVIL**

Option : **MATERIAUX ET STRUCTURES**

Thème

**MODELISATION DE L'AMORTISSEMENT EN DYNAMIQUE DES  
STRUCTURES**

Soutenu le : 20/10/2015

Devant le Jury composé de :

**Nom et Prénom**

**Grade**

Mr BERBOUCHA AHMED	MCA	Univ. de Bejaïa	Président
Mr HAMRI OKBA	MCA	Univ. de Bejaïa	Rapporteur
Mr TAHAKOURT ABDELKADER	Professeur	Univ. de Bejaïa	Examineur
Mr BOUAFIA YOUCEF	Professeur	Univ. de T.Ouzou	Examineur
Mr SEGHIR ABDELGHANI	MCA	Univ. de Bejaïa	Invité

**Année Universitaire : 2015-2016**



## Remerciements

Je tiens à remercier Mr. HAMRI OKBA qui a dirigé mon Mémoire de Magister et qui m'a accordé de sa confiance et de son assistance scientifique.

Je tiens à remercier Mr. SEGHIR ABDELGHANI pour son indéfectible aide et son dévouement le plus total.

Mes plus vifs remerciements vont également à Mr. BERBOUCHA Ahmed, TAHAKOURT Abdelkader et Mr. BOUAFIA Youcef pour avoir accepté de juger mon travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

A mon père et ma mère qui m'ont tout donné

A mes très chères sœurs bien aimées

A tous mes proches et amis

et ...

**RESUME**

La modélisation de l'amortissement en dynamique des structures, est basée sur la nature de la source de dissipation d'énergie. Les catégories de dissipation les mieux identifiées sont traduites par l'amortissement matériel pour les systèmes dissipatifs et l'amortissement radiatif pour les milieux non bornés.

Les deux modèles rencontrés dans la littérature qui reflètent aux mieux l'amortissement matériel, sont l'amortissement visqueux et l'amortissement hystérétique. Dans le modèle linéaire d'amortissement visqueux, l'énergie de dissipation dépend de la fréquence alors que l'expérience a toujours montrée l'inverse. Afin de surpasser ce défaut le modèle d'amortissement hystérétique a été proposé, cependant il s'est avéré que la réponse impulsionnelle de ce modèle est non causale. Même si dans la pratique le modèle linéaire d'amortissement hystérétique fournit des résultats satisfaisants, mais du point conceptuel, la causalité constitue un principe physique qui doit être respecté.

En général, et avec une certaine facilité, les équations du modèle linéaire d'amortissement visqueux sont exprimées dans le domaine temporel, alors que celles du modèle linéaire d'amortissement hystérétique sont écrites dans le domaine fréquentiel. La transcription de cette écriture fréquentielle vers le domaine temporel, pose certaines difficultés d'ordre mathématiques, qui sont souvent évitées aux pris de grands efforts.

Le problème d'amortissement radiatif se rencontre lorsque le front d'onde se propage en s'éloignant de la source qui génère les vibrations, et se dilate induisant une décroissance de l'amplitude des déplacements, tout en gardant constante l'énergie totale du mouvement. Cette atténuation apparente est désignée par l'amortissement radiatif, qui est aussi appelé amortissement géométrique. Un bref rappel des principes de ce modèle d'amortissement, propre aux milieux infinis a été dressé, soulignant ses domaines d'application, et les différents types de conditions aux limites appliquées sur les troncatures géométriques.

Ce travail s'est focalisé sur cette translation du domaine fréquentiel au temporel. Une procédure mathématique basée sur l'analyse complexe est proposée et a permis l'obtention d'expressions appropriées pour la réponse impulsionnelle du modèle d'amortissement hystérétique. Ces équations ont permis d'identifier le terme non causal de la réponse impulsionnelle et de discuter les paramètres qui l'influencent. De plus les expressions de la réponse sous excitations harmoniques ainsi que les spectres de la réponse sismique ont été exposés.

**Mots clés :**

Dynamique des structures, Modélisation numérique, Amortissement matériel, Amortissement visqueux, Amortissement hystérétique, Causalité, Réponse impulsionnelle, fonction de transfert, intégrales de convolution, spectre sismique, Propagation d'ondes, Amortissement radiatif, troncature géométrique.

**Abstract:**

Damping modeling in structural dynamics is based on the nature of the energy dissipation source. There are two well identified categories of damping: Material damping for dissipative systems, and radiation damping for unbounded media.

Viscous damping and hysteretic damping are the two models which are commonly used and which mostly reflect the material damping. In models based on linear viscous damping, the energy dissipation is frequency dependent, whereas the experiments have always shown the inverse. In order to overcome this drawback, hysteretic damping has been proposed. However, it has been well established that the transfer function of this model is non-causal. Even if it gives good results in practice, but from the conceptual point of view, the causality is one of the principles of physics that must be observed.

In general, equations of the linear viscous damping model are expressed in time domain, while those of the linear hysteretic damping model are written in the frequency domain. Transcription from the frequency domain to time domain induces some mathematical difficulties which are often avoided by using frequency solution.

Problems invoking radiation damping are encountered during wave propagation in an unbounded media, even non dissipative, the wave front spreads and gets away from the source which generates the vibrations. The amplitude of the motion decreases while the total energy remains constant over the disturbed volume. This visible attenuation in the motion amplitude is called geometric or radiation damping and has no link with the dissipative properties of the materials. A brief description of this kind of damping is addressed here with its applications.

This work is focused on this translation from frequency to time domain. A procedure based on mathematics complex analysis has been proposed which allow obtaining for the hysteretic damping model appropriate expression of transfer function, with the identification of the non-causal term. Parameters affecting the non-causality are identified and discussed in details. Moreover, expressions of time history response under harmonic excitation and spectral response have been exposed as well.

**Keywords:**

Structural dynamics, Numerical modeling, Material damping, Viscous damping, Hysteretic damping, causality, Transfer function, Impulse response, Convolution integrals, Seismic spectral, Wave propagation, Radiation damping, Geometric truncate.

## ملخص

تستند النماذج الرقمية لظاهرة التخميد في ديناميكية الهياكل على طبيعة مصدر تبديد الطاقة.

يعرف نوعان من مصادر تبديد الطاقة و يرتبطان بالتخميد المادي و التخميد الإشعاعي ( أو الهندسي) يعتبر التخميد اللزج و التخميد الهستيريتيكي النموذجان الأكثر استعمالا في الدراسات التي تأخذ بعين الاعتبار التخميد العادي .

يظهر النموذج الخطي للتخميد اللزج علاقة ترابط بين تبديد الطاقة في الهياكل وترددات القوى المؤثرة عليها , بينما أثبتت التجارب عكس ذلك من اجل تخطي هذا العيب , تم اقتراح النموذج الذي يعتمد على التخميد الهستيريتيكي ,الذي يؤدي إلى نتائج مرضية إلا انه لا يتطابق مع مبدأ السببية و هذا بشكل خطأ من الناحية النظرية.

بشكل عام و بسهولة نسبية يتم التعبير عن معادلات التخميد اللزج في المجال الزمني في حين تتم كتابة نموذج التخميد الهستيريتيكي في المجال الترددي.

نلتقي صعوبات و عراقيل كبيرة عند تحويل الكتابات الرياضية من المال الترددي إلى المجال الزمني لصيغات التخميد الهستيريتيكي.

تندرج هذه الدراسة في إطار هذه التحويلات الرياضية و قد تم الحصول على صيغ رياضية في المجال الزمني مع اعتزال و استخراج الطرف الذي يعبر عن عدم التطابق مع مبدأ السببية.

سمح لنا هذا الطرف بتشخيص العوامل المؤثرة عن الاسببية مع مناقشة مدى تأثيرها على الاستجابة لقوى أحادية إضافة إلى ذلك قد تم الحصول على صيغ الاستجابة الجيبية و الزلزالية

## الكلمات المفتاحية

ديناميكية الهياكل، التخميد المادي، الاسببية، التخميد اللزج، التخميد الهستيريتيكي، وانتشار الموجات، التخميد الإشعاعي، التخميد الهندسي

## SOMMAIRE

RESUME .....	iii
SOMMAIRE.....	vi
TABLES DES FIGURES .....	viii
LISTE DES SYMBOLES.....	x
ABREVIATIONS : .....	x
INTRODUCTION GENERALE .....	1
CHAPITRE 1. AMORTISSEMENT VISQUEUX.....	3
1.1 Oscillateur à un degré de liberté .....	4
1.1.1. Equation de mouvement .....	4
1.1.2. Fonction de transfert .....	5
1.1.3. Vibrations libres.....	6
1.1.4. Réponse à l'excitation impulsionnelle (impulsion de DIRAC).....	11
1.1.5. Décrément logarithmique.....	14
1.1.6. Taux d'amortissement en fonction du décrément logarithmique.....	14
1.1.7. Energie dissipée .....	15
1.1.8. Réponse à une excitation harmonique.....	17
1.1.9. Réponse à une excitation générale (intégrale de Duhamel).....	20
1.1.10. Réponse à un chargement sismique.....	23
1.1.11. Isolation vibratoire.....	29
1.2 Oscillateur à plusieurs degrés de liberté .....	31
1.2.1 Equation de mouvement .....	31
1.2.2 Découplage dans la base modale.....	31
1.2.3 Matrice d'amortissement .....	34
1.2.4 Analyse de la réponse dynamique.....	37
CHAPITRE 2. AMORTISSEMENT RADIATIF .....	39
2.1 Définition du problème et domaine d'application.....	40
2.2 Impédance des fondations superficielles .....	41
2.3 Définition des milieux non bornés .....	42
2.4 Modélisation des milieux non bornés et troncatures géométriques.....	44
2.5 Modélisation par éléments finis .....	45
2.6 Conditions aux limites .....	46
2.7 Modélisation par éléments de frontière.....	49



<b>CHAPITRE 3. AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE</b> .....	50
<b>3.1 Oscillateur à un degré de liberté</b> .....	53
<b>3.1.1 Module complexe</b> .....	53
<b>3.1.2 Coefficient d'amortissement hystérétique</b> .....	55
<b>3.1.3 Equation de mouvement</b> .....	57
<b>3.1.4 Evaluation de la réponse Impulsionnelle :</b> .....	58
<b>3.1.5 Evaluation du décrement logarithmique</b> .....	72
<b>3.1.6 Taux d'amortissement en fonction du décrement logarithmique</b> .....	72
<b>3.1.7 Amortissement hystérétique et non causalité</b> .....	73
<b>3.1.8 Influence de <math>m</math>, <math>\xi</math>, et <math>\omega_0</math>, sur la non causalité</b> .....	73
<b>3.1.9 Evaluation de la réponse sous excitation harmonique</b> .....	76
<b>3.1.10 Evaluation de la réponse sous chargement sismique</b> .....	82
<b>3.2 Oscillateur à plusieurs degrés de liberté</b> .....	86
<b>3.2.1. Formulation des matrices caractéristiques</b> .....	86
<b>3.2.2. Méthode de la superposition modale</b> .....	87
<b>3.2.3. Méthode spectrale modale</b> .....	88
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	89
<b>ANNEXES</b> .....	91
Travaux cités .....	97

**TABLES DES FIGURES**

Fig1.1. Modélisation des systèmes SDOF.

Fig1.2. Vibrations libres avec amortissement critique.

Fig1.3. Vibrations libres avec amortissement sous critique.

Fig1.4. Vibrations libres avec amortissement sur critique.

Fig1.5. Réponse impulsionnelle avec amortissement critique.

Fig1.6. Réponse impulsionnelle avec amortissement sous critique.

Fig1.7. Réponse impulsionnelle avec amortissement sur critique.

Fig.1.8. Energie dissipée par amortissement.

Fig1.9. Décomposition d'un chargement de forme quelconque

Fig.1.10. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta = 1$ .

Fig.1.11. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta < 1$ .

Fig.1.12. Evolution du taux d'amortissement de Rayleigh.

Fig.2.1. Problème interaction sol-structure.

Fig.2.2. Modélisation des fonctions d'impédance d'une fondation soumise à une excitation verticale.

Fig.2.3 : Degrés de libertés d'une fondation superficielle rigide.

Fig.2.4. subdivision du domaine fluide en sous domaines  $\Omega$  et  $\Omega_\infty$  sur une limite artificielle  $\Gamma_\infty$ .

Fig.2.5. Problèmes en deux dimensions d'un domaine fluide non bornée  $\Omega$  et  $\Omega_\infty$  sur une limite artificielle  $\Gamma_\infty$ .

Fig.2.6. Problèmes d'un plan semi infini.

Fig.2.7. modèle représentatif éléments finis/ éléments de frontières pour les calculs sismiques.

Fig.2.8. Modélisation par éléments finis de la propagation d'ondes dues à la vibration d'une fondation (Le modèle- gauche ; iso valeurs de déplacement – centre ; et champ de déplacement -droite) Fig.2.9. Frontières absorbantes-condition locales.

Fig.3.1. contrainte-déformation sous sollicitations cycliques.

Fig.3.2. Module complexe et coefficient de perte.

Fig.3.3. Modélisation de l'oscillateur SDOF-Amortissement hystérétique.

Fig.3.4. Domaine d'intégration usuel- Théorème des résidus.

- Fig.3.5. Contour d'intégration choisit pour  $I_1$ .
- Fig.3.6. Contour d'intégration choisit pour  $I_2$ .
- Fig.3.7. Réponse Impulsionnelle de l'oscillateur SDOF.
- Fig.3.8. Réponse Impulsionnelle non causale.
- Fig.3.9. Influence de la masse sur la non causalité.
- Fig.3.10. Influence de la fréquence propre  $\omega_0$  sur la non causalité.
- Fig.3.11. Influence de la fréquence propre  $\xi$  sur la non causalité.
- Fig.3.12. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta = 1$  (Au voisinage de  $t=0$ ).
- Fig.3.13. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta = 1$ .
- Fig.3.14. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta > 1$ .
- Fig.3.15. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta < 1$ .
- Fig.3.16. Réponse causale à l'excitation sinusoïdale  $\beta = 1$

**LISTE DES SYMBOLES**

$m$	masse
$c_v$	Constante d'amortissement visqueux
$k$	Rigidité
$\omega_0$	Pulsation propre
$c_{cr}$	Amortissement critique
$\xi$	Taux d'amortissement
$u$	Déplacement de la masse
$\omega_d$	Pulsation amortie par viscosité
$h_v$	Réponse impulsionnelle - Amortissement visqueux
$\delta_v$	Décrément logarithmique- Amortissement visqueux
$E_v$	Energie dissipée- Amortissement visqueux
$\omega$	Pulsation de la force d'excitation
$\beta$	Rapport des fréquences, (fréquence propre et fréquence d'excitation)
$D_v$	Facteur d'amplification dynamique
$u_{ve}$	Réponse à un chargement sismique- Amortissement visqueux
$S_D$	spectre de réponse du déplacement relatif- Amortissement visqueux
$M$	Matrice des masses concentrées
$C$	Matrice d'amortissement visqueux
$K$	Matrice de rigidité
$E^*$	Module complexe
$\eta$	Coefficient de perte - Amortissement hystérétique
$E_h$	Energie dissipée- Amortissement hystérétique
$c_h$	Constante d'amortissement hystérétique
$\omega_z$	Pulsation complexe
$u_h$	Réponse impulsionnelle - Amortissement hystérétique
$\omega_h$	Pulsation amortie - Amortissement hystérétique
$\delta_h$	Décrément logarithmique- Amortissement hystérétique
$u_{h0}$	Terme non causal
$u_{eh}$	Réponse à un chargement sismique- Amortissement hystérétique
$S_{Dh}$	Spectre de réponse du déplacement relatif- Amortissement hystérétique
$C_h$	Matrice d'amortissement hystérétique
$i$	Nombre complexe : $i^2 = -1$
$\text{sgn}$	Fonction signe
$\bar{u}$	Vecteur de déplacement (colonne)

**ABREVIATIONS :**

SDOF	Système à un degré de liberté
MDOF	Système à plusieurs degrés de liberté

### INTRODUCTION GENERALE

Lors de la propagation d'une onde de déformation dans un milieu élastique, une partie de l'énergie transportée se dissipe dans le milieu par divers mécanismes complexes tels que ceux dus aux glissements et frottements entre grains conduisant la transformation d'une partie de l'énergie élastique en chaleur (Dowick 2003; Sen 2009). Cette dissipation s'accompagne d'une atténuation dans le temps et dans l'espace des amplitudes des vibrations induites par la propagation. Les mécanismes de dissipation sont une source d'incertitude importante dans de nombreux problèmes d'ingénierie. En effet, il est souvent admis que, toute prédiction de l'amortissement des structures ou des sols doit être considérée avec prudence. De même, toute valeur d'amortissement obtenue en laboratoire est à utiliser avec précaution puisqu'on ne dispose d'aucune méthode de mesure in-situ permettant de quantifier d'une manière satisfaisante l'énergie dissipée. (Seghir 2010; Adhikari 2000; Dowick 2003; Sen 2009).

Dans la littérature, les trois principaux modèles linéaires d'amortissements utilisés sont: l'amortissement visqueux, l'amortissement hystérétique, et les modèles héréditaires. Ces derniers décrivent mieux les propriétés réelles des matériaux, mais ils sont beaucoup plus compliqués et souffrent de la compétitivité des deux premiers modèles (Bobrovnitskii 2013).

Dans le modèle linéaire d'amortissement visqueux, la vitesse est une fonction de la fréquence, par conséquent l'énergie dissipée l'est aussi. Cependant les mesures effectuées montrent que, pour la majorité des structures et des systèmes mécaniques, ceci n'est pas vrai. La raison est que dans de tels systèmes, l'amortissement est produit par les frictions internes, les déformations plastiques localisées, les écoulements plastiques. D'une manière plus stricte, le modèle d'amortissement visqueux n'est pas applicable (Humar 2002). Dans le but de surmonter ce défaut, d'autres modèles ont été proposés.

A la fin des années 1940, le modèle linéaire d'amortissement hystérétique a été introduit. L'idée de base, est le déphasage entre la contrainte et la déformation. De plus la dissipation d'énergie est indépendante de la fréquence du mouvement harmonique imposé. Il est également connu que le modèle d'amortissement hystérétique peut être utilisé uniquement pour les systèmes soumis aux mouvements harmoniques et que si l'on applique un chargement non périodique, la réponse sera non causale (Genta and Amati 2008).

Tous les travaux relatifs à l'amortissement hystérétique affirment que ce modèle s'exprime convenablement et facilement dans le domaine fréquentiel et s'accorde bien avec la pratique. Sa transcription au domaine temporel pose d'énormes difficultés mathématiques. De plus, souvent les expressions obtenues ne respectent pas, le principe de causalité.

## INTRODUCTION GENERALE

Le présent travail a pour objectif, d'aborder les phénomènes de dissipation en dynamique des structures. Pour l'amortissement matériel, l'évaluation de la réponse temporelle avec amortissement hystérétique, est établie avec succès pour les systèmes à un degré de liberté (SDOF) et les systèmes à plusieurs degrés de liberté (MDOF). Une expression mathématique a été proposée pour la réponse impulsionnelle du système à un degré de liberté (SDOF). Cette expression a permis d'identifier le terme non causal et de discuter les paramètres qui l'influencent. De plus les expressions de la réponse sous excitations harmoniques ainsi que les spectres de la réponse sismique ont été exposés. Dans le but de valider les équations obtenues pour l'amortissement hystérétique, des comparaisons à l'amortissement visqueux ont été faites pour les cas de chargements étudiés et les résultats sont reportés en Annexe I.

Sous forme de rappels, le premier chapitre concerne l'amortissement visqueux. La réponse temporelle sous chargements, impulsionnel, harmonique et sismique, a été exposée pour les systèmes SDOF. La formulation des matrices caractéristiques, le découplage des équations à plusieurs degrés de libertés et l'analyse par la méthode de superposition modale et la méthode modale spectrale ont été exposés pour les systèmes MDOF.

Le deuxième chapitre aborde l'amortissement radiatif, un bref rappel des principes de ce modèle d'amortissement, propre aux milieux non bornés, a été dressé, soulignant ses domaines d'application, et les différents types de conditions aux limites appliquées sur les troncatures géométriques.

Le troisième chapitre traite l'oscillateur SDOF sous amortissement hystérétique. Une procédure mathématique basée sur l'analyse complexe est proposée et a permis d'obtenir la réponse impulsionnelle. Le caractère non causal, de la réponse obtenue y est discuté, où un décrétement logarithmique est proposé. Les intégrales de convolution ont permis d'établir la réponse temporelle du système aux cas de charges, harmoniques et sismiques. Les équations obtenues ont été généralisées aux systèmes MDOF, où la réponse forcée de l'oscillateur a été évaluée pour les équations découplées, par la méthode de superposition modale et par la méthode modale spectrale.

Le manuscrit est clôturé par une conclusion générale qui résume le travail établi et mentionne les principaux résultats obtenus ainsi que quelques perspectives.

# CHAPITRE 1. AMORTISSEMENT VISQUEUX

### Introduction

En dépit de l'importance des recherches, la compréhension des mécanismes d'amortissement reste assez primitive. La raison majeure, et par contraste avec les forces d'inertie et de rigidité, est en général pas claire. Les variables d'états qui sont pertinentes pour déterminer les forces d'amortissement ne sont pas bien définies. En outre, il semble que dans une situation réaliste, ce sont souvent les nœuds de la structure qui sont plus responsables de la dissipation d'énergie que le matériau solide (Adhikari 2000). Mais la difficulté réside dans la représentation de tous ces minuscules mécanismes dans les différentes parties de la structure d'une manière unifiée. Même dans de nombreux cas, ces mécanismes se révèlent être localement non linéaires, nécessitant une technique de linéarisation équivalente pour une analyse globale. Une méthode bien connue pour se débarrasser de tous ces problèmes est d'utiliser le soi-disant 'amortissement visqueux'. Cette approche a été introduite par Rayleigh (1877) par l'intermédiaire de sa célèbre "fonction de dissipation", une expression quadratique pour la dissipation d'énergie avec une matrice symétrique de coefficients, appelée "matrice d'amortissement" (Adhikari 2000). Une autre idéalisation, a également été élaborée par Rayleigh, est d'assumer la matrice d'amortissement, comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité (Anderson and Naeim 2012). Depuis son introduction, ce modèle a été largement utilisé et il est connu sous le nom de "Amortissement de Rayleigh". Avec un tel modèle d'amortissement, la procédure d'analyse modale, initialement conçue pour les systèmes non amortis, peut être utilisée pour analyser les systèmes amortis d'une manière très semblable.

Ce chapitre est présenté sous forme d'un rappel général des équations de mouvement de l'oscillateur linéaire à un degré de liberté avec amortissement visqueux. Il comprend la fonction de transfert de l'oscillateur, la réponse dans le cas des vibrations libres, la réponse Impulsionnelle et la réponse forcée pour le cas des excitations harmoniques et sismiques.

## 1.1 Oscillateur à un degré de liberté

### 1.1.1. Equation de mouvement

Soit un oscillateur linéaire à un degré de liberté, soumis à un système de forces extérieures, comme l'indique la (fig1.1). Les forces auxquelles la masse  $m$  est soumise varient en fonction du temps. Ces forces sont :

- La force d'inertie, notée  $f_i(t)$ : produit de la masse et de l'accélération.
- La force de rappel du ressort, notée  $f_s(t)$ : produit de sa rigidité et du déplacement de la masse  $m$ .
- La force développée dans l'amortisseur, notée  $f_D(t)$ : produit de la constante d'amortissement et de la vitesse de la masse  $m$ , avec  $c_v$ , constante d'amortissement visqueux.

Toute structure à un degré de liberté, peut être idéalisée et réduite à l'oscillateur qu'on vient de décrire. La masse de la structure est concentrée en un point, tandis que, le ressort et l'amortisseur reproduisent respectivement, la rigidité et l'amortissement de la structure.

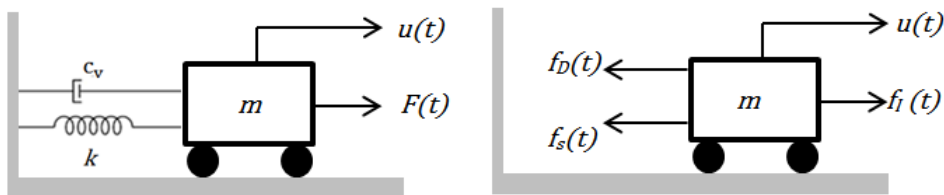


Fig1.1. Modélisation des systèmes SDOF

L'équation différentielle régissant le mouvement peut être obtenue, en appliquant le principe fondamental de la dynamique. Cette équation est donnée par :

$$f_i(t) + f_D(t) + f_s(t) = F(t) \quad 1.1$$

$$m\ddot{u} + c_v\dot{u} + ku = F(t) \quad 1.2$$

$$\ddot{u} + \frac{c_v}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{F(t)}{m}$$

On obtient alors l'équation différentielle régissant le mouvement de l'oscillateur:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u = \frac{F(t)}{m} \quad 1.3$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ Est le carré de la pulsation propre}$$

$$\xi = \frac{c_v}{2m\omega_0} \text{ Est le taux d'amortissement critique donnée par } c_{cr} = 2m\omega_0$$



## 1.1.2. Fonction de transfert

La fonction de transfert représente la réponse de l'oscillateur, initialement au repos, lorsqu'il est soumis à l'impulsion de Dirac. Pour l'obtenir, on applique la transformée de Laplace à (1.3). La transformée inverse de celle-ci nous donne la réponse Impulsionnelle :

$$TL[\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u] = TL\left[\frac{F(t)}{m}\right] \quad 1.4$$

La table des transformées de Laplace, nous permet d'écrire les transformées usuelles pour chaque terme de (1.4) :

$$TL[\ddot{u}] = p^2X(s) - p \cdot u_0 - \dot{u}_0$$

$$TL[\dot{u}] = pX(s) - u_0$$

$$\omega_0^2 TL[u] = \omega_0^2 X(s)$$

$$TL\left[\frac{F(t)}{m}\right] = \frac{F(s)}{m}$$

$$X(s) = TL[u(t)]$$

L'équation (1.4) devient alors :

$$(s^2X(s) - s \cdot u_0 - \dot{u}_0) + 2\xi\omega_0(sX(s) - u_0) + \omega_0^2X(s) = \frac{F(s)}{m}$$

$$X(s)(s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2) - [\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)] = \frac{F(s)}{m}$$

$$X(s)(s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2) = \frac{F(s)}{m} + [\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)] \quad 1.5$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{m(s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2)} + \frac{[\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)]}{(s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2)} \quad 1.6$$

Ainsi, on obtient la solution X(s), dans le domaine fréquentiel (Drapier 2009):

$$X(s) = \frac{F(s)}{Y(s)} + m \frac{CI(s)}{Y(s)} = H(s) + m \frac{CI(s)}{Y(s)} \quad 1.7$$

On note :

Y(s): Impédance opérationnelle.

H(s): Réponse forcée du système dans le domaine de Laplace.

La réponse donnée par (1.7), est composée de deux termes, le premier vient de l'excitation F(s), et le deuxième terme vient des conditions initiales CI(s), trois situations peuvent se présenter :

- Pour des conditions initiales au repos, (1.7) décrit les vibrations forcées de l'oscillateur, soumis à la force F(s), et si F(s)=1, X(s) représente la fonction de transfert de l'oscillateur dans le domaine de Laplace.
- Dans le cas où F(s) est nulle, (1.7) décrit les vibrations libres de l'oscillateur avec des conditions initiales notées u<sub>0</sub> et u̇<sub>0</sub>.
- Si le système est soumis à la force F(s), et pour des conditions initiales non nulles, on obtient la combinaison de la solution particulière et de la solution homogène du système.

