

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université A.MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

Mémoire

Présenté par Mr. TRAD Houssam Eddine

En vue de l'obtention du diplôme de Magistère en physique

Option : Physique Théorique

Thème

La Cosmologie Moderne : Outils de Base, Big-Bang et Développements Récents

Soutenu publiquement devant le jury suivant :

Président	Mr DAHMANI Abdelnasser	Professeur	U.A.M. Béjaia
Examineur	Mr MOHAMED MEZIANI Abdelkader	M.C.A.	U.A.M. Béjaia
Examineur	Mr MOSTEFAOUI Toufik	M.C.A.	U.A.M. Béjaia
Rapporteur	Mr BOUDA Ahmed	Professeur	U.A.M. Béjaia

Université A.MIRA de Béjaia, 2012

Table des matières

1	Introduction	1
2	La relativité générale	7
2.1	La relativité restreinte	7
2.2	Relation entre la gravitation et la courbure	10
2.2.1	Est ce qu'il existe un référentiel inertiel en présence de la gravitation ?	11
2.2.2	Le principe d'équivalence	11
2.2.3	La géométrie de l'espace-temps	13
2.3	La physique dans un espace-temps courbe	14
2.4	Les quantités conservées	15
2.5	Les équations d'Einstein en formulation Lagrangienne	16
2.6	La solution de Schwarzschild	19
2.6.1	La métrique de Schwarzschild	19
2.6.2	Les singularités de la métrique	22
2.6.3	Les trajectoires de Schwarzschild	22
2.6.4	Le décalage vers le rouge	27
2.7	Les trous noirs de Schwarzschild	28
2.7.1	Les étoiles noires	28
2.7.2	La particule tombant sur le trou noir	29
2.7.3	Qu'est ce qui se passe à l'intérieur de $r = 2GM/c^2$	31
2.7.4	Les coordonnées d'Eddington-Finkelstein	31
3	La cosmologie Newtonienne	35
3.1	Le principe cosmologique	35
3.2	Loi de Hubble et l'expansion de l'Univers	36
3.2.1	L'expansion homogène et isotrope implique la loi de Hubble	37
3.2.2	Le temps et la distance de Hubble	39
3.3	Dynamique de l'Univers	39
3.3.1	L'équation de Friedmann	40

3.3.2	Les équations du fluide et de l'accélération	42
3.4	Les insuffisances de la cosmologie Newtonienne	43
4	La cosmologie relativiste	45
4.1	La métrique cosmologique	45
4.2	La géométrie de l'Univers	49
4.2.1	Horizons de la particule et de l'événement	51
4.3	Le décalage vers le rouge cosmique	51
4.4	Mesure de distances	53
4.5	Dynamique de l'Univers	55
4.6	Modèles cosmologiques à composante unique	57
4.6.1	Les constituants de l'Univers	57
4.6.2	Les équations principales	58
4.6.3	Univers à courbure uniquement	62
4.6.4	Univers à espace plat	63
4.6.5	Univers à matière uniquement	65
4.6.6	Univers à rayonnement uniquement	66
4.6.7	Univers à constante cosmologique uniquement	67
4.7	Modèles cosmologiques à plusieurs composantes	68
4.7.1	Univers à matière et à courbure	69
4.7.2	Univers à matière et à constante cosmologique	69
4.7.3	Univers à matière, à courbure et à constante cosmologique	72
4.7.4	Univers à rayonnement et à matière	75
4.7.5	Le modèle de référence	76
4.8	L'inflation	78
4.8.1	Problème de la platitude	79
4.8.2	Problème de l'horizon	80
4.8.3	Problème de monopôles	81
4.8.4	L'expansion inflationnaire	82
4.8.5	Solution du problème de la platitude	84
4.8.6	Solution du problème de l'horizon	84
4.8.7	Solution du problème des monopôles	84
4.9	Comparaison entre la cosmologie newtonienne et la cosmologie relativiste	85
5	Conclusion	87

Table des figures

2.1	Le passé et le future du point de vue relativiste et classique. . .	9
2.2	Représentation des potentiels classiques pour plusieurs valeurs du moment angulaire L	25
2.3	Représentation des potentiels effectifs pour plusieurs valeurs du moment angulaire L	26
2.4	Les cônes de lumière en coordonnées de Schwarzschild.	30
2.5	Les cônes de lumière de Schwarzschild en coordonnées d'Eddington- Finkelstein.	32
3.1	Dans un Univers homogène et isotrope en expansion, le tri- angle constitué par ces trois galaxies doit garder la même forme au cours du temps.	37
3.2	Le système de coordonnées comobiles.	39
3.3	Une galaxie de masse m dans un milieu de densité ρ . Seulement la matière située à l'intérieur de la sphère du rayon R affecte la galaxie.	40
4.1	La géodésique passant par le même point spatial, mais à des instants différents.	46
4.2	Les cônes de lumière, l'horizon d'événement et celui de parti- cule dans la géométrie de Robertson-Walker.	52
4.3	Le facteur d'échelle en fonction du temps : • pour un uni- vers vide en expansion (en tirets)• univers plat à matière (pointillée)• univers plat à rayonnement (continue)• univers plat à constante cosmologique (en point-tirets).	62
4.4	Facteur d'échelle en fonction de temps pour des univers plat à matière et constante cosmologique seulement.	71

4.5	Les différents destins correspondants à un univers à courbure+ matière+ constante cosmologique : le Grand Froid ($a \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$), le Grand Effondrement ($a \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow t_{effond}$), l'univers à phase de Flânerie ($a \sim \text{constant}$ pour une longue période) et le Grand Rebond ($a = a_{\min}$ quand $t = t_{reb}$).	73
4.6	Les différents comportements de facteur d'échelle pour un univers à matière+ courbure+ constante cosmologique.	75
4.7	Le facteur d'échelle en fonction du temps. Les lignes en tirets correspondent à l'égalité rayonnement-matière $a_{rm} \approx 2.8 \times 10^{-4}$, l'égalité matière-constante cosmologique $a_{m\Lambda} \approx 0.75$, et l'instant actuelle $a_0 = 1$	78
4.8	Une représentation de la distance de l'horizon (la plus lointaine distance que la lumière peut parcourir) pour les régions A, B et notre galaxie. Comme nous sommes situé à l'horizon de la région B, la lumière émise par cette région nous est arrivée juste maintenant et n'avait pas le temps pour nous dépasser vers la région A. Par conséquent, les régions A et B ne peuvent pas encore être en équilibre thermique.	81
4.9	Représentation des horizons des régions A et B et C. Les flèches représentent le fond cosmique micro-onde qui quittait ces régions au moment du découplage pour nous atteindre maintenant. Evidemment, les régions C et B n'ont pas encore pu interagir à ce moment. Donc, comment on en reçoit des rayonnements de la même température?	82
4.10	Les micro-ondes venant des cotés opposés du ciel ont la même température parce qu'ils ont été déjà en équilibre thermique. .	85

Chapitre 1

Introduction

La cosmologie est l'étude de l'Univers comme un tout : son origine, son évolution et son futur. L'Univers est très large. Il contient des milliards d'étoiles, les étoiles sont réunies en des galaxies, les galaxies sont liées par la gravitation dans des groupes de galaxies, et ces groupes à leur tour sont réunis dans des plus grands super-groupes de galaxies. Du premier coup, il semble qu'une science qui traite les galaxies entières comme des petits objets est loin du souci de l'humanité. Néanmoins, la cosmologie a pour but de répondre à des questions qui sont profondément liées à l'homme telles que : "D'où nous venons ? Qui nous sommes ? Où nous allons ?" Dans le cadre de la physique, ces questions se posent de la façon suivante : "De quoi l'Univers est constitué ? Est il fini ou infini ? Avait-il un début ? Aura-t-il une fin ?" Donc, la cosmologie décrit le passé, explique le présent, et prédit le futur de l'Univers.

Les racines de la cosmologie remontent aux anciens grecs où elle était connue sous le nom de "la mécanique céleste", ou l'étude des cieux. Le philosophe grec Ptolémée a proposé un modèle géocentrique pour décrire l'Univers, c'est à dire un modèle qui considère la Terre comme le centre de l'Univers. Avec Copernic, Kepler et Galilé, le modèle géocentrique de Ptolémée a été remplacé par un autre héliocentrique, considérant le Soleil comme étant le centre de l'Univers. Au 17^{ème} siècle, Newton a publié son article "Principia of Mathematica" où il a montré que le mouvement des planètes et de tous les autres corps célestes est régie par la gravitation. Newton a essayé d'établir un modèle cosmologique en s'appuyant sur sa théorie de la gravitation. Cependant, il s'est rendu compte que ce modèle instable ne pouvait pas représenter l'Univers parce qu'il pensait que l'Univers était stable. Malgré le grand succès de la théorie newtonienne, au cours du temps, elle s'est montrée incapable d'affronter des questions comme celle de la façon dont la loi de la gravitation varie avec le temps. Effectivement, d'après Newton, si par

exemple le soleil disparaît subitement, on serait libre instantanément de son attraction gravitationnel que nous soyons sur Vénus, sur la Terre, ou même sur Pluton, la plus lointaine planète du système solaire. Au début du 20^{ème} siècle, Einstein a proposé sa théorie de la relativité restreinte qui repose sur les deux postulats suivantes[1] :

- Les phénomènes de la nature se déroulent suivant les mêmes lois dans tous les référentiels inertiels.
- Par rapport à tous les référentiels inertiels, dans le vide et dans tous les sens, la vitesse de la lumière est la même.

Elle était vraiment une théorie magnifique, non seulement parce qu'elle a donné le cadre spatio-temporel adéquat pour étudier les phénomènes physique, mais parce qu'elle a mené une révolution dans tous les autres domaines comme la philosophie et la littérature. La relativité restreinte a rejeté la notion du temps absolu et stipule que la vitesse de propagation de toutes les interactions physiques ne peuvent pas dépasser celle de la lumière [2],[3],[7],[10]. Au lieu de parler de l'espace tridimensionnel et du temps, dans le cadre de cette théorie, on parle plutôt d'un seul espace-temps à quatre dimensions. En plus, la relativité a expliqué des nouveaux phénomènes tels que la dilatation du temps et la contraction des longueurs [2],[4],[11].

Cependant, la gravitation newtonienne n'est pas conforme à la théorie de la relativité restreinte. Ceci amena Einstein entre 1905 et 1915 à développer la théorie de la relativité générale [1] qui prend en compte le phénomène de la gravitation. La relativité générale est sans doute l'un des deux piliers de la physique moderne, l'autre pilier est la mécanique quantique. La relativité générale repose sur le postulat fondamental selon lequel : "Toutes les lois de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels, quel que soit leurs état de mouvement" [7]. Cette théorie est appelé parfois la théorie géométrique de la gravitation parce qu'elle interprète la gravitation comme étant la courbure de l'espace-temps [3]. Cette interprétation est une conséquence du principe d'équivalence énoncé par Einstein et qui se présente souvent par l'égalité de la masse gravitationnelle avec la masse inertielle [7],[3],[10].

Les succès de la relativité générale sont nombreux [14],[26],[27]. Einstein a proposé trois tests pour la relativité générale : L'avance du périhélie de Mercure, la déviation des rayons lumineux et le décalage de la lumière visible vers le rouge. Parmi les tests modernes, on cite le pulsar binaire et le retard du temps gravitationnel [26]. Par ailleurs, le système de navigation GPS qui utilise des corrections relativistes représentent un test journalier de la validité de cette théorie[8]. Parmi les nouveaux concepts apportés par la relativité générale est le trou noir : ce sont des régions de l'espace-temps dont le champ gravitationnel est tellement fort que même la lumière ne peut pas s'en échapper [3],[12].

Comme à grande échelle, l'Univers est régi par la gravitation, dès que la théorie de relativité générale est apparue, la cosmologie a connu un nouvel essor dans son développement. La cosmologie moderne a débuté avec la publication d'Einstein de sa dernière modification de la relativité générale dans l'article "*Cosmological consideration of the general theory of relativity*". Dans son article, Einstein a ajouté la fameuse constante cosmologique Λ à ces équations pour compenser l'effet gravitationnel de la matière parce qu'il pensait que l'Univers devait être stable [16]. En 1922, Friedmann a trouvé une solution pour les équations d'Einstein présentant un Univers en évolution. Malheureusement, l'article de Friedmann n'a pas attiré l'attention d'Einstein parce que celui-ci pensait que l'Univers était stable. Après la découverte de l'expansion de l'Univers par Hubble en 1929, Einstein a renoncé à la constante cosmologique et l'a qualifiée comme "la plus grande erreur de sa vie". Cependant, les cosmologistes aujourd'hui utilisent la dénomination "constante cosmologique" pour appeler la composante inconnue de l'Univers, qui est considérée comme responsable de l'accélération de l'expansion de l'Univers.

Depuis l'apparition de la relativité générale, beaucoup de modèles cosmologiques ont été proposés : modèles du Big Bang, modèles qui s'étendent puis ils se contractent, modèles oscillants, modèles de l'état stationnaire..[7],[20],[22]. Néanmoins, la majorité des physiciens ont été partagés entre deux théories principales : la théorie du Big Bang et la théorie de l'état stationnaire. La théorie de Big Bang revient originalement à Lemaître lors qu'il a proposé le modèle qui s'appelle modèle de Friedmann-Lemaître entre 1927-1929. L'appellation ironique "Big Bang" a été attribuée à ce modèle par Hoyle, l'un des partisan du modèle de l'état stationnaire. La théorie de l'état stationnaire proposé par Hoyle, Gold et Bondi suppose que l'Univers est éternel et immuable. Néanmoins, au cours du temps, des évidences en faveur du Big Bang apparaissent et la théorie de l'état stationnaire a été abandonnée progressivement [39].

En 1935, Robertson et Walker ont proposé le modèle d'un Univers en évolution (expansion ou contraction) uniforme se basant sur la relativité générale [2],[3],[7]. Ce modèle est appelé modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). En s'appuyant sur le principe cosmologique selon lequel à grande échelle l'Univers est homogène et isotrope, la métrique de Robertson-Walker est la solution exacte des équations d'Einstein pour un Univers en évolution. Dans la géométrie de Robertson-Walker, l'espace-temps est représenté par le produit tensoriel $R \times \Sigma$, R étant le temps propre des observateurs comobiles et Σ étant l'hypersurface tridimensionnelle homogène, isotrope et de courbure constante [2],[3],[21]. Les équations d'Einstein correspondantes à la métrique de Robertson-Walker donnent l'équation de Friedmann et celle

d'accélération [7],[3]. Remarquons que nous pouvons obtenir les mêmes équations dans le cadre de la théorie newtonienne à condition d'ajouter certaines hypothèses qui ne sont pas satisfaisantes [17],[16],[15]. La solution de ces équations donne les expressions du facteur d'échelle $a(t)$ et de la densité d'énergie $\varepsilon(t)$ en fonction du temps. Ces expressions dépendent des composantes de l'Univers et de la courbure de l'espace. Les évidences récentes montrent que notre Univers est plat, en expansion, dominé par la constante cosmologique et a subi un Big Bang [39].

Les évidences observationnelles de la cosmologie du Big Bang sont nombreuses. Les principales évidences, appelées aussi les quatre piliers du Big Bang, sont [16],[15],[17] :

- L'expansion de l'Univers découverte par Hubble.
- Le fond cosmique micro-onde.
- Les abondances des éléments primordiaux.
- L'évolution et la distribution des galaxies.

Malgré le grand succès atteint par la cosmologie du Big Bang, il y en reste quelques problèmes à résoudre. A titre d'exemple, on cite les problèmes de l'horizon, de la platitude et de monopoles [16],[17]. Ces trois problèmes trouvent une explication dans la théorie de l'inflation proposé par Guth en 1981[18], [37]. Cependant, ils y demeurent des problèmes sans solutions telles que l'asymétrie matière antimatière et la nature de l'énergie et de la matière noires.

Ce mémoire est une tentative pour présenter la cosmologie dans les cadres newtonien et relativiste. On s'intéressera en particulier aux modèles cosmologiques découlant du modèle de FLRW, et de la théorie de l'inflation. Le mémoire est organisé comme suit :

- Le deuxième chapitre constitue un rappel de la théorie de la relativité générale, de la solution de Schwarzschild et des trous noirs de Schwarzschild. La dérivation des équations d'Einstein en formulation lagrangienne a été présentée. La solution de Schwarzschild est la solution statique, ayant une symétrie sphérique, des équations d'Einstein dans le vide. La métrique de Schwarzschild a été obtenue et ses conséquences sur le comportement des particules ont été tirées. A la fin du chapitre, une étude des trous noirs sera présentée.

- La troisième chapitre traite la cosmologie dans le contexte newtonien. Le principe cosmologique et la loi de Hubble ont été présentés. Les équations de Friedmann, de fluide et d'accélération seront obtenues. Les insuffisances de l'approche newtonienne ont été discutées.

- Le quatrième chapitre est consacré à la cosmologie dans le cadre de la relativité générale. La métrique de Robertson-Walker qui décrit un Univers homogène et isotrope a été présentée. Les conséquences géométriques cor-

respondantes ont été discutées. Les équations d'Einstein correspondantes à cette métrique et qui caractérisent la dynamique de l'Univers ont été présentées. Les modèles cosmologiques correspondants à la métrique de Robertson-Walker et leurs caractéristiques ont été traités. Les problèmes de l'horizon, de la platitude et des monopôles ont été traités dans le cadre de la théorie de l'inflation.

Chapitre 2

La relativité générale

Le chapitre présent constitue un rappel sur la relativité générale. On va commencer bien sûr par la relativité restreinte, suivi du principe d'équivalence et des équations d'Einstein. Après, nous étudierons la solution de Schwarzschild et les trous noirs.

2.1 La relativité restreinte

La relativité restreinte s'appuie sur les deux postulats suivants :

- *Principe de relativité (Galileo)* : les phénomènes de la nature se déroulent suivant les mêmes lois dans tous les référentiels galiléens (référentiels d'inertie).

- *L'universalité de la vitesse de la lumière (Einstein)* : par rapport à tous les référentiels galiléens, dans le vide et dans tous les sens, la vitesse de la lumière est la même.

Donc Galileo a été le premier qui introduit le concept de la relativité. Il a montré que le déroulement du phénomène ne dépend pas de la vitesse du référentiel inertiel. Ces référentiels sont privilégiés parce que si un corps est en mouvement rectiligne et uniforme, il demeurera en cet état dans tous ces référentiels. Un référentiel inertiel en relativité restreinte est constitué d'un système de coordonnées spatiales (système de coordonnées cartésiennes par exemple), et des horloges placées en tous points de l'espace. La présence d'une particule au point (x, y, z) à l'instant t dans ce référentiel constitue un événement de coordonnées (t, x, y, z) . Un tel référentiel, pour qu'il soit considéré inertiel, les conditions suivantes doivent être satisfaites [2] :

- (i) la distance spatiale entre deux points (x, y, z) et (x', y', z') est indépendante du temps.
- (ii) toutes les horloges sont synchronisées et fonctionnent au même rythme.

(iii) la géométrie de l'espace en n'importe quel instant est Euclidienne.

Le deuxième postulat mentionné ci-dessus a été la magnifique et radicale contribution d'Einstein à la relativité. Ce postulat a rejeté la loi d'addition des vitesses de Galileo. Il indique que même la vitesse de propagation des interactions physiques, telle que la force électromagnétique par exemple, ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière, tandis qu'avant elle était supposé infinie. Même, les notions de simultanéité absolue et de distance spatiale absolue ont été rejetés par ce postulat et devenues relatives.