## 1.1.3. Vibrations libres

Dans le cas des vibrations libres  $F(s)$  est nulle, l'équation (1.7) devient :

$$X(s) = \frac{\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)}{s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2} \quad 1.8$$

L'inverse de la transformée de Laplace de (1.8) nous donne la solution dans le domaine temporelle. Cette solution dépend des valeurs de  $\xi$ , et des conditions initiales. Pour calculer l'inverse, on cherche d'abord, les racines  $r_1$  et  $r_2$  du polynôme  $y(s)$  donné par le dénominateur de  $X(s)$

$$\begin{aligned} y(s) &= s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2 = 0 \\ r_1 \text{ et } r_2, &\text{ sont les racines du polynôme } x(s) \text{ caractéristique :} \\ r_1 &= -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \\ r_1 &= -\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad \text{et} \quad r_2 = -\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{aligned} \quad 1.9$$

Le taux d'amortissement critique  $\xi$ , déterminera le type de réponse que peut avoir l'oscillateur. Trois cas peuvent se présenter :

- **Système à amortissement critique  $\xi = 1$**

L'amortissement critique est la valeur du taux d'amortissement au-dessous de laquelle le système peut osciller, le polynôme  $y(s)$  admet une racine double et réelle notée  $r_{1,2}$ , avec :

$$r_{1,2} = -\omega_0$$

On réécrivant  $y(s)$ , (1.8) devient :

$$X(s) = \frac{\dot{u}_0 + u_0(s + \xi\omega_0)}{(s + \omega_0)^2} = \dot{u}_0 \left[ \frac{1}{(s + \omega_0)^2} \right] + u_0 \left[ \frac{(s + 2\omega_0)}{(s + \omega_0)^2} \right] \quad 1.10$$

On décompose d'avantage pour obtenir les termes des tables des transformées usuelles de Laplace

$$X(s) = \dot{u}_0 \left[ \frac{1}{(s + \omega_0)^2} \right] + 2u_0\omega_0 \left[ \frac{1}{(s + \omega_0)^2} \right] + u_0 \left[ \frac{s}{(s + \omega_0)^2} \right] \quad 1.11$$

D'où la transformée inverse :

$$u_v(t) = L^{-1}[X(s)] = \dot{u}_0 te^{-\omega_0 t} + 2u_0\omega_0 te^{-\omega_0 t} + u_0(1 - \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad 1.12$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

Les vibrations libres sous amortissement critique, sont décrites par la relation suivante

$$u_v(t) = [\dot{u}_0 + u_0(1 + \omega_0)]e^{-\omega_0 t} \quad 1.13$$

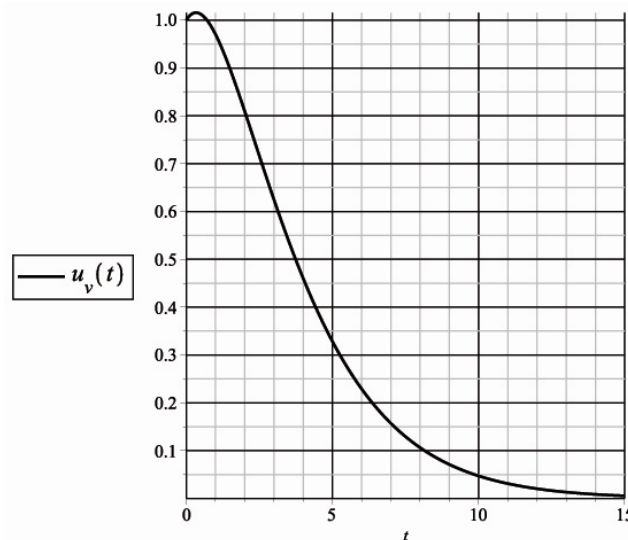


Fig1.2. Vibrations libres avec amortissement critique

- **Système sous amortis  $\xi < 1$  :**

Le polynôme  $y(s)$  admet deux racines  $r_1$  et  $r_2$  complexes et conjuguées l'une par rapport à l'autre.

$$r_1 = -\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

$$r_1 = -\xi\omega_0 + i\omega_d \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - i\omega_d$$

On définit la pulsation amortie  $\omega_d$  du système avec :

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

On réécrivant  $y(s)$  pour un système sous amortis, (1.8) devient, en suivant les mêmes étapes que pour (1.10) à (1.12)

$$X(s) = \frac{\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)}{s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2} = \frac{\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)}{[s + (\xi\omega_0)^2] + \omega_d^2} \quad 1.14$$

On décompose d'avantage pour obtenir les termes des tables des transformées usuelles de Laplace

$$X(s) = \frac{\dot{u}_0}{[s + (\xi\omega_0)^2] + \omega_d^2} + \frac{u_0(s + \xi\omega_0)}{[s + (\xi\omega_0)^2] + \omega_d^2} + \frac{u_0\xi\omega_0}{[s + (\xi\omega_0)^2] + \omega_d^2} \quad 1.15$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

$$X(s) = \frac{\dot{u}_0}{\omega_d} \frac{\omega_d}{[s + (\xi\omega_0)^2] + \omega_d^2} + \frac{u_0(s + \xi\omega_0)}{[s + (\xi\omega_0)^2] + \omega_d^2} + \frac{u_0\xi\omega_0}{\omega_d} \frac{\omega_d}{[s + (\xi\omega_0)^2] + \omega_d^2} \quad 1.16$$

D'où la transformée inverse :

$$u_v(t) = L^{-1}[X(s)] = \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + \frac{u_0\xi\omega_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + u_0 \cos \omega_d t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad 1.17$$

$$u_v(t) = \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + \frac{u_0\xi\omega_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + u_0 \cos \omega_d t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad 1.18$$

$$u_v(t) = \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + \frac{u_0\xi\omega_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + u_0 \cos \omega_d t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad 1.19$$

Les vibrations libres sous amortissement sous critique, sont décrites par la relation suivante :

$$u_v(t) = \left( u_0 \cos \omega_d t + \left[ \frac{\dot{u}_0 + u_0\xi\omega_0}{\omega_d} \right] \sin \omega_d t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad 1.20$$

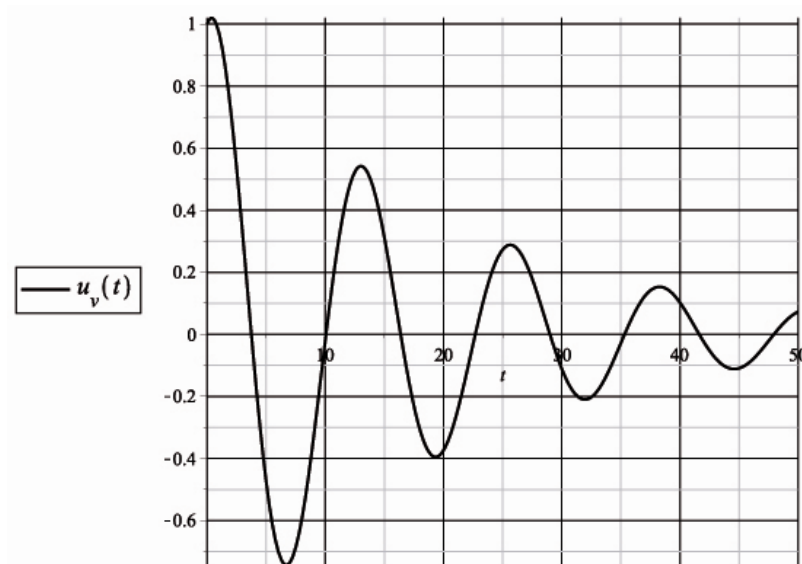


Fig1.3. Vibrations libres avec amortissement sous critique

• Système suramorti  $\xi > 1$

Le taux d'amortissement  $\xi$ , est supérieur l'amortissement critique,  $y(s)$  admet deux racines réelles différentes  $r_1$  et  $r_2$  avec :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \widetilde{\omega}_d \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \widetilde{\omega}_d$$

$$\widetilde{\omega}_d = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Pour un système sur amortis, (1.8) devient :

$$X(s) = \frac{\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)}{s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2} = \frac{\dot{u}_0 + u_0(s + 2\xi\omega_0)}{(s - r_1)(s - r_2)} \quad 1.21$$

On décompose d'avantage pour obtenir les termes des tables des transformées usuelles de Laplace

$$X(s) = \dot{u}_0 \frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)} + u_0 \frac{s}{(s - r_1)(s - r_2)} + u_0 2\xi\omega_0 \frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)} \quad 1.22$$

$$X(s) = \dot{u}_0 \frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)} + u_0 \frac{s}{(s - r_1)(s - r_2)} + u_0 2\xi\omega_0 \frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)} \quad 1.23$$

D'où la transformée inverse :

$$u_v(t) = L^{-1}[X(s)] = \dot{u}_0 \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2} \right] + u_0 \left[ \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} \right] + u_0 2\xi\omega_0 \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2} \right] \quad 1.24$$

$$u_v(t) = \frac{2\dot{u}_0}{r_1 - r_2} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] + u_0 \left[ \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} \right] + \frac{4u_0 \xi \omega_0}{r_1 - r_2} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] \quad 1.25$$

on a:  $r_1 - r_2 = 2\widetilde{\omega}_d$  et  $r_2 - r_1 = -2\widetilde{\omega}_d$

$$u_v(t) = \frac{2\dot{u}_0}{2\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] - u_0 \left[ \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{2\widetilde{\omega}_d} \right] + \frac{4u_0 \xi \omega_0}{2\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] \quad 1.26$$

$$u_v(t) = \frac{\dot{u}_0}{\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] - \frac{u_0}{\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{2} \right] + \frac{2u_0 \xi \omega_0}{\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] \quad 1.27$$

$$u_v(t) = \frac{\dot{u}_0}{\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] - \frac{u_0}{\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{2} \right] + \frac{2u_0 \xi \omega_0}{\widetilde{\omega}_d} \left[ \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right] \quad 1.28$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

Les vibrations libres sous amortissement sur critique, sont décrites par la relation suivante :

$$u_v(t) = \left( u_0 \cosh \tilde{\omega}_d t + \left[ \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\tilde{\omega}_d} \right] \sinh \tilde{\omega}_d t \right) e^{-\xi \omega_0 t} \quad 1.29$$

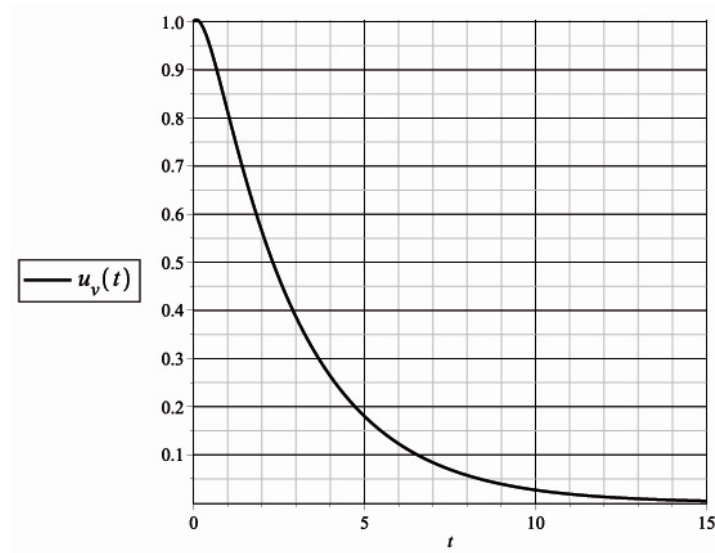


Fig1.4. Vibrations libres avec amortissement sur critique

## 1.1.4. Réponse à l'excitation impulsionnelle (impulsion de DIRAC)

Le système, initialement au repos, est soumis à l'impulsion de Dirac notée  $\delta(t)$ . La réponse obtenue représente la fonction de transfert de l'oscillateur dans le domaine de Laplace. L'équation (1.7) se réduit dans ce cas à :

$$X(s) = \frac{F(s)}{Y(s)} \quad 1.30$$

Avec

$$F(s) = \text{TL}[\delta(t)] = 1 \quad 1.31$$

Donc

$$X(s) = \frac{1}{m(s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2)} \quad 1.32$$

L'inverse de la transformée de Laplace de (1.32) nous donne la solution dans le domaine temporel. Cette solution dépend des valeurs de  $\xi$ .

Pour calculer l'inverse de (1.32), on cherche d'abord, les racines  $r_1$  et  $r_2$  de l'impédance opérationnelle. On pose alors  $Y(s) = 0$

$$s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2 = 0$$

$r_1$  et  $r_2$ , sont les racines du polynôme caractéristique :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$r_1 = -\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad \text{et} \quad r_2 = -\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$$

La réponse impulsionnelle peut avoir trois formes, ceci dépend des valeurs de  $\xi$

- **Système à amortissement critique  $\xi = 1$**

Pour un amortissement critique (1.32) devient :

$$X(s) = \frac{1}{m(s + \omega_0)^2} \quad 1.33$$

La transformée inverse de Laplace appliquée à (1.33) nous donne la réponse impulsionnelle :

$$h_v(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{m(s + \omega_0)^2}\right] \Rightarrow u_v(t) = \frac{t}{m} e^{-\omega_0 t} \quad 1.34$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

$$h_v(t) = \frac{t}{m} e^{-\omega_0 t} \quad 1.35$$

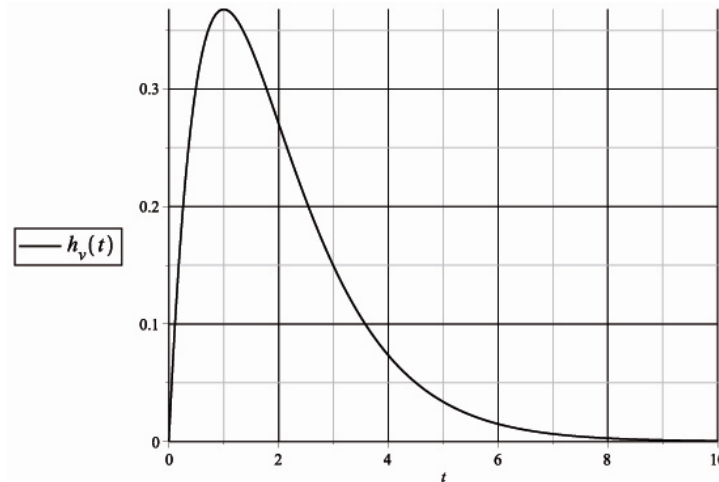


Fig1.5. Réponse impulsionnelle avec amortissement critique

- **Système sous amortis  $\xi < 1$  :**

Le système oscillera avec la pulsation amortie  $\omega_d$  où :

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

On injecte  $\omega_d$  dans (1.32) et on obtient :

$$X(s) = \frac{\omega_d}{m\omega_d[(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_d^2]} \quad 1.36$$

La transformée inverse de (1.36) nous donne la réponse impulsionnelle de l'oscillateur et elle est donnée par :

$$h_v(t) = \frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad 1.37$$

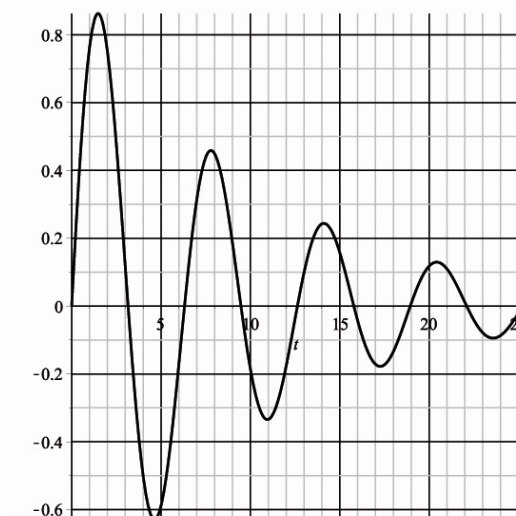


Fig1.6. Réponse impulsionnelle avec amortissement sous critique



## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

- Système sur amortis  $\xi > 1$

Le taux d'amortissement  $\xi$ , est supérieur à l'amortissement critique, l'impédance opérationnelle admet deux racines réelles différentes  $r_1$  et  $r_2$  avec :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \tilde{\omega}_d \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \tilde{\omega}_d$$

$$\tilde{\omega}_d = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Dans ce cas, (1.32) devient :

$$X(s) = \frac{1}{m(s^2 + s2\xi\omega_0 + \omega_0^2)} = \frac{1}{m(s - r_1)(s - r_2)} \quad 1.38$$

$$h_v(t) = \frac{1}{m(r_1 - r_2)}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) \quad 1.39$$

$$h_v(t) = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2} \right) = \frac{1}{m\tilde{\omega}_d} \left( \frac{e^{(-\xi\omega_0 + \tilde{\omega}_d)t} - e^{(-\xi\omega_0 - \tilde{\omega}_d)t}}{2} \right) \quad 1.40$$

$$h_v(t) = \frac{1}{m\tilde{\omega}_d} \sinh(\tilde{\omega}_d t) \quad 1.41$$

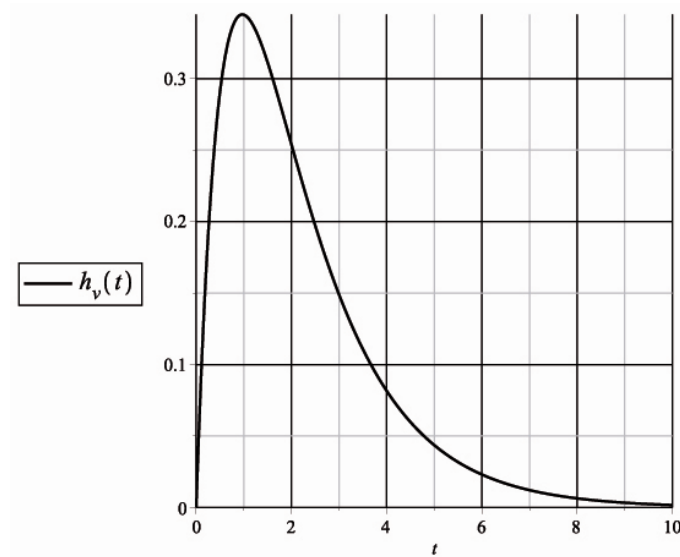


Fig1.7. Réponse impulsionnelle avec amortissement sur critique

### 1.1.5. Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique établit pour l'oscillateur linéaire sous amorti. Sa réponse impulsionnelle est donnée par :

$$u_v(t) = \frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t}$$

Le décrément logarithmique est définie par :

$$\delta_v = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \quad 1.42$$

$$u_n = \frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{m\omega_d} \sin[\omega_d(t + T_D)] e^{-\xi\omega_0(t+T_D)}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t}}{\frac{1}{m\omega_d} \sin[\omega_d(t + T_D)] e^{-\xi\omega_0(t+T_D)}} = \frac{1}{e^{-\xi\omega_0 T_D}} = e^{\xi\omega_0 T_D} \quad 1.43$$

$$\delta_v = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln(e^{\xi\omega_0 T_D}) = \xi\omega_0 T_D$$

$$\delta_v = \xi\omega_0 T_D = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_d} = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta_v = \xi\omega_0 T_D = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_d} = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta_v = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad 1.44$$

### 1.1.6. Taux d'amortissement en fonction du décrément logarithmique

On peut exprimer le taux d'amortissement en fonction du décernement logarithmique comme suit :

$$\delta_v = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad 1.45$$

$$\delta_v^2 = \frac{(2\pi\xi)^2}{(1-\xi^2)} \Rightarrow \delta_v^2(1-\xi^2) = 4\pi^2\xi^2$$

$$\xi = \frac{\delta_v}{\sqrt{4\pi^2 + \delta_v^2}} \quad 1.46$$

## 1.1.7. Energie dissipée

S'il existait un instrument qui nous permet de mesurer la relation entre la force d'excitation et la réponse en déplacement qui en résulte, le taux d'amortissement peut être évalué à partir de la réponse à une harmonique en régime permanent conduit uniquement à la résonance. Cette méthode consiste à établir la résonance en ajustant la fréquence d'entrée jusqu'à ce qu'on obtienne une réponse en déplacement déphasée de  $90^\circ$  par rapport à la force appliquée. A la résonance, la force appliquée équilibre exactement la force d'amortissement de sorte que si l'on trace pour un cycle de vibrations la relation force appliquée / réponse en déplacement (fig.1.8), on obtient une ellipse dans le cas où le système possède réellement un amortissement linéaire visqueux. Dans ce cas, le coefficient d'amortissement visqueux peut être déterminé à partir de la force d'amortissement maximale. Si l'amortissement n'est pas de forme linéaire visqueux comme supposé auparavant, et qu'il est non linéaire, l'allure de la courbe force appliquée/ réponse en déplacement obtenue par la méthode qu'on vient de citer, ne sera pas elliptique; mais elle prendra plutôt la forme du solide hachuré (fig.1.8). Néanmoins, l'apport d'énergie par cycle, qui est égale à la perte d'énergie par amortissement pour un cycle  $E_v$ , est égal à l'aire du diagramme force/déplacement. Ceci permet d'évaluer un coefficient d'amortissement visqueux équivalent pour l'amplitude de déplacement équivalente, qui lorsqu'il est utilisé sous forme de l'amortissement linéaire visqueux dissipera la même quantité d'énergie par cycle. Ce coefficient d'amortissement équivalent est associé à un schéma elliptique force/déplacement ayant la même surface  $E_v$  que celle mesurée sur le diagramme non elliptique. Le modèle linéaire d'amortissement visqueux est utilisé couramment car il conduit à une forme commode de l'équation de mouvement. Cependant il a un sérieux défaut, car l'énergie dissipée lors d'un cycle pour une amplitude donnée, est dépendante de la fréquence d'excitation  $\omega$  ou de la réponse. Cette dépendance est contradictoire avec un grand nombre d'expérience qui indique que la perte d'énergie est essentiellement indépendante. Par conséquent, il est souhaitable de modéliser la force d'amortissement de façon à éliminer cette dépendance à la fréquence. Ceci peut être accompli en utilisant l'amortissement sous sa forme hystérétique à la place de l'amortissement visqueux (Clough and Penzien 1995).

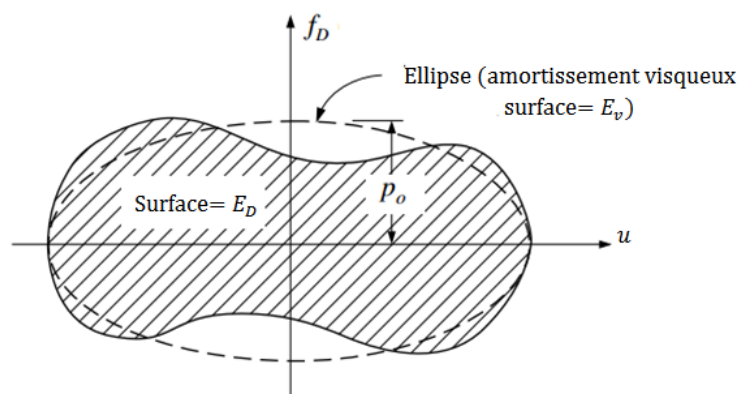


Fig.1.8. Energie dissipée par amortissement (Clough and Penzien 1995)

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

L'énergie dissipée par viscosité d'un oscillateur linéaire en un cycle de vibration s'écrit comme suit :

$$E_v = \int_0^T F_d du = \int_0^T F_d \frac{du}{dt} dt = \int_0^T F_d \dot{u} dt = \int_0^T (c_v \dot{u}) \dot{u} dt \quad 1.47$$

$$E_v = \int_0^T c_v \dot{u}^2 dt \quad 1.48$$

On pose

$$u = U_0 \sin \omega t \text{ et } \dot{u} = U_0 \omega \cos \omega t \quad 1.49$$

On injecte les deux équations précédentes dans (1.48), on obtient alors :

$$E_v = \int_0^T c_v U_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t dt = c_v U_0^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt \quad 1.50$$

Pour des fréquences positives, l'énergie dissipée par amortissement visqueux pour un cycle de vibration s'écrit comme suit :

$$E_v = \pi c_v U_0^2 \omega$$

Selon (Crandall 1970), Pour tenir compte des fréquences négatives on réécrit l'énergie dissipée comme suit :

$$E_v = \pi c_v U_0^2 |\omega| \quad 1.51$$

## 1.1.8. Réponse à une excitation harmonique

### 1.3.1. Excitation Sinusoïdale

Dans le cas d'une sollicitation harmonique sous forme sinusoïdale où  $\omega$ , est la fréquence de la force d'excitation et  $p_0$  son amplitude, l'équation différentielle régissant le mouvement est donné par (1.3) devient :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u = \frac{p_0}{m} \sin \omega t \quad 1.52$$

On cherche à obtenir la réponse de (1.52) pour le cas des systèmes sous amortis, puisqu'ils représentent la majorité des structures en Génie civil.

La solution homogène de (1.52) est donnée par (1.20) :

$$u_{vh}(t) = (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad 1.53$$

La solution particulière de (1.52) s'écrit sous la forme suivante:

$$u_{vp}(t) = G_1 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t \quad 1.54$$

On pose le rapport des fréquences  $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$ . en remplaçant (1.54) dans (1.52), on obtient les constantes  $G_1$  et  $G_2$ . La solution particulière qui représente la réponse en régime permanent s'écrit alors sous la forme suivante:

$$u_{vs}(t) = \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] [(1 - \beta^2) \sin \omega t - 2\xi\beta \cos \omega t] \quad 1.55$$

La solution totale  $u_{vs}(t)$  est donnée par la somme de la solution homogène  $u_{vh}(t)$  et particulière  $u_{vp}(t)$  :

$$u_{vs}(t) = (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t} + \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] [(1 - \beta^2) \sin \omega t - 2\xi\beta \cos \omega t] \quad 1.56$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

Le calcul exact des constantes A et B pour des conditions initiales  $u_0$  et  $\dot{u}_0$ , est donné par la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_0 = u_{vs}(t = 0) \\ \dot{u}_0 = \dot{u}_{vs}(t = 0) \end{cases}$$

On obtient alors les valeurs de A et B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\xi\beta p_0 + ku_0[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \\ B &= \frac{p_0\varpi(\beta^2 - 1) + 2p_0\xi^2\varpi + k(\dot{u}_0 + u_0\xi\omega_0)[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{k\omega_d[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \end{aligned} \quad 1.57$$

Les constantes A et B sont décomposées de façon à séparer les termes dépendant et indépendant des conditions initiales  $u_0$  et  $\dot{u}_0$  et on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\xi\beta p_0}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} + \frac{u_0[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \\ B &= \frac{p_0\varpi(\beta^2 - 1) + 2p_0\xi^2\varpi}{k\omega_d[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} + \frac{(\dot{u}_0 + u_0\xi\omega_0)[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{\omega_d[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \end{aligned} \quad 1.58$$

La réponse de l'oscillateur linéaire sous amortissement visqueux à une excitation sinusoïdale est donnée par (1.59) :

$$\begin{aligned} u_{vs}(t) &= \left( \frac{u_0[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \cos \omega_d t + \frac{(\dot{u}_0 + u_0\xi\omega_0)[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{\omega_d[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \sin \omega_d t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \\ &+ \left( \frac{2\xi\beta p_0}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \cos \omega_d t + \left[ \frac{p_0\varpi(\beta^2 - 1) + 2p_0\xi^2\varpi}{k\omega_d[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \right] \sin \omega_d t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \\ &+ \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] [(1 - \beta^2) \sin \varpi t - 2\xi\beta \cos \varpi t] \end{aligned} \quad 1.59$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

### 1.3.2. Réponse à la résonance

La résonance est un phénomène qui se produit lorsque la fréquence propre de la structure est égale à la fréquence de la force d'excitation. Le rapport des fréquences  $\beta$  est alors égal à l'unité.

Donc  $\varpi = \omega_0 \Rightarrow \beta = 1$

A la résonance le facteur d'amplification dynamique  $D_v$  devient :

$$D_v = \frac{1}{2\xi}$$

Afin de bien reproduire le phénomène de résonance, il est important d'inclure la solution homogène contenant les conditions initiales. La réponse  $u_{rs}(t)$ , donnée à la résonance s'écrit sous la forme suivante [9]:

$$u_{rs}(t) = (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) e^{-\xi \omega_0 t} - \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi\beta} \cos \varpi t$$

Pour des conditions initiales au repos, après calculs des constantes A et B :

$$u_{rs}(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[ \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) e^{-\xi \omega_0 t} - \cos \varpi t \right] \quad 1.60$$

Pour des petites valeurs de  $\xi$ , (1.60) devient :

$$u_{rs}(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} [(e^{-\xi \omega_0 t} - 1) - \cos \omega_0 t] \quad 1.61$$

- Facteur de réponse  $R(t)$ :

$$R(t) = \frac{u_{rs}(t)}{v_{st}} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[ \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) e^{-\xi \omega_0 t} - \cos \omega_0 t \right] \quad 1.62$$

**1.1.9. Réponse à une excitation générale (intégrale de Duhamel)**

Dans le but de rechercher la réponse  $u_{vf}(t)$ , à un chargement quelconque  $f(t)$ , on calcul l'inverse de la transformée de Laplace de (1.6) :

$$u_{vf}(t) = L^{-1}[X(p)] = L^{-1}\left(\frac{F(p)}{m(p^2 + p2\xi\omega_0 + \omega_0^2)} + \frac{\dot{u}_0 + u_0(p + 2\xi\omega_0)}{(p^2 + p2\xi\omega_0 + \omega_0^2)}\right) \quad 1.63$$

$$u_{vf}(t) = \int_0^t h_v(t - \tau) f(\tau) d\tau + \left(u_0 \cos \omega_d t + \left[\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\omega_d}\right] \sin \omega_d t\right) e^{-\xi \omega_0 t} \quad 1.64$$

Le premier terme de (1.64) est appelé intégrale de convolution ou bien intégrale de Duhamel, où  $h_v(t - \tau)$ , est la réponse Impulsionnelle donnée par (1.37) et  $f(\tau)$  la force d'excitation, quant au second terme, il dépend des conditions initiales et il représente la solution transitoire qui disparaît avec le temps.