L'un des résultats très importants qu'on peut en tirer de ces postulats est la notion de l'*intervalle* qui est à la base des résultats extraordinaires de la contraction des longueurs et de la dilatation des durées. L'intervalle entre deux événements est défini par

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (2.1)$$

où Δt et Δx^i représentent la différence de coordonnées temporelles et spatiales entre ces deux événements. Dans un autre référentiel, l'intervalle séparant ces deux mêmes événements est

$$\Delta s'^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2.$$

On peut démontrer que

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2.$$

Il s'en suit que, pour deux événements séparés d'une distance et d'une durée infinitésimales, on peut écrire

$$ds^2 = ds'^2,$$

où ds^2 s'écrit en général (en utilisant la convention de sommation d'Einstein)

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.2)$$

où

$$\eta_{ij} = (-1, 1, 1, 1).$$

Donc, en relativité restreinte, *l'intervalle est invariant* lors d'un changement de référentiel inertiel.

D'après la définition de l'intervalle, l'équation (2.1), on constate qu'il peut être positif, négatif ou nul. Alors, on l'appelle respectivement intervalle *genre espace*, *genre temps* et *lumière*. On peut vérifier que l'intervalle lumière est associé aux trajectoires des photons, puisque ces derniers se déplacent à la vitesse de la lumière. Les intervalles genre temps sont associés aux particules massives, car ces particules ne peuvent pas atteindre la vitesse de la lumière.

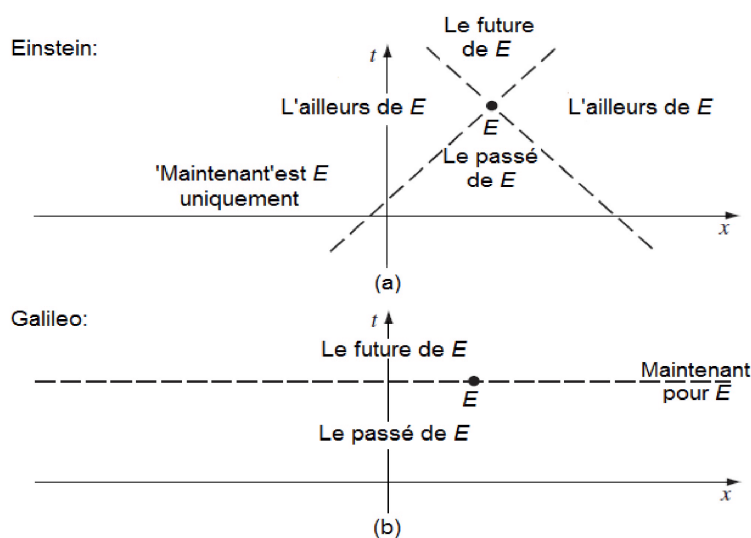


FIG. 2.1 – Le passé et le futur du point de vue relativiste et classique.

La figure 2.1.(a) représente un diagramme de l'espace-temps, où on a tracé les trajectoires des photons passant par l'événement E dans le sens positif et négatif de x (on ne montre qu'une seule coordonnée spatiale par souci de simplification). On a donc deux cônes attachés dont les sommets se trouvent au point E . Evidemment, quel que soit la particule arrivant à l'événement E , elle ne peut aller que vers le cône délimité par le futur de E . D'autre part, cette particule ne peut venir à E que du cône délimité par le passé de E . C'est pour cette raison qu'on appelle ces deux cônes *futur et passé absolus*. La région qui ne peut pas être atteinte par des particules physiques est appelée *l'ailleurs*.

Avant l'avènement de la relativité restreinte, tout l'espace-temps se constituait du futur et du passé qui étaient séparés par l'événement "maintenant" (voir fig 2.1.(b)). En relativité restreinte, le passé et le futur ne sont que les cônes du futur et celui du passé, et l'espace-temps possède une troisième région qui est l'ailleurs. En plus, deux événements distincts (qui peuvent être simultanés pour certains observateurs) n'ont pas le même passé. Cependant, ils peuvent avoir une partie commune dans leurs passés.

Le *temps propre* associé à une particule est le temps indiqué par une horloge du référentiel où cette particule est toujours au repos. On appelle un tel référentiel, le référentiel comobile (il n'est pas nécessairement inertiel). Soit R le référentiel comobile d'une certaine particule et R' un référentiel inertiel. Pour deux événements infinitésimalement séparés, le référentiel R

peut être considéré comme inertiel, de sorte que la définition de l'intervalle nous donne

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds'^2 \implies -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ \implies d\tau &= \sqrt{-\frac{ds'^2}{c^2}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où τ désigne le temps propre de cette particule.

On va voir ultérieurement que la métrique, figuré dans l'équation (2.2), joue un rôle très important en relativité générale. Effectivement, la métrique nous fournit un moyen pour mesurer les longueurs et les durées propres. A titre d'exemple, on va voir ultérieurement le phénomène de décalage vers le rouge dans deux situations. Dans la première, qui est la géométrie de Schwarzschild, ce phénomène a lieu parce que les durées du temps dépendent de la position. Dans la deuxième situation, qui est la géométrie de Robertson-Walker, c'est l'accroissement des longueurs avec le temps qui donne lieu à ce phénomène.

2.2 Relation entre la gravitation et la courbure

Afin de mettre en évidence la relation entre la gravitation et la courbure, il est approprié de commencer par l'introduction du phénomène de décalage vers le rouge gravitationnel. Ce phénomène, qui a été prévu par Einstein avant d'être détecté expérimentalement, est l'accroissement de la longueur d'onde d'un photon lors de son déplacement dans le sens du décroissement de l'intensité d'un champ gravitationnel. Einstein prédisait que l'expression décrivant ce phénomène, pour un rayon lumineux émis de la terre vers un récepteur d'altitude h , est donnée par [2]

$$\frac{\nu'(\text{fréquence en haut})}{\nu(\text{fréquence en bas})} = 1 - \frac{gh}{c^2} + 0 \left[\left(\frac{gh}{c^2} \right)^2 \right], \quad (2.4)$$

où $gh/c^2 \ll 1$. Malgré qu'Einstein ait imaginé une expérience pour établir cette expression, cette dernière a été vérifiée expérimentalement quelques décades plus tard par Pound et Rebka (1960), puis par Pound et Snider (1965). Aujourd'hui, grâce au développement technologique, le grand succès du système de navigation GPS peut être présenté comme une très bonne vérification de cette loi [8].

2.2.1 Est ce qu'il existe un référentiel inertiel en présence de la gravitation ?

Pour répondre à cette question, considérons le référentiel au repos par rapport à la terre (le laboratoire par exemple). D'un point de vue ondulatoire, la période d'une onde électromagnétique peut être définie par la durée du temps séparant le passage de deux sommets successifs de cette onde par un même point spatial. La relativité restreinte exige que la valeur de la période d'une même onde, ainsi définie, est la même en tout l'espace. En particulier, cette valeur ne doit pas dépendre de l'altitude où elle est mesurée, à savoir

$$\Delta t(\text{en bas}) = \Delta t(\text{en haut}). \quad (2.5)$$

D'autre part, on a vu que l'expérience de Pound-Rebka-Snider nous a conduit à $\nu(\text{en bas}) > \nu(\text{en haut})$, c'est-à-dire $\Delta t(\text{en bas}) < \Delta t(\text{en haut})$. Cette contradiction signifie que le référentiel au repos par rapport à la terre n'est pas inertiel, parce que, par construction, les horloges du référentiel inertiel doivent fonctionner au même rythme de façon que l'équation (2.5) soit valable. La présence de gravitation empêche-t-elle l'introduction de référentiels inertiels ? Pas exactement, au paragraphe suivant, on verra pourquoi.

2.2.2 Le principe d'équivalence

Dans un référentiel inertiel, une particule au repos reste au repos si elle n'est soumise à aucune force. Par exemple dans le cas de la force électromagnétique, on peut déterminer un tel référentiel en suivant la trajectoire d'une particule neutre. En effet, ce processus est possible avec toutes les forces physiques à part la gravitation. La gravitation, comme l'a montré Galileo, est distincte de toutes les forces physiques par le fait qu'elle influence toutes les particules de la même façon, indépendamment de leurs compositions internes. Dans le cadre la mécanique classique, on peut obtenir la trajectoire à partir de l'accélération \mathbf{a} . Cette dernière est reliée à la force \mathbf{F} s'exerçant à la particule par la deuxième loi de Newton

$$m_i \mathbf{a} = \mathbf{F},$$

où m_i est la masse inertielle de la particule. En plus, la force affectant une particule plongée dans un champ gravitationnel est donnée par

$$\mathbf{F}_g = -m_g \nabla \phi,$$

où m_g est la masse gravitationnelle. En utilisant ces deux dernières équations, le fait que les accélérations (trajectoires) des différentes particules sont les

mêmes en présence de la gravitation signifie que

$$m_i = m_g.$$

Cette équation représente ce qu'on appelle *le principe d'équivalence*. C'est une conséquence directe de l'universalité de la gravitation. Ce principe peut être donné aussi sous la forme suivante

$$\mathbf{a} = -\nabla\phi.$$

Pour comprendre le contenu de cette équation, considérons une fusée accélérée dans l'espace vide, où il n'y a pas de gravitation. Du point de vue d'un observateur dans cette fusée, il apparaît qu'il y a un champ gravitationnel ; tous les objets non fixés accélèrent, de la même façon, vers l'arrière de la fusée quel que soit leurs compositions internes. En plus, si l'observateur est au repos par rapport à la fusée, il aura un poids, qui est la force de contact que le plancher de la fusée lui exerce afin de le garder accéléré avec elle. Dans ce cas, le vrai référentiel inertiel est celui qui est en chute libre vers l'arrière de la fusée, avec la même accélération que les objets. Donc, en présence de la gravitation, on doit redéfinir les "particules libres" comme celles qui ne subissent que la force gravitationnelle et le référentiel inertiel comme celui qui est en chute libre.

Cependant, on va voir que la non-uniformité du champ de gravitation impose des contraintes sur l'utilisation du référentiel en chute libre. D'après ce qu'on a dit au paragraphe précédent, un champ gravitationnel homogène et statique ne peut pas être détecté par un observateur dans un ascenseur qui chute librement dans ce champ. Pour cet observateur, deux objets en chute libre dans l'ascenseur lui apparaissent au repos. Cependant, en faisant la même expérience dans le champ gravitationnel terrestre, l'observateur peut détecter le champ gravitationnel après avoir parcouru une longue distance. Effectivement, l'observateur s'aperçoit que les deux objets en chute libre se rapprochent l'un de l'autre. Ainsi, le champ gravitationnel n'est équivalent à un référentiel uniformément accéléré qu'à l'échelle locale. En tenant compte des restrictions spatiales et temporelles imposées dans le cas général, le principe d'équivalence peut être annoncé de la façon suivante : *dans des régions suffisamment petites de l'espace-temps, les champs gravitationnels uniformes sont équivalents à des référentiels accélérés uniformément par rapport à des référentiels inertiels.*

En fait, ce qu'on vient d'introduire est appelé *le principe d'équivalence faible* [3], car il ne décrit que le comportement des objets affectés par la gravitation. Einstein a compris qu'il doit étendre ce principe à toutes les lois physiques afin d'établir une théorie complète de la gravitation. C'est pour

cette raison qu'on introduit *le principe d'équivalence d'Einstein : les lois de la physique doivent avoir la même forme locale dans un référentiel inertiel en chute libre qu'en relativité restreinte*, à savoir, lorsqu'il n'y a pas de champ gravitationnel.

Examinons maintenant l'expérience de Pound-Rebka-Snider dans un référentiel en chute libre, le référentiel qui est inertiel d'après le principe d'équivalence. Dès l'émission du photon vers l'haut, notre référentiel commence à chuter librement. A l'instant où le photon atteint le récepteur après avoir parcouru la distance h séparant l'émetteur et le récepteur, le référentiel en chute libre acquiert une vitesse de $v = g\Delta t = g\frac{h}{c}$. En utilisant la formule de l'effet Doppler lorsque la source s'approche de l'observateur, la fréquence de réception mesurée dans ce référentiel en chute libre est liée à celle mesurée dans le référentiel sur la terre par

$$\frac{\nu(\text{référentiel en chute libre})}{\nu'(\text{récepteur en haut})} = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{gh}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{gh}{c^2}}} \quad (2.6)$$

$$\approx 1 + \frac{gh}{c^2} + 0 \left[\left(\frac{gh}{c^2} \right)^2 \right]. \quad (2.7)$$

En comparant cette équation avec l'équation (2.4), on déduit

$$\nu(\text{émission en bas}) = \nu(\text{de réception mesuré par le référentiel en chute libre}).$$

Donc il n'y a pas de décalage de fréquence dans le référentiel en chute libre. Ce résultat est tout à fait en accord avec le principe d'équivalence ; il est impossible de détecter la présence de la gravitation au moyen d'une expérience locale. Il fallait juste prendre conscience que le référentiel au repos par rapport à la terre n'est pas inertiel.

2.2.3 La géométrie de l'espace-temps

Pour parler de la géométrie de l'espace-temps, posons d'abord la question suivante : est ce que la géométrie de l'espace-temps peut se déterminer à partir des trajectoires (spatio-temporelles) des particules libres ? La réponse est oui, on va voir comment. Par exemple, l'espace de la relativité restreinte (espace de Minkowski) est plat parce qu'il obéit à l'axiome de parallélisme Euclidien. En effet, en relativité restreinte, les trajectoires de deux particules libres se déplaçant en parallèle restent toujours parallèles. Mais dans un champ gravitationnel non-uniforme (celui de la terre par exemple), si deux particules en chute libre semblent se déplacer en parallèle, sur une longue distance on

s'apercevra que les deux trajectoires ne sont pas parallèles et convergent vers le centre du champ. Par conséquent, l'espace-temps en présence de la gravitation n'est pas plat, mais plutôt un espace courbe.

A titre d'exemple, la sphère est un espace courbe. Sur la sphère, les lignes droites sont les grands cercles. Deux grands cercles peuvent paraître parallèles dans une certaine région, mais ils vont se couper certainement. En plus, tout le monde sait qu'on peut toujours représenter une petite partie (une ville par exemple) du globe, qui est sphérique, dans une carte géographique, qui est plate, sans changer la réalité. On peut même y tracer les méridiens (qui sont les grands cercles) comme des lignes droites et parallèles. Autrement dit, au voisinage suffisamment petit d'un point de la sphère, on peut prétendre que la géométrie est plate. On ne peut pas faire ça avec le globe en entier, car il est courbe. Ce type d'espace est appelé espace Riemannien ; il est localement plat, et les lignes localement droites s'appellent géodésiques.

L'un des pas décisifs qu'Einstein avait franchi est de voir la similarité entre les espaces Riemanniens et la physique gravitationnelle. Il a identifié les trajectoires des particules en chute libre avec les géodésiques de la géométrie Riemannienne, et par conséquent, l'espace-temps physique avec les espaces Riemanniens.

2.3 La physique dans un espace-temps courbe

Dans cette section, on se propose de voir comment réécrire les lois de la physique dans un espace-temps courbe. Selon le principe d'équivalence d'Einstein, dans des régions suffisamment petites de l'espace-temps, les lois de la physique se réduisent à celles de la relativité restreinte ; il est impossible de détecter l'existence du champ gravitationnel avec une expérience locale. Einstein s'est rendu compte qu'un phénomène universel comme la gravitation peut être vu plutôt comme une propriété fondamentale de l'espace-temps, qu'une force conventionnelle. Maintenant, en profitant de la similitude entre l'espace-temps courbe et les espaces Riemanniens (qu'on les appelle aussi variétés), le passage de la physique de relativité restreinte à celle de relativité générale se fait directement, et tout simplement, en suivant les étapes suivantes [3],[2] :

- On prend une loi de la physique valide dans un référentiel inertiel de l'espace-temps plat.

- On écrit la loi sous forme tensorielle.

De cette façon, on est sûr que la loi résultante est valide dans l'espace-temps courbe. Pratiquement, ces deux étapes sont équivalentes à :

- (i) prendre la loi physique valide dans l'espace-temps plat

(ii) remplacer la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ par la métrique générale $g_{\mu\nu}$, et les dérivées partielles ∂_μ par les dérivées covariantes ∇_μ .

Après avoir identifié l'espace-temps de la relativité générale avec un espace Riemannien, il nous reste deux questions à comprendre pour avoir une théorie complète. La première est comment le champ gravitationnel affecte le comportement de la matière. La deuxième question est comment la matière détermine la courbure de l'espace-temps. Autrement dit, il faut trouver l'analogie relativiste des expressions classiques

$$a = -\nabla\phi, \quad (2.8a)$$

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.8b)$$

Appliquons la procédure précédente pour retrouver l'équation de mouvement de la particule libre en relativité générale. Dans l'espace plat, l'équation de mouvement de la particule libre est

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}U^\mu = 0, \quad (2.9)$$

où τ et U^μ désignent le temps propre et la quadri-vitesse de cette particule respectivement. Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$U^\nu \partial_\nu U^\mu = 0.$$

Pour généraliser cette équation à l'espace courbe, il faut la réécrire sous une forme tensorielle [2], c'est-à-dire

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0.$$

En utilisant l'expression de la dérivée covariante, cette équation devient

$$U^\nu (\partial_\nu U^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu U^\sigma) = 0 \quad \text{où} \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (2.10)$$

qui n'est que l'équation de la géodésique. Les $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ sont les symboles de Christoffel. Ainsi, l'équivalent de l'équation de Newton (2.8a) en relativité générale est l'équation de la géodésique.

2.4 Les quantités conservées

Comme dans toutes les théories des champs, en relativité générale, les symétries de l'espace-temps impliquent l'existence des quantités conservées. On va voir que ces symétries vont nous aider à trouver les équations des

trajectoires des particules [3]. Soit p^α les composantes du vecteur énergie-impulsion d'une certaine particule. Donc, l'équation de la géodésique de cette particule s'écrit comme suit

$$p^\alpha \nabla_\alpha p_\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \Gamma_{\beta\alpha}^\rho p^\alpha p_\rho,$$

où on a utilisé la définition de la dérivée covariante. En utilisant l'expression explicite de $\Gamma_{\beta\alpha}^\rho$, cette équation devient

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha, \quad (2.11)$$

où $g_{\nu\alpha,\beta} \equiv \partial_\beta g_{\nu\alpha}$. Cette équation apporte le résultat important suivant : si toutes les composantes de la métrique sont indépendantes de x^β pour un certain indice β fixé, donc la composante p_β du vecteur énergie-impulsion sera conservée le long de la trajectoire de la particule.

2.5 Les équations d'Einstein en formulation Lagrangienne

Maintenant, il nous reste à déterminer la loi suivant laquelle la matière courbe l'espace-temps, c'est-à-dire, les équations de mouvement du champ gravitationnel. Comme la relativité générale est une théorie de champ classique, on peut retrouver les équations du champ en utilisant le principe de moindre action.