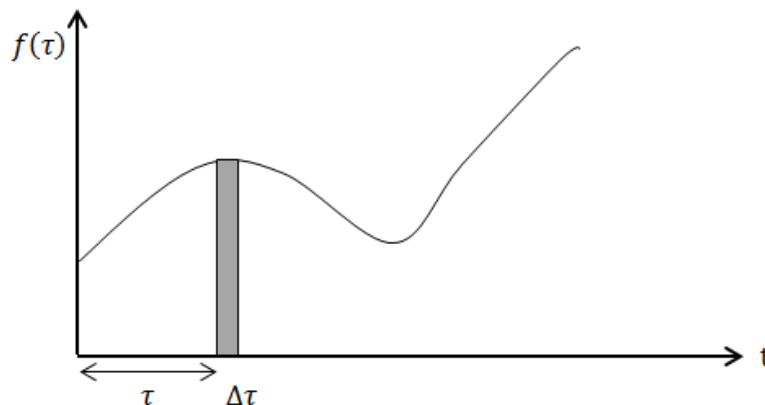


Fig1.9. Décomposition d'un chargement de forme quelconque

Dans le cas où  $f(t)$ , à une forme générale, les séries de Fourier nous permettent de décomposer  $f(t)$  en une série d'impulsions de très courte durée, une fois la réponse obtenue pour chaque impulsion, leur somme nous donne la réponse totale.

Si le système est considéré initialement au repos, la réponse de l'oscillateur pour un chargement quelconque s'obtient par le calcul des intégrales de convolution.



## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

### 1.3.3. Excitation en sinusoïdale :

Le système est supposé être au repos, et il est excité par une force harmonique sous forme sinusoïdale où  $\varpi$ , est la fréquence de la force d'excitation et  $p_0$  son amplitude. La réponse de l'oscillateur est donnée par l'intégrale de Duhamel, appliquée à la réponse Impulsionnelle donnée par (1.37):

$$u_{vp}(t) = \int_0^t u_v(\tau) p(t - \tau) d\tau \quad 1.65$$

$$u_{vp}(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega_d} \sin[\omega_d \tau] e^{-\xi\omega_0 \tau} p_0 \sin \varpi(t - \tau) d\tau \quad 1.66$$

On écrit les fonctions sinus sous forme exponentielle comme suit :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

(1.66) devient comme suit :

$$u_{vp}(t) = \frac{-p_0}{4m\omega_d} \int_0^t (e^{i\omega_d \tau} - e^{-i\omega_d \tau}) e^{-\xi\omega_0 \tau} (e^{i\varpi(t-\tau)} - e^{-i\varpi(t-\tau)}) d\tau$$

On pose

$$a = \omega_d + \varpi$$

$$b = \omega_d - \varpi$$

$$\alpha = \xi\omega_0$$

$$u_{vp}(t) = \frac{-p_0}{4m\omega_d} \left( e^{i\varpi t} \left[ \frac{e^{(-\alpha+ib)t} - 1}{-\alpha + ib} \right] - e^{-i\varpi t} \left[ \frac{e^{(-\alpha+ia)t} - 1}{-\alpha + ia} \right] + e^{i\varpi t} \left[ \frac{e^{-(\alpha+ia)t} - 1}{\alpha + ia} \right] - e^{-i\varpi t} \left[ \frac{e^{-(\alpha+ib)t} - 1}{\alpha + ib} \right] \right) \quad 1.67$$

L'extraction de la partie réelle de (1.67), nous donne la réponse pour l'intégrale de Duhamel :

$$u_{vp}(t) = \frac{p_0}{2m\omega_d} \left[ \frac{[-\alpha \cos \omega_d t + a \sin \omega_d t] e^{-\xi\omega_0 t}}{\alpha^2 + a^2} + \frac{\alpha \cos \varpi t + a \sin \varpi t}{\alpha^2 + a^2} + \frac{[\alpha \cos \omega_d t - b \sin \omega_d t] e^{-\xi\omega_0 t}}{\alpha^2 + b^2} - \frac{\alpha \cos \varpi t - b \sin \varpi t}{\alpha^2 + b^2} \right] \quad 1.68$$

On remplace les valeurs de a, b et  $\alpha$  et on obtient :

$$u_{vp}(t) = \frac{p_0}{2m\omega_d} \left[ \frac{[-\xi\omega_0 \cos \omega_d t + (\omega_d + \varpi) \sin \omega_d t] e^{-\xi\omega_0 t}}{(\xi\omega_0)^2 + (\omega_d + \varpi)^2} + \frac{\xi\omega_0 \cos \varpi t + (\omega_d + \varpi) \sin \varpi t}{(\xi\omega_0)^2 + (\omega_d + \varpi)^2} + \frac{[\xi\omega_0 \cos \omega_d t - (\omega_d - \varpi) \sin \omega_d t] e^{-\xi\omega_0 t}}{(\xi\omega_0)^2 + (\omega_d - \varpi)^2} - \frac{\xi\omega_0 \cos \varpi t - (\omega_d - \varpi) \sin \varpi t}{(\xi\omega_0)^2 + (\omega_d - \varpi)^2} \right] \quad 1.69$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

Si on trace les courbes de la réponse au chargement harmonique pour l'expression (1.69) pour différentes valeurs de  $\beta$ , on obtient :

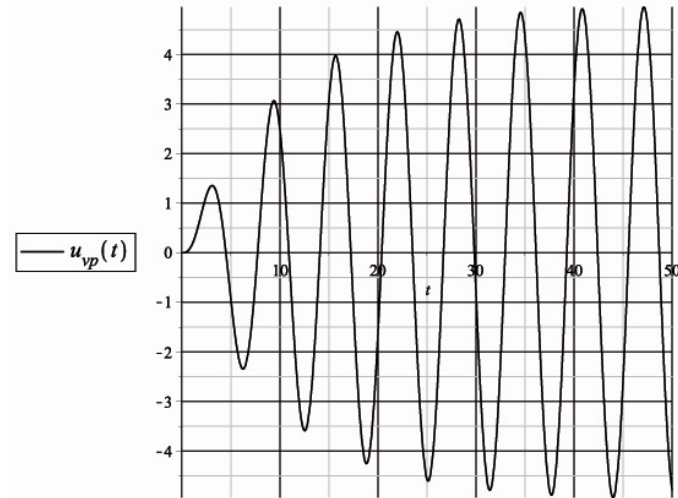


Fig.1.10. Réponse à l'excitation sinusoïdale pour  $\beta = 1$

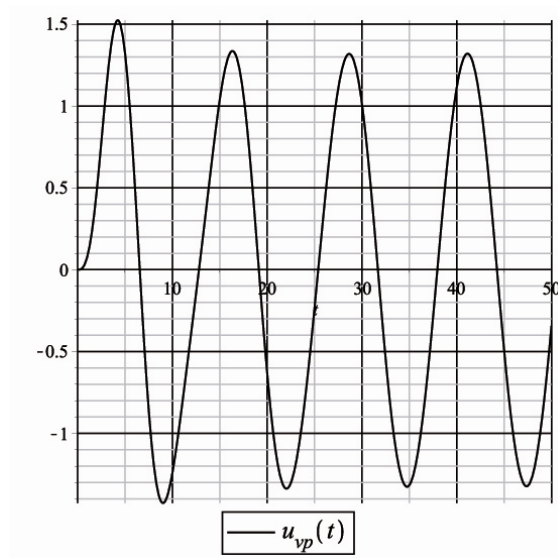


Fig.1.11. Réponse à l'excitation sinusoïdale pour  $\beta < 1$

## 1.1.10. Réponse à un chargement sismique

Les paragraphes précédents nous ont permis d'obtenir la réponse d'un oscillateur linéaire avec amortissement visqueux, sous différents types de chargements. A partir de ces équations, les caractéristiques de la réponse peuvent être obtenues à tout instant. Dans le cas d'un chargement sismique, les efforts appliqués sont brefs, donc seules les valeurs maximales de la réponse nous intéressent.

L'intensité du mouvement du sol donne aux ingénieurs de précieuses informations sur l'ampleur des dommages structuraux. Les plus importantes propriétés enregistrées lors du séisme sont: l'amplitude, le contenu fréquentiel et la durée du séisme.

L'excitation sismique est représentée en générale, par un déplacement d'appuis à la base de la structure, les valeurs maximales de la réponse sont enregistrées par le sismomètre.

Afin de déterminer la réponse à un chargement sismique, on considère le système initialement au repos, L'équation différentielle de l'oscillateur soumis à l'accélération sismique, régissant le mouvement, est donnée par :

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0 \tag{1.70}$$

L'accélération absolue  $\ddot{v}$ , est donné par:

$$\ddot{v} = \ddot{u}_s + \ddot{u}$$

Où  $\ddot{u}_s$ , est l'accélération sismique à la base de la structure

(1.70) devient :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + kv = -m\ddot{u}_s \tag{1.71}$$

L'équation différentielle donnée par (1.71) peut être résolue en utilisant l'intégrale de Duhamel écrite sous sa forme générale comme suit:

$$u_e(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t \sin(\omega_d[t - \tau]) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} f(\tau) d\tau \tag{1.72}$$

Où  $u_e$  est le déplacement sismique relatif, qui représente la réponse de l'oscillateur au chargement sismique.

Le produit de la masse et de l'accélération nous donne la force sismique  $f(t)$  où :

$$f(t) = -m\ddot{u}_s$$

$$u_e(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \sin(\omega_d[t - \tau]) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \tag{1.73}$$

## 1.3.4. Spectres de réponse sismique

La réponse du système sous chargement sismique donnée par (1.73) varie en fonction du temps, mais dans le but de dimensionner la structure au séisme, il est plus intéressant d'avoir le déplacement maximal du système que d'avoir sa variation en fonction du temps. La réponse sismique de l'oscillateur noté  $u_e(t)$  dépendra alors que de la période propre et du taux d'amortissement qui sont des caractéristiques propres à la structure.

On note respectivement, le déplacement relatif, la vitesse relative et l'accélération absolue par :

$u_{e\max}$  : déplacement relatif maximal.

$\dot{u}_{e\max}$  : vitesse relative maximale.

$\ddot{v}_{e\max} = (\ddot{u}_s + \ddot{u})_{\max}$  : accélération absolue maximale.

1.74

On définit respectivement le spectre de réponse du déplacement relatif et absolu et ils sont donnés par (1.75) et (1.76) :

$S_D(T, \xi)$ ,  $S_V(T, \xi)$  et  $S_A(T, \xi)$ .

$$S_D(T, \xi) = |u_e(t)|_{\max} = \left| -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \sin(\omega_d[t - \tau]) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \right|_{\max} \quad 1.75$$

$$S_{Da}(T, \xi) = |u_e(t) + u_s(t)|_{\max} \quad 1.76$$

De la même manière, on définit les spectres de réponses, absolus et relatifs pour les vitesses et les accélérations sismiques, donnés par (1.77) et (1.78)

$$S_V(T, \xi) = |\dot{u}_e(t)|_{\max} \quad \text{et} \quad S_{Va}(T, \xi) = |\dot{u}_e(t) + \dot{u}_s(t)|_{\max} \quad 1.77$$

$$S_A(T, \xi) = |\ddot{u}_e(t)|_{\max} \quad \text{et} \quad S_{Aa}(T, \xi) = |\ddot{u}_e(t) + \ddot{u}_s(t)|_{\max} \quad 1.78$$

## 1.3.5. Spectres de réponses exactes

Le spectre de réponse du déplacement exacte est donné par (1.75), à partir duquel découlent les spectres de réponses de vitesses et d'accélération exactes. En appliquant la dérivée temporelle à (1.75), on obtient le spectre de vitesse exacte

$$S_V = \left| \frac{\partial u_e(t)}{\partial t} \right|_{\max} \quad 1.79$$

Le théorème de convolution nous permet d'écrire (Filiatraul 1996) :

si  $G(t) = \int_{u_0(t)}^{u_1(t)} g(t, \tau) d\tau$ , alors

$$\frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} = \int_{u_0(t)}^{u_1(t)} \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t} d\tau + \frac{\partial u_1(t)}{\partial t} g(u_1(t), t) - \frac{\partial u_0(t)}{\partial t} g(u_0(t), t) \quad 1.80$$

Or :

$$u_1(t) = t \quad \text{et} \quad u_0(t) = 0$$

En appliquant (1.80) à l'intégrale de Duhamel donnée par (1.73), on obtient la vitesse et l'accélération sismique exactes.

- **Spectre de vitesse sismique exacte:**

Pour obtenir le spectre de vitesse sismique exacte, on applique à (1.75), le théorème de convolution donnée par (1.80) et on obtient :

$$\dot{u}_e(t) = \frac{\partial u_e(t)}{\partial t} \quad 1.81$$

$$\dot{u}_e(t) = \frac{-1}{\omega_d} \int_0^t [\omega_d \cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} - \xi \omega_0 \sin \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)}] \ddot{u}_s(\tau) d\tau$$

La vitesse relative s'écrit alors de la manière suivante :

$$\dot{u}_e(t) = \int_0^t \left[ -\cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right] \ddot{u}_s(\tau) d\tau \quad 1.82$$

Le spectre de vitesse exacte s'écrit alors sous la forme suivante :

$$S_V(T, \xi) = \left| \int_0^t \left[ -\cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right] \ddot{u}_s(\tau) d\tau \right|_{\max} \quad 1.83$$

- **Spectre d'accélération sismique exacte:**

Le spectre exact d'accélération sismique est obtenu, en appliquant le théorème de convolution pour (1.83) et on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_e(t) = & \int_0^t (\omega_d \sin \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} + \xi \omega_0 \cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)}) \ddot{u}_s(\tau) d\tau \\ & + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^t (\omega_d \cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} - \xi \omega_0 \sin \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)}) \ddot{u}_s(\tau) d\tau \end{aligned} \quad 1.84$$

Le spectre d'accélération exacte est donnés par :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_e(t) = & 2\xi \omega_0 \int_0^t \cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \\ & + \frac{\omega_0 (1 - 2\xi^2)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^t (\sin \omega_d [t - \tau]) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau - \ddot{u}_s(t) \end{aligned} \quad 1.85$$

Le spectre d'accélération sismique exacte s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_V(T, \xi) = & \left| 2\xi \omega_0 \int_0^t \cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \right. \\ & \left. + \frac{\omega_0 (1 - 2\xi^2)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^t (\sin \omega_d [t - \tau]) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau - \ddot{u}_s(t) \right|_{\max} \end{aligned} \quad 1.86$$

## 1.3.6. Pseudo-spectres de réponses sismiques

Les pseudo-spectres de réponses sont une approximation des spectres exacts. En génie civil la majorité des structures possèdent un taux d'amortissement critique inférieur à 5%, par conséquent, et si on fait les approximations (1.87), on obtient les pseudo-spectres de réponse de vitesse et d'accélération:

$$\xi \simeq 0 \text{ et } \omega_d \simeq \omega_0 \tag{1.87}$$

- **Pseudo-spectre de vitesse sismique**

Si on applique les approximations précédentes à (1.82), on obtient le pseudo-spectre de vitesse

$$\dot{u}_e(t) = - \int_0^t \cos \omega_0 [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_0 [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \tag{1.88}$$

Le deuxième terme de (1.88) tend vers 0

$$\dot{u}_e(t) = - \int_0^t \cos \omega_0 [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau = \omega_0 u_e(t) \tag{1.89}$$

Par conséquent le pseudo-spectre de vitesse obtenu est donnée par :

$$S_V = \omega_0 S_D \tag{1.90}$$

- **Pseudo-spectre d'accélération sismique**

On applique les approximations (1.87) à (1.85), on obtient le pseudo-spectre d'accélération

$$\begin{aligned} \ddot{u}_e(t) &= 2\xi\omega_0 \int_0^t \cos \omega_d [t - \tau] e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \\ &+ \frac{\omega_0(1 - 2\xi^2)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^t (\sin \omega_d [t - \tau]) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau - \ddot{u}_s(t) \end{aligned} \tag{1.91}$$

$$\ddot{u}_e(t) + \ddot{u}_s(t) = \omega_0 \int_0^t (\sin \omega_d [t - \tau]) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \tag{1.92}$$

Par conséquent le pseudo-spectre de vitesse obtenu est donnée par :

$$S_A = \omega_0 S_V = \omega_0^2 S_D \tag{1.93}$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

D'après (Filiatraul 1996), en comparant les spectres de vitesses et accélérations sismiques exactes données par (1.83) et (1.86) avec les pseudo- spectres de vitesses et accélérations sismiques données par (1.90) et (1.93), on peut dégager les tendances suivantes :

- Dans un système à amortissement nul, les résultats sont essentiellement identiques pour des périodes propres inférieures à l'unité ( $T < 1$ ).
- Lorsque l'amortissement augmente à 20%, les différences sont de l'ordre de 20% mais sans tendance systématique.
- Le pseudo-spectre d'accélération est généralement plus précis que le pseudo-spectre de vitesse.

On reconnaît généralement que ces variations sont de l'ordre de grandeur, que l'on s'attend d'une analyse sismique. Cependant, on ne doit pas utiliser les valeurs pseudo-spectrales pour des systèmes fortement amorti avec  $\xi > 20\%$ , ou pour un système possédant des périodes propres élevées ( $T \gg 1$  seconde).



## 1.1.11. Isolation vibratoire

- 1<sup>ère</sup> classe :

L'objectif est d'établir la force dynamique transmise de la structure vers le sol. On évalue les forces de raideur et d'amortissement transmises au sol d'assise, comme suit :

$$F(t) = f_s + f_D = ku(t) + c_v \dot{u}(t) \quad 1.94$$

Régime permanent :

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad 1.95$$

Les forces de raideur et d'amortissement transmises sont données par (1.96)

$$\begin{aligned} f_s(t) &= k \frac{p_0}{k} D_v \sin(\omega t - \varphi) \\ f_D(t) &= c_v \omega \frac{p_0}{k} D_v \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad 1.96$$

$$F(t) = p_0 D_v [\sin(\omega t - \varphi) + 2\xi\beta \cos(\omega t - \varphi)] \quad 1.97$$

Force maximale transmise à la base est :

$$F_{\max}(t) = p_0 D_v [\sin(\omega t - \varphi) + 2\xi\beta \cos(\omega t - \varphi)] \quad 1.98$$

$$F_{\max}(t) = p_0 D_v \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad 1.99$$

Transmittance s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Transmittance} = \frac{\text{force maximale transmise à la base}}{\text{force maximale produite par la machine}} \quad 1.100$$

$$\text{Transmittance} = \frac{F_{\max}(t)}{p_0} = \frac{p_0 D_v \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{p_0} \quad 1.101$$

$$\text{Transmittance} = \frac{F_{\max}(t)}{p_0} = D_v \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad 1.102$$

$$\text{TR} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad 1.103$$

L'efficacité est donnée alors par :

$$\text{l'efficacité} = 1 - \text{TR} = 1 - \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad 1.104$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

- 2<sup>eme</sup> classe :

L'Equation de mouvement est donnée par :

$$m\ddot{u} + c_v\dot{u} + ku = -m\ddot{v}_s = m\omega^2 u_{s0} \sin \omega t = p_0 \sin \omega t \quad 1.105$$

Régime permanent :

$$p_0 = m\omega^2 u_{s0} \quad \frac{p_0}{k} = \frac{m\omega^2 u_{s0}}{k} = u_{s0} \beta^2 \quad 1.106$$

Le déplacement total est donné par :

$$u(t) = u_{s0} \beta^2 D_v \sin(\omega t - \varphi) + u_{s0} \sin(\omega t) \quad 1.107$$

$$u(t) = u_{s0} D_v \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \sin(\omega t - \varphi) \quad 1.108$$

Le déplacement maximal est donné par :

$$u_{\max} = u_{s0} D_v \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad 1.109$$

Transmittance s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Transmittance} = \frac{\text{amplitude du mouvement total transmis à la base}}{\text{amplitude du mouvement appliqué à la base}} \quad 1.110$$

$$\text{Transmittance} = \frac{u_{\max}}{u_{s0}} = \frac{u_{s0} D_v \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{u_{s0}} \quad 1.111$$

$$\text{Transmittance} = D_v \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad 1.112$$

$$\text{TR} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad 1.113$$

On note l'efficacité :

$$\text{l'efficacité} = 1 - \text{TR} = 1 - \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad 1.114$$

## 1.2 Oscillateur à plusieurs degrés de liberté

### 1.2.1 Equation de mouvement

L'équation différentielle régissant le mouvement d'un oscillateur linéaire à plusieurs degrés de libertés, est donnée par l'équation (1.115) où M, C et K sont respectivement les matrices de masse, matrice d'amortissement et matrice de rigidité.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad 1.115$$

### 1.2.2 Découplage dans la base modale

- **Matrice de masses**

La masse de toute la structure est supposée être concentrée aux points de définition des déplacements.

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \quad 1.116$$

- **Matrice de rigidité**

La rigidité entière de la structure est le résultat de la superposition adéquate de la rigidité propre de chaque élément la composant.

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad 1.117$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

- **Découplage des équations de mouvement**

Pour le système (1.115), le vecteur déplacement et force, pour chaque degré de liberté, sont donnés par :

$$U_i = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_i = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad 1.118$$

Le découplage du système (1.115), passe par la résolution du problème aux valeurs et aux vecteurs propres, et ils correspondent respectivement aux fréquences propres, et aux modes de vibrations du système. Les fréquences propres  $\omega_i$  du système sont données par le calcul du déterminant suivant :

$$\det[K - M\omega^2] = 0 \quad 1.119$$

Pour chaque  $\omega_i$  correspond un mode de déformation  $\phi_i$ . Les pulsations propres et les modes de vibrations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{pmatrix} \quad 1.120$$

Où,  $i$  est la  $i$ ème fréquence ou mode de vibration, et  $j$  et le  $j$ ème degré de liberté. Par conséquent la matrice modale est donnée par :

$$\varphi = [\phi_1 \dots \phi_n] \Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \quad 1.121$$

Les  $n$  modes de vibrations représentent les  $n$  allures de déplacements indépendants du système:

$U$  : vecteur de déplacement en coordonnées géométriques (réelles)

$$U(t) = U_j^j(t) = U_1^1(t) + \dots + U_n^n(t) = \begin{pmatrix} U_1^1 \\ \vdots \\ U_n^1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_n^n \end{pmatrix} \quad 1.122$$

En gardant que l'indice des modes de vibrations, (1.122) devient :

$$U^j(t) = U^1(t) + \dots + U^n(t) \quad 1.123$$

On réécrit (1.123) dans la base des modes propres de la manière suivante :

$$U(t) = \phi_1 y_1(t) + \dots + \phi_n y_n(t) \quad 1.124$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

$$U(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i(t) \quad 1.125$$

La transformation des coordonnées réelles en coordonnées généralisées s'écrit de la manière suivante :

$$U = \phi y \quad 1.126$$

Le système d'équations (1.115), s'écrit alors, dans la base modale de la manière suivante :

$$M\phi\ddot{y} + C\phi\dot{y} + K\phi y = F(t) \quad 1.127$$

La multiplication gauche de (1.127) par la transposée de la matrice modale nous permet de diagonaliser le système. Le système d'équations est découplés en coordonnées généralisées et il est donné par :

$$\phi^T M \phi \ddot{y} + \phi^T C \phi \dot{y} + \phi^T K \phi y = \phi^T F(t) \quad 1.128$$

a) Propriétés d'orthogonalité :

La diagonalisation des deux modes de vibrations différents, i et j, nous donne :

$$\begin{cases} K\phi_j = \omega_j^2 M\phi_j \dots \dots (1) \\ K\phi_i = \omega_i^2 M\phi_i \dots \dots (2) \end{cases} \quad 1.129$$

$$\begin{cases} \phi_i^T \times (1) \\ (2)^T \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_i^T K\phi_j = \phi_i^T \omega_j^2 M\phi_j \\ [K\phi_i]^T = [\omega_i^2 M\phi_i]^T \end{cases} \quad 1.130$$

$$\begin{cases} \phi_i^T K\phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T M\phi_j \dots \dots (3) \\ \phi_i^T K^T = \omega_i^2 \phi_i^T M^T \dots \dots (4) \end{cases} \quad 1.131$$

$$\begin{cases} \phi_i^T K\phi_j = \phi_i^T \omega_j^2 M\phi_j \dots \dots (5) \\ \phi_i^T K = \omega_i^2 \phi_i^T M \dots \dots (6) \end{cases} \quad 1.132$$

$$\begin{cases} 4 \times \phi_j \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_i^T K\phi_j = \phi_i^T \omega_j^2 M\phi_j \dots \dots (7) \\ \phi_i^T K\phi_j = \omega_i^2 \phi_i^T M\phi_j \dots \dots (8) \end{cases} \quad 1.133$$

(3)-(8) nous donne :

$$\omega_j^2 \phi_i^T M\phi_j = \omega_i^2 \phi_i^T M\phi_j \Rightarrow (\omega_j^2 - \omega_i^2) \phi_i^T M\phi_j = 0$$

$$\begin{cases} \phi_i^T M\phi_j = 0 \\ \phi_i^T K\phi_j = 0 \end{cases} \quad 1.134$$

Les propriétés d'orthogonalité se vérifient pour les deux modes de vibrations i, j.

## 1.2.3 Matrice d'amortissement

La généralisation du concept de coefficient d'amortissement aux systèmes à plusieurs degrés de liberté, est effectuée par la combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, traduisant l'amortissement de Rayleigh. Un des avantages de ce type d'amortissement est d'assurer l'orthogonalité des termes contenant l'amortissement par rapport aux modes propres et donc le découplage des équations du mouvement dans la base modale. De plus, ce procédé permet d'éviter d'assembler la matrice correspondant aux termes d'amortissement. Cet amortissement, dit de Rayleigh, est un cas particulier de " l'amortissement de Caughey" qui est appelé aussi "amortissement de Rayleigh généralisé". La généralisation permet d'inclure un nombre  $n$  de modes (Sen 2009).

$$C = M \sum_{p=0}^n a_p [M^{-1}K]^p \quad 1.135$$

Pour  $n=2$ , on obtient l'amortissement de Rayleigh.

- Amortissement de Rayleigh

$$\varphi^T M \varphi \ddot{y} + \varphi^T C \varphi \dot{y} + \varphi^T K \varphi y = \varphi^T F(t) \quad 1.136$$

La transformation orthogonale (1.128) est valide uniquement quand la matrice d'amortissement est proportionnelle avec les matrices de masse et de rigidité  $M$  et  $K$ . Pour cela, Rayleigh propose une matrice d'amortissement  $C$ , définie par une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, avec

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad 1.137$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$ , et représentent les coefficients de proportionnalités, et ils dépendent des fréquences propres de la structure. Ces coefficients sont calibrés afin d'obtenir la quantité d'amortissement forfaitaire globale souhaitée pour deux fréquences propres de la structure choisie. Cet amortissement est directement proportionnel à la raideur initiale et à la masse de la structure, qui sont des grandeurs physiques quantifiable. L'amortissement de Rayleigh, contrairement à d'autres modèles d'amortissement n'est pas relié aux phénomènes physiques générant l'amortissement. Bien que par ce modèle, se produit une surestimation de l'amortissement qui n'est pas toujours néfaste, principalement si les lois constitutives utilisées ne sont pas capable de modéliser les effets hystérétiques, cet aspect reste problématique. C'est pourquoi de nombreux travaux se sont intéressés à modifier l'amortissement de Rayleigh afin qu'il prenne en compte les modifications apparaissant dans la structure durant le chargement sismique (Crambuer 2013).