En relativité restreinte, l'action d'un champ quelconque φ^i s'écrit [3]

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi^i, \partial_\mu \varphi^i) dx^4.$$

où \mathcal{L} est la densité lagrangienne du champ. En utilisant la dérivée covariante ∇_μ et en intégrant sur le volume propre $\sqrt{-g} dx^4$, l'expression précédente s'écrit dans un espace-temps courbe comme suit

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi^i, \nabla_\mu \varphi^i) \sqrt{-g} dx^4. \quad (2.12)$$

où g est le déterminant de la matrice de la métrique. D'habitude, les équations de mouvement du champ s'obtiennent en imposant à l'action S d'être stationnaire vis-à-vis des petites variations du champ φ^i . Cette méthode va nous donner certainement les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \varphi^i)} = 0. \quad (2.13)$$

Dans le cas de la gravitation, les variables dynamiques du champ sont les composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$. Donc, à partir de $g_{\mu\nu}$, on doit construire un scalaire qui représente la densité lagrangienne du champ. D'après le principe d'équivalence, la métrique $g_{\mu\nu}$ peut prendre sa forme canonique en tout point, et sa dérivée première peut s'annuler [2],[11]. Par conséquent, il faut que l'expression du lagrangien contienne la dérivée deuxième de la métrique. On sait d'après la géométrie Riemannienne que le scalaire de Ricci R est formé à partir de tenseur de Riemann $R^\rho_{\mu\lambda\nu}$, et que ce dernier est formé à partir du tenseur métrique et de ses dérivées premières et deuxièmes. D'ailleurs, c'est le seul scalaire indépendant qu'on peut construire à partir de la métrique et ses dérivées premières et deuxièmes [3]. Ainsi, on pose

$$S_{HE} = \gamma \int R \sqrt{-g} dx^4, \quad (2.14)$$

γ est une constante qu'on déterminera ultérieurement. Cette action est appelée *l'action de Hilbert-Einstein*. Malheureusement, on ne peut pas utiliser les équations d'Euler-Lagrange ici car cette action ne peut pas s'écrire en termes de dérivées covariantes de la métrique (qui s'annulent dans n'importe quel système de coordonnées). Par conséquent, on est obligé d'examiner directement la variation de l'action vis-à-vis des petites variations du champ $g_{\mu\nu}$. Pour simplifier les choses, on va utiliser l'expression du scalaire de Ricci en termes de la métrique et du tenseur de Ricci, c'est-à-dire $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, et le fait que [5]

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (2.15)$$

Cela signifie que les points stationnaires par rapport à $g_{\mu\nu}$ sont aussi stationnaires par rapport à son inverse $g^{\mu\nu}$. De cette façon, la variation de l'action de l'équation (2.14) s'écrit

$$\begin{aligned} \delta S_{HE} &= \gamma \int (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g}) dx^4 \\ &= \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Commençons par le terme δS_1 . On a

$$\begin{aligned} R^\rho_{\mu\lambda\nu} &= \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \\ \implies \delta R^\rho_{\mu\lambda\nu} &= \partial_\lambda \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} + \delta \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Il faut signaler ici que $\delta \Gamma$ est la différence entre deux connexions, et par conséquent, c'est un tenseur [3]. Ainsi, la dérivée covariante de $\delta \Gamma$ s'écrit

$$\nabla_\lambda (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) = \partial_\lambda (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta \Gamma^\rho_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \delta \Gamma^\rho_{\sigma\nu}.$$

En utilisant cette expression on peut réécrire la variation de $R_{\mu\lambda\nu}^\rho$ sous la forme

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\rho). \quad (2.17)$$

Donc, la contribution du premier terme devient

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \gamma \int g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\rho)] \sqrt{-g} dx^4 \\ &= \gamma \int \nabla_\sigma [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)] \sqrt{-g} dx^4. \end{aligned} \quad (2.18)$$

où on a utilisé le fait que $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$. C'est un terme de divergence intégré sur le volume qui se transforme via le théorème de Stokes à une intégrale sur la surface à l'infini. Ainsi, cette intégrale est nulle puisque les champs sur cette surface sont nuls. Calculons maintenant l'expression de δS_3 . On a

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En insérant l'équation (2.19) dans (2.16) et en tenant compte du fait que δS_1 est nulle, on obtient

$$\delta S_{HE} = \gamma \int dx^4 \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Comme $\delta g^{\mu\nu}$ est une variation arbitraire, les valeurs extrêmes de S sont données par

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \implies R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.21)$$

Ces sont les équations d'Einstein dans le vide.

Pour retrouver les équations d'Einstein en présence de la matière, il faut qu'on ajoute l'action qui représente la matière. Ainsi, l'expression de l'action devient

$$S = S_{HE} + S_m. \quad (2.22)$$

En suivant la même procédure que la précédente, on retrouve

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \gamma \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.23)$$

En introduisant le tenseur énergie-impulsion [3],[10]

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.24)$$

et en tenant compte de l'équation (2.23), le principe de moindre action, $\delta S = 0$, permet d'écrire

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{2\gamma c}T_{\mu\nu}.$$

A la limite des champs faibles [3], en exigeant de ces équations de reproduire l'équation de Poisson (2.8b), on obtient

$$\gamma = \frac{c^3}{16\pi G}. \quad (2.25)$$

Ainsi, les équations du champ, en présence de la matière, s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Elles représentent l'analogue relativiste de l'équation (2.8b). En prenant la trace de cette équation, les équations d'Einstein peuvent s'exprimer sous la forme équivalente suivante

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right), \quad (2.27)$$

où $T = T^\mu{}_\mu$. De cette façon, les équations d'Einstein dans le vide deviennent

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.28)$$

2.6 La solution de Schwarzschild

Dans cette section, nous nous proposons d'étudier la solution de Schwarzschild. C'est la solution des équations d'Einstein dans le vide pour un système ayant une symétrie sphérique dans le cas statique. L'importance de cette solution repose sur le fait que de nombreux objets astrophysiques sont presque sphériques. En plus, on va voir ultérieurement que cette solution va nous amener au concept de trou noir.

2.6.1 La métrique de Schwarzschild

D'une part, la symétrie sphérique signifie qu'il n'y a pas de direction angulaire préférée. Géométriquement, en considérant un système de coordonnées sphérique (ct, r, θ, ϕ) , ça veut dire qu'on doit garder la forme de

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

dans l'expression de l'invariant relativiste ds^2 . Cependant, nous sommes libres de multiplier $d\Omega^2$ par une fonction de r ou t . D'autre part, dans le cas statique, il faut que la métrique ne contienne pas des termes mixtes faisant intervenir t , et que ses composantes ne dépendent pas du temps [2]. Donc l'expression générale de la métrique s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{2\alpha} c^2 dt^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.29)$$

où les composantes non nulles de la métrique sont

$$g_{tt} = -e^{2\alpha}, \quad g_{rr} = e^{2\beta}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta,$$

α et β étant des fonctions de r . Ici, on a exprimé les composantes de $g_{\mu\nu}$ en termes des fonctions exponentielles pour garantir que leurs signes ne changeront pas. Les composantes non nulles du tenseur de Ricci correspondant à cette métrique sont [3]

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right], \\ R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta, \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1, \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

La courbure scalaire est donnée par [3]

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right].$$

Le tenseur d'Einstein étant défini par [10]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu},$$

dans le cadre de cette métrique, nous avons [3]

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{e^{2(\alpha-\beta)}}{r^2} (2r \partial_r \beta - 1 + e^{2\beta}), \\ G_{rr} &= \frac{1}{r^2} (2r \partial_r \alpha + 1 - e^{2\beta}), \\ G_{\theta\theta} &= r^2 e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{1}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) \right], \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta G_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Comme les équations d'Einstein dans le vide impliquent que $R_{tt} = R_{rr} = 0$, on peut écrire

$$e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = 0.$$

En substituant R_{tt} et R_{rr} à partir de (2.30), on obtient

$$\frac{2}{r}(\partial_r \alpha + \partial_r \beta) = 0 \implies \alpha = -\beta + b,$$

où b est une constante d'intégration. A la limite $r \rightarrow \infty$, la métrique de Schwarzschild doit tendre vers celle de Minkowski et, par conséquent, les fonctions α et β doivent tendre vers zéro (voir (2.29)). D'après la dernière équation, ça veut dire que la constante b est nulle, et que

$$\alpha = -\beta. \quad (2.32)$$

Maintenant, en substituant α par $-\beta$, l'équation $R_{\theta\theta} = 0$ devient

$$\begin{aligned} e^{2\alpha} [2r\partial_r \alpha + 1] &= 1 \\ \implies \partial_r [re^{2\alpha}] &= 1 \\ \implies e^{2\alpha} &= 1 - \frac{R_s}{r}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

où R_s est une constante d'intégration appelée *rayon de Schwarzschild*, dont la signification sera fournie ultérieurement. En utilisant les équations (2.32) et (2.33), l'expression de la métrique (2.29) devient

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Par ailleurs, pour que la solution de Schwarzschild reproduise la limite newtonienne, on doit exiger la condition suivante [3],[11]

$$g_{tt} = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right),$$

où

$$\Phi = -\frac{GM}{r},$$

est le potentiel gravitationnel de la théorie newtonienne d'un système de masse M présentant une symétrie sphérique. Donc on peut identifier le rayon de Schwarzschild R_s avec $2GM/c^2$. Ainsi, l'expression finale de la métrique de Schwarzschild s'écrit

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.34)$$

Ainsi, M peut représenter la masse d'un objet astrophysique telle qu'une étoile ou un trou noir. Il est clair que lorsque r tend vers l'infini, la métrique de Schwarzschild tend vers celle de Minkowski. Cette solution est alors *asymptotiquement plate*. Par ailleurs, lorsque M tend vers zéro, on constate qu'elle devient aussi Minkowskienne. Le théorème de Birkhoff stipule que la solution de Schwarzschild est la seule solution de symétrie sphérique, asymptotiquement plate, des équations d'Einstein dans le vide, même si on abandonne la condition de départ exigeant que la métrique soit statique (voir [3],[10]).

2.6.2 Les singularités de la métrique

D'après l'expression de la métrique de Schwarzschild, l'équation (2.34), on remarque qu'il y a deux points auxquels la métrique n'est pas définie : $r = 0$ et $r = 2GM/c^2$. On appelle ces points des singularités. Cependant, il faut distinguer entre la singularité physique (ou réelle) et la singularité de coordonnées. Cette dernière est liée directement au choix de coordonnées et peut être évitée en choisissant le système de coordonnées approprié. Tandis que la singularité réelle signifie que la courbure est infinie à ce point. Comme la courbure est mesurée par le tenseur de Riemann, on peut utiliser des scalaires (qui ne dépendent pas des coordonnées) construits à partir de ce tenseur pour déterminer la nature de la singularité. Pour cela, on peut utiliser le scalaire [10],[3]

$$R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48G^2 M^2}{c^4 r^6}.$$

Evidemment, on voit que la singularité $r = 0$ est réelle. Cependant, le fait que ce scalaire ne tend pas vers l'infini au point $r = 2GM/c^2$ ne signifie pas nécessairement que ce point n'est pas une singularité, c'est une condition suffisante mais non pas nécessaire. En fait, aucun des autres scalaires construits à partir du tenseur de Riemann (tel que le scalaire de Ricci) ne tend vers l'infini en ce point [3]. On verra ultérieurement, lorsqu'on étudiera les trous noirs, qu'un changement de coordonnées approprié enlèvera cette singularité.

2.6.3 Les trajectoires de Schwarzschild

Maintenant, on va voir le comportement des particules dans la géométrie de Schwarzschild et les différences apportées par rapport au cas classique. Pour examiner les trajectoires des particules dans la géométrie de Schwarzschild, on peut profiter des symétries. On a vu précédemment qu'il y a une quantité conservée le long de la géodésique, associée à chaque symétrie de l'espace-temps. D'une part, d'après l'équation (2.11), le fait que la métrique

est indépendante du temps entraîne la conservation de la composante $-p_0$ le long de la géodésique. On va utiliser la notation suivante

$$\tilde{E} = \frac{-p_0}{m}, \quad \text{pour la particule massive} \quad (2.35a)$$

$$E = -p_0, \quad \text{pour le photon} \quad (2.35b)$$

où m est la masse de la particule massive. D'autre part, la métrique est indépendante de la coordonnée ϕ , ce qui implique la conservation de p_ϕ . Par ailleurs, la symétrie sphérique, ou l'invariance par rapport aux rotations spatiales, entraîne la conservation de la direction et du module du moment angulaire L . La conservation de la direction du moment angulaire se traduit par le fait que le mouvement de la particule se fait dans un plan qu'on peut choisir comme le plan équatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$) [2]. La conservation du module du moment angulaire est exprimée par la conservation de p_ϕ . En utilisant la métrique (2.34), cette quantité est reliée à la composante p^ϕ du vecteur énergie-impulsion par

$$p_\phi = g_{\phi\phi}p^\phi = mr^2\frac{d\phi}{d\tau}, \quad \text{pour la particule massive}$$

$$p_\phi = g_{\phi\phi}p^\phi = r^2\frac{d\phi}{d\lambda}, \quad \text{pour le photon}$$

où τ est le temps propre de la particule massive et λ le paramètre caractérisant la trajectoire du photon. Ainsi, ces équations représentent l'équivalent relativiste de la deuxième loi de Kepler : pendant des durées égales sont balayées des surfaces égales par le rayon vecteur. En utilisant la métrique (2.34) et la notation suivante pour le moment angulaire

$$\tilde{L} = \frac{p_\phi}{m}, \quad \text{pour la particule massive} \quad (2.36a)$$

$$L = p_\phi, \quad \text{pour le photon,} \quad (2.36b)$$

les autres composantes de p^μ pour la particule massive et le photon sont respectivement

$$p^0 = g^{00}p_0 = m \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \tilde{E}, \quad (2.37a)$$

$$p^r = m\frac{dr}{d\tau}, \quad \text{pour la particule} \quad (2.37b)$$

$$p^\phi = g^{\phi\phi}p_\phi = m\frac{\tilde{L}}{r^2}, \quad (2.37c)$$

$$p^0 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} E, \quad (2.38a)$$

$$p^r = \frac{dr}{d\lambda}, \quad \text{pour le photon} \quad (2.38b)$$

$$p^\phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}, \quad (2.38c)$$

La composante p^θ est nulle parce que θ est constante. Par ailleurs, sur la géodésique, la quantité $p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$ est toujours constante, ce qui nous permet d'écrire

$$-m^2 \tilde{E}^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} + m^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + m^2 \frac{\tilde{L}^2}{r^2} = -m^2 c^2,$$

pour la particule massive. Dans le cas du photon, la masse est nulle, et l'équation $p^\mu p_\mu = 0$ devient

$$-E^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0.$$

Les deux dernières équations peuvent s'écrire sous la forme utile suivante

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r), \quad \text{pour la particule massive} \quad (2.39a)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - V^2(r), \quad \text{pour le photon} \quad (2.39b)$$

avec

$$\tilde{V}^2(r) = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\tilde{L}^2}{c^2 r^2} - \frac{2GM\tilde{L}^2}{c^4 r^3}\right), \quad \text{pour la particule} \quad (2.40a)$$

$$V^2(r) = \left(\frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{c^2 r^3}\right), \quad \text{pour le photon} \quad (2.40b)$$

$V^2(r)$ et $\tilde{V}^2(r)$ sont appelés les potentiels effectifs. On remarque que les expressions (2.39) rappellent celle d'une particule de masse unitaire dans le cas newtonien. Cela va nous aider à étudier le comportement des particules et à illustrer les effets apportés par la relativité générale. Evidemment, ces effets sont dus aux derniers termes proportionnels à r^{-3} dans les expressions de $V^2(r)$ et $\tilde{V}^2(r)$, qui représentent la contribution de la relativité générale.

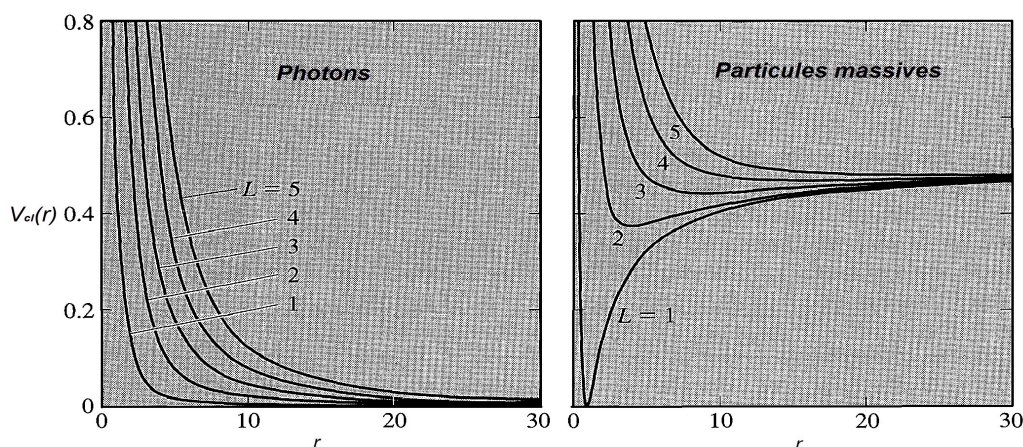


FIG. 2.2 – Représentation des potentiels classiques pour plusieurs valeurs du moment angulaire L .

Pour montrer les effets du terme dû à la relativité générale, rappelons le cas de la mécanique newtonienne (en l'absence du terme relativiste proportionnel à r^{-3}). Dans la figure 2.2, le potentiel classique $V_{cl}(r)$ est représenté pour des différentes valeurs du moment angulaire L . Une particule d'énergie E venant de l'infini peut se déplacer dans le sens décroissant de r jusqu'à ce que $E = V_{cl}(r)$, puis elle repart dans le sens inverse. On appelle le point où $E = V_{cl}(r)$, point de rebroussement. Dans ce cas, les trajectoires sont paraboliques ou hyperboliques. Pour les particules massives, on peut trouver des trajectoires orbitales circulaires ou elliptiques. Les trajectoires circulaires existent pour certaines valeurs de L et correspondent aux valeurs de r pour lesquelles $V_{cl}(r)$ est extrême. Pour les photons, il n'y a pas de trajectoires circulaires. Lorsque r tend vers zéro, $V_{cl}(r)$ tend vers l'infini, ce qui signifie que quel que soit l'énergie de la particule venant de l'infini, elle ne peut jamais atteindre la région $r = 0$.