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

On injecte (1.132) dans (1.115) et après transformation orthogonales on obtient :

$$\varphi^T M \varphi \ddot{y} + \alpha \Phi_i^T M \Phi_i + \beta \Phi_i^T K + \varphi^T K \varphi y = \varphi^T F(t) \quad 1.138$$

On a :

$$\varphi^T M \varphi = [I] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \varphi^T K \varphi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad 1.139$$

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] = \begin{bmatrix} \alpha + \beta\omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha + \beta\omega_n^2 \end{bmatrix} \quad 1.140$$

L'objectif de la démarche est de chercher l'amortissement modal  $c_i = 2\xi_i \omega_i$ , en utilisant la combinaison linéaire proposée par Rayleigh, Les effets d'amortissement sont alors pris en considération dans la superposition modale des solutions. La formulation de la matrice d'amortissement modale du système découplé donnée par (1.136), se décrit de la manière suivante :

$$\Phi_i^T C \Phi_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} = \alpha \Phi_i^T M \Phi_i + \beta \Phi_i^T K \Phi_i \quad 1.141$$

Où  $\delta_{ij}$ , est le symbole de Kronecker, avec,  $\delta_{ij} = 1$ , si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ )

La matrice d'amortissement modal devient :

$$[C] = \begin{bmatrix} 2\omega_1 \xi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\omega_n \xi_n \end{bmatrix} \quad 1.142$$

On peut déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , en égalant (1.142) et (1.140), et on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 2\omega_1 \xi_1 = \alpha + \beta\omega_1^2 \\ 2\omega_2 \xi_2 = \alpha + \beta\omega_2^2 \\ \vdots \\ 2\omega_n \xi_n = \alpha + \beta\omega_n^2 \end{cases} \quad 1.143$$

Pour avoir l'amortissement modal pour chaque mode  $i$ , on prend deux équations du système (1.142), et on cherche les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

On cherche à obtenir les valeurs des coefficients de proportionnalité  $\alpha$  et  $\beta$ , en fonction des amortissements modaux, pour le  $i^{\text{eme}}$  et pour le  $j^{\text{eme}}$ , modes de vibration, pour cela on a à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2\omega_i \xi_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \\ 2\omega_j \xi_j = \alpha + \beta\omega_j^2 \end{cases} \quad 1.144$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \\ \xi_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2\omega_i\omega_j(\omega_j\xi_i - \omega_i\xi_j)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \\ \beta = \frac{2(\omega_j\xi_j - \omega_i\xi_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \end{array} \right\} \quad 1.145$$

Si on choisit d'amortir le  $i^{\text{eme}}$  et le  $j^{\text{eme}}$ , modes de vibrations avec le même taux d'amortissement  $\xi$  on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2\xi\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \\ \beta = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \end{array} \right\} \quad 1.146$$

Si on reprend l'exemple développé dans (Seghir 2010) où deux modes de contrôle ( $i=1$  et  $i=n$ ), ont été pris et avec un même  $\xi$ , on retrouve le système d'équations donné par (1.146). Il faut noter que, le choix d'un  $\xi$  identique pour deux modes ne signifie pas qu'il le soit aussi pour tous les autres modes. L'équation (1.144) montre bien qu'il décroît d'une manière non linéaire pour les faibles valeurs de  $\omega$ , ensuite il croît linéairement lorsque  $\omega$  augmente. Cette variation est montrée par la (fig.2.1). Pour un exemple d'amortissement des cinq premiers modes propres du barrage poids d'Oued-Fodda. En fixant  $\xi$  à 5% pour les deux premiers modes dont les périodes propres sont respectivement 0.2558 et 0.1241 secondes, on obtient  $\alpha = 1.6539$  et  $\beta = 0.0013$ . Les valeurs de  $\xi$  qui correspondent aux restes des modes augmentent comme suit :

$$\xi_3 = 5.75\%, \quad \xi_4 = 6.85\%, \quad \xi_5 = 9.58\%,$$

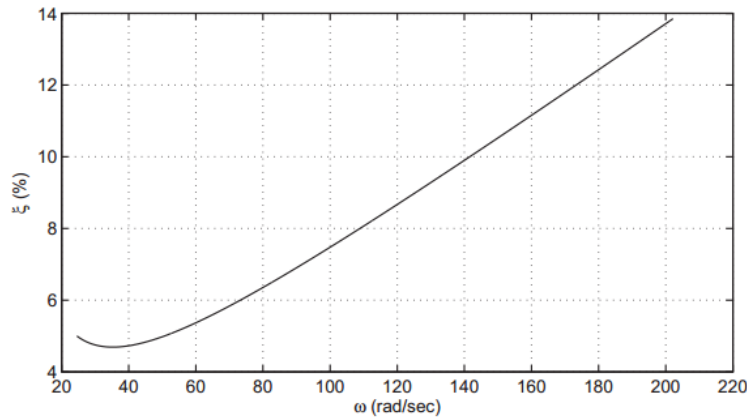


Fig.1.12. Evolution du taux d'amortissement de Rayleigh (Seghir 2010)

La variation non linéaire au début de la courbe se situe entre les deux valeurs de  $\omega$  qui ont servi à l'évaluation des coefficients. En choisissant donc deux autres modes à la place des deux premiers, il faut faire attention à ne pas sous-amortir, sans le vouloir, les modes intermédiaires aux deux modes et sur-amortir en même temps les modes inférieurs, notamment le mode fondamental (Seghir 2010). Dans le cas où l'on veut cibler une répartition linéaire de  $\xi$  entre deux modes quelconques, il faut procéder par essai/correction comme suggéré par (Chowdhury and Dasgupta 2009).



### 1.2.4 Analyse de la réponse dynamique

- **Méthode de la superposition modale**

Le paragraphe précédent nous a permis de découpler les équations de mouvement et de formuler les matrices caractéristiques du système (1.136). La réponse dynamique d'un oscillateur multiple à n degrés de libertés est donnée par la superposition modale des n solutions découplées. On obtient alors pour chaque mode i l'équation de mouvement en coordonnées généralisées, avec  $m_i, c_i,$  et  $k_i$  qui représentent la masse, l'amortissement et la rigidité généralisés du mode i. Pour chaque mode i, on a :

$$\begin{aligned} m_i &= \varphi^T M \varphi \text{ est la masse généralisée du mode } i \\ c_i &= \varphi^T C \varphi \text{ est l'amortissement généralisé du mode } i \\ k_i &= \varphi^T K \varphi, \text{ est la rigidité généralisée du mode } i \end{aligned} \quad 1.147$$

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i = f_i(t) \quad 1.148$$

$\xi_i$  : Taux d'amortissement critique du mode i.

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{f_i(t)}{m} \quad 1.149$$

La solution de l'équation (1.149) pour une excitation quelconque est donnée par :

$$y_i(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad 1.150$$

$y_i$ : est la solution généralisée du mode i

$y_h$ : est la solution homogène généralisée du mode i 1.151

$y_p$ : est la solution particulière généralisée du mode i

$$y_i(t) = \frac{1}{m_i \omega_{d_i}} \int_0^t \sin(\omega_{d_i} \tau) e^{-\xi_i \omega_i \tau} f_i(t - \tau) d\tau \quad 1.152$$

La relation (1.126), nous permet de revenir aux coordonnées normales

$$U = \varphi y \quad 1.153$$

## CHAPITRE 1 : AMORTISSEMENT VISQUEUX

- **Méthode spectrale modale**

Soit un oscillateur linéaire à plusieurs degrés de libertés, soumis à l'accélération sismique, l'équation de mouvement régissant le système est donnée par :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\ddot{u}_s(t) = F(t) \quad 1.154$$

Où  $\ddot{u}_s$ , est l'accélération sismique,

On réécrit l'équation (1.154) dans la base modale et on obtient:

$$\varphi^T M \varphi \ddot{y} + \varphi^T C \varphi \dot{y} + \varphi^T K \varphi y = -\varphi^T M \ddot{u}_s(t) \quad 1.155$$

Pour chaque mode  $i$ , on a :

$m_i = \varphi^T M \varphi$  est la masse généralisée du mode  $i$

$c_i = \varphi^T C \varphi$ , est l'amortissement généralisé du mode  $i$  1.156

$k_i = \varphi^T K \varphi$ , est la rigidité généralisée du mode  $i$

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i = -\varphi^T M \ddot{u}_s(t) \quad 1.157$$

D'après (1.73), la solution de (1.157) va s'écrire sous la forme :

$$y_i(t) = \frac{-\varphi^T M I}{m_i \omega_{d_i}} \int_0^t \sin[\omega_{d_i}(t - \tau)] e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \quad 1.158$$

On définit  $\alpha_i$ , le facteur de participation modale pour chaque mode  $i$ , avec

$$\alpha_i = \frac{\varphi^T M I}{m_i} \quad 1.159$$

La réponse (1.158) en fonction du facteur de participation modal, est donnée par

$$y_i(t) = \frac{-\alpha_i}{\omega_{d_i}} S_i(t) \quad 1.160$$

La réponse maximale en coordonnées généralisées pour chaque mode  $i$  s'écrit sous la forme suivante :

$$y_i(t)_{\max} = \frac{\alpha_i}{\omega_{d_i}} |S_i(t)|_{\max} \quad 1.161$$

Le spectre de réponse du déplacement s'écrit alors sous la forme suivante :

$$y_i(t)_{\max} = \alpha_i S_D \quad 1.162$$

Alors les spectres de réponse de la vitesse et de l'accélération sont donnés par :

$$S_A = \omega S_V = \omega^2 S_D \quad 1.163$$

## CHAPITRE 2. AMORTISSEMENT RADIATIF

### Introduction

En dynamique des structures, la détermination de l'amortissement est d'une importance critique dans l'évaluation des performances sismiques des ouvrages. Dans la plus part des cas, lors d'une analyse dynamique, le taux d'amortissement est adopté à partir de formules empiriques qui ne représentent que l'amortissement structural. Cependant, l'amortissement radiatif, ainsi que d'autres types d'amortissements, lesquels peuvent contribuer de manière significative à l'amortissement effectif global (Celebi 2000).

Les problèmes de dynamique qui requièrent la modélisation de milieux non bornés ou semi-infinis portent l'intérêt de plusieurs domaines en ingénierie. Le caractère non borné du milieu ne peut être négligé, comme par exemple dans les problèmes de radiations qui se produisent en acoustique, des ondes à la surface de l'eau en océanographie, et dans le dimensionnement des fondations de machines tournantes. Ce dernier représente une configuration typique du problème d'interaction sol-structure (fig.5.1). Dans cette situation, la radiation d'ondes, émise de la fondation vers le substratum, peut modifier la réponse de la structure, et provoque l'amortissement radiatif. La méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontières (BEM) représentent les deux principales méthodes qui ont été développées pour décrire et inclure l'effet de cet amortissement dans l'analyse de ce type de problèmes (Zulkifli 2008).

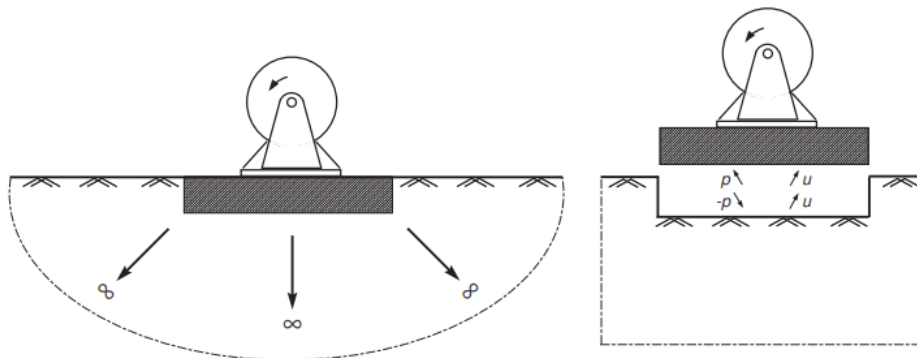


Fig.2.1. Problème interaction sol-structure (Zulkifli 2008).

### 2.1 Définition du problème et domaine d'application

En 1936 Reissner (Reissner 1936), a analysé la réponse d'un disque placé à la surface d'un massif élastique isotrope et semi infini. Cette analyse a révélée l'existence d'une dissipation d'énergie par radiation, comme si le milieu de propagation présentait un certain amortissement. L'idée d'assimiler le comportement du système sol-fondation, en translation verticale, à un oscillateur simple de raideur et d'amortissement constants a été introduite par Lysmer (Lysmer 1965), Cette approche est connue sous le nom de "l'analogie de Lysmer" (Jendoubi 2007).

La fondation repose sur le sol et son interaction avec celui-ci est modélisée par le biais des fonctions d'impédances. Celles-ci traduisent les réactions exercées par le sol sur la fondation, et elles peuvent être représentées par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs indépendants de la fréquence (Pecker 2006), tenant compte du phénomène d'interaction sol-structure. Si on considère la structure comme encastree à sa base dans un milieu parfaitement rigide, alors l'énergie injectée par l'excitation est dissipée par les non-linéarités internes de la structure. On parle d'amortissement structurel qui est pris en compte dans les modèles dynamiques par l'introduction, de façon souvent forfaitaire, d'un facteur d'amortissement modal. Dans le cas où le couplage avec le sol ne peut être négligé, les oscillations de la fondation donnent naissance à un champ rayonné constitué d'ondes de volume et de surface. Dans un milieu semi-infini, ces ondes se propagent indéfiniment et ne restituent donc pas, sous une forme ou une autre, l'énergie qu'elles contiennent. Il y a donc dissipation d'énergie et tout se passe comme si le milieu présentait un amortissement, même s'il est supposé élastique, linéaire, et non dissipatif. On parle d'amortissement géométrique pour souligner le fait que cette perte d'énergie n'est pas due aux propriétés mécaniques du sol, ou encore d'amortissement radiatif en référence aux ondes rayonnées par la fondation (Roussillon 2006).

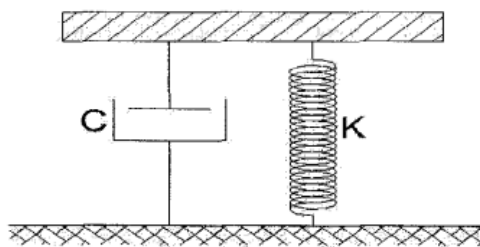


Fig.2.2. Modélisation des fonctions d'impédance d'une fondation soumise à une excitation verticale (Jendoubi 2007).

### 2.2 Impédance des fondations superficielles

La manière la plus simple de prendre en compte le sol dans les modèles de calcul des structures est de le représenter par des ressorts reliant un ou plusieurs nœuds à une base rigide à laquelle on impose le mouvement. Dans le cas d'un modèle plan par exemple et d'une fondation superficielle, l'interaction avec une semelle isolée peut être représentée par deux ressorts agissant en translation et un ressort en rotation. Dans le cas d'une fondation rigide, si le mouvement est quelconque, la fondation peut être représentée par la relation entre le torseur des efforts appliqués (trois composantes de réaction et trois composantes de moments) et les composantes des déplacements du corps rigide de la fondation. Dans le cas d'un comportement du sol linéaire (élastique ou viscoélastique), cette relation est caractérisée par une matrice 6x6 dite "impédance de la fondation". Cette impédance est complexe en raison de l'amortissement radiatif et matériel et elle dépend généralement de la fréquence (Seghir 2010). De plus, cette matrice présente, dans l'espace fréquentiel une perte d'énergie, due à deux sources distinctes, la première est due aux champs rayonnés par la fondation qui sont porteurs d'une énergie qui est dissipée par radiation de ces ondes vers l'infini, et la deuxième est due à la dissipation par amortissement hystérétique du sol (Roussillon 2006).

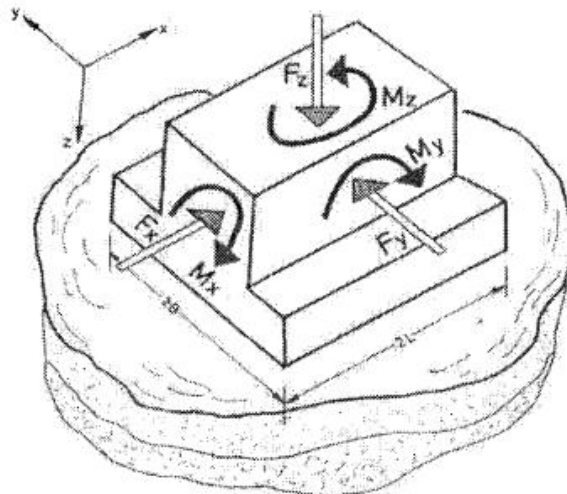


Fig.2.3 : Degrés de libertés d'une fondation superficielle rigide (Jendoubi 2007)

### 2.3 Définition des milieux non bornés

Les milieux infinis rencontrés peuvent être de deux natures, on trouve soit le sol ou bien les fluides dans le cas des barrages par exemple. Dans le cadre de l'étude des milieux non bornés, (Bourouba 2008) a exposé les deux cas et les subdivisions correspondantes, et on peut les résumer comme suit :

- Milieu des fluides

Le domaine fluide considéré est supposé retenu d'un côté par une structure et s'étend de l'autre côté à l'infini. Cette situation se présente dans les cas des barrages, des ports ...etc. Il est donc indispensable de tronquer ce domaine à une certaine limite fictive  $\Gamma_\infty$  délimitant deux sous domaines. Le premier est  $\Omega$  définissant le champ proche qui sera discrétisé par éléments finis et le second,  $\Omega_\infty$  représentant le champ lointain qui sera remplacé artificiellement par une frontière radiative imposée sur la limite de troncature  $\Gamma_\infty$ .

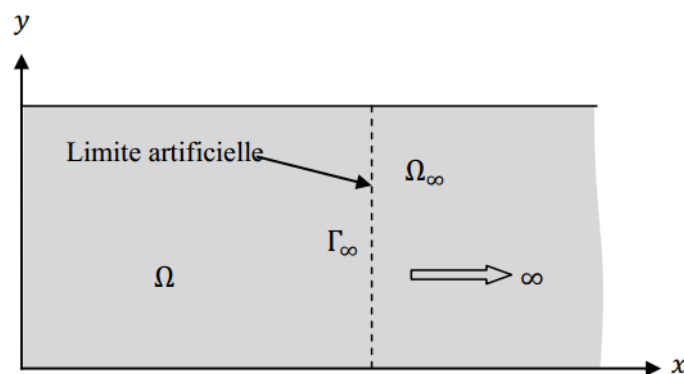


Fig.2.4. subdivision du domaine fluide en sous domaines  $\Omega$  et  $\Omega_\infty$  sur une limite artificielle  $\Gamma_\infty$  (Bourouba 2008).

La limite artificielle  $\Gamma_\infty$  délimite un domaine physiquement non borné. L'effet dynamique réel dans le milieu fluide est la propagation d'ondes de pressions voyageant de  $\Omega$  vers  $\Omega_\infty$  et évidemment à l'infini.

La supposition d'une frontière libre ou une condition de pression nulle imposée sur cette limite, engendre des réflexions d'ondes indésirables qui perturbent la solution recherchée. Alors, une condition prenant en compte ces réflexions est indispensable.

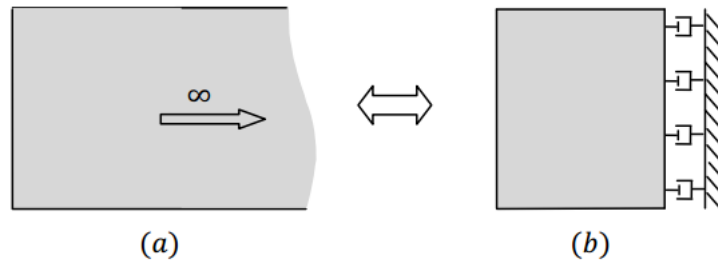


Fig.2.5. Problèmes en deux dimensions d'un domaine fluide non bornée  $\Omega$  et  $\Omega_\infty$  sur une limite artificielle  $\Gamma_\infty$  (Bourouba 2008).  
 (a). Domaine infini      (b). Domaine fini avec frontière absorbante

- Définition des sols

Le milieu sol est supposé comme étant un solide infini, homogène à comportement élastique linéaire sous l'hypothèse des petites déformations. Le domaine solide doit être tronqué à une distance où des conditions aux limites appropriées sont introduites

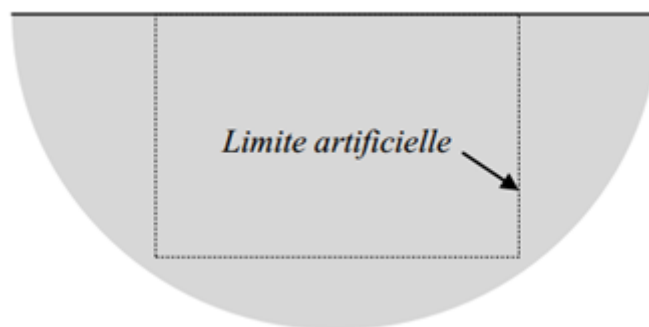


Fig.2.6. Problèmes d'un plan semi infini (Bourouba 2008).

## 2.4 Modélisation des milieux non bornés et troncatures géométriques

Comme les phénomènes de propagation d'ondes sismiques présentent des aspects particuliers (par exemple, la diffraction d'ondes, le rayonnement d'ondes à l'infini), il est souvent indispensable de procéder à des simulations numériques. Dans la pratique, les deux méthodes numériques les plus utilisées pour étudier ces phénomènes sont la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontières (BEM), chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. La première méthode, est souvent nécessaire pour modéliser le comportement hétérogène, inélastique, non-linéaire des domaines à géométrie complexe. La FEM est la méthode la plus utilisée pour résoudre les problèmes concernant les domaines bornés. Cependant cette méthode est mal adaptée aux problèmes faisant intervenir la propagation d'ondes dans les milieux infinis ou semi-infinis. En effet, dans ces problèmes, on est contraint de faire appel à une troncature artificielle, qui crée des parasites pouvant compromettre gravement la précision du résultat. Quant à la méthode des éléments de frontières, elle a l'avantage de résoudre les problèmes faisant intervenir la propagation des ondes dans les domaines ouverts, car sa formulation représente exactement le rayonnement des ondes à l'infini. Toutefois, il est difficile de modéliser les comportements inélastiques et non-linéaires par cette méthode. En effet pour les comportements complexes, les solutions fondamentales pour le milieu infinis soumis à une force ponctuelles, unitaire et impulsionnelle, exercée en un point dans ce milieu ne sont généralement pas connues sous formes analytiques. La BEM trouve naturellement son efficacité dans les problèmes faisant intervenir des domaines à comportement élastique linéaire (Nguyen 2005).

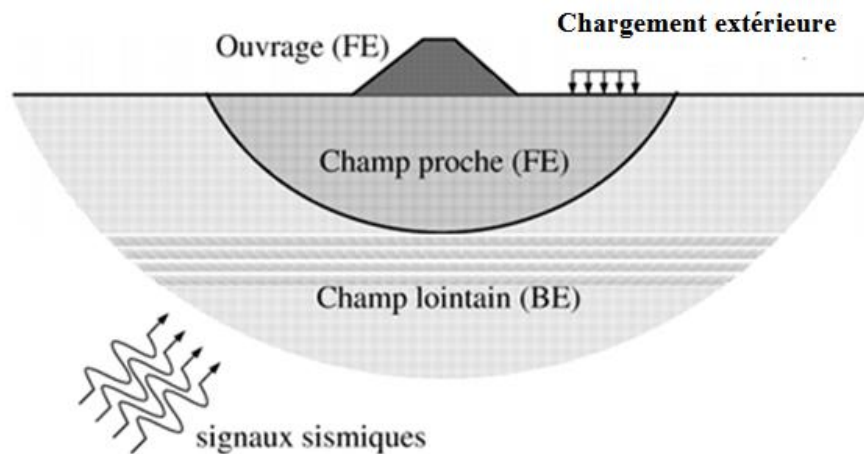


Fig.2.7. modèle représentatif éléments finis/ éléments de frontières pour les calculs sismiques (Nguyen 2005).



2.5 Modélisation par éléments finis

Dans la discrétisation par éléments finis des problèmes rencontrés dans le domaine de génie civil, on est souvent amené à traiter des milieux non bornés notamment dans les cas d'interaction fluide-structure ou d'interaction sol-structure. La difficulté majeure rencontrée dans la résolution de ce genre de problèmes réside dans le traitement des conditions aux limites de troncatures qui doivent tenir compte des effets de dissipation et de radiation d'énergie, et d'empêcher toutes réflexions parasites pouvant compromettre gravement la précision du résultat recherché. En général, le domaine doit être tronqué à une distance assez loin, pour aboutir à des résultats suffisamment acceptables. Cependant, cette technique est très coûteuse et conduit à des tailles de maillage importantes ce qui rend les calculs de plus en plus lourds notamment lorsqu'on veut considérer le comportement non linéaire du milieu (Dangla 2005).

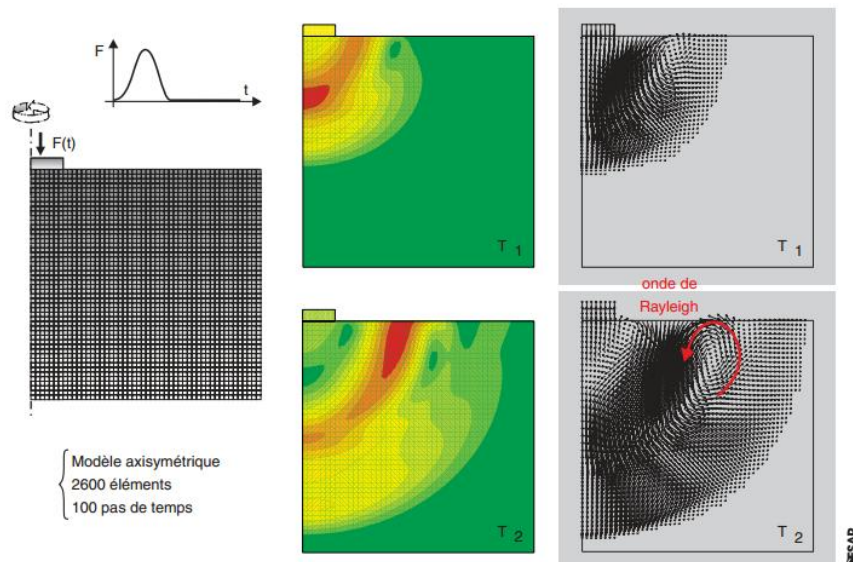


Fig.2.8. Modélisation par éléments finis de la propagation d'ondes dues à la vibration d'une fondation (Le modèle- gauche ; iso valeurs de déplacement – centre ; et champ de déplacement -droite) (Dangla 2005).

Tout modèle d'éléments finis utilise un maillage d'une géométrie bien délimitée et à frontière fermée. En interaction sol-structure, on est donc amené à modéliser une partie du sol en pratiquant une troncature géométrique. Des conditions aux limites bien spécifiques doivent être appliquées sur ces frontières fictives afin d'éliminer, ou tout au moins de réduire, les réflexions d'ondes qu'elles induisent. Plusieurs adjectifs sont attribués à ces frontières lorsqu'elles sont munies de conditions aux limites appropriées, elles sont dites frontières absorbantes, radiatives, silencieuses (Seghir 2010).

### 2.6 Conditions aux limites

Pour résoudre numériquement le problème d'ondes dans un milieu infini, on introduit généralement une frontière artificielle, réduisant ainsi le domaine de calcul à un milieu fini. Avec cette frontière artificielle, on doit imposer certaines conditions aux limites qui devraient permettre aux ondes de passer à travers les frontières artificielles sans générer de réflexion parasite. Le choix des conditions aux limites, qui doivent être bien appropriées au problème physique, et la manière avec laquelle on combine cette condition avec le schéma numérique employé à l'intérieur du domaine est un sujet actif de la recherche (Kokalanov 2008).

- Frontières absorbantes

Les conditions aux limites de troncature géométrique peuvent être classées en deux catégories, conditions globales et conditions locales. Une condition est dite globale si elle lie le comportement de tout point de la frontière à celui de tous les autres points de la frontière que ce soit en espace ou en temps. Dans une condition locale, par contre, le comportement d'un point de la frontière à tout instant ne dépend que de ses propres coordonnées et peut être des points voisins. Contrairement aux conditions globales qui peuvent être exactes (Nielsen 2006), les conditions locales sont approximatives mais faciles à mettre en œuvre et très pratiques du point de vue numérique.

#### a) Condition locales

La condition de radiation locale, sans doute la plus connue et la plus utilisée, est celle de Lysmer et Kuhlemeyer établie en 1969 (Lysmer and Kuhlemeyer 1969). Elle est similaire à un ensemble d'amortisseurs répartis le long de la surface de troncature. A ces amortisseurs, des ressorts ont été par la suite ajoutés afin d'améliorer l'absorption d'onde et d'assurer la stabilité numérique des modèles.

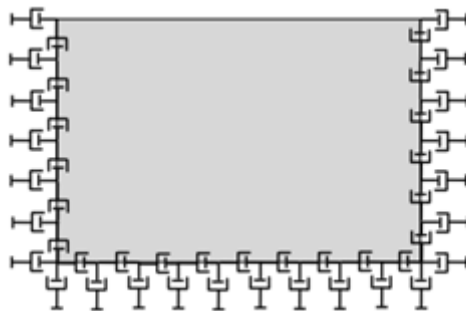


Fig.2.9. Frontières absorbantes-condition locales (Bourouba 2008).

## CHAPITRE 2 : AMORTISSEMENT RADIATIF

Elle est très simple à établir dans le cas unidimensionnel, car elle consiste en un ensemble d'amortisseurs à positionner sur la frontière fictive. Pour déterminer les expressions de ces amortisseurs, on considère la propagation d'une onde élastique plane dans une direction donnée, soit celle de l'axe des  $x$  par exemple.

L'équation de la dynamique d'un volume élémentaire défini au voisinage d'un point qui subit un déplacement  $u$  s'écrit dans la direction considérée comme suit :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Où  $t$  désigne le temps et  $\sigma$  est la contrainte axiale qui se développe sous l'effet d'une extension axiale  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  et qui est donnée par l'élasticité linéaire :

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du sol et  $\rho$  sa densité.

En remplaçant  $\varepsilon$  par la dérivé de  $u$  et on rapportant la relation dans l'équation d'équilibre, on retrouve l'équation d'onde de compression ou "onde P"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Dans laquelle  $V_p = \sqrt{(\lambda + \mu) / \rho}$

La solution de cette équation pour une onde harmonique de pulsation  $\omega$  est le déplacement

$$u(x, t) = \bar{u}(\sin[\omega t - \omega x / V_p] + \cos[\omega t - \omega x / V_p])$$

La vitesse est donnée par :

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\dot{u}(x, t) = \bar{u}\omega(\cos[\omega t - \omega x / V_p] - \sin[\omega t - \omega x / V_p])$$

Qui donne l'expression de l'extension axiale en fonction de la vitesse

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{1}{V_p} \dot{u}(x, t)$$

Et par suite, dans le cas élastique, celle de la contrainte

## CHAPITRE 2 : AMORTISSEMENT RADIATIF

$$\sigma(x, t) = -\frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \dot{u}(x, t) = -\rho V_p \dot{u}(x, t)$$

Cette condition aux limites contribue à la forme intégrale faible des équations du mouvement par le terme

$$\int_{\Gamma} \delta u \sigma d\Gamma$$

$\sigma$  est la composante du vecteur contrainte (cas unidimensionnel) sur la frontière fictive et  $u$  est la composante du déplacement.  $\rho$  et  $V_p$  étant des constantes, l'intégrale donne

$$\rho V_p \dot{u} \int_{\Gamma} \delta u \sigma d\Gamma$$

Sa discrétisation, en considérant des éléments de type "constant", mène au terme d'amortissement élémentaire

$$c_p = \rho V_p A_n$$

Où  $A_n$  est la surface affectée à un nœud de la frontière fictive. Ce coefficient d'amortissement relie la force nodale appliquée au nœud considéré à la vitesse particulière en ce même nœud. Cette expression se traduit par un amortisseur de constante  $c_e$  placé perpendiculairement à la surface de l'élément. Dans la majorité des codes de calcul par éléments finis, il est facile d'introduire des amortisseurs sur tous les nœuds de la frontière. Leurs constantes sont définies par  $\rho V_p A_n$  comme indiqué précédemment.

La condition de Lysmer est précise si l'incidence de l'onde est perpendiculaire à la frontière et dans une gamme de fréquences raisonnables. Pour une incidence inclinée, l'absorption d'énergie par les amortisseurs n'est pas complète et une partie de l'énergie est réfléchi (Seghir 2010).

### 2.7 Modélisation par éléments de frontière

La méthode des éléments de frontière découle de l'application du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti qui permet d'exprimer le champ de déplacement à l'intérieur d'un domaine à l'aide des déplacements et des contraintes aux interfaces de ce domaine. La méthode des éléments de frontière procède en deux principales étapes: la résolution d'une équation intégrale de frontière (déplacements et contraintes en tout point de cette frontière) et le calcul a posteriori en tout point intérieur par application d'une formule de représentation intégrale (Lokmane et al. 2004). La méthode des éléments de frontière présente l'avantage de permettre une modélisation aisée de la propagation d'ondes en milieu infini ou semi-infini. Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont en effet directement incluses dans la formulation. Par ailleurs, la méthode des éléments de frontière résout le problème aux interfaces entre milieux de caractéristiques homogènes : elle est donc limitée à des milieux faiblement hétérogènes, mais permet un gain sensible pour la modélisation de la propagation bidimensionnelle (interfaces unidimensionnelles) ou tridimensionnelle (interfaces surfaciques). Un couplage éléments finis avec les équations intégrales peut être intéressant, puisqu'il combine les avantages de chaque méthode (Dangla 2005).

### CHAPITRE 3. AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

#### Introduction

Dans la pratique le choix du modèle d'amortissement est habituellement fait sur la base de la commodité. De ce fait, si nous avons besoin d'une solution dans le domaine temporel, seul l'amortissement visqueux nous permet de décrire la réponse des systèmes vibratoires. D'un autre côté, si la solution est recherchée dans le domaine fréquentiel, l'amortissement hystérétique est parfois plus adapté. Si le modèle d'amortissement hystérétique produit des réponses fréquentielles pratiquement impossible à distinguer de celles du modèle visqueux, il ne peut pas être utilisé pour des solutions dans le domaine temporel, on ne peut que se demander pourquoi il a été introduit la première fois. Selon (Thorby 2008), la première raison semble être historique, et relative à la solution des équations de flottement d'aéronefs. Au début, lors de l'analyse du problème de flottement, il a été constaté qu'il requiert une solution à valeurs propres complexes, qui étaient à cette époque impossible à obtenir. Cependant, l'introduction de l'amortissement hystérétique fictif dans les équations, a permis l'obtention de la condition de flottement en régime permanent, et a permis l'utilisation des valeurs propres réelles. La deuxième raison est qu'il fournit une manière très simple pour additionner l'amortissement dans les systèmes MDOF (Thorby 2008).

L'objet de ce chapitre est la recherche de la réponse de l'oscillateur SDOF avec amortissement hystérétique dans le domaine temporel. Dans cette perspective, une démarche mathématique a été adoptée, elle a permis l'obtention de la réponse impulsionnelle de l'oscillateur. Les intégrales de convolutions ont permis l'obtention de la réponse aux chargements de types harmoniques et sismiques. De plus un travail a été fait afin d'isoler le terme non causal.

### Historique

La recherche de la réponse impulsionnelle de l'oscillateur SDOF avec amortissement hystérétique a fait l'objet de nombreuses publications. Il a été prouvé que la réponse impulsionnelle du modèle idéal d'amortissement hystérétique viole le principe de causalité. Le défi qui reste toujours d'actualité, est de trouver une expression mathématique commode pour la réponse impulsionnelle, et de résoudre le problème de la non causalité observée qui demeure le défaut du modèle. Ce défi a rendu la problématique très attractive, et sa résolution reste toujours un domaine actif de la recherche. Dans cette perspective, différentes approches ont été proposées et vu l'anomalie du modèle, certains auteurs ont même suggérer une modification du modèle idéal. Ainsi plusieurs autres modèles ont faits leurs apparitions, à l'exemple du modèle de Biot (Biot 1958), et du modèle d'amortissement hystérétique à bande limitée proposé par (Bishop and Price 1986). On pourra citer ci-après, quelques travaux réalisés depuis l'apparition du modèle d'amortissement hystérétique.

Theodorsen et Garrick (Theodorsen and Garrick 1940), semblent avoir été les premiers à présenter, un modèle d'amortissement linéaire indépendant de la fréquence. Quinze ans après, le label, « amortissement hystérétique » est apparu, Bishop et Johnson (Bishop and Johnson 1960), l'ont associé à ce modèle. Ils ont conclu que l'expression de la constante d'amortissement dépendant de la fréquence est valide que pour des oscillations forcées, et qu'il fallait étendre cette définition pour le cas des vibrations libres et non harmoniques. En 1991 Crandall (Crandall 1991) a conclu que les modèles d'amortissement linéaires peuvent être caractérisés par des équations différentielles ou intégrales reliant les variables physiques, en utilisant les fonctions de transfert fréquentielles ou bien les réponses impulsionnelles dans le domaine temporel. L'auteur indique aussi que tout modèle d'amortissement linéaire, idéal ou à bande-limite, possédant une fonction de dissipation d'énergie indépendante de la fréquence, est imparfait, parce que ces modèles violent le principe de causalité. Cependant, il a suggéré que ce comportement non physique n'est pas fatal comme dans le cas des oscillations en régime permanent (Eleni 1999).

En 1994 Chen (Chen et al. 1994), ont réussi à résoudre avec succès le modèle d'amortissement hystérétique dans le cas des vibrations libres, en démontrant que le principe de causalité se vérifie. Une année après, Crandall (Crandall 1995) critique cette solution, en affirmant que le modèle n'est pas complètement équivalent au modèle d'amortissement hystérétique dans le domaine fréquentiel.

### CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

En 2008, Chen.K. F et Shen Y. H (Chen and Shen 2008), étudient le modèle d'amortissement hystérétique à bande-limitée, en utilisant le théorème des résidus. Ils ont montré que la réponse impulsionnelle précurseur notée IRP, définie pour un temps strictement négatif n'est pas nulle, et ils ajoutent que l'ironie est dans le faite que, la non causalité peut être plus sérieuse dans ce modèle que dans le modèle idéal. Ils déclarent que les paramètres de la band-limite influencent d'une manière significative le premier pic de la réponse causale. Finalement les auteurs signalent, que contrairement au modèle idéal, la réponse à  $t=0$  peut être nulle en choisissant des valeurs appropriées pour les limites, inférieure et supérieure, de la bande passante. Cependant, même si la réponse à  $t=0$  est nulle, et sachant que l'IRP n'est pas monotone, son influence peut être dramatique.

En 2012 Bobrovnitski.Yu.I (Bobrovnitskii 2013), prouve que le modèle linéaire d'amortissement hystérétique sous forme de raideur complexe, est un système instable de Lyapunov, et en même temps il respecte le principe de causalité indépendamment du caractère de l'action extérieure. L'auteur stipule que ces résultats réfutent l'opinion répandue. Celle-ci est basée apparemment sur le fait que, si on cherche la fonction de Green du système avec la transformée inverse de Fourier, uniquement à partir de la partie stationnaire de la réponse du système pour une action sinusoïdale, ensuite en raison de la présence de la racine caractéristique de l'équation dans le demi plan supérieure du plan complexe, la réponse prend place pas uniquement après mais aussi avant l'application de l'impulsion. L'erreur dans cette conclusion, réside dans la négligence de la partie non stationnaire de la réponse fréquentielle. Dû à l'accroissement exponentiel de l'amplitude de ce terme, la transformée de Fourier de la fonction de Green du système n'existe pas, en conséquence, l'ensemble de la procédure de calcul est fautive, d'après l'auteur. Finalement, il cite deux autres exemples de modèles linéaires d'amortissement hystérétique et explique pourquoi ils ne respectent pas le principe de causalité.



### 3.1 Oscillateur à un degré de liberté

#### 3.1.1 Module complexe

Les expériences effectuées sur plusieurs matériaux et structures ont montré que si un système est soumis à une déformation harmonique de pulsation  $\omega$  écrite sous la forme suivante (Beards 1996):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad 3.1$$

La contrainte induite sous l'effet de  $\varepsilon$  s'écrit alors comme suit:

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \phi) \quad 3.2$$

$\phi$ : désigne le déphasage entre la contrainte et la déformation.

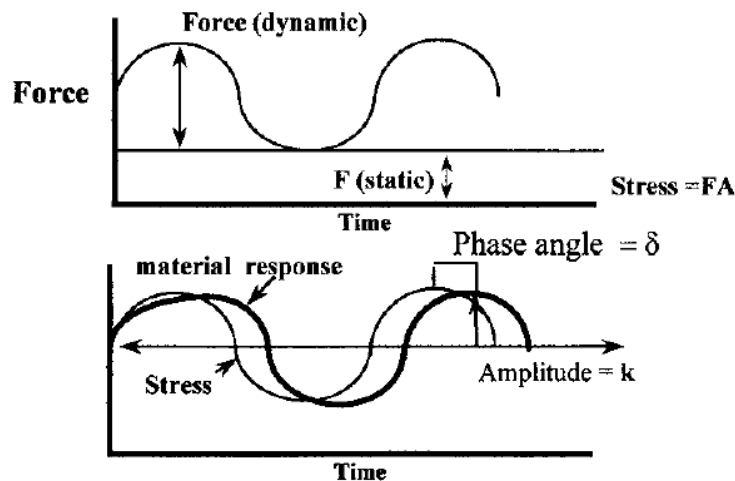


Fig.3.1. contrainte-déformation sous sollicitations cycliques (Beards 1996).

Les relations trigonométriques nous permettent de décomposer l'équation (3.2) :

$$\sigma = \sigma_0 \cos \phi . \sin \omega t + \sigma_0 \sin \phi . \cos \omega t \quad 3.3$$

$$\sigma = \sigma_0 \cos \phi . \sin \omega t + \sigma_0 \sin \phi . \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad 3.4$$

Le premier terme de la contrainte est en phase avec la déformation  $\varepsilon$ , quant au second, il est déphasé d'un angle de  $\pi/2$ .

Afin de faciliter les calculs, on introduit l'écriture complexe, et l'équation (3.4) devient

$$\sigma = \sigma_0 \cos \phi . \sin \omega t + i\sigma_0 \sin \phi . \sin(\omega t) \quad 3.5$$

Avec  $i^2 = -1$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

La loi de Hooke nous permet d'écrire :

$$\sigma = E\varepsilon \quad 3.6$$

L'équation précédente nous donne le module complexe du système en oscillation et il s'écrit sous la forme suivante :

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \cos \phi + i \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \sin \phi \quad 3.7$$

$$E' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \cos \phi \quad 3.8$$

$$E'' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \sin \phi$$

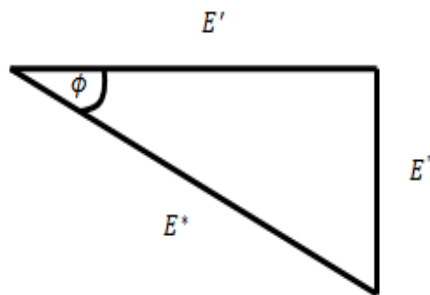
Le module complexe s'écrit alors sous la forme suivante :

$$E^* = E' + iE'' \quad 3.9$$

Le coefficient de perte  $\eta$ , est défini par :

$$\eta = \tan\left(\frac{E''}{E'}\right) \quad 3.10$$

Le tableau de la (fig.2.3-b) (Beards 1996), nous donne le coefficient de perte pour certains matériaux rencontrés en ingénierie:



(a)

Material	Loss factor
Aluminium - pure	0.00002-0.002
Aluminium alloy - dural	0.0004-0.001
Steel	0.001-0.008
Lead	0.008-0.014
Cast iron	0.003-0.03
Manganese copper alloy	0.05-0.1
Rubber - natural	0.1-0.3
Rubber - hard	1.0
Glass	0.0006-0.002
Concrete	0.01-0.06

(b)

Fig.3.2. Module complexe et coefficient de perte (Beards 1996).

$\eta$  : Est le coefficient de perte, il caractérise l'amortissement hystérétique du matériau.

$$\eta = \tan \phi \quad 3.11$$

Le module complexe donné par (3.9), comprend deux parties, la première  $E'$  représente le module élastique instantané proportionnel à la contrainte, quant à la deuxième, elle décrit le module de perte du matériau noté  $E''$ .

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

Une fois l'amortissement structural déterminé, les autres caractéristiques mécaniques en découlent :

- Le module complexe :  $E^* = \sqrt{E'^2 + E''^2}$
- Le module de cisaillement complexe :  $G^* = \frac{E^*}{2(1+\nu)}$

### 3.1.2 Coefficient d'amortissement hystérétique

Sachant que la réponse sous amortissement hystérétique est rigoureusement semblable à celle de l'amortissement visqueux, on peut obtenir le coefficient d'amortissement hystérétique  $C_h$ , en égalant les énergies dissipées lors d'un cycle de vibration comme exposé dans le paragraphe (1.7).

- **L'énergie dissipée sous amortissement hystérétique :**

Sous contraintes cycliques, l'expérience montre que pour la majorité des matériaux, l'énergie dissipée par cycle de vibration est donnée par  $\Delta E_{cyc} = \alpha U_0^2$ . Où  $\alpha$  est une constante indépendante de la fréquence des oscillations. Cette énergie dépend du carré de l'amplitude des déplacements et elle est égale au travail accompli par la force dissipative  $F_h$  (Meirovitch 1986). La force de dissipation d'énergie par amortissement hystérétique est proportionnelle aux déplacements, l'introduction de la constante imaginaire assure que cette force est en phase avec la vitesse (Seghir 2010).

$$F_h = i\eta k u(t) \quad 3.12$$

La raideur complexe  $k^*$ , englobe les forces de dissipation élastique et hystérétique, et elle s'écrit sous la forme suivante :

$$k^* = k(1 + i\eta) \quad 3.13$$

L'énergie dissipée par l'oscillateur pour un mouvement harmonique  $u(t)$  lors d'un cycle de vibration est donnée par:

$$E_h = \int_0^T F_h du$$
$$E_h = \int_0^T F_d du = \int_0^T k^* u du = \int_0^T k(1 + i\eta) u du \quad 3.14$$

Avec :  $u(t) = U_0 \sin \omega t$

En écrivant la force de dissipation en fonction du déplacement harmonique, on obtient :

$$F_d = kU_0 \sin \omega t + i\eta k U_0 \sin \omega t$$

$$F_d = kU_0 \sin \omega t + \eta k U_0 \cos \omega t$$

### CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

On cherche à formuler la force de dissipation en fonction du déplacement et de son amplitude maximale. On pose :

$$\sin\omega t = \frac{u}{U_0} \quad \text{et} \quad \cos\omega t = \frac{\sqrt{U_0^2 - u^2}}{U_0} \quad 3.15$$

La force développée dans l'amortisseur s'écrit sous la forme suivante :

$$F_d = ku \pm \eta k \sqrt{(U_0^2 - u^2)} \quad 3.16$$

On réécrit alors (3.14) en fonction de (3.16) et on obtient :

$$E_h = \int_0^T F_d du = \int_0^T \left( ku \pm \eta k \sqrt{(U_0^2 - u^2)} \right) du \quad 3.17$$

Le résultat de (3.17) nous donne l'énergie totale dissipée lors d'un cycle :

$$E_h = \pi \eta k U_0^2 \quad 3.18$$

Afin d'obtenir le coefficient d'amortissement hystérétique, on égale les énergies données par (1.51) et (3.18) et en obtient :

$$E_v = E_h \Rightarrow \pi C_h U_0^2 |\omega| = \pi \eta k U_0^2 \quad 3.19$$

Le coefficient d'amortissement hystérétique obtenu est:

$$C_h = \frac{\eta k}{|\omega|} \quad 3.20$$

## 3.1.3 Equation de mouvement

La (fig.3.3) représente le modèle masse-ressort-amortisseur hystérétique caractérisé par  $m$ - $c_h$ - $k$  :

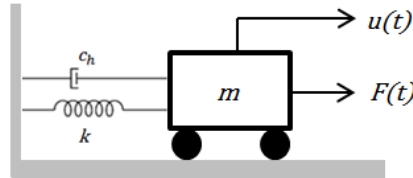


Fig.3.3. Modélisation de l'oscillateur SDOF-Amortissement hystérétique

$$m\ddot{u} + C_h\dot{u} + ku = F(t) \quad 3.21$$

La solution de l'équation différentielle (3.21) est de la forme suivante:

$$u = U_0 e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \dot{u} = i\omega u \quad 3.22$$

On injecte le coefficient d'amortissement hystérétique et la vitesse de l'oscillateur donnés respectivement par (3.20) et (3.22) dans (3.21) et on obtient alors l'équation de mouvement du système :

$$m\ddot{u} + \left(\frac{\eta k}{|\omega|}\right) (i\omega u) + ku = F(t) \quad 3.23$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} [1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega)]u = \frac{F(t)}{m} \quad 3.24$$

$$\ddot{u} + \omega_0^2 [1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega)]u = \frac{F(t)}{m} \quad 3.25$$

(3.25) est l'équation différentielle régissant le mouvement de l'oscillateur linéaire avec amortissement hystérétique, soumis à une excitation  $F(t)$ .

### 3.1.4 Evaluation de la réponse Impulsionnelle :

Le système décrit par la (fig.3.3), est initialement au repos. Il est soumis à l'impulsion de DIRAC notée  $\delta(t)$ . Afin d'évaluer la fonction de transfert, on applique la transformée de Fourier à (3.25), pour obtenir la réponse fréquentielle. L'inverse de celle-ci, nous donne la réponse Impulsionnelle dans le domaine temporel.

$$\ddot{u} + \omega_0^2[1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega)]u = \frac{\delta(t)}{m} \quad 3.26$$

#### 3.1.4.1 Fonction de transfert dans le domaine fréquentiel

La transformée de fourrier appliquée à (3.26) :

$$\text{TF}[\ddot{u} + \omega_0^2(1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega))u] = \text{TF}\left[\frac{\delta(t)}{m}\right] \quad 3.27$$

La table des transformées de Fourier, nous permet d'écrire :

$$\text{TF}[\ddot{u}] = (i\omega)^2 H(\omega) = -\omega^2 H(\omega)$$

$$\text{TF}[u] = H(\omega)$$

$$\text{TF}\left[\frac{\delta(t)}{m}\right] = \frac{1}{m}$$

(3.27) devient alors

$$[-\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega))]H(\omega) = \frac{1}{m} \quad 3.28$$

On définit la fréquence complexe du système  $\omega_z$  comme suit :

$$\omega_z = \omega_0^2 \sqrt{(1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega))} \quad 3.29$$

La fonction de transfert de l'oscillateur, dans le domaine fréquentiel est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{1}{m[-\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega))]} \quad 3.30$$

**3.1.4.2 Evaluation de la réponse Impulsionnelle dans le domaine temporel**

On applique la transformée inverse de Fourier à  $H(\omega)$  donnée par (3.30) et on obtient :

$$u(t) = \text{TF}^{-1} \left[ \frac{1}{m[-\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega))]} \right] \quad 3.31$$

La table des transformées usuelles de Fourier ne contient pas la transformée inverse donnée par (3.31). Cette transformée est définie mathématiquement par l'intégrale suivante :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad 3.32$$

On remplace  $H(\omega)$  par son expression:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{e^{i\omega t}}{m[-\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega))]} \right] d\omega \quad 3.33$$

La fréquence complexe  $\omega_z$  dépend du signe de  $\omega$ , elle s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \omega_z &= \omega_0 \sqrt{(1 + i\eta \cdot \text{sgn}(\omega))} \\ \omega < 0 \quad \omega_{z1} &= a_1 = \omega_0 \sqrt{(1 - i\eta)} \\ \omega > 0 \quad \omega_{z2} &= a_2 = \omega_0 \sqrt{(1 + i\eta)} \end{aligned} \quad 3.34$$

On réécrit (3.33) en fonction de la fréquence complexe  $\omega_z$  :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{m(\omega_z^2 - \omega^2)} d\omega \quad 3.35$$

En éliminant la fonction signe selon (3.34), l'intégrale (3.35) peut être décomposée en deux parties :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi m} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega t}}{(a_1^2 - \omega^2)} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(a_2^2 - \omega^2)} d\omega \right] \quad 3.36$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi m} \left[ \int_{-\infty}^0 H_1(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} H_2(\omega) d\omega \right] = \frac{1}{2\pi m} [I_1 + I_2] \quad 3.37$$

Avec :

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 H_1(\omega) d\omega \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{\infty} H_2(\omega) d\omega \quad 3.38$$

### CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

Dans le but de simplifier la lecture, on effectue un changement de variable pour  $I_1$

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega t}}{(a_1^2 - \omega^2)} d\omega \quad 3.39$$

On pose :

$$\omega = -x \Rightarrow x = -\omega \quad \text{Par conséquent : } \begin{cases} \omega \rightarrow 0 & \Rightarrow x \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow -\infty & \Rightarrow x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad 3.40$$

D'après (3.40),  $I_1$  devient:

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega t}}{(a_1^2 - \omega^2)} d\omega = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} d(-x) = - \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx \quad 3.41$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx \quad 3.42$$

On pose  $\omega = x$ ,  $H_1 \Rightarrow f$  et  $H_2 \Rightarrow g$ , l'expression (3.36) devient:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi m} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx \right] = \frac{1}{2\pi m} (I_1 + I_2) \quad 3.43$$

Avec :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx \quad 3.44$$

Et

$$I_2 = \int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx \quad 3.45$$

D'après (Agrawa, Perera, and Pinelas 2011), (Freitag and Busam 2005) et (Lang 1999) pour les intégrales impropres convergentes de types

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$$

On peut appliquer le théorème des résidus, si on reformule  $I_0$  comme suit :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R h(x) dx$$

Cette limite est appelée valeur principale de Cauchy. A partir de l'existence de cette limite avec les bornes d'intégration correspondantes, on ne peut pas, en générale déduire la convergence de  $I_0$ . Son existence, i.e. sa convergence équivaut à l'existence des deux limites séparées,  $I_{01}$  et  $I_{02}$  avec :

$$I_{01} = \int_{-\infty}^0 h(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 h(x) dx \quad \text{et} \quad I_{02} = \int_0^{\infty} h(x) dx = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} h(x) dx$$



### CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

Le calcul de l'intégrale impropre est basé sur l'idée suivante :

Soit un domaine élémentaire  $D \subset \mathbb{C}$ , contenant le demi-plan supérieur fermé

$$\bar{\mathbb{H}} = \{ z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \geq 0 \}$$

Soit  $a_1, \dots, a_k \in \bar{\mathbb{H}}$ , des points distincts par paires dans le (ouvert) demi plan supérieur, et soit :

$$h : D \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \rightarrow \mathbb{C}$$

Une fonction analytique. On choisit  $r > 0$  assez large tel que

$$r > |a_v| \text{ pour } 1 < v < k$$

On considère ainsi la courbe  $\Gamma$ , montrée sur la (fig.3.4), constituée d'un segment de droite  $[-r, r]$ , et un demi-cercle  $C_r$ , de  $r$  à  $-r$ . le théorème des résidus nous permet d'écrire :

$$\int_{-r}^r h(x)dx + \int_{C_r} h(z)dz = \int_C h(z)dz = 2\pi j \sum_{v=1}^k \text{Res}[h; a_v]$$

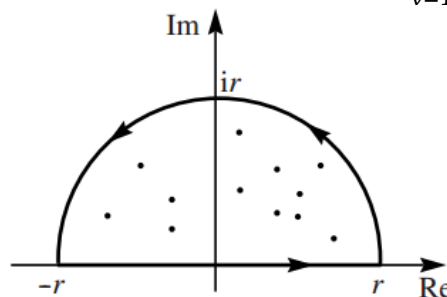


Fig.3.4. Domaine d'intégration usuel- Théorème des résidus.

$I_1$  et  $I_2$  de (3.44) et (3.45), peuvent être évaluées en utilisant le théorème des résidus comme exposé ci-dessus.

Dans le plan complexe défini par la variable complexe  $z$ , telle que  $z = x + iy$ . On définit l'intégrale  $I_z$ , sous la forme suivante :

$$I_z = \oint f(z)dz$$

Pour le calcul de,  $I_1$  et  $I_2$ , les deux contours d'intégration choisis, sont respectivement le quatrième et le premier quadrant comme le montrent les (fig.3.5) et (fig.3.6) Le chemin  $C_R$ , doit être assez grand pour contenir les pôles de la fonction  $f(z)$ , et pour ce faire, on fait tendre  $R$  vers l'infini. Le premier quadrant est parcouru dans le sens positif (anti horaire) et le quatrième quadrant dans le sens négatif (sens horaire).

### CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

Tenant compte du sens du chemin d'intégration, le théorème des résidus s'écrit en générale pour une fonction  $h(z)$  comme suit:

$$I_z = \oint f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} [f(z_k)] \quad 3.46$$

Ou,  $z_k$  représente les pôles de  $f(z)$ .

#### a) Evaluation de $I_1$ :

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx \quad x \in [0, +\infty[ \quad 3.47$$

Afin d'évaluer l'intégrale  $I_1$ , donnée par (3.47), on applique le théorème des résidus, en calculant dans un premier temps l'intégrale de contour données par:

$$I_{1z} = \int_{\Gamma} f(z) dz \quad 3.48$$

$I_{1z}$ : est l'intégrale de contour, à variable complexe  $z$ .

$\Gamma$  est le contour d'intégration choisi, parcouru dans le sens négatif, constitué par un segment de droite sur l'axe réel, le quart de cercle inférieur, et un segment de droite sur l'axe imaginaire, comme l'indique la figure (fig.3.5).

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$$

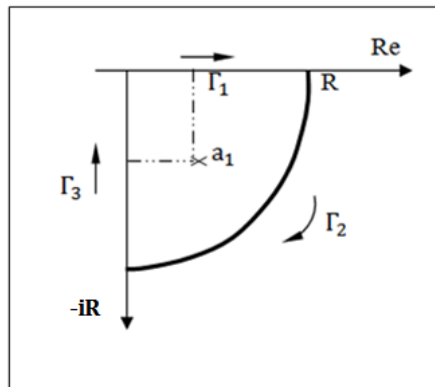


Fig.3.5. Contour d'intégration choisit pour  $I_1$ .