Examinons maintenant les trajectoires dans le cadre de la relativité générale. La figure 2.3 représente les potentiels effectifs de (2.40) pour différentes valeurs du moment angulaire L . Pour les grandes valeurs de r , le comportement des particules est identique à celui dans le cas newtonien dans la même région tant que le terme relativiste dans les expressions des potentiels (2.40) tend vers zéro lorsque r est grand. Mais lorsque r tend vers zéro, les potentiels $V(r)$ et $\tilde{V}(r)$ tendent vers moins l'infini, contrairement au cas newtonien. Il s'en suit que, quel que soit la valeur de L , si une particule possède une énergie supérieure au maxima du potentiel, elle sera tirée inévitablement vers le

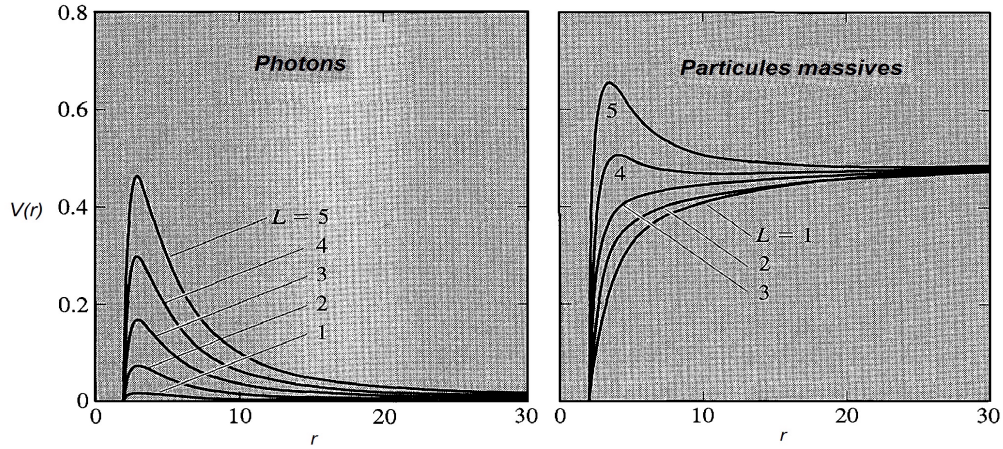


FIG. 2.3 – Représentation des potentiels effectifs pour plusieurs valeurs du moment angulaire L .

centre et ne pourra jamais revenir à l'infini. En $r = 2GM/c^2$, les potentiels sont nuls. On va voir ultérieurement que ce rayon joue un rôle très important pour les trous noirs. Pour illustrer les trajectoires circulaires dans le cas relativiste, dérivons les équations (2.39) par rapport à τ et λ . Sachant que \tilde{E} et E sont des constantes, on obtient

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \tilde{V}^2(r), \quad \text{pour la particule massive (2.41a)}$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} V^2(r), \quad \text{pour le photon (2.41b)}$$

D'après ces deux équations, les trajectoires circulaires (r est constant) correspondent aux valeurs extrêmes du potentiel. Les trajectoires circulaires correspondant aux maxima sont instables parce que n'importe quel petit changement de r va conduire, d'après (2.41), à l'accélération de la particule loin de cette orbite. En mettant les membres droits des équations (2.41) égal à zéro, on obtient les racines suivantes

$$r = \frac{\tilde{L}^2}{2GM} \left[1 \pm \left(1 - \frac{12G^2M^2}{c^2\tilde{L}^2} \right)^{1/2} \right], \quad \text{pour la particule}$$

$$r = 3GM/c^2, \quad \text{pour le photon}$$

Pour la particule massive, il y a une orbite circulaire stable et une autre instable pour chaque valeur de \tilde{L} , tant que $\tilde{L}^2 > 12G^2M^2/c^2$. Pour $\tilde{L}^2 =$

$12G^2M^2/c^2$, ces deux orbites s'identifient et le rayon correspondant est $r = 6GM/c^2$. Dans le cas où $\tilde{L} < 12G^2M^2/c^2$, il n'y a pas d'orbites circulaires. Il existe aussi des orbites non circulaires qui oscillent autour du rayon de l'orbite circulaire stable. Dans le cas newtonien, ces orbites sont des ellipses, mais dans le cas relativiste, elles ne sont pas tout à fait des ellipses [2],[3]. Quant aux photons, contrairement au cas newtonien, il y a une orbite circulaire instable de rayon $r = 3GM/c^2$, quel que soit la valeur du moment angulaire du photon (voir la figure 2.3).

2.6.4 Le décalage vers le rouge

Examinons maintenant l'évolution de la fréquence d'un photon se propageant dans un espace-temps décrit par la géométrie de Schwarzschild. Considérons un observateur au repos dans cet espace. Comme n'importe quel quadrivecteur vitesse doit satisfaire $U^\mu U_\mu = -c^2$ [2], pour cette observateur on obtient

$$U_{obs}^0 = c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2}, \quad (2.42)$$

les autres composantes étant nulles. D'autre part, l'énergie d'un photon mesurée par n'importe quel observateur est donnée par $h\nu = -p_\mu U_{obs}^\mu$ [2], p_μ étant le quadrivecteur impulsion du photon. Pour notre observateur, cette énergie devient

$$h\nu = -p_0 U_{obs}^0 = Ec \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2}, \quad (2.43)$$

où on a utilisé les équations (2.35b) et (2.42) pour substituer $-p_0$ et U_{obs}^0 respectivement. Etant donnée que E est une constante, en utilisant l'équation (2.43), un photon émis par un observateur situé au point (r_1, θ_1, ϕ_1) vers un autre situé au point (r_2, θ_1, ϕ_1) subit alors un décalage des fréquences donné par

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} \right)^{-1/2}.$$

C'est l'expression exacte du décalage des fréquences dans la géométrie de Schwarzschild. Dans la limite des champs faibles où $c^2 r \gg GM$ [3], cette expression devient

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{1}{c^2} (\Phi_2 - \Phi_1),$$

où $\Phi = -GM/r$ est le potentiel newtonien. Dans le cas du spectre visible, imaginons que ce photon ait été émis par le premier observateur vers le

deuxième et que $\Phi_2 > \Phi_1$. Dans ce cas, le deuxième observateur constate que ce photon a subi un décalage vers le rouge. En mettant $\Phi_2 - \Phi_1 = gh$, où g est l'accélération terrestre et $h = r_2 - r_1$, on retrouve exactement l'équation de décalage prédite par Einstein (équation (2.4)).

2.7 Les trous noirs de Schwarzschild

En relativité générale, un trou noir est une région de l'espace-temps où la gravitation est tellement forte que même la lumière ne peut pas s'en échapper. Ces trous noirs se forment dans la nature après l'effondrement gravitationnel des étoiles massives. Les trous noirs sont classés suivant trois propriétés principales : la masse, la charge et le moment angulaire [3],[12]. Selon ces propriétés, les classes générales de trous noirs sont

- Les trous noirs statique sans charge, décrits par la solution de Schwarzschild.
- Les trous noirs chargés décrits par la solution de Reissner-Nordström.
- Les trous noirs en rotation, décrit par la solution de Kerr.

Dans cette section, on se propose d'étudier le cas des trous noirs de Schwarzschild. Mais avant de faire cela, commençons par voir les ancêtres newtoniens des trous noirs.

2.7.1 Les étoiles noires

Les trous noirs représentent l'un des concepts modernes amenés par la relativité. Cependant, il y avait des spéculations sur l'existence des objets analogues : les étoiles noires. Au 18^{ème} siècle, le physicien britannique John Michell et le physicien et mathématicien français Pierre Laplace (indépendamment) ont spéculé sur l'existence d'une étoile tellement massive que la lumière ne peut pas s'échapper du champ gravitationnel de cette étoile [2]. Par conséquent, cette étoile sera noire (invisible). En s'appuyant sur la loi de conservation de l'énergie, une particule s'échappant de l'étoile doit avoir au moins une énergie cinétique égale à l'énergie potentielle gravitationnelle, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{R},$$

où M et R sont respectivement la masse et le rayon de l'étoile, v est la vitesse de la particule. En mettant $v = c$, on obtient le rayon maximal d'une étoile pour qu'elle soit noire

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Malgré que ce résultat soit basé sur des lois newtoniennes, on va voir que c'est exactement la valeur du rayon du trou noir prédit par la solution de Schwarzschild. Cependant, il y a beaucoup de différences entre l'étoile noire classique et le trou noir moderne. L'étoile de Michell et Laplace est noire parce que la lumière émise de la surface de cette étoile n'a pas pu s'échapper à l'infini. Dans le cas du trou noir, la lumière ne quitte jamais la surface du trou noir, et cette surface elle-même n'est pas le bord d'un corps massif, mais c'est un espace vide laissé après l'effondrement gravitationnel de la matière qui a formé ce trou.

2.7.2 La particule tombant sur le trou noir

Pour examiner davantage la nature de la surface $r = 2GM/c^2$, considérons le mouvement d'une particule massive venant de l'infini, sans vitesse initiale, sur une trajectoire radiale. D'après ce qui précède, l'équation caractérisant la trajectoire d'une particule massive dans la géométrie de Schwarzschild est

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r),$$

$$\text{où } \tilde{V}^2(r) = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\tilde{L}^2}{c^2 r^2} - \frac{2GM\tilde{L}^2}{c^4 r^3}\right).$$

D'après ces équations, à l'infini, le potentiel effectif est égal à c^2 . Il s'en suit que $\tilde{E} = c$, étant donné que \tilde{E} est une constante de mouvement. Par ailleurs, le fait que la trajectoire est radiale ($d\phi = d\theta = 0$) signifie que $L = 0$ (voir l'équation (2.37c)). Ainsi, pour cette particule, l'équation précédente devient

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2GM}{r}. \quad (2.44)$$

D'autre part, en substituant $\tilde{E} = c$, l'équation (2.37a) nous donne

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (2.45)$$

En utilisant ces deux dernières équations, on peut écrire

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{2GM}} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr,$$

où le signe moins signifie que la particule est en chute vers le trou noir. Lorsque r tend vers $2GM/c^2$, l'intégrale de cette expression diverge. Comme

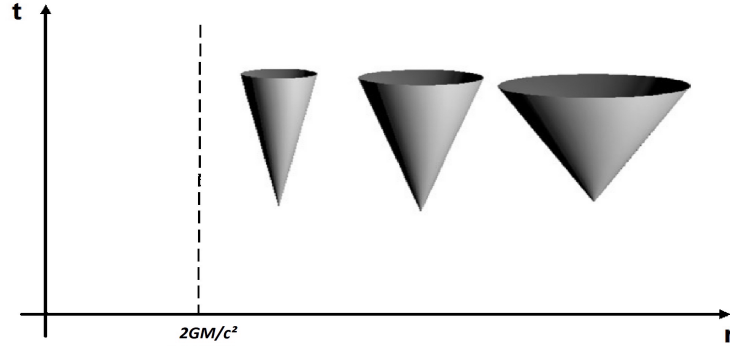


FIG. 2.4 – Les cônes de lumière en coordonnées de Schwarzschild.

la coordonnée t représente le temps mesuré par un observateur à l'infini, ce dernier voit que la particule s'approche de $r = 2GM/c^2$, mais elle ne peut jamais l'atteindre.

Pour rendre les choses plus claires, on va utiliser quelque chose qu'on connaît très bien, ce sont les cônes de lumière. Les équations décrivant les cônes de lumière s'obtiennent en résolvant l'équation $ds^2 = 0$ (avec $d\phi = d\theta = 0$), c'est-à-dire

$$c \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)^{-1}. \quad (2.46)$$

Dans la figure 2.4, on a représenté ces cônes pour des valeurs de r supérieur à $2GM/c^2$. On voit que les cônes de lumière se ferment progressivement en s'approchant de $r = 2GM/c^2$. Au voisinage de $r = 2GM/c^2$, dt/dr tend vers l'infini et les cônes de lumière sont presque fermés, ce qui astreint les trajectoires des particules d'être asymptotiques à la droite d'équation $r = 2GM/c^2$. Donc les particules ne pourront atteindre $r = 2GM/c^2$ qu'après un temps t infini.

Maintenant, examinons la trajectoire de la particule en utilisant son temps propre. En calculant l'intégrale de (2.44), on obtient

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3\sqrt{2GM}} \left(r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}} \right).$$

Il est clair que la surface $r = 2GM/c^2$ ne pose aucun problème pour cette expression de sorte que la particule puisse aboutir à la surface $r = 2GM/c^2$ pendant un temps propre fini, contrairement à ce que devait voir un observateur à l'infini. La particule peut même aller jusqu'à des surfaces plus petites que $r = 2GM/c^2$ pendant un temps propre fini. Ainsi, le problème

est dans notre système de coordonnées et la singularité $2GM/c^2$ n'est qu'une singularité de coordonnées.

2.7.3 Qu'est ce qui se passe à l'intérieur de $r = 2GM/c^2$

Pour mieux comprendre ce qui se passe dans les trous noirs, faisons le changement de variable suivant $c^2\varepsilon = 2GM - c^2r$ [2]. De cette façon, l'expression de la métrique de Schwarzschild devient

$$ds^2 = \left(\frac{c^2\varepsilon}{2GM - c^2\varepsilon} \right) c^2 dt^2 - \left(\frac{2GM - c^2\varepsilon}{c^2\varepsilon} \right) d\varepsilon^2 + (2GM/c^2 - \varepsilon)^2 d\Omega^2.$$

A l'intérieur de la surface $r = 2GM/c^2$, la variable ε est toujours positive. Ainsi, les intervalles de la trajectoire sur laquelle t , θ et ϕ sont constantes sont des intervalles genre temps, c'est-à-dire $ds^2 < 0$. Par contre, lorsque ε , θ et ϕ sont constants, l'intervalle devient du genre espace puisque $ds^2 > 0$. Comme la particule doit suivre des trajectoires de genre temps, elle ne peut pas se situer à une coordonnée r fixe, et donc elle doit continuer dans le sens décroissant de r . Ainsi, dès qu'une particule (massive ou non-massive) traverse la surface $r = 2GM/c^2$, elle sera guidée vers $r = 0$ et ne pourra jamais revenir à l'infini. Du fait qu'on ne peut rien voir à l'intérieur de la surface $r = 2GM/c^2$, on appelle cette dernière *horizon d'évènement*.

2.7.4 Les coordonnées d'Eddington-Finkelstein

La première tentative de remédier au problème de la singularité a été faite par Eddington et Finkelstein. D'abord, introduisons la coordonnée r^* [3] définie par l'intégration de l'équation des géodésiques lumières radiales (2.46)

$$ct = \pm r^* + \text{constante}, \quad (2.47)$$

où

$$r^* = r + (2GM/c^2) \ln \left(\frac{r}{2GM/c^2} - 1 \right). \quad (2.48)$$

Dans l'équation (2.47), les signes moins et plus correspondent aux photons se mouvant dans le sens décroissant et croissant de r respectivement. Introduisons aussi les nouvelles coordonnées v et u définies par [3],[4]

$$v = ct + r^*. \quad (2.49a)$$

$$u = ct - r^*. \quad (2.49b)$$

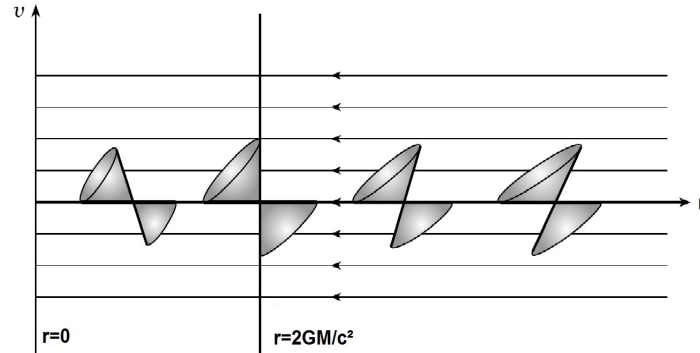


FIG. 2.5 – Les cônes de lumière de Schwarzschild en coordonnées d'Eddington-Finkelstein.

En tenant compte de (2.47), il est clair que les géodésiques des photons se mouvant dans le sens décroissant et croissant de r correspondent respectivement à $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$ En utilisant (2.49a) et (2.48), l'expression de dt en fonction des coordonnées v et r devient

$$cdt = dv - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr.$$

L'ensemble (v, r, θ, ϕ) est appelé coordonnées d'Eddington-Finkelstein. Donc, la métrique de Schwarzschild (2.34) s'écrit en coordonnées d'Eddington-Finkelstein sous la forme [3],[4]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2.$$

Evidemment, notre métrique maintenant n'est plus singulière à $r = 2GM/c^2$, tandis que la singularité réelle $r = 0$ demeure.

Considérons à nouveau les trajectoires radiales des photons. D'après ce qu'on a vu, les équations caractérisant les géodésiques lumières peuvent se réécrire comme suit

$$\frac{dv}{dr} = 0, \tag{2.50}$$

pour les photons se mouvant dans le sens décroissant de r , et

$$\frac{du}{dr} = 0,$$

pour les photons se mouvant dans le sens croissant de r . De l'équation précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} = 0 &\implies \frac{d}{dr}(t - r^*) = \frac{d}{dr}(v - 2r^*) = 0 \\ &\implies \frac{dv}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

On peut utiliser les pentes des trajectoires des photons (2.50) et (2.51) pour tracer les cônes de lumière dans une petite région. La figure 2.5 représente ces cônes de lumière. En relativité, les trajectoires lumières et genre temps dirigées au futur doivent passer à l'intérieur de ces cônes et dans le sens positif de v . D'après cette figure on constate que

- tant que la pente des trajectoires des photons donnée par (2.51) est positive ($r > 2GM/c^2$), les photons dirigés au futur et décrits par cette équation peuvent se mouvoir dans le sens croissant de r .

- Au voisinage de $r = 2GM/c^2$, la pente de ces trajectoires tend progressivement vers l'infini. A $r = 2GM/c^2$, ces photon se trouvent à une coordonnée r fixe.

- A $r < 2GM/c^2$, toutes les trajectoires lumières et genre temps dirigées au futur sont astreint s'orienter vers $r = 0$.

- Il est possible pour les trajectoires lumières et genre temps dirigées au futur de passer de $r > 2GM/c^2$ vers $r < 2GM/c^2$, mais le passage dans le sens inverse est impossible. C'est pour ça qu'on ne peut rien voir à l'intérieur de la surface $r = 2GM/c^2$.

Chapitre 3

La cosmologie Newtonienne

La cosmologie consiste en l'étude de l'Univers à grand échelle, où la gravitation est la seule force dominante. Donc, le contexte approprié pour construire une cosmologie est la relativité générale. Cependant, dans ce chapitre, nous utiliserons la loi de Hubble et la théorie newtonienne pour dériver les équations principales régissant l'évolution de l'Univers. Avant de passer à cette étude, on doit introduire d'abord le principe cosmologique.

3.1 Le principe cosmologique

Du point de vue historique, l'homme a longtemps cru qu'il occupait une place bien particulière dans l'Univers, notamment, le centre de cet Univers. Cette idée, appelé aussi le point de vue anthropocentrique, est connue depuis Ptolémée. Ce dernier a construit un modèle géocentrique pour décrire l'Univers où la lune, le soleil et les autres planètes tournent autour de la Terre. Ce modèle avait résisté jusqu'à l'avènement de Copernic qui l'a rejeté en faveur du point de vue héliocentrique où le soleil se trouve au centre de l'Univers. En s'appuyant sur sa théorie gravitationnelle, Newton a établi une cosmologie en 1691 où il a considéré les étoiles comme des soleils distribuées uniformément dans l'Univers [15]. Néanmoins, Newton s'est rendu compte que son modèle n'était pas approprié : les étoiles dans ce modèle ne pouvaient être stables alors qu'elles étaient considérées stables à son époque. Au 17^{ème} siècle, Herschels a découvert que les étoiles proches ne sont pas uniformément distribuées, mais réunies sous la forme d'un disque appelé Voie Lactée. Herschels pensait aussi que le système solaire se trouve au centre de la galaxie, ce qui s'est avéré incorrect. En effet, Shapley a montré, au début du 20^{ème}, que notre système solaire est plutôt éloigné du centre d'une distance de deux tiers du rayon de la galaxie. Cependant, il considérait que notre galaxie

devait se trouver au centre de l'Univers. Ce n'est qu'en 1952 que le point de vue anthropocentrique a été définitivement rejeté par Baad qui a pu démontrer que la Voie Lactée n'était, en fait, qu'une galaxie parmi une multitude de 10^{11} galaxies formant notre Univers [15]. Les observations actuelles montrent que l'Univers est homogène et isotrope à grandes échelles [16] (à l'ordre de 100 Méga parsecs, où $1\text{ parsec} = 1pc = 3.261 \text{ années lumière} = 3.086 \times 10^{16}m$). Ces deux propriétés représentent le principe cosmologique, le pilier angulaire de la cosmologie.

Le principe cosmologique, connu aussi sous le nom du principe Copernicien, repose sur les deux assertions suivantes [16],[20],[19] :

- L'Univers est homogène, c'est-à-dire que les propriétés physiques sont les mêmes en tous les points de l'Univers.
- L'Univers est isotrope, cela veut dire que, à partir d'un point donné, les propriétés physiques sont les mêmes dans toutes les directions.

Il faut signaler ici que l'une de ces propriétés n'implique pas l'autre. A titre d'exemple, un Univers qui s'étend avec la même vitesse dans une seule direction (en tout point bien sûr) est homogène mais n'est pas isotrope. Par contre, un Univers dont la matière est distribuée de façon sphérique uniforme est isotrope à partir d'un centre, mais il n'est pas nécessairement homogène. Cependant, un Univers qui est isotrope en tout point est homogène.

3.2 Loi de Hubble et l'expansion de l'Univers

En 1924, Edwin Hubble a utilisé le décalage vers le rouge présenté par les galaxies pour obtenir leurs vitesses. Pour chaque galaxies, il a identifié les spectres atomiques et en a déduit le facteur de décalage

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{émise}}{\lambda_{émise}}. \quad (3.1)$$

Hubble a constaté que le facteur de décalage z de chaque galaxie est proportionnel au rayon vecteur \mathbf{r} de cette dernière. En utilisant la loi non relativiste de l'effet Doppler, $v \approx cz$, il a déduit que les vitesses des galaxies sont liées linéairement à leurs rayons vecteur par

$$\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}, \quad (3.2)$$

où H est le paramètre de Hubble. Ce paramètre dépend du temps, et sa valeur actuelle est appelée *constante de Hubble*. La valeur actuelle de cette constante, $H(t_0)$, est [16]

$$H_0 = 70 \pm 7 km s^{-1} Mpc^{-1}. \quad (3.3)$$

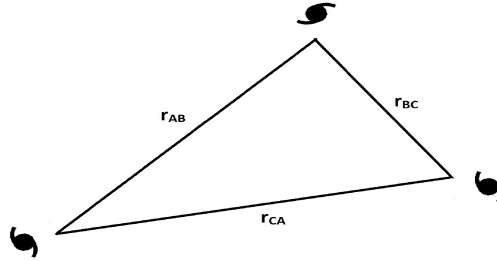


FIG. 3.1 – Dans un Univers homogène et isotrope en expansion, le triangle constitué par ces trois galaxies doit garder la même forme au cours du temps.

L'équation (3.2) est appelée *loi de Hubble*. Le modèle selon lequel l'Univers est stationnaire implique que le mouvement des galaxies est aléatoire. Les observations de Hubble (qui ont été confirmées ultérieurement) révèlent que presque toutes les galaxies observées dans notre Univers manifestent un décalage vers le rouge¹, ce qui signifie que notre Univers subit une expansion et n'est pas stationnaire.

3.2.1 L'expansion homogène et isotrope implique la loi de Hubble

En fait, on peut montrer qu'une expansion (ou même contraction) homogène et isotrope de l'Univers implique la loi de Hubble (3.2). Imaginons trois galaxies situées aux positions r_A , r_B et r_C (voir la figure 3.1). Ces trois galaxies forment un triangle de côtés r_{AB} , r_{BC} et r_{CA} . Donc, si l'Univers subit une expansion homogène et isotrope, ce triangle doit garder sa forme au cours du temps. Cela veut dire que les côtés du triangle, à un instant t , sont donnés par

$$\begin{aligned} r_{AB}(t) &= a(t)r_{AB}(t_0), \\ r_{BC}(t) &= a(t)r_{BC}(t_0), \\ r_{CA}(t) &= a(t)r_{CA}(t_0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ici $a(t)$ est une fonction du temps uniquement qu'on appelle *facteur d'échelle*, tandis que $r(t_0)$ représente le rayon vecteur à l'instant actuelle t_0 . Donc à

¹En fait, les proches galaxies peuvent manifester un décalage vers le bleu, c'est-à-dire qu'elles s'approchent de nous. Cela est dû au fait que le principe cosmologique n'est exacte qu'à grandes échelles.

n'importe quel instant t , un observateur situé à la galaxie A doit voir les deux autres galaxies s'éloigner avec les vitesses

$$v_{AB}(t) = \frac{d}{dt}r_{AB}(t) = \frac{\dot{a}}{a}r_{AB}(t), \quad (3.5a)$$

$$v_{CA}(t) = \frac{d}{dt}r_{CA}(t) = \frac{\dot{a}}{a}r_{CA}(t). \quad (3.5b)$$

Ce n'est que la loi de Hubble à nouveau où, cette fois, le paramètre de Hubble est donné en fonction du facteur d'échelle

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (3.6)$$

De la même façon, on peut montrer que des observateurs situés aux galaxies B ou C voient les autres galaxies s'éloigner avec des vitesses données par la même loi (3.5). Ces galaxies étant arbitraires, un observateur, situé n'importe où dans l'Univers, va voir les galaxies s'éloigner de lui, ce qui en accord avec le principe cosmologique.

Dans le cas générale, le rayon vecteur dans un Univers en expansion (ou contraction) homogène et isotrope est donnée par

$$r(t) = a(t)\chi, \quad (3.7)$$

où χ est appelé *coordonnée comobile*. Le système de coordonnées comobiles est un système de coordonnées qui s'étend au même rythme que l'expansion de l'Univers, de sorte que les coordonnées des galaxies dans ce système restent inchangées (voir la figure 3.2). Dans la suite, on va prendre la position actuelle $r_0 = r(t_0)$ comme coordonnée comobile.

Le facteur d'échelle $a(t)$ caractérise le changement des longueurs physiques au cours du temps dans l'Univers. Autrement dit, il caractérise l'évolution des distances caractérisant les dimensions de l'Univers, les distances intergalactiques, jusqu'aux longueurs d'ondes électromagnétiques.

On a dit précédemment que le principe cosmologique (ou la loi de Hubble) n'est exacte qu'aux grandes échelles. D'une part, la matière n'est uniformément distribuée dans notre Univers qu'à l'échelle de super groupes de galaxies [16]. Effectivement, à partir du système solaire jusqu'à l'échelle des groupes de galaxies, le principe cosmologique n'est pas bien vérifié. D'autre part, la non homogénéité de la distribution de la matière à travers l'Univers (les planètes, les étoiles, les galaxies..) produisent des mouvements particuliers, tel que le mouvement orbital des planètes par exemple, qui gênent l'expansion idéal de l'Univers. On appelle les vitesses associées à ces mouvements *vitesses particulières* [21]. Donc, à grandes échelles où ces vitesses deviennent négligeables devant celles de l'expansion, la loi de Hubble est plus exacte.

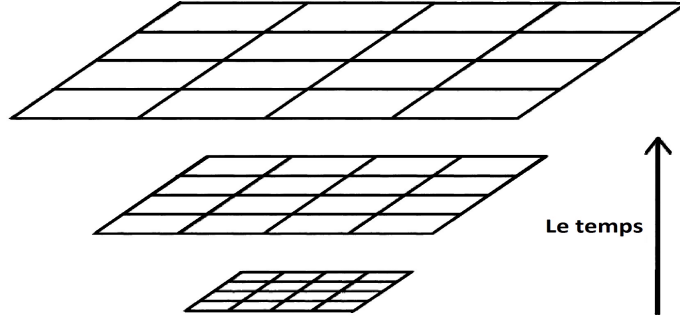


FIG. 3.2 – Le système de coordonnées comobiles.

3.2.2 Le temps et la distance de Hubble

Il est utile de définir ici le temps et la distance de Hubble. Le temps de Hubble, $t_H = H_0^{-1}$, peut nous fournir une estimation grossière de l'âge de l'Univers. Supposons que la vitesse de l'expansion de l'Univers ne dépend pas du temps et que le champ gravitationnel de ses constituants est négligeable. Dans ce cas, le temps nécessaire pour que deux objets, occupant la même position tout au début de l'expansion, se séparent maintenant par une distance de r est $t_0 \approx r/v = H_0^{-1}$. La valeur actuelle de la constante de Hubble donnée dans (3.3) indique que le temps de Hubble est d'environ 14 milliards d'années. On va voir ultérieurement que l'âge de l'Univers prédit par les modèles cosmologiques est au voisinage de cette valeur.

La distance de Hubble est définie par $cH_0^{-1} = 4300 \pm 400 Mpc$. Elle peut être considérée comme étant la distance parcourue par les photons pendant le temps de Hubble. Par conséquent, en supposant que l'âge de l'Univers est égal au temps de Hubble H_0^{-1} , la distance de Hubble nous donne une estimation grossière de la portion visible de notre Univers.

3.3 Dynamique de l'Univers

Dans cette section on se propose de dériver les équations régissant la dynamique de l'Univers en s'appuyant sur la loi de Hubble et la théorie newtonienne. Ce sont les mêmes équations qu'on obtient en résolvant les équations d'Einstein dans le cas relativiste [7].

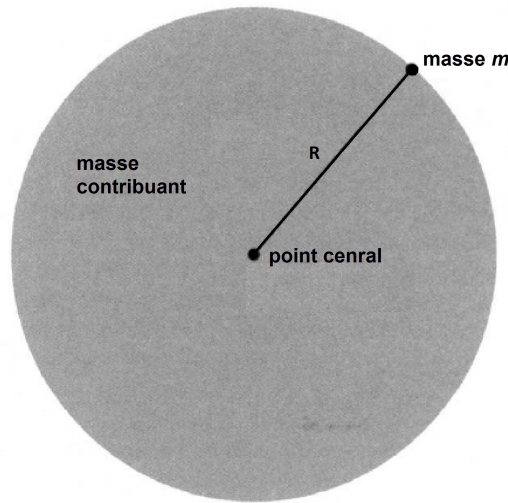


FIG. 3.3 – Une galaxie de masse m dans un milieu de densité ρ . Seulement la matière située à l’intérieur de la sphère du rayon R affecte la galaxie.

3.3.1 L’équation de Friedmann

A grandes échelles, l’Univers est régi par la force gravitationnelle uniquement. Parce que l’Univers est neutre, la force électromagnétique n’a aucun effet, tandis que les forces nucléaires sont des forces à courte portée. D’après Newton, la force gravitationnelle exercée entre deux masses M et m , séparées d’une distance r , est donnée par

$$F = \frac{GMm}{R^2},$$

où G est la constante de la gravitation.

Considérons maintenant l’Univers comme étant un milieu de symétrie sphérique et de densité ρ en expansion uniforme, et les galaxies comme étant des points matériels. Pour calculer la force gravitationnelle exercée par ce milieu sur une galaxie de masse m , situé à une distance R de l’origine, on va utiliser les résultats suivants [24] : (i) la matière située à l’extérieur de la sphère de rayon R n’a aucune contribution à cette force (ii) la contribution de la matière située à l’intérieur de la sphère de rayon R est équivalente à une force exercée par un point matériel de masse $(4/3)\pi R^3\rho$ situé au centre (figure 3.3). Par conséquent, la force totale exercée sur la galaxie vaut

$$F = \frac{4\pi G\rho m}{3}R.$$

L'énergie cinétique et potentielle associées à cette galaxie sont données par

$$U = \frac{1}{2}m\dot{R}^2, \quad V = - \int_{\infty}^R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R},$$

où \dot{R} est la dérivée temporelle de R . Etant donnée que la masse totale de la sphère M est constante, l'expression précédente de l'énergie potentielle devient

$$\begin{aligned} V &= GMm \int_{\infty}^R \frac{dR}{R^2} = -\frac{GMm}{R} \\ &= -\frac{4\pi G\rho m}{3}R^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé $M = (4/3)\pi R^3\rho$ dans la dernière étape. Donc, la conservation de l'énergie de la galaxie permet d'écrire

$$E = U + V = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{4\pi G\rho m}{3}R^2. \quad (3.8)$$

Cette équation ressemble à celle de la particule classique plongée dans un champ attractif central. Donc, si E est positive, c'est à dire si l'énergie cinétique est supérieure à l'énergie potentielle, la distance R s'accroît indéfiniment avec le temps. Par contre, si E est négative, c'est à dire si l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie cinétique, la distance R s'accroît jusqu'à une valeur maximale, après elle décroît. D'après ce qu'on a vu précédemment, cette distance est reliée proportionnellement au facteur d'échelle $a(t)$ qui caractérise l'expansion de l'Univers. Ainsi, suivant le signe de E , l'Univers soit s'étendra indéfiniment, soit se contractera sur lui-même au bout d'un certain temps.

En insérant $R = a(t)r_0$ (où r_0 est la coordonnée comobile) dans la dernière équation et en multipliant par $2/ma^2r_0^2$, on obtient l'équation de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (3.9)$$

$$\text{où} \quad kc^2 = -2E/mr_0^2. \quad (3.10)$$

Bien sur, la quantité k ne doit pas dépendre de r_0 parce que, d'une part, les autres termes sont indépendants de r_0 . D'autre part, si k dépend de r_0 , les solutions de cette équation $a(t)$ et $\rho(t)$ en dépendraient aussi, ce qui serait en contradiction avec le principe cosmologique [17]. De plus, l'énergie totale E étant constante au cours du temps uniquement, si on change de galaxie et, par conséquent, la position comobile r_0 , l'énergie E changera de sorte que

la quantité k soit indépendante de r_0 . On va revenir à l'interprétation de la constante k plus tard.

Définissons maintenant la *densité critique* ρ_c et le *paramètre de densité* Ω [21],[16]

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad \Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}. \quad (3.11)$$

En utilisant ces notations, et en divisant l'équation (3.9) par $H^2 = (\dot{a}/a)^2$, on obtient

$$1 - \Omega = \frac{-k}{a^2 H^2} = \frac{2Ec^2}{\dot{a}^2 m r_0^2}.$$

Il est clair que c'est $\Omega = \rho/\rho_c$ qui détermine le signe de E et la future évolution de l'Univers. Ainsi, selon la valeur de la densité, on peut distinguer trois cas :

- Si $\rho < \rho_c$, l'Univers s'étend indéfiniment : on l'appelle *Univers ouvert*.
- Si $\rho > \rho_c$, l'Univers se contractera à la fin de son expansion ; on l'appelle *Univers fermé*.
- Dans le cas où $\rho = \rho_c$, l'Univers s'étend indéfiniment, mais cette fois la vitesse d'expansion décroît progressivement et tendra vers zéro au futur lointain.

3.3.2 Les équations du fluide et de l'accélération

Pour résoudre l'équation de Friedmann qui contient deux inconnues, a et ρ , on a toujours besoin d'une autre équation. Pour retrouver cette équation, appliquons le premier principe de la thermodynamique à un volume comobile de l'Univers

$$dE = dQ - pdV, \quad (3.12)$$

où dE est le changement de l'énergie interne de ce système, dQ est le flux de chaleur à travers lui, p est la pression, dV est le changement de son volume. D'après l'homogénéité de l'Univers, il n'y pas de flux net de chaleur à travers aucune région, ce qui permet d'écrire $dQ = 0$. Par souci de simplification, considérons ce volume comme étant une sphère de rayon comobile r_0 . Dans ce cas, le volume et l'énergie totale de cette sphère sont respectivement

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} a^3(t) r_0^3,$$

$$E(t) = V(t) \rho c^2,$$

où on a utilisé la relation $E = mc^2$ dans la dernière équation. En substituant ces expressions dans (3.12), et en divisant les deux membres par dt on obtient

l'équation de fluide

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (3.13)$$

D'après cette équation, il y a deux termes qui entraînent la variation de la densité au cours du temps. Le terme $3\dot{a}\rho/a$ est dû à la dilatation de la densité ρ lors de l'augmentation du volume. Le terme $3\dot{a}p/c^2a$ représente l'effet du travail de la pression quand le volume augmente. Il faut rappeler ici que, selon le principe cosmologique, il n'y a pas de force associée à la pression comme il n'y a pas de gradient de pression.

Ainsi, dès qu'une équation d'état, $p = p(\rho)$, est fourni, l'équation de Friedmann et celle de fluide, (3.9) et (3.13), seront suffisantes pour décrire l'évolution de l'Univers.

Avant d'entamer la section suivante, il est utile de dériver l'équation d'accélération. En multipliant l'équation de Friedmann (3.9) par a^2 et en dérivant par rapport au temps, on obtient

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho\dot{a}a).$$

En divisant cette équation par $2\dot{a}a$ et en éliminant $\dot{\rho}$ à partir de (3.13), on obtient *l'équation d'accélération*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \quad (3.14)$$

D'après cette équation, la pression de la matière dans l'Univers décélère l'expansion de l'Univers.

3.4 Les insuffisances de la cosmologie Newtonienne

Malgré que l'approche newtonienne nous ait amené aux mêmes équations obtenues en utilisant la relativité générale [7], elle n'est pas bien cohérente à cause des insuffisances suivantes :

- La vitesse de récession donnée par la loi de Hubble (3.2) pour des objets situés à des distances $r > c/H$ est supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui est en contradiction avec la relativité restreinte.
- Dans la description newtonienne, le décalage vers le rouge est interprété par l'effet Doppler. Dans le cadre de la relativité générale (chapitre suivant), on verra que ce décalage est une conséquence de l'expansion de l'Univers.

- Lors de la dérivation de l'équation de Friedmann, on a supposé que la géométrie de l'Univers est euclidienne (le volume de la sphère est $(4/3)\pi R^3$), ce qui n'est pas nécessairement vrai. Par ailleurs, on a considéré l'Univers comme étant un milieu de symétrie sphérique, ce qui est en contradiction avec le principe cosmologique.

- Pour dériver les équations de fluide et celle d'accélération, on est obligé d'utiliser la relation relativiste $E = mc^2$.

- On a vu que la présence de la pression contribue à l'accélération gravitationnelle des objets dans l'Univers, ce qui n'a pas d'interprétation dans la théorie newtonienne. Cependant, dans le cadre de la relativité générale, ce n'est pas la masse seulement qui contribue au champ gravitationnel, mais plutôt tout le tenseur énergie-impulsion, y compris la pression.

Chapitre 4

La cosmologie relativiste

Le chapitre présent est consacré à l'étude de la cosmologie dans le cadre relativiste. D'abord, on dérivera la métrique cosmologique et on verra les propriétés géométriques de l'Univers. Après, on passera à l'étude des modèles cosmologiques et de l'inflation.

4.1 La métrique cosmologique

Afin d'aborder la cosmologie dans le contexte relativiste, on doit dériver l'expression de la métrique cosmologique. Cette métrique doit satisfaire certainement au principe cosmologique. Dans le cadre de la relativité générale, le principe cosmologique signifie que l'espace-temps est composé d'hypersurfaces $t = \text{const.}$ qui sont homogènes et isotropes [2]. Donc, l'espace-temps est considéré comme étant le produit $R \times \Sigma$, où R représente le temps, tandis que Σ représente les hypersurfaces homogènes et isotropes. Considérons le système de coordonnées (t, r', θ, ϕ) où r', θ et ϕ sont des coordonnées comobiles. En négligeant les vitesses particulières, ça veut dire que chaque galaxie a des coordonnées spatiales (r', θ, ϕ) fixes au cours du temps. Quant à l'origine, on peut choisir n'importe quel point, parce que l'espace est homogène et isotrope.