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

L'intégration se fera dans le plan complexe, on pose alors  $f(z)$  :

$$I_{1z} = \oint f(z) dz = \oint \frac{e^{-izt}}{(a_1^2 - z^2)} dz \quad 3.49$$

$$I_{1z} = \oint f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz - \int_{\Gamma_3} f(z) dz \quad 3.50$$

On pose  $z = x + iy$ , pour chaque segment du contour  $\Gamma$ , on effectue le changement de variable suivant :

$$\Gamma_1: z = x \quad \text{Avec } x \in [0, R]$$

$$\Gamma_2: z = Re^{i\theta} \quad \text{Avec } \theta \in [0, -\frac{\pi}{2}]$$

$$\Gamma_3: z = -iy \quad \text{Avec } y \in [0, R]$$

On applique le changement de variable précédent, et on fait tendre à l'infini, (3.50) devient :

$$I_{1R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_0^R \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx - \int_{\Gamma_2} f(z) dz - \int_R^0 \frac{e^{-i(-iy)t}}{(a_1^2 - (-iy)^2)} d(-iy) \right) \quad 3.51$$

$$I_{1R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_0^R \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx - \int_{\Gamma_2} f(z) dz - i \int_0^R \frac{e^{-yt}}{(a_1^2 + y^2)} dy \right) \quad 3.52$$

L'intégrale (3.52) est composée de trois termes notés comme suit :

$$I_{1R} = I_{1\Gamma_1} + I_{1\Gamma_2} + I_{1\Gamma_3}$$

On calcul chaque terme de  $I_{1R}$  séparément :

**a.1)**  $I_{1\Gamma_1}$ : est l'intégrale qu'on cherche donnée par (3.47) avec :

$$I_{1\Gamma_1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_0^R \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx \right) \quad 3.53$$

**a.2)**  $I_{1\Gamma_2}$ : est l'intégrale de  $f(z)$  le long de  $\Gamma_2$  :

$$I_{1\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad 3.54$$

D'après le Lemme de Jordan [2, 16], si  $g(z) = h_1(z)e^{-izt}$ , est une fonction analytique dans le demi-plan inférieure, avec l'exception d'un nombre fini de singularités isolées, et que si,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} |h_1(z)| = 0$ , alors :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

Dans notre cas, et si on applique le changement de variable correspondant à  $\Gamma_2$ , on obtient :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |h_1(z)| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(a_1^2 - z^2)} \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(a_1^2 - (\text{Re}^{i\theta})^2)} \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(\text{Re}^{i\theta})^2} \right| = 0$$

D'après le Lemme de Jordan,  $I_{1\Gamma_2} = 0$ .

$$I_{1\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \frac{e^{-izt}}{(a_1^2 - z^2)} dz = 0$$

**a.3)**  $I_{1R_3}$ : est l'intégrale de la fonction  $f(z)$  le long de  $\Gamma_3$  :

L'inégalité ML nous permet d'écrire :

$$|a_1^2 + y^2| \geq |y^2| - |a_1^2| \Rightarrow \frac{1}{|a_1^2 + y^2|} \leq \frac{1}{|y^2| - |a_1^2|} \Rightarrow \left| \frac{e^{-yt}}{a_1^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{y^2 - \omega_0^2 \sqrt{1 + \eta^2}} = M$$

$$\left| \int_0^R \frac{e^{-yt}}{a_1^2 + y^2} dz \right| \leq \frac{R}{R^2 - \omega_0^2 \sqrt{1 + \eta^2}} = ML$$

$$\left| \int_0^R \frac{e^{-yt}}{(a_1^2 + y^2)} dy \right| \leq \frac{R}{R^2 - \omega_0^2 \sqrt{1 + \eta^2}} \quad 3.55$$

(3.55) tends vers 0, pour les deux bornes d'intégrations, donc  $I_{1\Gamma_3} = 0$

Par conséquent, l'intégrale de contour se réduit à :

$$I_{1R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_0^R \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx \right) \quad 3.56$$

**a.4)** Calcul des résidus de  $f(z)$ :

$$f(z) = \frac{e^{-izt}}{(a_1^2 - z^2)}$$

Les racines du dénominateur de  $f(z)$ , nous donnent les pôles de la fonction  $f(z)$ . On égale le dénominateur de  $f(z)$  à 0, et on obtient ses pôles :

$$a_1^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = a_1^2 \Rightarrow z_1 = \pm a_1$$

On garde uniquement le pôle,  $z = +a_1$ , qui appartient au domaine d'intégration choisit (fig.3.5). Le deuxième pôle est rejeté, et on obtient :

$$\text{Res}(f, a_1) = \lim_{Z \rightarrow a_1} (Z - a_1) \frac{e^{-izt}}{(a_1^2 - z^2)} = \lim_{Z \rightarrow a_1} (Z - a_1) \frac{-e^{-izt}}{(Z - a_1)(Z + a_1)} = \frac{-e^{-ia_1 t}}{2a_1}$$

$$\text{Res}(f, a_1) = - \frac{e^{-ia_1 t}}{2a_1}$$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

D'après (3.47), on écrit :

$$I_{R1} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx = -2\pi i \sum \text{Res}(f, a_i) = -2\pi i \left( -\frac{e^{-ia_1 t}}{2a_1} \right)$$

Finalement :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx = \pi i \frac{e^{-ia_1 t}}{a_1} \quad 3.57$$

### b) Evaluation de $I_2$ :

Même démarche que pour le calcul de  $I_1$ , on cherche à évaluer  $I_2$

$$I_2 = \int_0^{\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx \quad 3.58$$

- **Calcul de l'intégral de contour :**

Afin d'évaluer l'intégrale  $I_2$ , donnée par l'équation (3.58), on applique le théorème des résidus et on obtient :

$$I_{2z} = \oint g(z) dz = \oint \frac{e^{izt}}{(a_2^2 - z^2)} dz \quad 3.59$$

$\gamma$  est le contour d'intégration choisi, parcouru dans le sens positif, constitué par un segment de droite sur l'axe réel, un quart de cercle supérieur et un segment de droite sur l'axe imaginaire, comme l'indique la (fig.3.6) :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

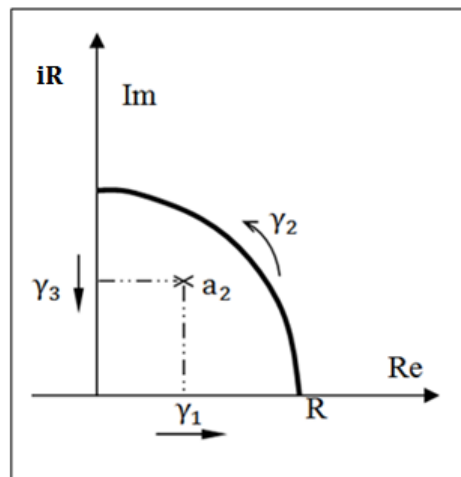


Fig.3.6. Contour d'intégration choisit pour  $I_2$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

L'intégration se fera dans le plan complexe, on pose alors  $g(z)$  :

$$I_{2z} = \oint g(z) dz = \oint \frac{e^{izt}}{(a_2^2 - z^2)} dz \quad 3.60$$

$$I_{2z} = \oint g(z) dz = \int_{\gamma_1} g(z) dz + \int_{\gamma_2} g(z) dz + \int_{\gamma_3} g(z) dz \quad 3.61$$

Pour chaque segment du contour  $\gamma$ , on effectue un changement de variable

On pose :  $z = x + iy$

Suivant  $\gamma_1$ :  $z = x$  avec  $x \in [0, R]$

$\gamma_2$ :  $z = Re^{i\theta}$  Avec  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\gamma_3$ :  $z = iy$  Avec  $y \in [R, 0]$

On appliquant le changement de variable précédent l'intégrale devient :

$$I_{2z} = \left( \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx + \int_{\gamma_2} g(z) dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^0 \frac{e^{i(iy)t}}{(a_2^2 - (iy)^2)} d(iy) \right) \quad 3.62$$

$$I_{2z} = \left( \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx + \int_{\gamma_2} g(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{ie^{-yt}}{(a_2^2 + y^2)} dy \right) \quad 3.63$$

L'intégrale (3.63) est composée de trois termes notés comme suit :

$$I_{2z} = I_{2\gamma_1} + I_{2\gamma_2} + I_{2\gamma_3}$$

On calcul maintenant chaque terme de  $I_{2z}$  séparément :

**a.1)**  $I_{2\gamma_1}$ : est l'intégrale qu'on cherche donnée par (3.58) avec :

$$I_{2\gamma_1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_0^R \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx \right) \quad 3.64$$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

**a.2)**  $I_{2\gamma_2}$ : est l'intégrale de la fonction  $g(z)$  le long de  $\gamma_2$

$$I_{2\gamma_2} = \int_{\gamma_2} g(z) dz \quad 3.65$$

D'après le Lemme de Jordan [2,16], si  $g(z) = h_2(z)e^{izt}$ , est une fonction analytique dans le demi-plan supérieur, avec l'exception d'un nombre fini de singularités isolées, et que si,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} |h_2(z)| = 0$ , alors :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} g(z) dz = 0$$

Dans notre cas, et si on applique le changement de variable correspondant à  $\gamma_2$ , on obtient :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |h_2(z)| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(a_2^2 - z^2)} \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(a_2^2 - (Re^{i\theta})^2)} \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(Re^{i\theta})^2} \right| = 0$$

D'après le Lemme de Jordan,  $I_{2\gamma_2} = 0$ .

$$I_{2\gamma_2} = \int_{\gamma_2} \frac{e^{izt}}{(a_2^2 - z^2)} dz = 0$$

**a.3)**  $I_{2\gamma_3}$ : est l'intégrale de la fonction  $g(z)$  le long de  $\gamma_2$  :

L'inégalité ML nous permet d'écrire :

$$|a_2^2 + y^2| \geq |y^2| - |a_2^2| \Rightarrow \frac{1}{|a_2^2 + y^2|} \leq \frac{1}{|y^2| - |a_2^2|} \Rightarrow \left| \frac{e^{-yt}}{a_1^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{y^2 - \omega_0^2 \sqrt{1 + \eta^2}} = M$$

$$\left| \int_0^R \frac{e^{-yt}}{(a_2^2 + y^2)} dy \right| \leq \frac{R}{R^2 - \omega_0^2 \sqrt{1 + \eta^2}} = ML$$

$$\left| \int_0^R \frac{e^{-yt}}{(a_2^2 + y^2)} dy \right| \leq \frac{R}{R^2 - \omega_0^2 \sqrt{1 + \eta^2}} \quad 3.66$$

(3.66) tends vers 0, pour les deux bornes d'intégrations, donc  $I_{2\gamma_3} = 0$

Par conséquent :

$$I_{2\gamma} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_0^R \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx \right) \quad 3.67$$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

a.4) Calcul des résidus de  $g(z)$ :

$$g(z) = \frac{e^{izt}}{(a_2^2 - z^2)}$$

Les racines du dénominateur de  $g(z)$ , nous donnent les pôles de la fonction  $g(z)$ . On égale le dénominateur de  $g(z)$  à 0, et on obtient ses pôles :

$$a_2^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = a_2^2 \Rightarrow z_1 = \pm a_2$$

On garde uniquement le pôle,  $z = +a_2$ , qui appartient au domaine d'intégration choisit (fig.3.6). Le deuxième pôle est rejeté, et on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Res}(g, a_2) &= \lim_{Z \rightarrow a_2} (Z - a_2) \frac{e^{izt}}{(a_2^2 - z^2)} = \lim_{Z \rightarrow a_2} (Z - a_2) \frac{-e^{izt}}{(Z - a_2)(Z + a_2)} = \frac{-e^{ia_2t}}{2a_2} \\ \text{Res}(g, a_2) &= -\frac{e^{ia_2t}}{2a_2} \end{aligned}$$

D'après (3.47), on écrit :

$$I_{2R} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx = 2\pi i \sum \text{Res}(g, Z_i) = 2\pi i \left( -\frac{e^{ia_2t}}{2a_2} \right)$$

Finalemment :

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx = -\pi i \frac{e^{ia_2t}}{a_2} \quad 3.68$$

On injecte (3.57) et (3.68) dans (3.43)

$$u(t) = \frac{1}{2\pi m} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(a_1^2 - x^2)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(a_2^2 - x^2)} dx \right] = \frac{i}{2m} \left( \frac{e^{-ia_1t}}{a_1} - \frac{e^{ia_2t}}{a_2} \right) \quad 3.69$$

En remplace  $a_1$  et  $a_2$  par leurs valeurs dans (3.69), on obtient :

$$u(t) = \frac{i}{2m} \left( \frac{e^{-i\omega_0\sqrt{(1-i\eta)}t}}{\omega_0\sqrt{(1-i\eta)}} - \frac{e^{i\omega_0\sqrt{(1+i\eta)}t}}{\omega_0\sqrt{(1+i\eta)}} \right) \quad 3.70$$

(3.70) est la transformée inverse de Fourier de (3.30).



3.1.4.3 Extraction de la partie réelle

La partie réelle de  $u(t)$  donnée par (3.71) représente la réponse Impulsionnelle de l'oscillateur notée  $u_h(t)$ .

$$u(t) = \frac{i}{2m} \left( \frac{e^{-i\omega_0\sqrt{(1-i\eta)}t}}{\omega_0\sqrt{(1-i\eta)}} - \frac{e^{i\omega_0\sqrt{(1+i\eta)}t}}{\omega_0\sqrt{(1+i\eta)}} \right) \quad 3.71$$

Soit  $\omega_{z1}$  et  $\omega_{z2}$ , les fréquences complexes de l'équation (3.71), définit par :

$$\omega_{z1} = \omega_0\sqrt{(1-i\eta)}$$

$$\omega_{z2} = \omega_0\sqrt{(1+i\eta)}$$

On pose :

Dans le corps des nombres complexes  $C$ , si on a un nombre complexe  $\alpha$  définit comme suit :

$$\alpha = x + iy$$

La formule d'Euler nous permet d'écrire  $\alpha$ , sous forme exponentielle :

$$\alpha = x + iy = (\sqrt{x^2 + y^2})e^{i\theta}$$

Avec :

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Maintenant si  $z = \sqrt{\alpha}$  alors  $z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})e^{i\theta}} = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left( e^{\frac{i\theta}{2}} \right)$

$$z = z_r + iz_i = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left( \cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2} \right)$$

Ou  $z_r$  et  $z_i$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de  $z$ .

On peut décomposer les fréquences complexes  $\omega_{z1}$  et  $\omega_{z2}$ , comme indiqué ci-dessus, on obtient alors :

$$\omega_{z1} = \omega_0\sqrt{(1-i\eta)} = \omega_{1r} + i\omega_{1i}$$

$$\omega_{z2} = \omega_0\sqrt{(1+i\eta)} = \omega_{2r} + i\omega_{2i}$$

La décomposition de  $\omega_{z1}$  et  $\omega_{z2}$  nous permet d'écrire :

$$\omega_{1r} = \omega_0\sqrt[4]{1 + \eta^2} \cos\left[\frac{1}{2}\arctan(\eta)\right] \quad \text{et} \quad \omega_{1i} = -\omega_0\sqrt[4]{1 + \eta^2} \sin\left[\frac{1}{2}\arctan(\eta)\right]$$

Partie réelle et imaginaire de  $\omega_{z1}$

$$\omega_{2r} = \omega_0\sqrt[4]{1 + \eta^2} \cos\left[\frac{1}{2}\arctan(\eta)\right] \quad \text{et} \quad \omega_{2i} = \omega_0\sqrt[4]{1 + \eta^2} \sin\left[\frac{1}{2}\arctan(\eta)\right]$$

Partie réelle et imaginaire de  $\omega_{z2}$

L'équation (3.71) devient alors :

$$u(t) = \frac{i}{2m} \left( \frac{e^{-i(\omega_{1r}+i\omega_{1i})t}}{\omega_{1r} + i\omega_{1i}} - \frac{e^{i(\omega_{2r}+i\omega_{2i})t}}{(\omega_{2r} + i\omega_{2i})} \right) \quad 3.72$$

### CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

$$u(t) = \frac{i}{2m} \left( \frac{e^{(\omega_{1i}-i\omega_{1r})t}}{\omega_{1r} + i\omega_{1i}} - \frac{e^{(-\omega_{2i}+i\omega_{2r})t}}{(\omega_{2r} + i\omega_{2i})} \right) \quad 3.73$$

$$u(t) = \frac{i}{2m} \left( \frac{e^{-i\omega_{1r}t} \times e^{\omega_{1i}t}}{\omega_{1r} + i\omega_{1i}} - \frac{e^{i\omega_{2r}t} \times e^{-\omega_{2i}t}}{(\omega_{2r} + i\omega_{2i})} \right) \quad 3.74$$

$$u(t) = \frac{i}{2m} \left( \frac{[\cos \omega_{1r}t - i \sin \omega_{1r}t] \times e^{\omega_{1i}t}}{\omega_{1r} + i\omega_{1i}} - \frac{[\cos \omega_{2r}t + i \sin \omega_{2r}t] \times e^{-\omega_{2i}t}}{(\omega_{2r} + i\omega_{2i})} \right) \quad 3.75$$

$$u(t) = \frac{i}{2m} \left( \frac{[\cos \omega_{1r}t - i \sin \omega_{1r}t] \times e^{\omega_{1i}t}}{\omega_{1r} + i\omega_{1i}} - \frac{[\cos \omega_{2r}t + i \sin \omega_{2r}t] \times e^{-\omega_{2i}t}}{(\omega_{2r} + i\omega_{2i})} \right) \quad 3.76$$

Après multiplication par le conjugué des dénominateurs pour chaque termes, et en isolant la partie réelle de (3.76), on obtient la partie réelle notée  $u_h(t)$ :

$$u_h(t) = \frac{e^{\omega_{1i}t}}{m[\omega_{1r}^2 + \omega_{1i}^2]} [(\omega_{1i} \cos \omega_{1r}t + \omega_{1r} \sin \omega_{1r}t) - (\omega_{2i} \cos \omega_{2r}t - \omega_{2r} \sin \omega_{2r}t)] \quad 3.77$$

$$u_h(t) = \frac{e^{-\sin\left[\frac{1}{2}\arctan(\eta)\right]\omega_0\sqrt{1+\eta^2}t}}{m\omega_0\sqrt{1+\eta^2}} \sin \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\arctan(\eta)\right)\omega_0\sqrt{1+\eta^2}t - \frac{1}{2}\arctan(\eta) \right] \quad 3.78$$

Dans le but de simplifier encore d'avantage l'équation (3.78), on applique les séries de Tylor pour chaque terme et on obtient :

$$u_h(t) = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1+\frac{1}{2}\eta^2}} \sin \left[ \omega_0 \left( \sqrt{1+\frac{1}{2}\eta^2} \right) t - \frac{1}{2}\arctan(\eta) \right] e^{-\frac{1}{2}\eta\omega_0t} \quad 3.79$$

Par définition l'amortissement réduit est égale à la moitié du coefficient de perte et il est donné par la relation suivante :

$$\xi = \frac{\eta}{2} \quad 3.80$$

$$u_h(t) = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1+2\xi^2}} \sin \left[ \omega_0\sqrt{1+2\xi^2}t - \frac{1}{2}\arctan(2\xi) \right] e^{-\xi\omega_0t} \quad 3.81$$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

On pose :

$$\omega_h = \omega_0 \sqrt{1 + 2\xi^2}$$

$$\rho = \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 + 2\xi^2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan(\eta)$$

$$u_h(t) = \rho \sin[\omega_h t - \varphi] e^{-\xi\omega_0 t} \quad 3.82$$

$u_h(t)$ : Est la réponse Impulsionnelle pour un oscillateur linéaire sous amortissement hystérétique.

L'allure de la courbe de l'équation (3.82) est représentée sur la (fig.3.7)

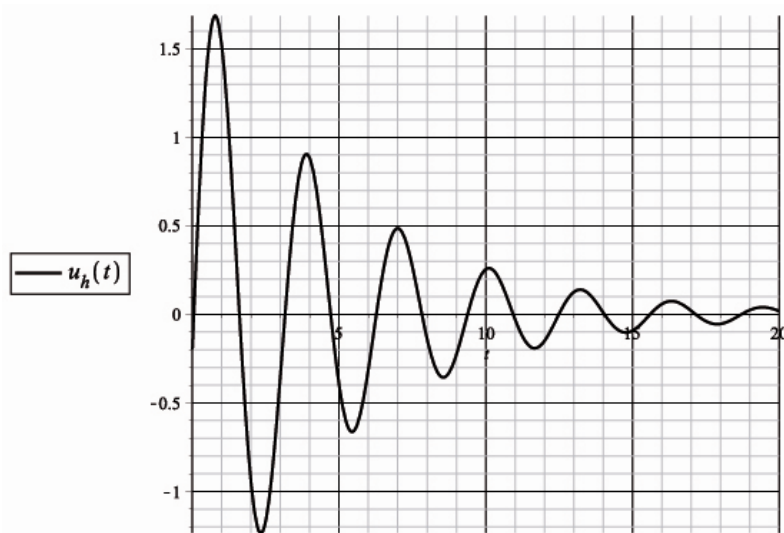


Fig.3.7. Réponse Impulsionnelle de l'oscillateur SDOF

### 3.1.5 Evaluation du décrétement logarithmique

Le décrétement logarithmique  $\delta_h$  approprié pour la fonction de transfert (3.82) est défini par :

$$\delta_h = \ln \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) \quad 3.83$$

$$u_n = \rho \sin[\omega_h t - \varphi] e^{-\xi \omega_0 t}$$

$$u_{n+1} = \rho \sin[\omega_h(t + T_D) - \varphi] e^{-\xi \omega_0(t + T_D)}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\rho \sin[\omega_h t - \varphi] e^{-\xi \omega_0 t}}{\rho \sin[\omega_h(t + T_D) - \varphi] e^{-\xi \omega_0(t + T_D)}} = \frac{1}{e^{-\xi \omega_0 T_D}} = e^{\xi \omega_0 T_D} \quad 3.84$$

$$\begin{aligned} \delta_h &= \ln \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \ln(e^{\xi \omega_0 T_D}) = \xi \omega_0 T_D \\ \delta_h &= \xi \omega_0 T_D = \xi \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_h} = \xi \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 + 2\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 + 2\xi^2}} \\ \delta_h &= \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 + 2\xi^2}} \quad 3.85 \end{aligned}$$

(3.85) est le décrétement logarithmique proposé pour la réponse Impulsionnelle de l'oscillateur linéaire avec amortissement hystérétique.

### 3.1.6 Taux d'amortissement en fonction du décrétement logarithmique

Le taux d'amortissement peut s'écrire en fonction du décrétement logarithmique de la manière suivante :

$$\delta_h = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 + 2\xi^2}} \quad 3.86$$

$$\delta_h^2 = \frac{(2\pi\xi)^2}{(1 + 2\xi^2)} \Rightarrow \delta_h^2(1 + 2\xi^2) = 4\pi^2\xi^2$$

$$\xi = \frac{\delta_h}{\sqrt{4\pi^2 - 2\delta_h^2}} \quad 3.87$$

Dans le cas des systèmes vibratoires utilisant le modèle d'amortissement hystérétique, le taux d'amortissement  $\xi$  peut être obtenu à partir du décrétement logarithmique en utilisant la formule (3.87).

### 3.1.7 Amortissement hystérétique et non causalité

La causalité dans la réponse Impulsionnelle donnée par (3.88) n'est pas observée. La réponse précède l'excitation comme le montre la (fig.3.8).

$$u_h(t) = \rho \sin[\omega_h t - \varphi] e^{-\xi \omega_0 t} \quad 3.88$$

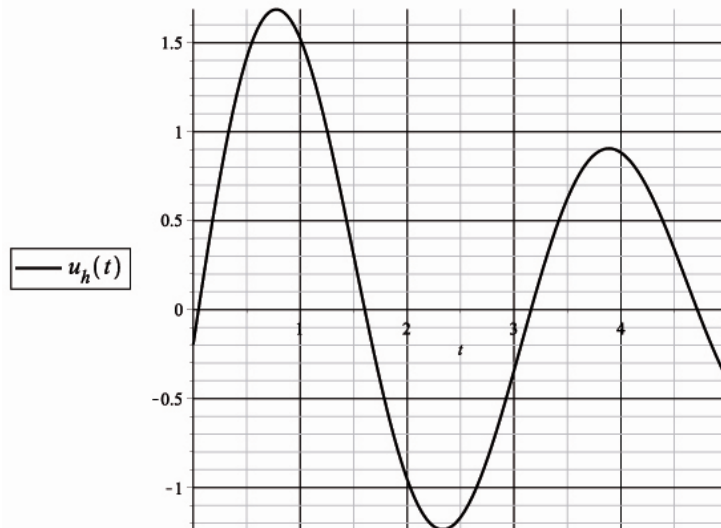


Fig.3.8. Non causalité de la réponse Impulsionnelle

La réponse Impulsionnelle (3.88) caractérise le modèle linéaire d'amortissement hystérétique. La réponse Impulsionnelle n'a de sens physique que si  $t \geq 0$ . A  $t=0$ , (3.88) comporte un terme indépendant du temps, responsable du phénomène de non causalité observé dans la réponse Impulsionnelle. On définit ce terme sous le nom de « terme non causal », et il est donné par :

$$u_h(t=0) \Rightarrow u_h(t=0) = \rho \sin[-\varphi] = -\rho \sin[\varphi]$$

$$\text{On pose : } u_{h0} = |-\rho \sin[\varphi]|$$

$$u_{h0} = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1+2\xi^2}} \sin\left[\frac{1}{2}\arctan(2\xi)\right] \quad 3.89$$

### 3.1.8 Influence de $m$ , $\xi$ , et $\omega_0$ , sur la non causalité

Le terme non causal dépend de la masse, la période propre et le taux d'amortissement. Chacun des paramètres caractérise les propriétés de la structure et influence le degré de non causalité.

$$u_{h0} = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1+2\xi^2}} \sin\left[\frac{1}{2}\arctan(2\xi)\right] \quad 3.90$$

### A) Influence de la masse $m$

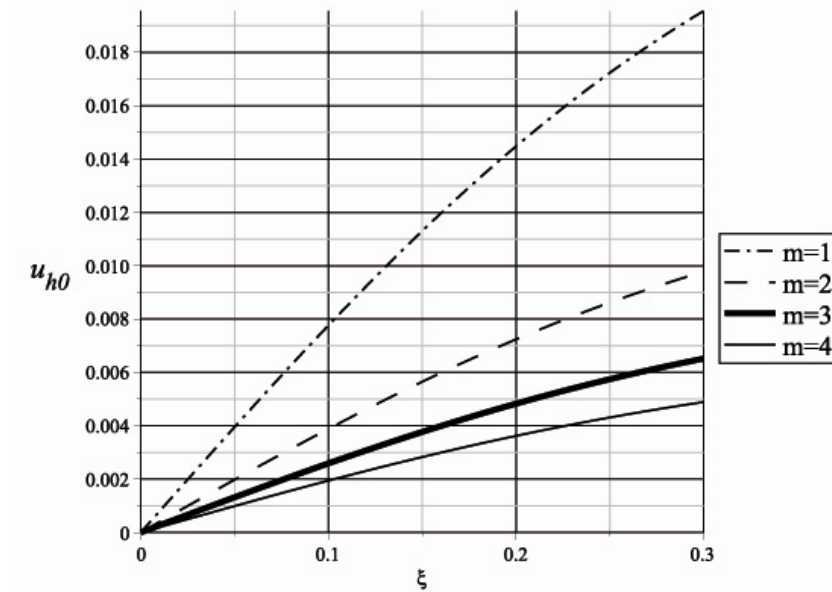


Fig.3.9. Influence de la masse sur la non causalité

La non causalité est inversement proportionnelle à la masse de la structure. Pour les structures légères le caractère non causal est plus apparent, et plus le poids de la structure augmente plus la non causalité diminue.

### B) Influence de la fréquence propre $\omega_0$

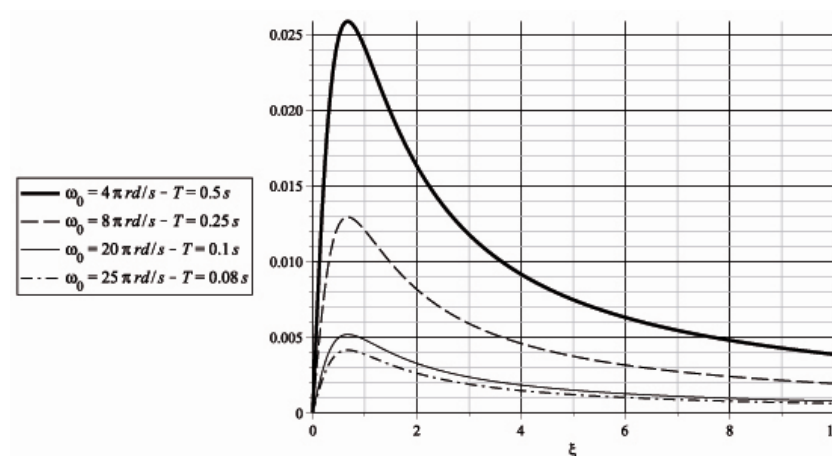


Fig.3.10. Influence de la fréquence propre  $\omega_0$  sur la non causalité

Pour une rigidité donnée, la non causalité est inversement proportionnelle à la fréquence propre de la structure, pour les basses fréquences la non causalité est plus apparente, et plus la fréquence propre augmente plus la non causalité diminue.

### C) Influence du taux d'amortissement $\xi$

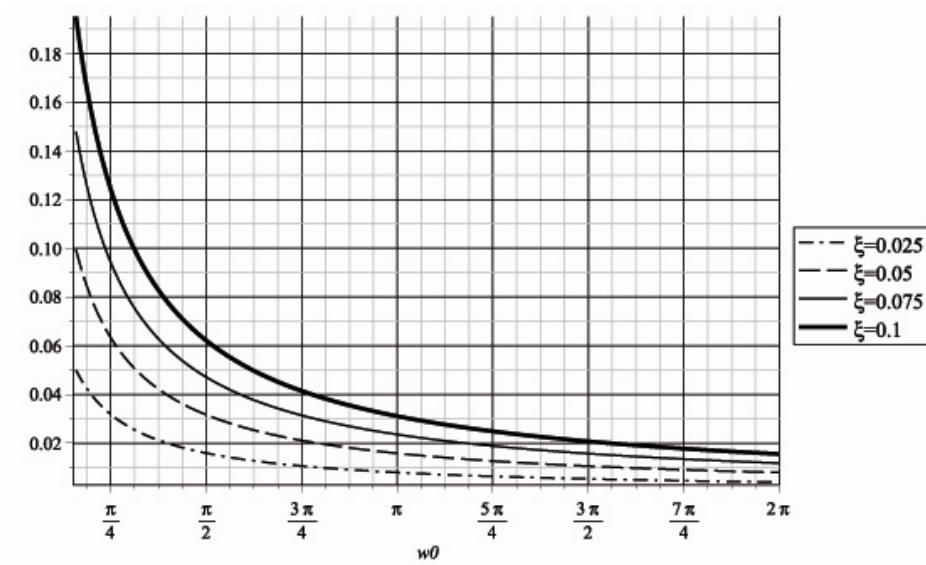


Fig.3.11. Influence de la fréquence propre  $\xi$  sur la non causalité

Pour une fréquence propre donnée, la non causalité est d'autant plus importante que si le taux d'amortissement augmente et vice versa.