Cherchons maintenant la composante temporelle de la métrique. Supposons que P est point appartenant à l'hypersurface S correspondant à un certain instant t_1 , et que Q est un point appartenant à l'hypersurface S' correspondant à un instant ultérieur t_2 (figure 4.1). Supposons que ces deux points appartiennent à la géodésique d'un observateur comobile. Etant donné que l'observateur est comobile, les points P et Q ont les mêmes coordonnées spatiales. Cela veut dire que l'intervalle caractérisant cette géodésique est

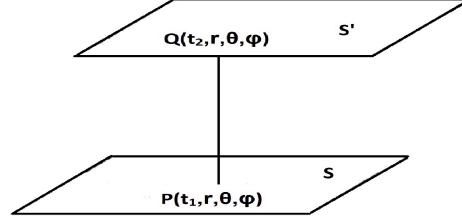


FIG. 4.1 – La géodésique passant par le même point spatial, mais à des instants différents.

donné par

$$ds^2 = -c^2 dt^2,$$

et que t représente le temps propre de cet observateur. Comme l'espace est homogène, t est le temps propre de n'importe quel observateur comobile. Ainsi, la composant temporelle de la métrique cosmologique doit être $g_{tt} = -1$, et l'expression générale de la métrique s'écrit

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2,$$

où l est la distance spatiale.

L'expansion de l'Univers est prise en compte via un coefficient temporel affectant la partie spatial de la métrique

$$dl^2 = \tilde{a}^2(t) h_{ij} dx^i dx^j,$$

où $\tilde{a}(t)$ est le facteur d'échelle, les h_{ij} sont les composantes de la métrique¹ sur l'hypersurface de $t = \text{const}$. Par conséquent, la métrique décrivant un Univers homogène et isotrope en expansion est [2]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt^2 + \tilde{a}^2(t) h_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.1)$$

Exigeons maintenant à cette métrique de satisfaire au principe cosmologique. D'une part, l'Univers doit être isotrope autour de l'origine. Géométriquement, ça veut dire que la métrique doit avoir une symétrie sphérique autour de cette origine. Dans la section concernant la solution de Schwarzschild, on a vu que la partie spatiale d'une métrique ayant une symétrie sphérique s'écrit

$$dl^2 = e^{2\beta(r')} dr'^2 + r'^2 d\Omega^2, \quad (4.2)$$

¹Les indices latins sont réservés pour les composantes spatiales uniquement.

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. D'autre part, l'homogénéité de l'espace exige que le scalaire de Ricci tridimensionnel R_i^i doit avoir la même valeur sur toute l'hypersurface $t = \text{const.}$ [2] (en fait, l'homogénéité exige que n'importe quel scalaire doit être constant sur cette hypersurface). On a vu au premier chapitre que le tenseur de Ricci est lié à celui d'Einstein par

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\lambda_\lambda.$$

En prenant la partie spatiale de cette équation et en multipliant par g^{ij} , on obtient

$$\begin{aligned} G_{ij}g^{ij} &= R_{ij}g^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}g_{ij}R^k_k \\ \Rightarrow G_i^i &= R_i^i - \frac{3}{2}R_i^i \\ \Rightarrow G_i^i &= -\frac{1}{2}R_i^i. \end{aligned}$$

Comme le scalaire de Ricci est proportionnel à celui d'Einstein, on se contentera d'exiger à ce dernier d'être constant [2]. En utilisant les expressions de G_{ij} obtenues pour la métrique de Schwarzschild (2.31) et en mettant $\alpha = 0$ du fait que $g_{tt} = -1$, on obtient

$$\begin{aligned} G_{r'r'} &= \frac{1}{r'^2}(1 - e^{2\beta}), \\ G_{\theta\theta} &= -r'e^{-2\beta}\partial_{r'}\beta, \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2\theta G_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Sachant que les composantes non nulles de la matrice g^{ij} sont

$$g^{r'r'} = e^{-2\beta}, \quad g^{\theta\theta} = r'^{-2}, \quad g^{\phi\phi} = r'^{-2}\sin^{-2}\theta,$$

la trace de ce tenseur est

$$G_i^i = G_{ij}g^{ij} = -\frac{1}{r'^2} [1 - \partial_{r'}(r'e^{-2\beta})].$$

Ainsi, exiger l'homogénéité est équivalent à mettre

$$-3\tilde{k} = -\frac{1}{r'^2} [1 - \partial_{r'}(r'e^{-2\beta})]$$

où \tilde{k} est une constante. L'intégration de cette équation donne

$$e^{2\beta} = g_{r'r'} = \frac{1}{1 - \tilde{k}r'^2 - A/r'},$$

où A est une constante d'intégration. Par ailleurs, la métrique doit être localement plate [2] $g_{r'r'}(r' \rightarrow 0) \rightarrow 1$. Cela implique que $A = 0$ et

$$g_{r'r'} = \frac{1}{1 - \tilde{k}r'^2}.$$

En tenant compte des équations (4.1) et (4.2), la métrique caractérisant un Univers homogène et isotrope en expansion devient

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \tilde{a}^2(t) \left[\frac{dr'^2}{1 - \tilde{k}r'^2} + r'^2 d\Omega^2 \right].$$

Cette métrique est appelée métrique de *Robertson-Walker*. La constante \tilde{k} peut prendre n'importe quelle valeur réelle. En faisant la transformation suivante

$$\begin{aligned} r' &\longrightarrow \bar{r} = \sqrt{|k|}r', \\ \tilde{a}(t) &\longrightarrow a(t) = \tilde{a}(t)/\sqrt{|k|}, \\ \tilde{k} &\longrightarrow k = \tilde{k}/|k|, \end{aligned}$$

la métrique de Robertson-Walker prend la forme

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]. \quad (4.3)$$

où k prend l'une des valeurs 0, 1 ou -1 [2]. On va voir que la valeur de cette constante détermine la géométrie de l'espace. Suivant la valeur prise par k la géométrie de l'Univers est [21]

- $k = +1$, Univers à courbure positive constante : géométrie sphérique.
- $k = -1$, Univers à courbure négative constante : géométrie hyperbolique.
- $k = 0$, Univers à courbure nulle : géométrie plate.

En définissant la nouvelle coordonnée

$$dr^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2}, \quad \text{et } r = 0 \text{ quand } \bar{r} = 0,$$

la métrique (4.3) peut être écrite sous une forme plus compacte [21],[19]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [dr^2 + S^2(r)d\Omega^2], \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \bar{r} &= S(r) = \sin r, & \text{pour } k = +1 \\ \bar{r} &= S(r) = r, & \text{pour } k = 0 \\ \bar{r} &= S(r) = \sinh r, & \text{pour } k = -1 \end{aligned}$$

Dans la suite, on considèrera toujours que la valeur actuelle du facteur d'échelle est $a(t_0) = 1$. Par ailleurs,

4.2 La géométrie de l'Univers

Afin d'examiner la géométrie de l'Univers, calculons d'abord l'expression de la distance propre. D'après la métrique (4.3) et (4.4), la distance propre entre l'origine et une galaxie de coordonnées (\bar{r}, θ, ϕ) à un instant t est

$$d_p = \int_0^{\bar{r}} \sqrt{g^{\bar{r}\bar{r}} d\bar{r}^2} = a(t) \int_0^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}} = a(t)r. \quad (4.5)$$

Dans le cas de la géométrie plate où $k = 0$, cette distance devient

$$d_p = a(t)r = a(t)\bar{r}.$$

En considérant l'instant actuel t_0 où le facteur d'échelle $a(t_0) = 1$, la distance propre est égale à la distance comobile \bar{r} . Par ailleurs, la distance comobile \bar{r} est directement proportionnelle à la distance propre d_p . Ça veut dire que plus on voyage très loin dans l'Univers, plus on atteint des nouvelles distances comobiles \bar{r} et, par conséquent, des nouvelles régions. Ainsi, dans le cas de la géométrie plate, le volume de l'Univers est infini.

Considérons maintenant le cas de la géométrie sphérique où $k = +1$. La géométrie de l'Univers dans ce cas ressemble beaucoup à celle de la sphère habituelle mais à trois dimensions. En mettant $k = +1$, la distance propre (4.5) devient

$$d_p = a(t)r = a(t) \arcsin(\bar{r}) \quad \text{ou} \quad \bar{r} = \sin\left(\frac{d_p}{a(t)}\right).$$

Dans un Univers ayant une géométrie sphérique, imaginons un observateur qui voyage sur une trajectoire radiale. S'il parcourt une distance propre $d_p = a(t)\pi/2$, il atteindra la distance comobile maximale $\bar{r} = 1$. En parcourant une distance propre $a(t)\pi$, il arrive à la position comobile la plus lointaine, de l'autre côté de l'Univers (c'est l'analogue du point antipode dans la sphère habituelle). S'il parcourt une distance propre $a(t)2\pi$, il reviendra au point de départ [16],[15]. Pour cette raison, l'Univers à courbure positive constante est appelé *Univers fermé*. On peut arriver à la même conclusion en calculant à partir de (4.4) la surface qui enferme la tri-sphère centrée à l'origine et ayant un rayon comobile \bar{r}

$$A = 4\pi a^2(t)\bar{r}^2 = 4\pi a^2(t) \sin^2 [d_p/a(t)].$$

Il est clair que cette surface est aussi limitée par la valeur maximale $4\pi a(t)$. Donc, comme cette surface est limitée, le volume qu'elle enferme l'est aussi.

Dans le cas de la géométrie hyperbolique, $k = -1$, la distance propre donnée par l'équation (4.5) est

$$d_p = a(t)r = a(t) \arg \sinh^{-1}(\bar{r}) \quad \text{ou} \quad \bar{r} = \sinh \left(\frac{d_p}{a(t)} \right).$$

Contrairement au cas sphérique, la distance propre dans le cas hyperbolique n'est pas limitée. Ainsi, dans cet Univers, un observateur qui voyage sur une trajectoire radiale ne peut pas revenir au point de départ quel que soit la distance parcourue. De la même façon, la surface qui enferme la tri-sphère dans ce cas est illimitée

$$A = 4\pi a^2(t)\bar{r}^2 = 4\pi a^2(t) \sinh^2 [d_p/a(t)].$$

Cela veut dire que le volume de cet Univers est aussi infini. Pour cette raison, l'Univers à courbure négative constante est appelé *Univers ouvert*.

Dérivons maintenant l'expression de la distance propre par rapport au temps

$$v = \dot{d}_p = \dot{a}(t) \int_0^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}}.$$

En utilisant l'équation (4.5) à nouveau, on retrouve la loi de Hubble dans le cadre relativiste

$$v = \dot{a}(t) \frac{d_p}{a(t)} = H(t)d_p.$$

Cherchons maintenant l'expression de la distance propre en fonction du temps. D'après la théorie de la relativité, la lumière se propage sur des géodésiques lumières. Considérons un rayon lumineux émis d'une galaxie située à $(r, 0, 0)$ à un l'instant t_e , et reçu à l'origine à l'instant t_0 . En utilisant la métrique (4.4), ce rayon est caractérisé par (en considérant une trajectoire radiale)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2 = 0, \\ \Rightarrow r &= c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A partir de cette équation on peut comprendre pourquoi les astronomes disent parfois que les télescopes sont des "machines du temps". Quand on regarde à travers les télescopes, plus on observe des objets distants dans l'Univers (r est grand), plus on les voit tels qu'ils étaient au passé lointain (t_e est plus petit). En insérant l'expression de r dans (4.5), on obtient la distance propre en fonction du temps

$$d_p = ca(t) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (4.7)$$

4.2.1 Horizons de la particule et de l'événement

On définit *l'horizon de la particule* (ou *distance d'horizon*) comme la plus grande distance propre d_{hor} que les photons peuvent traverser durant l'âge de l'Univers [15]. Ainsi, au-delà de cette distance, les photons n'ont pas suffisamment de temps pour nous atteindre. Donc, l'horizon de la particule est obtenu en mettant $t_e = 0$ et $t = t_0$ dans (4.7)

$$d_{hor} = ca(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (4.8)$$

La partie de l'Univers située à l'intérieur de l'horizon de la particule d'un observateur est appelé *l'Univers visible* de cette observateur. La distance comobile correspondant à l'horizon de la particule,

$$r_{hp} = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)},$$

délimite donc le passé cône de lumière (figure 4.2).

De la même façon, *l'horizon d'événement* est défini comme étant la plus grande distance propre d_{he} que doit parcourir un photon émis actuellement pour nous atteindre à un instant t_{max} au futur lointain (figure 4.2). L'expression de l'horizon d'événement est donnée par

$$d_{he} = ca(t_0)r_{he} = ca(t_0) \int_{t_0}^{t_{max}} \frac{dt}{a(t)}.$$

Evidemment, l'horizon de la particule s'accroît progressivement avec le temps jusqu'à coïncider, dans le futur, avec l'horizon d'événement de maintenant.

4.3 Le décalage vers le rouge cosmique

On a vu précédemment que l'expansion de l'Univers affecte toutes les longueurs physiques, y compris les longueurs d'ondes électromagnétiques. On va examiner maintenant la loi de la variation de la longueur d'onde électromagnétique en fonction du facteur d'échelle. En utilisant l'expression de la métrique (4.3), la trajectoire radiale d'un rayon lumineux est donnée par

$$ds^2 = 0 \implies -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} = 0. \quad (4.9)$$

Considérons que ce rayon lumineux a été émis d'une galaxie de coordonnées $(\bar{r}, 0, 0)$ à l'instant t_e , et a été reçu à l'origine à l'instant t_r . En intégrant

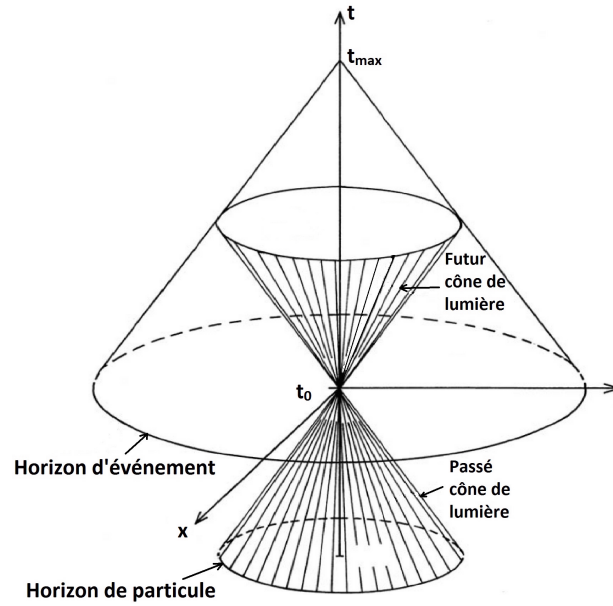


FIG. 4.2 – Les cônes de lumière, l’horizon d’événement et celui de particule dans la géométrie de Robertson-Walker.

l’équation précédente, on obtient

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{\bar{r}}^0 \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}}.$$

Supposons qu’à l’instant $t_e + dt_e$, un autre rayon lumineux a été émis de la même galaxie. Il sera reçu à l’origine à l’instant $t_r + dt_r$. Comme les coordonnées comobiles de cette galaxie restent inchangées, on peut écrire

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{\bar{r}}^0 \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^2}}.$$

Les deux membres droits des deux équations précédentes étant les mêmes, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_r} \frac{cdt}{a(t)} &= \int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{cdt}{a(t)} \\ \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+dt_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_e+dt_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)} \\ \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned}$$

En considérant les intervalles dt_e et dt_r comme étant infinitésimales, l'équation précédente devient

$$\frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_r}{a(t_r)}. \quad (4.10)$$

Si l'Univers subit une expansion, c'est-à-dire $a(t_r) > a(t_e)$, on aura $dt_r > dt_e$. En plus, si on considère les intervalles dt_r et dt_e comme étant les périodes d'une onde électromagnétique, on peut réécrire l'équation précédente en utilisant les longueurs d'onde

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (4.11)$$

En mettant $t_r = t_0$ (l'instant actuel) et en utilisant l'équation (3.1), ce résultat sera relié au décalage z par

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = z + 1 = \frac{1}{a(t_e)}, \quad (4.12)$$

où $a(t_0) = 1$ et λ_0 est la longueur d'onde mesurée à t_0 . C'est l'équation caractérisant le décalage vers le rouge cosmique. En intégrant la loi de Hubble $H = \dot{a}/a$, on obtient

$$\int_a^1 \frac{da}{a} = \int_t^{t_0} H(t) dt$$

$$a(t) = \exp \left[- \int_t^{t_0} H(t) dt \right].$$

En insérant cette expression dans (4.12), on arrive à

$$z + 1 = \exp \left[\int_{t_e}^{t_0} H(t) dt \right]. \quad (4.13)$$

4.4 Mesure de distances

Comme la cosmologie est basée sur l'observation, les astronomes ont trouvé des méthodes pour calculer les distances des objets à partir de leurs propriétés observables.

Pour les distances relativement courtes, telles celles du système solaire par exemple, les astronomes utilisent la réflexion des signaux du radar. Comme ces signaux se propagent avec la vitesse de la lumière, on peut calculer la distance des objets en mesurant le temps écoulé pendant l'émission et la réception de ces signaux. Pour des distances au-delà du système solaire, les astronomes utilisent la méthode de parallaxe trigonométrique parce que, à

ces distances, les signaux de radar deviennent très faibles pour être détectés. Cette méthode se base sur le calcul de la distance en observant l'objet considéré en deux positions différentes [7].

L'utilisation de la méthode de parallaxe trigonométrique est aussi limitée à notre galaxie. Parmi les méthodes utilisées pour les plus grandes distances, les astronomes utilisent la méthode de bougies standards. On appelle bougie standard l'objet astronomique dont la luminosité L est connue [16]. Considérons la Terre comme origine. Dans un espace statique et euclidien, la luminosité L est liée au flux f observé sur la Terre par la loi du carré inverse[16]

$$f = \frac{L}{4\pi d_L^2}, \quad (4.14)$$

où d_L est la distance de la Terre à la bougie standard. Cette formule peut être réécrite sous la forme

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

Cette fonction est appelé *distance de luminosité*. C'est la distance propre de la bougie standard si l'espace était statique et plat. Cependant, dans un espace décrit par la métrique de Robertson-Walker, la relation entre la luminosité et le flux est différente à cause de deux raisons. Premièrement, la surface totale du flux, $4\pi a^2(t)S_k^2(r)$, dépend de la géométrie de l'espace et n'est pas toujours $4\pi a^2(t)r^2$ (cas de l'espace plat). En plus, l'expansion de l'Univers réduit le flux de la bougie standard par un facteur de $(1+z)^{-2}$ pour les deux raisons suivantes

- D'une part, au moment de l'émission des photons par la bougie standard leur énergie a été $E_e = hc/\lambda_e$. Au moment de la réception, la longueur d'onde de ces photons devient d'après (4.11)

$$\lambda_r = \frac{1}{a(t_e)}\lambda_e = (z+1)\lambda_e, \quad (4.16)$$

et donc l'énergie des photons se réduit à

$$E_r = \frac{hc}{\lambda_r} = \frac{E_e}{(z+1)}.$$

- D'autre part, le flux est l'énergie apportée par les photons traversant une unité de surface pendant une unité de temps. Considérons deux photons successifs émis par la source et séparés par une durée dt_e . D'après l'équation (4.10), la durée séparant ces deux photons, au moment de la réception,

s'accroît par

$$dt_r = \frac{dt_e}{a(t_e)} = (z + 1)dt_e.$$

Cela veut dire que le flux des photons se réduit par un facteur de $(z + 1)$.