### 3.1.9 Evaluation de la réponse sous excitation harmonique

Dans certains cas de chargements d'impacts ou de chocs, c'est la partie transitoire de la réponse qui importe le plus et son intérêt est primordial pour des considérations de sécurité structurelles. Mais, dans la majorité des cas, le chargement rendra plus ou moins la réponse de type stationnaire, dans ce cas c'est le régime permanent qui est la principale préoccupation (Stømmen 2014). Le système décrit par la (fig.3.3) est supposé être initialement au repos, il est excité par une force harmonique  $p(t)$  sous forme exponentielle ou  $\omega$ , est la fréquence et  $p_0$  l'amplitude de la force d'excitation. La forme exponentielle peut être décomposée en deux termes, la partie réelle représente l'excitation sous forme cosinus et la partie imaginaire sous forme d'une sinusoïdale :

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t} = p_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad 3.91$$

#### 3.1.9.1 Excitation Sinusoïdale

Le système décrit par la (fig.3.3) est supposé être initialement au repos, il est excité par une force harmonique  $p(t)$  sous forme exponentielle. La réponse de l'oscillateur notée  $u_{hs}(t)$  est donnée par l'intégrale de Duhamel, appliquée à la réponse Impulsionnelle (3.82):

$$u_h(t) = \rho \sin[\omega_h t - \varphi] e^{-\xi \omega_0 t} \quad \text{et} \quad p(t) = p_0 e^{i\omega t}$$

avec:  $\rho = \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1+2\xi^2}}$  et  $\omega_h = \omega_0 \sqrt{1+2\xi^2}$

$$u_{hp}(t) = \int_0^t u_h(\tau) p(t-\tau) d\tau \quad 3.92$$

L'extraction de la partie imaginaire de (3.92) nous donne la solution pour chargement harmonique sous forme sinusoïdal.

On remplace la réponse Impulsionnelle et la force d'excitation dans (3.92) :

$$u_{hp}(t) = \frac{1}{m\omega_h} \int_0^t \sin[\omega_h \tau - \varphi] e^{-\xi \omega_0 \tau} p_0 e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \quad 3.93$$

Dans le but de faciliter l'intégration, on écrit la fonction sinus sous forme exponentielle:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad 3.94$$

(3.93) devient :

$$u_{hp}(t) = \frac{p_0}{m\omega_h} \int_0^t \left( \frac{e^{i(\omega_h \tau - \varphi)} - e^{-i(\omega_h \tau - \varphi)}}{2i} \right) e^{-\xi \omega_0 \tau} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \quad 3.95$$

$$u_{hp}(t) = \frac{p_0}{2im\omega_h} \int_0^t (e^{i(\omega_h \tau - \varphi)} - e^{-i(\omega_h \tau - \varphi)}) e^{-\xi \omega_0 \tau} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \quad 3.96$$



## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

$$u_{hp}(t) = \frac{p_0}{2im\omega_h} \left[ e^{i(\varpi t - \varphi)} \int_0^t e^{-\alpha\tau + i(\omega_h - \varpi)\tau} d\tau - e^{i(\varpi t + \varphi)} \int_0^t e^{-\alpha\tau - i(\omega_h + \varpi)\tau} d\tau \right]$$

On pose

$$a = \omega_h - \varpi$$

$$b = \omega_h + \varpi$$

$$\alpha = \xi\omega_0$$

On réécrit (3.138) comme suit :

$$u_{hp}(t) = \frac{p_0}{2im\omega_h} \left[ e^{i(\varpi t - \varphi)} \int_0^t e^{(-\alpha + ia)\tau} d\tau - e^{i(\varpi t + \varphi)} \int_0^t e^{-(\alpha + ib)\tau} d\tau \right] \quad 3.97$$

$$u_{hp}(t) = \frac{p_0}{2im\omega_h} \left( e^{i(\varpi t - \varphi)} \left[ \frac{e^{(-\alpha + ia)t} - 1}{(-\alpha + ia)} \right] - e^{i(\varpi t + \varphi)} \left[ \frac{e^{-(\alpha + ib)t} - 1}{-(\alpha + ib)} \right] \right) \quad 3.98$$

$$u_{hp}(t) = \frac{p_0}{2im\omega_h} \left[ e^{i(\varpi t - \varphi)} \left( \frac{e^{(-\alpha + ia)t}}{-\alpha + ia} \right) - e^{i(\varpi t + \varphi)} \left( \frac{e^{-(\alpha + ib)t}}{-(\alpha + ib)} \right) - \frac{e^{i(\varpi t - \varphi)}}{-\alpha + ia} + \frac{e^{i(\varpi t + \varphi)}}{-(\alpha + ib)} \right]$$

$$u_{hp}(t) = \frac{p_0}{2im\omega_h} \left( \left[ e^{i(\varpi t - \varphi)} \left( \frac{e^{iAt}}{-\alpha + iA} \right) + e^{i(\varpi t + \varphi)} \left( \frac{e^{iBt}}{\alpha + iB} \right) \right] e^{-\alpha t} - \frac{e^{i(\varpi t - \varphi)}}{-\alpha + iA} - \frac{e^{i(\varpi t + \varphi)}}{\alpha + iB} \right) \quad 3.99$$

L'extraction de la partie imaginaire de l'équation (3.99), nous donne la réponse  $u_{hs}(t)$  de l'oscillateur à une excitation sinusoïdale, son expression s'écrit sous la forme suivante:

$$u_{hs}(t) = \frac{-p_0}{2m\omega_h} \left[ \frac{[-\alpha \cos(\omega_h t - \varphi) + a \sin(\omega_h t - \varphi)]e^{-\alpha t} + \alpha \cos(\varpi t - \varphi) - a \sin(\varpi t - \varphi)}{\alpha^2 + a^2} \right. \quad 3.100$$

$$\left. + \frac{[\alpha \cos(\omega_h t - \varphi) - b \sin(\omega_h t - \varphi)]e^{-\alpha t} - \alpha \cos(\varpi t + \varphi) - b \sin(\varpi t + \varphi)}{\alpha^2 + b^2} \right]$$

### Interprétation et discussion de la réponse :

- Réponse à la résonance  $\beta = 1$  :

A  $t = 0$ , on voit très bien que  $u_{hs}$ , donnée par (3.100) tracée sur la (fig.3.12) est causale. Cependant, à cet instant la vitesse de l'oscillateur est négative. Le mouvement continu dans le sens négatif, jusqu'à ce qu'il atteigne un maximum, puis il change de sens, pour osciller normalement. Le terme non causal donné par (3.89), entraîne la réponse de l'oscillateur dans l'intervalle négatif.

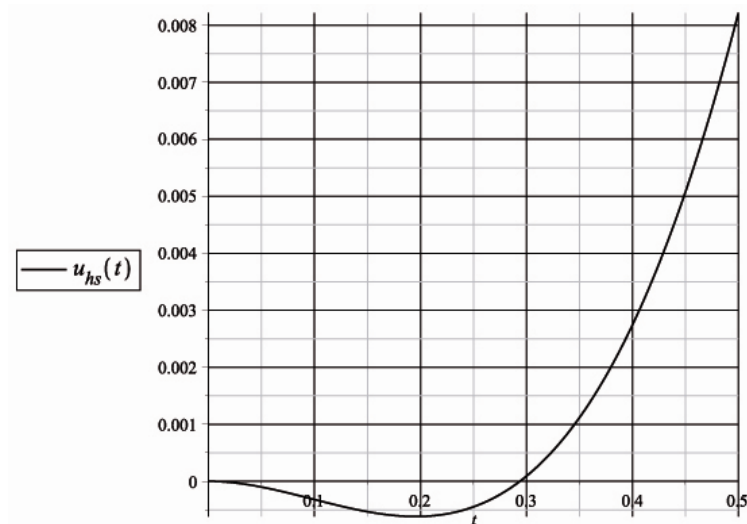


Fig.3.12. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta = 1$  (Au voisinage de  $t=0$ )

Au cours du temps la réponse de l'oscillateur, à la résonance est montrée par la (fig.3.13). L'amplitude du mouvement augmente en fonction du temps, jusqu'à ce qu'elle atteigne le régime permanent.

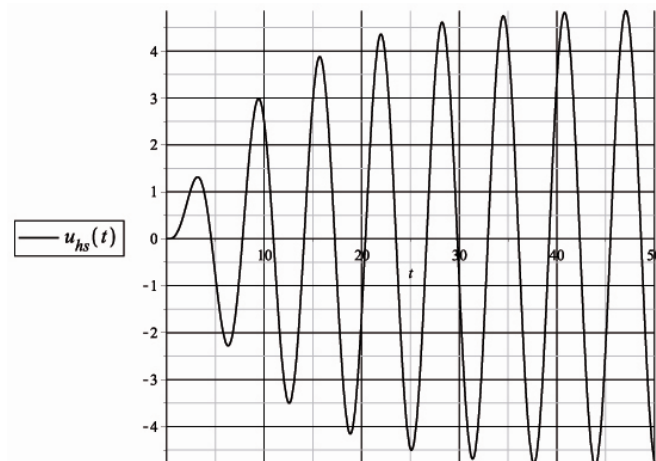


Fig.3.13. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta = 1$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

- Réponse pour  $\beta > 1$

Même observation que pour le cas de la résonance, au voisinage de 0. La réponse est causale, mais la vitesse est négative. La réponse du système pour  $\beta = 2$ , est montrée par la (fig.3.14).

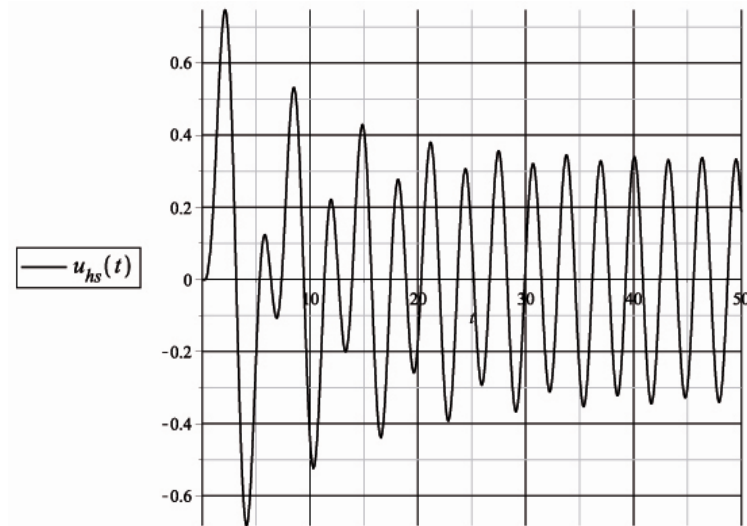


Fig.3.14. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta > 1$

- Réponse pour  $\beta < 1$

La réponse est causale, mais avec une vitesse négative au voisinage 0. La réponse du système pour  $\beta = 0.5$ , est montrée par la (fig.3.15).

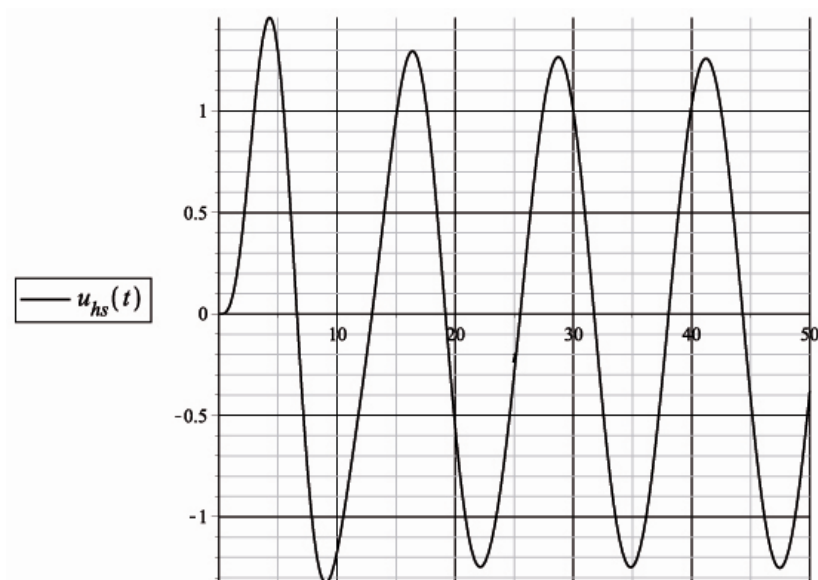


Fig.3.15. Réponse à l'excitation sinusoïdale  $\beta < 1$

• **Elimination du terme non causal**

Pour des petites valeurs de  $\xi < 0.2$ , on peut simplifier d'avantage l'équation (3.100), en éliminant le terme non causal engendré par  $\varphi$ . La contribution du terme non causal n'affecte pas la réponse de l'oscillateur.  $u_{hs}$  devient alors :

$$u_{hs}(t) = \frac{-p_0}{2m\omega_h} \left[ \frac{[-\alpha \cos \omega_h t + a \sin \omega_h t]e^{-\alpha t} + \alpha \cos \varpi t - a \sin \varpi t}{\alpha^2 + a^2} + \frac{[\alpha \cos \omega_h t - b \sin \omega_h t]e^{-\alpha t} - \alpha \cos \varpi t - b \sin \varpi t}{\alpha^2 + b^2} \right] \quad 3.101$$

On réécrit (3.101) en appliquant le même dénominateur pour les deux termes. Pour de petites valeurs de  $\xi < 0.2$ , et obtient l'expression (3.102), qui représente la réponse proposée pour l'oscillateur SDOF sous amortissement hystérétique soumis à un chargement harmonique, dont l'allure est donnée par la (fig.3.16).

$$u_{hs}(t) = \rho_{hs} ([A \cos(\omega_h t) + B \sin(\omega_h t)]e^{-\xi\omega_0 t} + C \cos(\varpi t) + D \sin(\varpi t)) \quad 3.102$$

Avec :

$$\rho_{hs} = \frac{p_0}{m\omega_h [2(\xi\omega_0)^2(\omega_h^2 + \varpi^2) + (\omega_h^2 - \varpi^2)^2]} \quad 3.103$$

$$A = 2\alpha\omega_h\varpi \quad \text{et} \quad B = \varpi[(\xi\omega_0)^2 - \omega_h^2 + \varpi^2]$$

$$C = -2\alpha\omega_h\varpi \quad \text{et} \quad D = \omega_h[(\xi\omega_0)^2 + \omega_h^2 - \varpi^2]$$

On réécrit (3.103) en fonction du rapport des fréquences  $\beta$  et on obtient

$$\rho_{hs} = \frac{p_0}{m\omega_0^2\omega_h [2\omega_0^2\xi^2(1 + 2\xi^2 + \beta^2) + (1 + 2\xi^2 - \beta^2)^2]}$$

$$A = 2\xi\omega_h\beta\omega_0^2 \quad \text{et} \quad B = \beta\omega_0^3[\beta^2 - (1 + \xi^2)]$$

$$C = -2\xi\omega_0^2\omega_h\beta \quad \text{et} \quad D = \omega_0^2(3\xi^2 + 1 - \beta^2)\omega_h$$

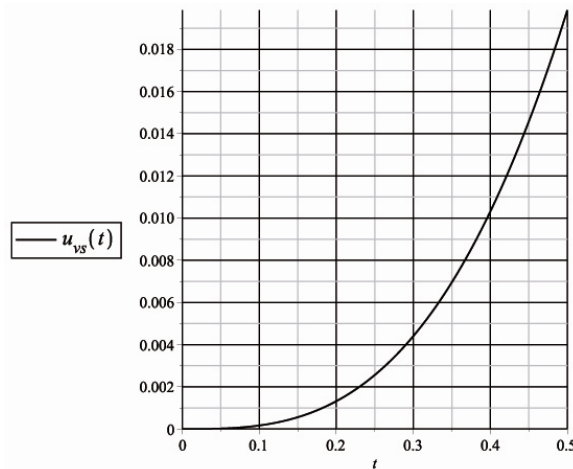


Fig.3.16. Réponse causale à l'excitation sinusoïdale  $\beta = 1$

**3.1.9.2 Excitation en Cosinusoidale**

L'extraction de la partie réelle de l'équation (3.99), nous donne la réponse  $u_{hc}(t)$  de l'oscillateur à une excitation cosinusoidale, son expression s'écrit sous la forme suivante:

$$u_{hs}(t) = \frac{-p_0}{2m\omega_h} \left[ \frac{[a \cos(\omega_h t - \varphi) + \alpha \sin(\omega_h t - \varphi)]e^{-\alpha t} - a \cos(\varpi t - \varphi) - \alpha \sin(\varpi t - \varphi)}{\alpha^2 + a^2} + \frac{[b \cos(\omega_h t - \varphi) + \alpha \sin(\omega_h t - \varphi)]e^{-\alpha t} - b \cos(\varpi t + \varphi) + \alpha \sin(\varpi t + \varphi)}{\alpha^2 + b^2} \right] \quad 3.104$$

L'expression (3.104) peut être simplifiée d'avantage, les mêmes observations que celles du paragraphe (3.10.1) ont été constatées. On peut donc éliminer le terme non causal sans toucher à sa contribution dans la réponse de l'oscillateur. (3.147) devient alors :

$$u_{hs}(t) = \frac{-p_0}{2m\omega_h} \left[ \frac{[a \cos \omega_h t + \alpha \sin \omega_h t]e^{-\alpha t} - a \cos \varpi t - \alpha \sin \varpi t}{\alpha^2 + a^2} + \frac{[b \cos \omega_h t + \alpha \sin \omega_h t]e^{-\alpha t} - b \cos \varpi t + \alpha \sin \varpi t}{\alpha^2 + b^2} \right] \quad 3.105$$

### 3.1.10 Evaluation de la réponse sous chargement sismique

Le système décrit par la (fig.3.3) est considéré initialement au repos. L'équation différentielle régissant le mouvement sous excitation sismique, est donnée par :

$$m\ddot{v} + c_h\dot{u} + ku = 0 \quad 3.106$$

L'accélération absolue  $\ddot{v}$ , est donné par:

$$\ddot{v} = \ddot{u}_s + \ddot{u}$$

Où  $\ddot{u}_s$ , est l'accélération sismique à la base de la structure

$$m\ddot{u} + c_h\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_s \quad 3.107$$

L'équation différentielle donnée par (3.107) peut être résolue en utilisant l'intégrale de Duhamel écrite sous sa forme générale comme suit:

$$u_{eh}(t) = \frac{1}{m\omega_h} \int_0^t \sin(\omega_h[t - \tau] - \varphi) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad 3.108$$

Où  $u_{eh}$ , est le déplacement sismique relatif, qui représente la réponse de l'oscillateur au chargement sismique.

Le produit de la masse et de l'accélération nous donne la force sismique  $f(t)$  où :

$$f(t) = -m\ddot{u}_s$$

$$u_{eh}(t) = -\frac{1}{\omega_h} \int_0^t \sin(\omega_h[t - \tau] - \varphi) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \quad 3.109$$

#### 3.1.10.1 Evaluation du spectre de réponse sismique

On note respectivement, le déplacement relatif, la vitesse relative et l'accélération absolue par :

$u_{eh \max}$  : déplacement relatif maximal.

$\dot{u}_{eh \max}$  : vitesse relative maximale.

3.110

$\ddot{v}_{eh \max} = (\ddot{u}_s + \ddot{u})_{\max}$  : accélération absolue maximale.

On définit respectivement le spectre de réponse du déplacement relatif et absolu et ils sont donnée par:

$S_D(T, \xi)$ ,  $S_V(T, \xi)$  et  $S_A(T, \xi)$ .

$$S_{Dh}(T, \xi) = |u_{eh}(t)|_{\max} = \left| -\frac{1}{\omega_h} \int_0^t \sin(\omega_h[t - \tau] - \varphi) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \right|_{\max} \quad 3.111$$

$$S_{Dha}(T, \xi) = |u_{eh}(t) + u_s(t)|_{\max} \quad 3.112$$

De la même manière, on définit les spectres de réponses, absolus et relatifs pour les vitesses et les accélérations sismiques, donnés par :

$$S_{Vh}(T, \xi) = |\dot{u}_{eh}(t)|_{\max} \quad \text{et} \quad S_{Vha}(T, \xi) = |\dot{u}_{eh}(t) + \dot{u}_s(t)|_{\max} \quad 3.113$$

$$S_{Ah}(T, \xi) = |\ddot{u}_{eh}(t)|_{\max} \quad \text{et} \quad S_{Aha}(T, \xi) = |\ddot{u}_{eh}(t) + \ddot{u}_s(t)|_{\max} \quad 3.114$$

### 3.1.10.2 Evaluation des spectres de réponses exactes

Le spectre de réponse du déplacement exacte est donné par (3.109), à partir duquel découlent les spectres de réponses de vitesse et d'accélération exactes. En appliquant la dérivée temporelle à (3.109), on obtient le spectre de vitesse exacte.

$$S_V = \left| \frac{\partial u_{eh}(t)}{\partial t} \right|_{\max} \quad 3.115$$

Le théorème de convolution nous permet d'écrire :

$$\text{si } G(t) = \int_{u_0(t)}^{u_1(t)} g(t, \tau) d\tau, \quad \text{alors}$$

$$\frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} = \int_{u_0(t)}^{u_1(t)} \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial t} d\tau + \frac{\partial u_1(t)}{\partial t} g(u_1(t), t) - \frac{\partial u_0(t)}{\partial t} g(u_0(t), t) \quad 3.116$$

Or :

$$u_1(t) = t \quad \text{et} \quad u_0(t) = 0$$

En appliquant (3.116) à l'intégrale de Duhamel donnée par (3.109), on obtient la vitesse et l'accélération sismique exactes.

- **Spectre de vitesse sismique exacte:**

Afin d'avoir le spectre de vitesse sismique exacte, on applique à (3.109), le théorème de convolution donnée par (3.116) et on obtient :

$$u_{eh}(t) = -\frac{1}{\omega_h} \int_0^t \sin(\omega_h[t - \tau] - \varphi) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau$$

$$\dot{u}_{eh}(t) = \frac{\partial u_{eh}(t)}{\partial t} \quad 3.117$$

$$\dot{u}_{eh}(t) = \frac{-1}{\omega_h} \int_0^t [\omega_h \cos \omega_h[(t - \tau) - \varphi] - \xi\omega_0 \sin \omega_h[(t - \tau) - \varphi]] e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \quad 3.118$$

## CHAPITRE 3 : AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

La vitesse sismique relative du système s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{u}_{eh}(t) = & \int_0^t \left[ -\cos \omega_h [(t-\tau) - \varphi] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} \sin \omega_h [(t-\tau) - \varphi] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right] \ddot{u}_s(\tau) d\tau \end{aligned} \quad 3.119$$

Le spectre de vitesse exacte s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_{Vh}(T, \xi) = & \left| \int_0^t \left[ -\cos \omega_h [(t-\tau) - \varphi] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} \sin \omega_h [(t-\tau) - \varphi] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right] \ddot{u}_s(\tau) d\tau \right|_{\max} \end{aligned} \quad 3.120$$

- **Spectre de d'accélération sismique exacte:**

Le spectre d'accélération sismique est obtenu, en appliquant le théorème de convolution pour (1.119) et on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{eh}(t) = & \int_0^t (\omega_h \sin \omega_h [t-\tau] + \xi \omega_0 \cos \omega_h [t-\tau]) \\ & + \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} (\omega_h \cos \omega_h [t-\tau] - \xi \omega_0 \sin \omega_h [t-\tau]) \left] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \end{aligned} \quad 3.121$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{eh}(t) = & \int_0^t \left[ -\cos \omega_h [(t-\tau) - \varphi] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} \sin \omega_h [(t-\tau) - \varphi] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \right] \ddot{u}_s(\tau) d\tau \end{aligned} \quad 3.122$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{eh}(t) = & \int_0^t (\omega_h \sin \omega_h [(t-\tau) - \varphi] + \xi \omega_0 \cos \omega_h [(t-\tau) - \varphi]) \\ & + \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} (\omega_h \cos \omega_h [(t-\tau) - \varphi] - \xi \omega_0 \sin \omega_h [(t-\tau) - \varphi]) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \end{aligned} \quad 3.123$$

Le spectre d'accélération sismique exacte s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_e(t) = & 2\xi \omega_0 \int_0^t \cos \omega_h [(t-\tau) - \varphi] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \\ & + \frac{\omega_0 (1+2\xi^2)}{\sqrt{1+\xi^2}} \int_0^t (\sin \omega_h [(t-\tau) - \varphi]) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau - \ddot{u}_s(t) \end{aligned} \quad 3.124$$



### 3.1.10.3 Evaluation des pseudo-spectres de réponse

- Pseudo-spectre de vitesse sismique exacte:

On adopte les approximations (3.125) pour de petites valeurs de  $\xi$

$$\xi \simeq 0 \text{ et } \omega_h \simeq \omega_0 \quad 3.125$$

On applique les approximations (1.125) à (1.119) on obtient :

$$\dot{u}_{eh}(t) = \int_0^t [-\cos \omega_0 [t - \tau] e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)}] \ddot{u}_s(\tau) d\tau = \omega_0 u_{eh}(t) \quad 3.126$$

Par conséquent le pseudo-spectre de vitesse obtenu est donnée par :

$$S_{Vh} = \omega_0 S_{Dh} \quad 3.127$$

- Pseudo-spectre de vitesse sismique exacte:

$$S_{Ah} = \omega_0 S_{Vh} = \omega_0^2 S_{Dh} \quad 3.128$$

## 3.2 Oscillateur à plusieurs degrés de liberté

### 3.2.1. Formulation des matrices caractéristiques

L'équation différentielle régissant le mouvement d'un oscillateur linéaire à plusieurs degrés de libertés, est donnée par l'équation (3.129), où  $M$ ,  $C_h$  et  $K$  sont les matrices de masse, rigidité, et matrice d'amortissement hystérétique.

$$M\ddot{U} + C_h\dot{U} + KU = F(t) \quad 3.129$$

Une autre écriture du système (3.129), peut se faire en introduisant la raideur complexe, traduisant l'amortissement hystérétique, déjà définie dans le chapitre précédent. L'écriture matricielle de la raideur dynamique est donnée par (3.130) :

$$K^* = K + i\eta K \quad 3.130$$

Le système d'équation régissant le mouvement devient :

$$M\ddot{U} + K^*U = F(t) \quad 3.131$$

$$M\ddot{U} + (K + i\eta K)U = F(t) \quad 3.132$$

$$M\ddot{U} + i\eta KU + KU = F(t) \quad 3.133$$

Tenant compte de (3.21) et (3.22), le système d'équation (3.133) est équivalent à (3.129) ou la matrice d'amortissement hystérétique est donnée par :

$$C_h = \eta K \quad 3.134$$

$$C_h = 2\xi K \quad 3.135$$

On cherche la solution de (3.129) pour deux cas de figures, avec la méthode de superposition modale dans le cas d'une excitation quelconque, et par la méthode spectrale modale dans le cas d'une excitation sismique.

**3.2.2. Méthode de la superposition modale**

La décomposition dans la base modale et l'orthogonalité des matrices masse et rigidité sont déjà évoqués dans les chapitres précédents. En suivant les mêmes étapes, on établit la décomposition modale de (3.129) en coordonnées généralisées. La transformation qui diagonalise les matrices M et K, diagonalise aussi la matrice d'amortissement  $C_h$  (Gatti and Ferrari 2003) [2], cette transformation nous donne:

$$M\varphi\ddot{y} + iC_h\varphi\dot{y} + K\varphi y = F(t) \tag{3.136}$$

$$\varphi^T M \varphi \ddot{y} + i \varphi^T C_h \varphi \dot{y} + \varphi^T K \varphi y = \varphi^T F(t) \tag{3.137}$$

Pour chaque ddl  $i$ , on obtient :

$m_i = \varphi^T M \varphi$  est la masse généralisée du mode  $i$

$c_{hi} = \varphi^T C_h \varphi$ , est l'amortissement hystérétique généralisé du mode  $i$

$k_i = \varphi^T K \varphi$ , est la rigidité généralisée du mode  $i$

$$m_i \ddot{y}_i + i c_{hi} \dot{y}_i + k_i y_i = f_i(t) \tag{3.138}$$

La résolution du système (3.138) à  $n$  degrés de libertés revient à résoudre  $n$  fois l'équation (3.21) pour un degré de liberté.