Donc, dans un Univers décrit par la métrique de Robertson-Walker, la luminosité et le flux observé sont reliés par

$$f = \frac{L}{4\pi a_0^2 S_k^2(r) (1 + z)^2}.$$

D'après cette équation et l'équation (4.14), la distance de luminosité est donnée par

$$d_L = a_0 S_k(r) (1 + z). \quad (4.17)$$

En considérant que l'Univers est plat, la distance de luminosité est liée avec la distance propre par

$$d_L = a_0 r (1 + z) = d_p (1 + z), \quad \text{pour } k = 0.$$

Cela signifie que, même dans un Univers plat, l'utilisation de la loi du carré inverse ne donne pas la distance propre de la bougie standard, mais donne une surestimation de cette distance par un facteur de $(1 + z)$. Autrement dit, ces bougies standards apparaissent plus lointaines qu'elles le sont en réalité.

4.5 Dynamique de l'Univers

Dans cette section, on dérivera l'équation de Friedmann en appliquant les équations d'Einstein à la métrique cosmologique (4.3). Les composantes non nulles de cette métrique sont

$$g_{tt} = -1, \quad g_{\bar{r}\bar{r}} = a^2(t) \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t) \bar{r}^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t) \bar{r}^2 \sin^2 \theta. \quad (4.18)$$

Les composantes non nulles des symboles de Christoffel sont [3]

$$\Gamma_{\bar{r}\bar{r}}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - k\bar{r}^2}, \quad \Gamma_{rr}^{\bar{r}} = \frac{k\bar{r}}{1 - k\bar{r}^2}, \quad (4.19a)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}\bar{r}^2, \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}\bar{r}^2 \sin^2 \theta, \quad (4.19b)$$

$$\Gamma_{t\bar{r}}^{\bar{r}} = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.19c)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\bar{r}} = -\bar{r} (1 - k\bar{r}^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\bar{r}} = -\bar{r} (1 - k\bar{r}^2) \sin^2 \theta, \quad (4.19d)$$

$$\Gamma_{\bar{r}\theta}^\theta = \Gamma_{\bar{r}\phi}^\phi = \frac{1}{\bar{r}}, \quad (4.19e)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (4.19f)$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci correspondant à cette métrique sont [3]

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{c^2 a}, \quad (4.20a)$$

$$R_{ii} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{kc^2}{a^2} \right) g_{ii}, \quad (4.20b)$$

tandis que le scalaire de Ricci est [3]

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right].$$

Par ailleurs, l'Univers étant considéré comme un fluide parfait, le tenseur d'énergie-impulsion correspondant s'écrit [15]

$$T_{\mu\nu} = (p + \varepsilon) \frac{U_\mu U_\nu}{c^2} + p g_{\mu\nu},$$

où p est la pression, ε est la densité d'énergie et U^μ est le quadrivecteur vitesse. Pour un observateur comobile, on a $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Donc, en utilisant (4.18), les composantes non nulles du tenseur d'énergie-impulsion seront [3]

$$T_{tt} = \varepsilon, \quad T_{ii} = p g_{ii}. \quad (4.21)$$

Insérons maintenant le tenseur de Ricci et celui d'énergie-impulsion dans les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

En utilisant (4.20) et (4.21), la composante temporelle des équations d'Einstein donne

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (4.22)$$

Ce n'est que l'équation de Friedmann. La composante spatiale donne

$$-2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} p.$$

En utilisant l'équation de Friedmann (4.22) pour éliminer $(\dot{a}/a)^2$, la dernière équation devient

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3p). \quad (4.23)$$

C'est l'équation d'accélération. Pour obtenir l'équation de fluide, dérivons l'équation de Friedmann

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{c^2} (\dot{\varepsilon}a^2 + 2\varepsilon\dot{a}a).$$

En divisant cette équation par $2\dot{a}a$ et en utilisant (4.23) pour éliminer \ddot{a}/a , on arrive à

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0, \quad (4.24)$$

qui n'est que l'équation de fluide. L'équation de Friedmann (4.22), d'accélération (4.23) et celle de fluide (4.24) sont les mêmes équations obtenues en suivant l'approche newtonienne dans le chapitre précédent sauf qu'il faut remplacer la densité de la masse $\rho(t)$ par la densité d'énergie $\varepsilon(t)/c^2$. Effectivement, dans le cadre de la relativité générale, il n'y a pas seulement la masse qui contribue au champ gravitationnel, mais plutôt toutes les types d'énergies, y compris l'énergie de rayonnement par exemple.

4.6 Modèles cosmologiques à composante unique

4.6.1 Les constituants de l'Univers

Aujourd'hui, il y a un grand consensus que notre Univers est composé de trois composantes : le rayonnement, la matière et l'énergie noire qui est représentée par la constante cosmologique. La première composante, le rayonnement, est formée à son tour de deux constituants principaux : le fond cosmique micro-onde et les neutrinos cosmiques. Le fond cosmique micro-onde, appelé parfois rayonnement fossile, est un rayonnement de corps noir à une température de $T_0 = 2.725 \pm 0.001K$ [20],[15]. C'est un rayonnement isotrope qui est supposé d'être formé quand l'Univers était extrêmement dense et chaud. Quant aux neutrinos cosmiques, ils n'ont pas encore été détectés. La deuxième composante de notre Univers, la matière, est aussi formé de deux constituants : la matière baryonique (composé principalement d'hydrogène et d'hélium) et la matière noire, appelé aussi matière non baryonique. Malgré que toutes les structures habituelles de l'Univers (galaxies, étoiles,..) soient formées de matière baryonique, cette dernière ne fait que 4% de la densité d'énergie totale de l'Univers. La majeure partie de la matière dans notre Univers est sous forme de matière noire, faisant environ 25% de la densité d'énergie totale. Ainsi, la densité totale d'énergie dans l'Univers est dominée par la troisième composante, l'énergie noire [34], avec une contribution de $\sim 70\%$.

4.6.2 Les équations principales

En relativité générale, les équations principales décrivant un Univers isotrope et homogène sont l'équation de Friedmann

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (4.25)$$

l'équation de fluide

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0, \quad (4.26)$$

et l'équation d'état

$$p = \omega\varepsilon,$$

où p est la pression et ω est le paramètre de l'équation d'état. La pression d'un fluide est due aux mouvements aléatoires des particules de fluide. Pour la matière non relativiste, les galaxies sont supposées comme étant les particules de fluide. Comme les vitesses des galaxies sont non relativistes et les collisions entre elles sont très rares, la pression qu'elles exercent est très négligeable devant leur densité d'énergie. Ainsi, avec une bonne approximation, la contribution p_m à la pression de la composante "matière" est nulle

$$p_m = 0 \Rightarrow \omega_m = 0, \quad \text{matière.}$$

D'après la physique statistique, l'équation d'état d'un gaz de particules relativistes est

$$p_r = \frac{1}{3}\varepsilon_r \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{3}, \quad \text{rayonnement.}$$

où l'indice r se rapporte au rayonnement.

L'idée de la constante cosmologique Λ remonte à Einstein lorsqu'il pensait que l'Univers était statique, avant la découverte de l'expansion de l'Univers [16]. Il a ajouté le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ au membre droit des équations d'Einstein pour avoir une solution statique. Dans ce cas, l'équation de Friedmann devient [15]

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}.$$

En supposant un Univers qui ne contient que de la constante cosmologique, cette équation devient

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_\Lambda - \frac{kc^2}{a^2},$$

avec $\varepsilon_\Lambda(t) = \varepsilon_{\Lambda,0} = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda,$

où l'indice Λ se rapporte à la constante cosmologique (l'énergie noire). Evidemment, la densité ε_Λ est constante au cours du temps. En mettant $\dot{\varepsilon} = 0$ dans l'équation de fluide (4.26), on obtient l'équation d'état de la constante cosmologique

$$p_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda \Rightarrow \omega_\Lambda = -1, \quad \text{l'énergie noire.}$$

Les physiciens pensent que la densité d'énergie ε_Λ est positive, ce qui implique une pression négative. D'après l'équation de l'accélération, si la pression fournie par l'énergie noire est négative, elle accélèrera l'expansion de l'Univers, contrairement à l'effet attractif de la matière habituelle.

Dans le chapitre précédent, on a vu que l'équation de Friedmann peut aussi prendre la forme

$$1 - \Omega = \frac{-k}{a^2 H^2}, \quad (4.27)$$

$$\text{où} \quad \Omega(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}, \quad \varepsilon_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (4.28)$$

D'après cette équation, lorsque l'Univers est plat ($k = 0$), la densité totale ε est égale à la densité critique ε_c . Les inconnues à chercher dans ces équation sont le facteur d'échelle $a(t)$, la densité d'énergie $\varepsilon(t)$ et la pression $p(t)$. Par souci de simplification, on va supposer que la densité ε_ω et la pression p_ω pour les différentes composantes de l'Univers sont additives. De ce fait, l'équation de fluide doit être satisfaisante par chacune des composantes séparément [16]

$$\dot{\varepsilon}_\omega + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_\omega + p_\omega) = 0, \quad (4.29)$$

$$\text{et} \quad p_\omega = \omega\varepsilon_\omega \quad (4.30)$$

En substituant la deuxième équation dans la première on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\omega + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega)\varepsilon_\omega &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\varepsilon_\omega}{\varepsilon_\omega} &= -3(1 + \omega)\frac{da}{a} \\ \Rightarrow \varepsilon_\omega(a) &= \varepsilon_{\omega,0}a^{-3(1+\omega)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

où on a adopté la normalisation $a_0 = 1$. L'indice "0" se réfère à la valeur actuelle de la densité $\varepsilon_\omega(t_0)$. Ainsi, les densités des trois composantes de l'Univers sont

$$\varepsilon_r(a) = \varepsilon_{r,0}/a^4, \quad \text{pour le rayonnement.} \quad (4.32a)$$

$$\varepsilon_m(a) = \varepsilon_{m,0}/a^3, \quad \text{pour la matière.} \quad (4.32b)$$

$$\varepsilon_\Lambda(a) = \varepsilon_{\Lambda,0} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda, \quad \text{pour la constante cosmologique.} \quad (4.32c)$$

Dans le cas général, la densité est proportionnelle à a^{-3} , c'est le cas de la matière. Pour le rayonnement, la densité se réduit davantage du fait de l'expansion de l'Univers ($E_{\text{photon}} = hc/\lambda \sim 1/a$). Quant à la constante cosmologique, la densité est constante au cours du temps.

Ainsi, on a une idée, même grossière, sur les stades principale de l'évolution de notre Univers. Les équations (4.32) montrent qu'aux premiers stades de l'âge de l'Univers, lorsque $a \rightarrow 0$, c'est le rayonnement qui l'emporte sur les autres composantes. Lorsque $a \rightarrow \infty$, c'est la constante cosmologique qui l'emporte. Entre ces deux limites, il y a une phase intermédiaire où la matière est la composante dominante.

La composante relativiste dans l'Univers est formée des photons du fond cosmique micro-onde² et des neutrinos cosmiques. Effectivement, les physiciens pensent qu'il y a un fond cosmique de neutrino créé aux premiers instants du Big Bang³, de la même façon que le fond cosmique micro-onde [16]. En considérant les neutrinos comme relativistes, les paramètres de la densité du fond cosmique micro-onde et des neutrinos cosmiques sont données par [16]

$$\begin{aligned}\Omega_{fcm,0} &= \frac{\varepsilon_{fcm,0}}{\varepsilon_c} = 5,0 \times 10^{-5}, \\ \Omega_{\nu,0} &= \frac{\varepsilon_{\nu,0}}{\varepsilon_c} = 0,681\Omega_{fcm,0} = 3,4 \times 10^{-5}.\end{aligned}$$

De cette façon, le paramètre actuel de la densité du rayonnement est donné par

$$\Omega_{r,0} = \Omega_{fcm,0} + \Omega_{\nu,0} = 8,4 \times 10^{-5}. \quad (4.33)$$

Contrairement à la densité du fond cosmique micro-onde, la densité de la matière et celle de la constante cosmologique ne sont connues avec une telle précision. Les évidences disponibles indiquent que le paramètre de la densité de la matière et celui de la constante cosmologique sont [16]

$$\Omega_{m,0} = \frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_c} \sim 0,3, \quad (4.34)$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_c} \sim 0,7. \quad (4.35)$$

En observant (4.33), (4.34) et (4.35), on constate que

$$\Omega_0 \equiv \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} \approx 1.$$

²Malgré qu'il y ait des photons créés par le soleil et les étoiles qui remplissent l'univers, les photons de fond cosmique micro-onde sont tellement nombreux qu'ils soient considérés comme étant la seule contribution au rayonnement.

³Contrairement au fond cosmique micro-onde, les neutrinos cosmiques n'ont pas encore été observés parce que la technologie courante ne permet de détecter que les neutrinos les plus énergétiques.

Compte tenu de (4.27), on voit que $k = 0$. De ce fait, le modèle cosmologique possédant un espace plat et des paramètres de densité ayant les valeurs ci-dessus est appelé *modèle de référence* [16].

Par conséquent, dans le modèle de référence considéré actuellement, la constante cosmologique l'emporte sur les autres composantes. En utilisant (4.32c) et (4.32b), le rapport de la densité de la constante cosmologique à celle de la matière est

$$\frac{\varepsilon_{\Lambda}(a)}{\varepsilon_m(a)} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} a^3.$$

Cela veut dire que si l'Univers a subi une expansion à partir d'un état initial très dense, il y avait un certain moment où la densité de la constante cosmologique et celle de la matière étaient égales. En mettant la dernière équation égale à un, on obtient le facteur d'échelle correspondant [16]

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \approx 0,75. \quad (4.36)$$

Actuellement, dans le modèle de référence, la matière l'emporte fortement sur le rayonnement. En utilisant (4.32b) et (4.32a), le rapport entre la densité de la matière et celle du rayonnement est

$$\frac{\varepsilon_m(a)}{\varepsilon_r(a)} = \frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{r,0}} a.$$

Donc, le facteur d'échelle correspondant à l'égalité matière-rayonnement est

$$a_{rm} = \frac{\varepsilon_{r,0}}{\varepsilon_{m,0}} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \approx 2,8 \times 10^{-4}. \quad (4.37)$$

Ainsi, en résolvant l'équation de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3} + \frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4} + \varepsilon_{\Lambda} \right) - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (4.38)$$

on obtient l'expression du facteur d'échelle et de la densité d'énergie en fonction du temps. Cela nous permettra, par conséquent, de déterminer toutes les autres caractéristiques de l'Univers. Cependant, l'équation de Friedmann étant complexe à résoudre, on va l'examiner pour chacune des composantes séparément. Ceci nous donnera un aperçu sur l'effet de chacune de ces composantes sur l'évolution de l'Univers.

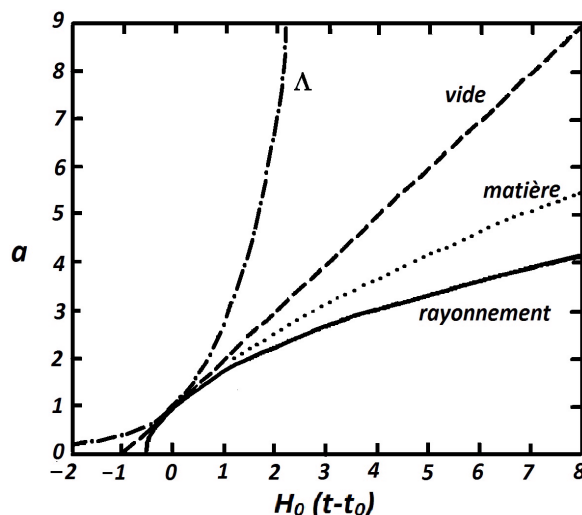


FIG. 4.3 – Le facteur d'échelle en fonction du temps : • pour un univers vide en expansion (en tirets) • univers plat à matière (pointillée) • univers plat à rayonnement (continue) • univers plat à constante cosmologique (en point-tirets).

4.6.3 Univers à courbure uniquement

Considérons un Univers vide où il n'y a ni matière, ni rayonnement ni constante cosmologique. L'équation de Friedmann (4.38), dans ce cas, prend la forme

$$\dot{a}^2 = -kc^2.$$

Ce modèle fournit une bonne approximation pour un Univers où la densité totale Ω est très faible. Pour $k = 0$, on a $\dot{a} = 0$, c'est un Univers statique et plat. Pour $k = +1$, il n'y a pas de solutions physiques. Pour $k = -1$, on a $\dot{a} = \pm c$. L'équation correspondante à un Univers en expansion est $\dot{a} = +c$. La solution est

$$a = ct,$$

où on a supposé qu'à $t = 0$, on a $a = 0$. A l'instant actuel t_0 , on a donc $a(t_0) = a_0 = ct_0$. De ce fait, on a $a/a_0 = t/t_0$. Avec le choix $a_0 = 1$, on obtient

$$a(t) = \frac{t}{t_0}. \quad (4.39)$$

Dans la figure 4.3, ce facteur d'échelle est représenté par la ligne en tirets. Comme il n'y a pas de force pour ralentir ou accélérer l'expansion de l'Univers, l'âge de ce dernier t_0 est égale au temps de Hubble H_0^{-1} . En utilisant l'équation (4.12) reliant le décalage vers le rouge et le facteur d'échelle, on peut connaître le moment t_e de l'émission des photons arrivant d'une galaxie ayant un décalage vers le rouge z

$$\begin{aligned} z + 1 &= \frac{1}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e} \\ \Rightarrow t_e &= \frac{t_0}{1+z} = \frac{H_0^{-1}}{1+z}. \end{aligned}$$

En utilisant (4.7) et (4.39), une galaxie ayant un décalage vers le rouge de z est située maintenant à une distance propre

$$\begin{aligned} d_p(t_0) &= c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = ct_0 \ln [a^{-1}(t_e)] \\ \Rightarrow d_p(t_0) &= \frac{c}{H_0} \ln(1+z). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{d_p(t_0)}{d_p(t_e)} = \frac{a(t_0)r}{a(t_e)r} = \frac{1}{a(t_e)}.$$

En utilisant (4.12), on obtient

$$d_p(t_e) = d_p(t_0)a(t_e) = \frac{d_p(t_0)}{1+z}.$$

Ainsi, au moment de l'émission des photons, la distance de cette galaxie a été

$$d_p(t_e) = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = \frac{c}{H_0} \frac{\ln(1+z)}{1+z}.$$

4.6.4 Univers à espace plat

Pour un Univers à espace plat et à une seule composante, on a (l'équation (4.27))

$$k = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\omega,0} = \varepsilon_{c,0},$$

où $\varepsilon_{c,0}$ est la densité critique à l'instant t_0 . Dans ce cas, en utilisant (4.31), l'équation de Feidmann (4.25) devient

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \varepsilon_{\omega,0}}{3c^2} a^{-(1+3\omega)}. \quad (4.40)$$

En mettant $t = t_0$ dans cette équation, la constante de Hubble correspondant à cet Univers est