Pour chaque mode  $i$ , la solution de chaque équation de (3.138) pour l'excitation de Dirac est donnée par (3.82). Cette solution est reproduite dans (3.139) :

$$u_{hi}(t) = \rho_i \sin[\omega_{hi}t - \varphi_i] e^{-\xi_i \omega_{0i}t} \tag{3.139}$$

Pour des conditions initiales au repos, on obtient la solution pour une excitation quelconque  $f_i(t)$ , par le biais de l'intégrale de Duhamel :

$$y_i(t) = \int_0^t \rho_i \sin[\omega_{hi}t - \varphi_i] e^{-\xi_i \omega_{0i}t} f_i(t - \tau) d\tau \tag{3.140}$$

On obtient alors, la solution de tout le système avec la superposition des solutions pour chaque mode.

### 3.2.3. Méthode spectrale modale

Le système donné par (3.129) est supposé initialement au repos, quand il est soumis à l'accélération, le système d'équation devient :

$$M\ddot{V} + C_h\dot{U} + KU = F(t) \quad 3.141$$

Le vecteur de l'accélération absolue  $\ddot{V}$ , est donné par:

$$\ddot{V} = \ddot{u}_s + \ddot{U}$$

Où  $\ddot{u}_s$ , est l'accélération sismique à la base de la structure

$$M\ddot{U} + C_h\dot{U} + KU = -MI\ddot{u}_s(t) = F(t) \quad 3.142$$

On réécrit l'équation en coordonnées généralisées :

$$M\varphi\ddot{y} + C_h\varphi\dot{y} + K\varphi y = -MI\ddot{u}_s(t) \quad 3.143$$

$$\varphi^T M\varphi\ddot{y} + \varphi^T C_h\varphi\dot{y} + \varphi^T K\varphi y = -\varphi^T MI\ddot{u}_s(t) \quad 3.144$$

$$\varphi^T M\varphi\ddot{y} + \varphi^T C_h\varphi\dot{y} + \varphi^T K\varphi y = -\varphi^T MI\ddot{u}_s(t) \quad 3.145$$

Pour chaque ddl  $i$ , on obtient :

$m_i = \varphi^T M\varphi$ , est la masse généralisée du mode  $i$

$c_{h_i} = \varphi^T C_h\varphi$ , est l'amortissement hystérétique généralisé du mode  $i$  3.146

$k_i = \varphi^T K\varphi$ , est la rigidité généralisée du mode  $i$

$$m_i\ddot{y}_i + c_{h_i}\dot{y}_i + k_i y_i = -\varphi^T MI\ddot{u}_s(t) \quad 3.147$$

La résolution du système (3.142) à  $n$  degrés de libertés revient à résoudre l'équation (3.147) pour un degré de liberté. Pour des conditions initiales au repos, on obtient :

$$y_i(t) = -\rho_i \varphi^T MI \int_0^t \sin[\omega_{h_i}(t - \tau) - \varphi_i] e^{-\xi_i \omega_{0_i}(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau \quad 3.148$$

On définit  $\alpha_i$ , le facteur de participation modale pour chaque mode  $i$ , avec

$$\alpha_i = -\rho_i \varphi^T MI \quad 3.149$$

### CONCLUSION GENERALE

Ce travail a pour objectif la mise en équation de la réponse de l'oscillateur linéaire sous amortissement hystérétique soumis à différents types de chargements.

Dans ce contexte, il a été prouvé mathématiquement que la réponse impulsionnelle, de l'oscillateur linéaire sous amortissement hystérétique est non causale. Le terme non causal a été isolé avec succès, et les facteurs qui influencent la non causalité ont été identifiés et discutés. En outre le décrement logarithmique usuellement utilisé en amortissement visqueux est abordé avec l'amortissement hystérétique.

A partir de la réponse impulsionnelle obtenue, les expressions de la réponse aux chargements harmoniques ont été déduites à l'aide du calcul d'intégrales de convolutions. Les courbes obtenues se superposent parfaitement avec celles de l'amortissement visqueux. De plus, une formulation de la réponse de l'oscillateur aux chargements de types sismiques a été exposée.

Les expressions obtenues pour l'oscillateur à 1 degré de liberté SDOF, ont été généralisées aux cas d'un système MDOF avec application de la méthode de superposition modale et la méthode modale spectrale.

Il a été montré qu'il est possible d'éliminer le terme non causal de l'expression de la réponse aux chargements harmoniques une fois évalué, ceci n'est pas le cas de la réponse impulsionnelle qui doit garder ce terme à cause de sa contribution à la réponse.

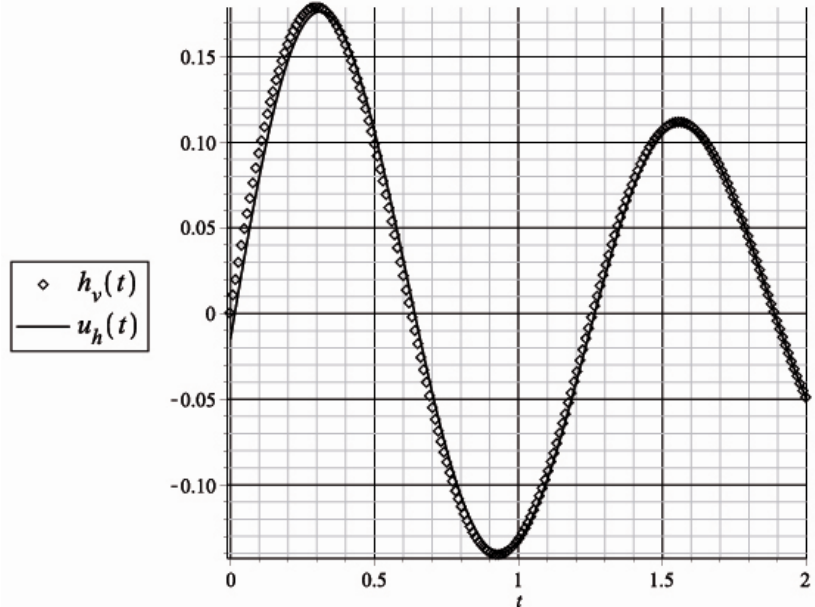
Les perspectives du présent travail sont les suivantes :

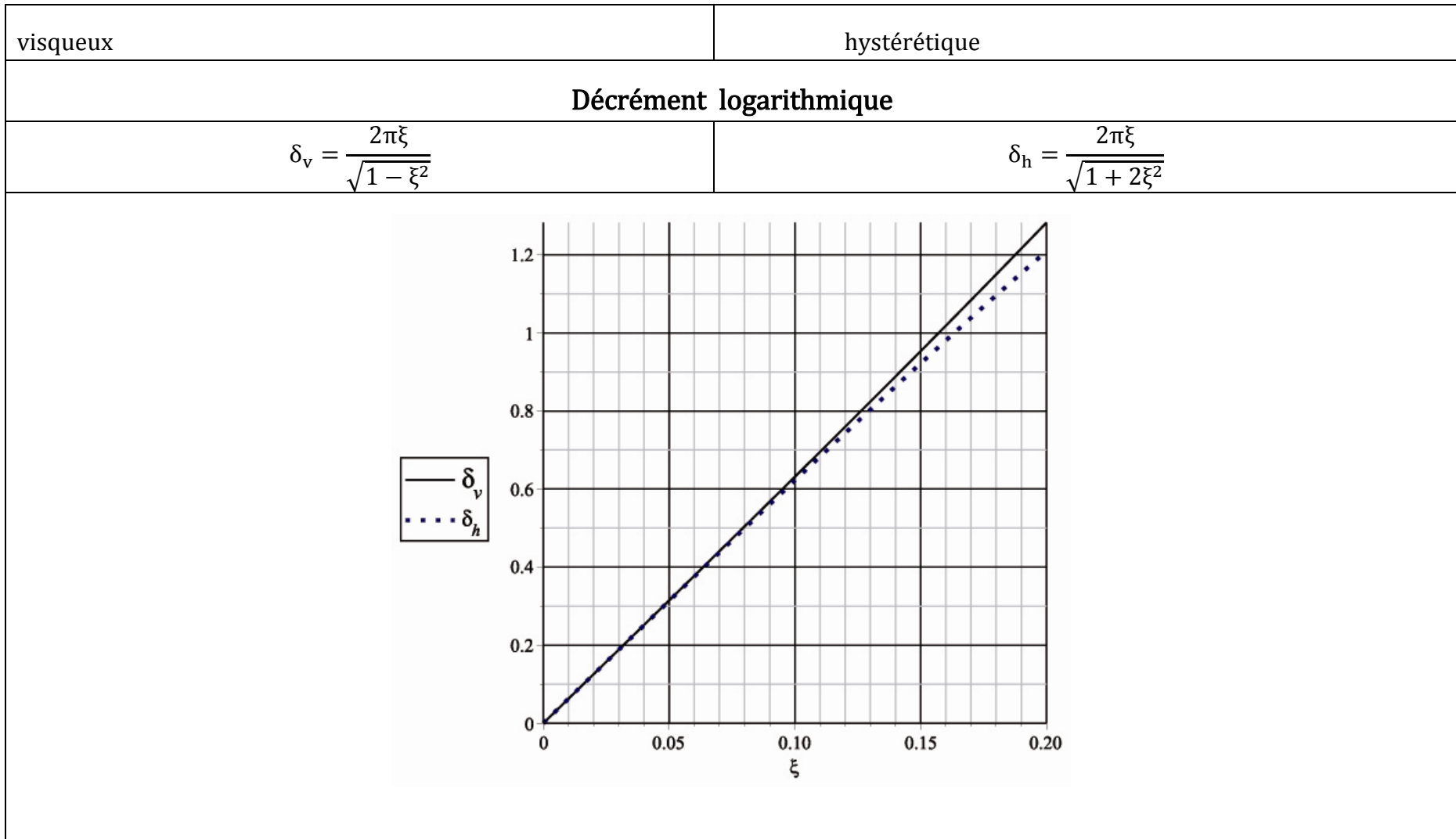
- Extension des expressions d'amortissement hystérétique, obtenues pour le cas sous-critique, au cas des vibrations avec amortissement critique et sur critique.
- Évaluation de la réponse forcée de l'oscillateur SDOF avec amortissement hystérétique soumis aux chargements classiques comme ceux de types triangulaires, rectangulaires, uniforme.
- Traitement et étude de cas pratiques avec des chargements sismiques et confrontation aux résultats expérimentaux.
- Applications aux cas de domaines non bornés qui sont en général abordés dans le domaine fréquentiel. Le calcul direct dans le domaine temporel avec l'amortissement hystérique, moyennant les expressions obtenues dans le présent travail, pourrait être étendu à la prise en compte du comportement non linéaire.



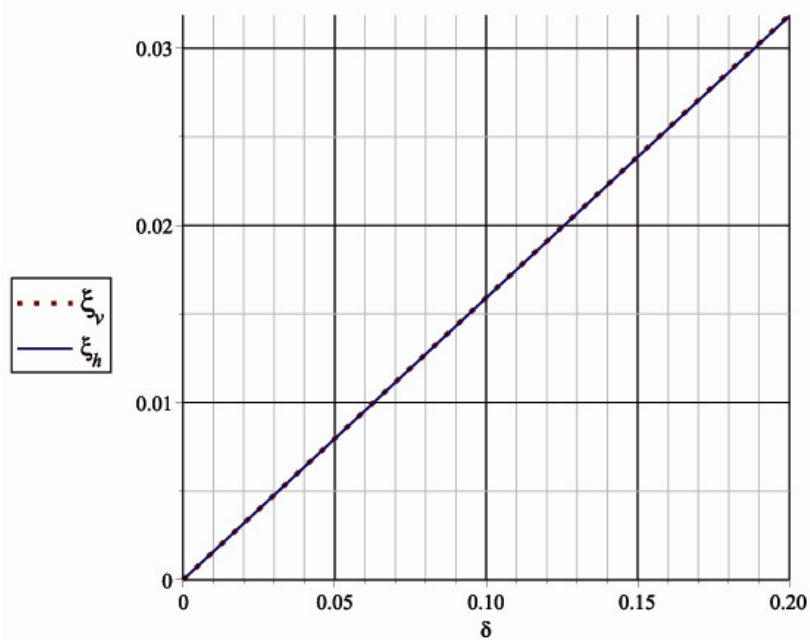
## ANNEXES

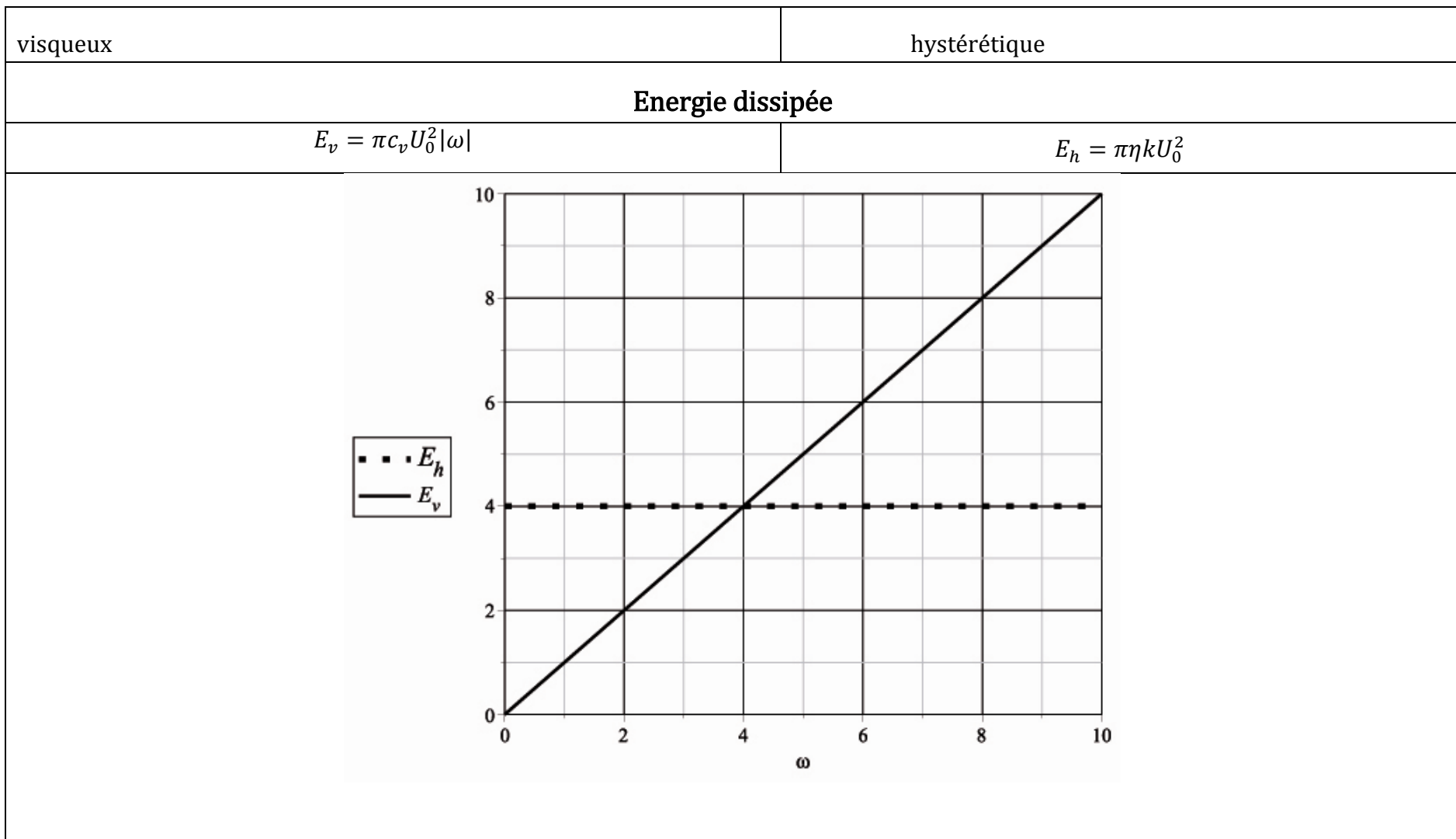
## Synthèse et comparaison des résultats

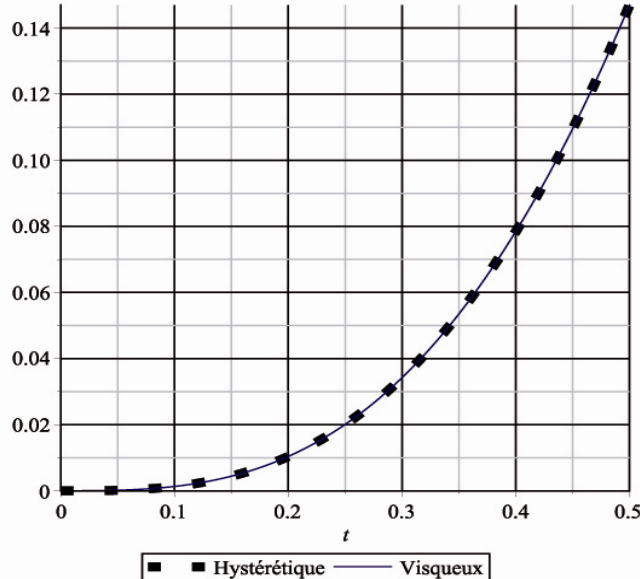
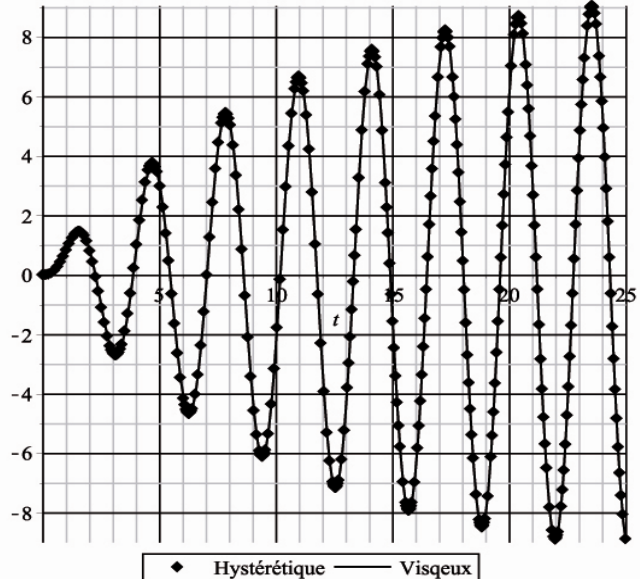
visqueux	hystérétique
<b>Réponse impulsionnelle de l'oscillateur à 1ddl</b>	
$h_v(t) = \frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\xi\omega_0 t}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$	$u_h(t) = \rho \sin[\omega_h t - \varphi] e^{-\xi\omega_0 t}$ $\rho = \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 + 2\xi^2}}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctan(\eta), \quad \omega_h = \omega_0 \sqrt{1 + 2\xi^2}$
	





visqueux	hystérétique
<b>Taux d'amortissement en fonction du décrement logarithmique</b>	
$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + 2\delta_v^2}}$	$\xi = \frac{\delta_h}{\sqrt{4\pi - 2\delta^2}}$
 <p>The graph plots the damping ratio <math>\xi</math> on the y-axis against the logarithmic decrement <math>\delta</math> on the x-axis. The x-axis ranges from 0 to 0.20 with major ticks every 0.05. The y-axis ranges from 0 to 0.03 with major ticks every 0.01. Two curves are shown: a solid blue line representing <math>\xi_h</math> and a dashed red line representing <math>\xi_v</math>. Both curves originate at (0,0) and increase linearly. The <math>\xi_h</math> curve is slightly above the <math>\xi_v</math> curve, and they appear to converge as <math>\delta</math> increases.</p>	



visqueux	hystérétique
<b>Régime forcé sous excitation harmonique : forme sinusoïdale (CI au repos)</b>	
$u_{vp}(t) = \frac{p_0}{2m\omega_d} \left[ \frac{[-\xi\omega_0 \cos \omega_d t + (\omega_d + \varpi) \sin \omega_d t]e^{-\xi\omega_0 t} + \xi\omega_0 \cos \varpi t + (\omega_d + \varpi) \sin \varpi t}{(\xi\omega_0)^2 + (\omega_d + \varpi)^2} \right. \\ \left. + \frac{[\xi\omega_0 \cos \omega_d t - (\omega_d - \varpi) \sin \omega_d t]e^{-\xi\omega_0 t} - \omega_0 \cos \varpi t + (\omega_d - \varpi) \sin \varpi t}{(\xi\omega_0)^2 + (\omega_d - \varpi)^2} \right]$	$u_{hs}(t) = \rho_{hs} ([A \cos(\omega_h t) + B \sin(\omega_h t)]e^{-\xi\omega_0 t} + C \cos(\varpi t) + D \sin(\varpi t))$ $\rho_{hs} = \frac{p_0}{m\omega_0 \sqrt{1 + 2\xi^2 [2(\xi\omega_0)^2(\omega_h^2 + \varpi^2) + (\omega_h^2 - \varpi^2)^2]}}$ $A = 2\alpha\omega_h\varpi \quad B = \varpi(\alpha^2 - \omega_h^2 + \varpi^2)$ $C = -2\alpha\omega_h\varpi \quad D = \omega_h(\alpha^2 + \omega_h^2 - \varpi^2)$
	

visqueux	hystérétique
<b>Réponse à un chargement sismique (CI au repos)</b>	
$u_e(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \sin(\omega_d[t - \tau]) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau$	$u_{eh}(t) = -\frac{1}{\omega_h} \int_0^t \sin(\omega_h[t - \tau] - \varphi) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau$

visqueux	hystérétique
<b>Spectres de réponses sismiques exactes (CI au repos)</b>	
$u_e(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \sin(\omega_d[t - \tau]) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau$ $S_V(T, \xi) = \left( \int_0^t -\cos \omega_d[t - \tau] + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d[t - \tau] \right) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau$ $S_A(T, \xi) = \left( \int_0^t 2\xi\omega_0 \cos \omega_d[t - \tau] + \frac{\omega_0(1 - 2\xi^2)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d[t - \tau] \right) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau - \ddot{u}_s(t)$	$u_{eh}(t) = -\frac{1}{\omega_h} \int_0^t \sin(\omega_h[t - \tau] - \varphi) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau$ $S_{Vh}(T, \xi) = \left( \int_0^t -\cos \omega_d[t - \tau] + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d[t - \tau] \right) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \ddot{u}_s(\tau) d\tau$

## Travaux cités

- Adhikari, S 2000. "Damping Models for Structural Vibration." in *PhD thesis*. Trinity College, Cambridge university.
- Agrawa, R,P, Perera, and K,S Pinelas. 2011. *An introduction to complex analysis*. Springer Science+Business Media, LLC.
- Anderson, J,C and F Naeim. 2012. *Basic structural dynamics*. JOHN WILEY & SONS, INC.
- Beards, C,F. 1996. *Structural vibration-Analysis and damping*. Formerly of Imperial College of Science,University of London.
- Biot, M, A. 1958. "Linear thermodynamics and the mechanics of solids." *Proceedings of the 3rd US National Congress of Applied Mechanics*.
- Bishop, R, E. D. and D Johnson. 1960. *The mechanics of vibration*. Cambridge University Press.
- Bishop, R,E,D and W,G, Price 1986. "A note on hysteretic damping of transient motions." in *Random vibration-status and recent developments*. pp. 39–45. Elsevier, Amsterdam.
- Bobrovnitskii, Yu, I. 2013. "Hysteretic damping and causality." *Acoustical Physics*, pp. Vol. 59, No. 3, pp. 253–256.
- Bourouba, A 2008. "Traitement des conditions aux limites de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structures." Mémoire de Magistère, Université de Béjaia.
- Celebi, M 2000. "Radiation damping observed from seismic responses of building." World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zeland.
- Chen, L, Y., j, T. Chen, C, H. Chen, and H, K. Hong. 1994. "Free Vibration of SDOF System With Hysteretic Damping." *Mecanics Research Communications*, pp. Vol.21, No. 6, pp. 599-604.
- Chen, K, F. and Y, H. Shen. 2008. "The impulse response of a band-limited vibrator with rate-independent hysteretic damping." *Acta Mechanica*, pp. Acta Mech 199, 17–28.
- Chowdhury, I and S, P. Dasgupta. 2009. *Dynamics of structure and foundation, A unified approach, I.Fundamentals*. CRC Press/Balkema.
- Clough, R, W. and J Penzien. 1995. *Dynamics of structures*. Computers & Structures, Inc., Berkeley. USA, Third Edition.
- Crambuer, R 2013. "Contiribution à l'identification de l'amortissement, approche experimentales et numeriques." Thèse de Doctorat, ENS CACHAN.
- Crandall, S, H. 1970. "The Role of Damping in Vibration Theory." in *Journal of Sound and Vibration*, 11 (1), 3-18. Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, USA.
- Crandall, S, H. 1991. "The hesteretic damping in vibration theory." in *Journal of Mechanical Engineering Science*, 205:23. MIT, Cambridge, Massachusetts, USA.

- Crandall, S, H. 1995. "A New Hysteretic Damping ?" in *Mecanics Research Communications*, Vol. 22, No. 2, pp. 201-202. MIT, Cambridge, USA.
- Dangla, P. 2005. "Modélisation de la propagation d'ondes et de l'ISS, approche par éléments finis et éléments de frontière." *BULLETIN DES LABORATOIRES DES PONTS ET CHAUSSÉES, RÉF. 4549 - PP. 163-178*.
- Dowick, D, J. 2003. *Earthquake Risk Reduction*. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England: John Wiley & Sons, Ltd.
- Drapier, S 2009. "Dynamique des Solides et des Structures." Edition 4. ENSM de Saint-Etienne.
- Eleni, A, P. 1999. "Dynamic Analysis of Systems With Hysteretic Damping." Master of Science, Rice University.
- Filiatraul, A. 1996. *Éléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures*. Presses inter Polytechnique.
- Freitag, E and R Busam. 2005. *Complex Analysis*. 2nd Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Gatti, P, L. and V Ferrari. 2003. *Applied Structural and Mechanical Vibrations*. Taylor & Francis Group LLC.
- Genta, M,G and N Amati 2008. "On the equivalent viscous damping for systems with hysteresis." *MECCANICA DEI SOLIDI*.
- Humar, J,I. 2002. *Dynamics of structures*. 2nd edition. Carleton University, Ottawa, Canada.
- Jendoubi, A 2007. "Etude de l'influence des impédances de fondations sur le comportement dynamique des lignes de transport d'énergie électrique." Mémoire de maitrise, Université de Sherbrook.
- Kokalanov, V 2008. "Numerical simulation for absorbing boundary conditions." Ruhr University Bochum.
- Lang, S 1999. "Complex analysis. Graduate Texts in Mathematics." Fourth Edition. Springer Science+Business Media. LLC.
- Lokmane, N, J,F Semblat, G Bonnet, and L. Driad. 2004. "Sollicitations sismiques dues aux exploitations minières, amplification des ondes en surface." *Journées nationales de géotechnique et de géologie*, pp. pp.485-492.
- Lysmer, J 1965. "Vertical motion of rigid footings." PhD thesis, University of Michigan.
- Lysmer, J and R, L. Kuhlemeyer. 1969. "Finite dynamic model for infinite media." *Journal of the engineering mechanics division. ASCE*, pp. 859–877.
- Meirovitch, L. 1986. *Elements of vibration analysis*. Second edition, Book, College of engineering. Virginia polytechnique institute and state university.

- Nguyen, K 2005. "Etudes des effets dus aux conditions topographiques et géotechnique par une méthode hybride éléments et finis éléments de frontières." Thèse de Doctorat, Ecole nationale des ponts et chaussées.
- Nielsen, A, H. 2006. "Absorbing boundary conditions for seismic analysis in ABAQUS." *In ABAQUS Users' Conference*, pp. pages 359–376.
- Pecker, A 2006. "Dynamique des structures et des ouvrages." Polycopié de cours.
- Reissner, E. 1936. "Statinäre ,axialsymmetrische ,durch eine elastischennalbraumes." *Ing-Archives*, pp. V 7, n 381.
- Roussillon, P 2006. "interaction sol-structure et interaction site ville, Aspects fondamentaux et modélisation." Thèse de Doctorat, INSA de Lyon.
- Seghir, A 2010. "Contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure." Thèse de Doctorat, Université de Marne Lavalée, Université de béjaia.
- Sen, T, K. 2009. *Fundamentals of seismic loading on structures*. Book, John Wiley & Sons.
- Stømmen, E, N. 2014. "Structural dynamics." Book, Springer Series in Solid and Structural Mechanics 2.
- Theodorsen, T and I, E. Garrick 1940. "Mecanism of flutter." in *A theoretical and experimental investigation of the flutter problem*. National Advisory Committee For Aeronautics.
- Thorby, D 2008. "Structural dynamics and vibration in practice." An Engineering Handbook.
- Zulkifli, E 2008. "Consistent description of radiation damping in transient soil-structure interaction." Doctorate thesis, Technische Universitat Dresden.