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_{\omega,0}}{3c^2} \right)^{1/2},$$

où on a utilisé le fait que $a(t_0) = 1$. En utilisant la méthode de séparation de variables, la solution de l'équation (4.40) correspondant à un Univers en expansion est

$$a(t) = \left[\frac{3 + 3\omega}{2} \sqrt{\frac{8\pi G \varepsilon_{\omega,0}}{3c^2}} \right]^{2/(3+3\omega)} t^{2/(3+3\omega)} + \alpha_0,$$

où α_0 est une constante d'intégration. En supposant que $a(t = 0) = 0$, on obtient $\alpha_0 = 0$ et la solution sera

$$a(t) = \left[\frac{3 + 3\omega}{2} \sqrt{\frac{8\pi G \varepsilon_{\omega,0}}{3c^2}} \right]^{2/(3+3\omega)} t^{2/(3+3\omega)}, \quad \text{avec } \omega \neq -1. \quad (4.41)$$

Sachant qu'à l'instant t_0 on a $a(t_0) = 1$, l'âge de l'Univers t_0 est

$$t_0 = \frac{1}{1 + \omega} \left(\frac{c^2}{6\pi G \varepsilon_{\omega,0}} \right)^{1/2} = \frac{2}{3(1 + \omega)} H_0^{-1}, \quad (4.42)$$

et l'expression du facteur d'échelle devient

$$a(t) = (t/t_0)^{2/(3+3\omega)}, \quad \text{avec } \omega \neq -1. \quad (4.43)$$

D'après la dernière équation, on constate que si $\omega > -1/3$, l'âge de l'Univers est plus petit que le temps de Hubble H_0^{-1} . Si $\omega < -1/3$, l'âge de l'Univers est plus grand que H_0^{-1} . L'expression du facteur d'échelle étant connue, on peut utiliser l'équation (4.31) pour obtenir l'expression de la densité en fonction du temps

$$\varepsilon_{\omega}(t) = \varepsilon_{\omega,0} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} = \frac{c^2}{6\pi G(1 + \omega)^2} t^{-2}. \quad (4.44)$$

En utilisant (4.12) et (4.43), le moment d'émission des photons ayant aujourd'hui un facteur de décalage z est

$$t_e = \frac{t_0}{(1 + z)^{3(1+\omega)/2}} = \frac{2}{3(1 + \omega)H_0} \frac{1}{(1 + z)^{3(1+\omega)/2}}, \quad (4.45)$$

tandis que la distance propre actuelle de la source de ces photons est

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = ct_0 \frac{3(1 + \omega)}{1 + 3\omega} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{(1+3\omega)/3(1+\omega)} \right], \quad \text{avec } \omega \neq \frac{-1}{3}. \quad (4.46)$$

En substituant t_0 et t_e à partir de (4.42) et (4.45), on obtient $d_p(t_0)$ en termes de H_0 et z

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3\omega} [1 - (1+z)^{-(1+3\omega)/2}], \quad \text{avec } \omega \neq \frac{-1}{3}. \quad (4.47)$$

Dans le cas d'un Univers qui s'étend continuellement, le facteur d'échelle est une fonction croissante du temps. Pour cela, les physiciens et les astronomes utilisent parfois le facteur d'échelle a (ou même le décalage vers le rouge z car $a(t_e) = 1/(1+z)$) au lieu du temps t .

On a défini l'horizon de la particule comme étant la plus grande distance parcourue par des photons émis à $t = 0$ et qui pourraient nous atteindre en ce moment. On peut obtenir l'horizon de la particule en mettant $t_e \rightarrow 0$ dans (4.46) (ou $z \rightarrow \infty$ dans (4.47))

$$d_{hor}(t_0) = ct_0 \frac{3(1+\omega)}{1+3\omega} = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3\omega}, \quad \text{avec } \omega > -1/3 \quad (4.48)$$

Malgré que l'Univers plat soit infini, on ne peut voir qu'une portion de cet Univers. On appelle souvent cette portion *l'Univers visible*⁴. Par ailleurs, en mettant $t_e \rightarrow 0$ dans (4.46) avec $-1 < \omega < -1/3$, l'horizon de la particule tend vers l'infini, et par conséquent tous les points de l'Univers sont visible.

4.6.5 Univers à matière uniquement

Considérons maintenant un Univers plat qui ne contient que de la matière ($\omega = 0$). Cet Univers est appelé aussi l'Univers d'*Einstein-de Sitter* [20],[19]. On va utiliser les résultats obtenus dans la section précédente. En mettant $\omega = 0$ dans les équations (4.43) et (4.42), l'expression du facteur d'échelle et celle de l'âge de l'Univers dans ce modèle sont

$$a_m = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (4.49)$$

et $t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}$.

Le facteur d'échelle correspondant à ce modèle est représenté dans la figure 4.3 par la ligne pointillée. D'après (4.48), l'horizon de la particule est

$$d_{hor}(t_0) = 2 \frac{c}{H_0}.$$

⁴En fait, si les photons interagissent avec d'autres particules pendant leur trajet, l'univers visible est plus petit que l'horizon particule d_{hor} .

En utilisant (4.47), la distance propre actuelle d'une galaxie ayant un décalage vers le rouge de z est

$$d_p(t_0) = \frac{2c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right].$$

Au moment de l'émission, cette distance était

$$d_p(t_e) = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = \frac{2c}{H_0(1+z)} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]. \quad (4.50)$$

La distance $d_p(t_e)$ de la galaxie la plus lointaine à l'instant t_e s'obtient en cherchant la valeur maximale de l'expression (4.50). On trouve donc $d_p(t_e) = (8/27)c/H_0$, ce qui correspond à la valeur $z = 5/4$.

4.6.6 Univers à rayonnement uniquement

L'importance de ce modèle réside dans le fait que le rayonnement a été la composante dominante dans l'Univers aux premiers stades de son évolution, longtemps avant l'égalité rayonnement-matière. En mettant $\omega = 1/3$ dans les équations de la section des Univers plats, le facteur d'échelle et l'âge de l'Univers dans ce modèle sont respectivement

$$\begin{aligned} a(t) &= (t/t_0)^{1/2}, \\ t_0 &= (1/2)H_0^{-1}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Par conséquent, le paramètre de Hubble est

$$H(t) = 1/(2t). \quad (4.52)$$

Le facteur d'échelle correspondant à ce modèle est représenté dans la figure 4.3 par la ligne continue. L'horizon de la particule de ce modèle est exactement égal à la distance de Hubble

$$d_{hor}(t_0) = \frac{c}{H_0}$$

Dans un Univers contenant uniquement du rayonnement, une galaxie ayant un décalage vers le rouge z est située maintenant à une distance

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}.$$

A l'instant t_e , cette distance a été égale à

$$d_p(t_e) = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(1+z)^2}.$$

Au moment de l'émission, la plus lointaine galaxie s'est située à $d_p(t_e) = c/4H_0$. Elle a maintenant un décalage vers le rouge de $z = 1$.

4.6.7 Univers à constante cosmologique uniquement

Examinons maintenant le dernier cas, le cas d'un Univers plat à constante cosmologique [32]. Cet Univers s'appelle aussi Univers de *de Sitter* [21],[15]. L'équation de Friedmann (4.38) devient

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_\Lambda a^2 = H_0^2 a^2, \\ \text{avec } H_0 &= \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_\Lambda}{3c^2} \right)^{1/2}, \\ \text{et } \varepsilon_\Lambda(a) &= \varepsilon_{\Lambda,0} = \frac{3c^2}{8\pi G} \Lambda, \end{aligned}$$

où ε_Λ ne dépend pas du temps. Pour un Univers en expansion ($\dot{a} > 0$), l'équation de Friedmann donne

$$\begin{aligned} \dot{a} &= +H_0 a \Rightarrow \int_1^a \frac{da}{a} = \int_{t_0}^t H_0 dt \\ \Rightarrow a &= a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

En supposant que l'Univers a commencé l'expansion d'un état extrêmement dense ($a \rightarrow 0$ à $t \rightarrow 0$), on déduit que l'âge de l'Univers t_0 dans ce modèle est infini. Le facteur d'échelle correspondant à ce modèle est représenté dans la figure 4.3 par la ligne en point-tirets. Quant aux distances propres dans ce modèle, une galaxie ayant un décalage vers le rouge de z est située maintenant à une distance propre

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{c}{H} (\exp[H_0(t_0 - t_e)] - 1) = \frac{c}{H_0} z,$$

où la relation (4.12) a été utilisé. La distance au moment de l'émission était

$$d_p(t_e) = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}.$$

Pour une galaxie ayant $z \rightarrow \infty$, la distance propre actuelle $d_p(t_0)$ tend vers l'infini. Cependant, au moment de l'émission, la distance de cette galaxie a été d'environ $d_p(t_e) = c/H_0$. A un instant $t > t_e$, une telle galaxie dépasse la distance de Hubble c/H_0 et sa vitesse de récession devient plus grande que celle de la lumière. Par conséquent, les photons envoyés par cette galaxie ne seront plus capables de nous atteindre. Effectivement, ce qu'on voit maintenant sont les photons envoyé avant de dépasser la distance c/H_0 . En

mettant $t_e \rightarrow 0$ dans l'expression de $d_p(t_0)$ ci-dessus, on obtient l'horizon de la particule

$$d_{hor}(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{c}{H_0} [\exp(H_0 t_0) - 1].$$

Comme l'âge de l'Univers $t_0 \rightarrow \infty$, l'horizon de la particule, $d_{hor}(t_0)$, tend aussi vers l'infini.

4.7 Modèles cosmologiques à plusieurs composantes

Considérons l'équation (4.27) à l'instant actuelle t_0

$$-kc^2 = H_0^2(1 - \Omega_0), \quad (4.54)$$

où

$$\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (4.55)$$

En utilisant l'équation (4.54) dans (4.38), on obtient

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3} + \frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4} + \varepsilon_{\Lambda} \right) + \frac{H_0^2}{a^2} (1 - \Omega_0).$$

En divisant cette équation par H_0^2 et en utilisant la définition

$$\Omega_{i,0} = \frac{\varepsilon_{i,0}}{\varepsilon_{c,0}}, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G},$$

l'équation de Friedmann prend la forme utile suivante [16]

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}. \quad (4.56)$$

On a vu précédemment que l'équation de Friedmann est très compliquée à résoudre analytiquement. Dans la section précédente, en considérant les époques où l'Univers a été dominé par une seule composante, on a pu trouver des solutions analytiques simples. Cependant, à d'autres époques, par exemple celle de l'égalité rayonnement-matière ($a_{rm} \approx 2.8 \times 10^{-4}$) ou celle de l'égalité matière-constante cosmologique ($a_{m\Lambda} \approx 0.75$), on est obligé de prendre deux composantes en considération. Dans la suite, on va voir quelques exemples d'Univers à plusieurs composantes.

4.7.1 Univers à matière et à courbure

Pour un Univers d'espace courbe et à matière uniquement, l'équation de Friedmann ci-dessus devient

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}, \quad \text{avec } \Omega_0 = \Omega_{m,0}. \quad (4.57)$$

Le premier terme du membre droit de cette équation est positif tandis que le deuxième peut être négatif ou positif. Selon le signe du deuxième terme, on peut distinguer deux destins différents pour cet Univers.

Dans le cas où $\Omega_0 > 1$ (et par conséquent $k = +1$), le membre droit de l'équation (4.57) s'annule à un certain moment, ce qui donne $H = \dot{a}/a = 0$. Cela veut dire que l'expansion de l'Univers s'arrêtera à une valeur maximale a_{\max} , puis il entre une phase de contraction. En mettant $H = 0$ dans l'équation (4.57), on obtient la valeur maximale atteinte par le facteur d'échelle

$$a_{\max} = \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0}.$$

Donc, si $\Omega_0 > 1$, l'Univers à courbure+matière s'étend jusqu'à a_{\max} , puis il se contractera jusqu'à $a(t_{\text{effond}}) = 0$, après un temps fini t_{effond} . Ce destin est appelé parfois le "Grand Effondrement" (Big Crunch) [16].

Dans le cas contraire, si $\Omega_0 < 1$ et par suite $k = -1$, le deuxième membre de l'équation (4.57) est toujours positif et $H = \dot{a}/a$ ne s'annule jamais. Par conséquent, si cette Univers est en expansion, il s'étendra indéfiniment. On appelle ce destin le "Grand Froid" (Big Chill) [16]. Pendant ses premiers stades, cet Univers est dominé par la matière et le facteur d'échelle se comporte comme suit : $a \sim t^{2/3}$ (voir la section : Univers à matière uniquement). Après, la matière sera diluée et c'est la courbure qui conduit l'expansion avec un facteur d'échelle $a \sim t$.

4.7.2 Univers à matière et à constante cosmologique

Considérons maintenant un Univers plat qui ne contient que la matière et la constante cosmologique " Λ ". En substituant $k = 0$ dans (4.54), on obtient

$$\begin{aligned} 1 - \Omega_0 &= 0 \Rightarrow 1 - \Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{m,0} = 0 \\ &\Rightarrow \Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}. \end{aligned}$$

Donc l'équation de Friedmann (4.56) prend la forme

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}). \quad (4.58)$$

Dans un tel Univers, si $\Omega_{m,0} > 1$, on a alors $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ et l'équation (4.58) indique que H peut s'annuler. La valeur maximale qui permet d'annuler H est

$$a_{\max} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \right)^{1/3}.$$

Ainsi, si l'Univers est en expansion, au bout d'un certain temps t_{effond} , l'expansion s'arrêtera et l'Univers commence à se contracter. Le destin de cet Univers sera donc un "Grand Effondrement". Cela signifie que la constante cosmologique fournit une force attractive dans ce modèle. Du fait que $H = \dot{a}/a$, l'équation (4.58) devient

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{1}{H_0^2} = (\Omega_{m,0} - 1) \left[\left(\frac{a_{\max}}{a} \right)^3 - 1 \right].$$

En multipliant par $(a/a_{\max})^3$ et en prenant la racine, l'équation précédente donne l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} \int_0^t a_{\max}^{3/2} H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} dt &= \int_0^a \sqrt{\frac{a}{1 - (a/a_{\max})^3}} da \\ a_{\max}^{3/2} H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} t &= \frac{2}{3} \text{arc sin} \left[\left(\frac{a}{a_{\max}} \right)^{3/2} \right] \\ t &= \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \text{arc sin} \left[\left(\frac{a}{a_{\max}} \right)^{3/2} \right]. \end{aligned}$$

Cette équation indique que l'Univers va se contracter vers $a = 0$ après un temps de

$$t_{\text{effond}} = \frac{2\pi}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}.$$

Dans la figure 4.4, on a représenté le facteur d'échelle de ce modèle pour les paramètres $\Omega_{m,0} = 1.1$ et $\Omega_{\Lambda,0} = -0.1$.

Examinons maintenant le cas qui ressemble à notre Univers d'aujourd'hui. C'est le cas d'un Univers plat avec les paramètres $\Omega_{m,0} < 1$ et $\Omega_{\Lambda,0} > 1$. Dans ce cas, les deux termes du membre droit de l'équation (4.58) deviennent positifs, ce qui signifie que H ne s'annule jamais et l'Univers s'étend indéfiniment. Ainsi, le destin de cet Univers sera un "Grand Froid". D'après l'équation (4.36), la densité de la matière et celle de la constante cosmologique seront égales quand le facteur d'échelle atteindra la valeur

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{1/3}.$$

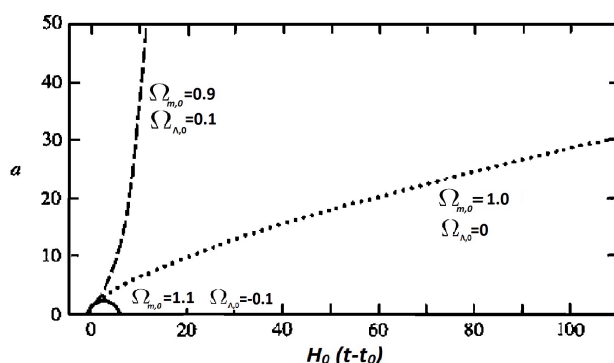


FIG. 4.4 – Facteur d'échelle en fonction de temps pour des univers plat à matière et constante cosmologique seulement.

Pour un Univers plat avec les paramètres $\Omega_{m,0} < 1$, $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, l'équation (4.58) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{1}{H_0^2} = (1 - \Omega_{m,0}) \left[\left(\frac{a_{m\Lambda}}{a} \right)^3 + 1 \right].$$

En multipliant par $(a/a_{m\Lambda})^3$ et en prenant la racine, l'équation précédente donne l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} \int_0^t a_{m\Lambda}^{3/2} H_0 \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} dt &= \int_0^a \sqrt{\frac{a}{(a/a_{m\Lambda})^3 + 1}} da \\ a_{m\Lambda}^{3/2} H_0 \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} t &= \frac{2}{3} a_{m\Lambda}^{3/2} \ln \left[\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^3} \right] \\ t &= \frac{2}{3H_0 \sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left[\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^3} \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dans la figure 4.4, on a représenté le facteur d'échelle de ce modèle pour les paramètres $\Omega_{m,0} = 0.9$ et $\Omega_{\Lambda,0} = 0.1$. Pour les premiers stades de cet Univers où $a \ll a_{m\Lambda}$, le facteur d'échelle en fonction du temps est

$$a(t) \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}.$$

C'est proportionnel à $\sim t^{2/3}$, ce qui est en accord avec l'expression obtenu pour l'Univers à matière uniquement. Lorsque $a \gg a_{m\Lambda}$, le facteur d'échelle est donnée par

$$a(t) \approx \frac{a_{m\Lambda}}{2^{2/3}} \exp(\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} H_0 t).$$

C'est le comportement exponentiel attendu pour un Univers à constante cosmologique uniquement (l'équation (4.53)).

Dans ce modèle, en mettant $a = 1$ dans l'équation (4.59), on trouve l'âge actuel de l'Univers

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right).$$

Par conséquent, si on prend $H_0 = 70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, les paramètres de densité $\Omega_{m,0} = 0.3$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$ et on néglige la contribution du rayonnement, on obtient

$$t_0 = 0.964 H_0^{-1} = (13.5 \pm 1.3) \times 10^9 \text{ années.} \quad (4.60)$$

En faisant la substitution $a = a_{m\Lambda}$ dans l'équation (4.59), le temps correspondant à l'égalité matière-constante cosmologique est donnée par

$$t_{m\Lambda} = \frac{2H_0}{3\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) = (9.8 \pm 1.0) \times 10^9 \text{ années.}$$

En comparant les deux dernières équations, si notre Univers est bien représenté par le modèle de référence ($\Omega_{m,0} \approx 0.3$, $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$), la constante cosmologique doit être la composante dominante dans les derniers quatre milliards d'années.

4.7.3 Univers à matière, à courbure et à constante cosmologique

Dans cette section, on va voir que la présence de la courbure, ensemble avec la matière et la constante cosmologique, va nous amener à des Univers dont le facteur d'échelle présente des comportements très intéressants. En mettant $\Omega_{r,0} = 0$ et $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$, l'équation de Friedmann (4.56) s'écrit

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (4.61)$$

D'après cette équation, si $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$ sont positifs, le premier terme et le dernier du membre droit de cette équation sont positifs. En plus, si $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1$, on aura $k = +1$ (l'équation (4.54)) et le deuxième terme

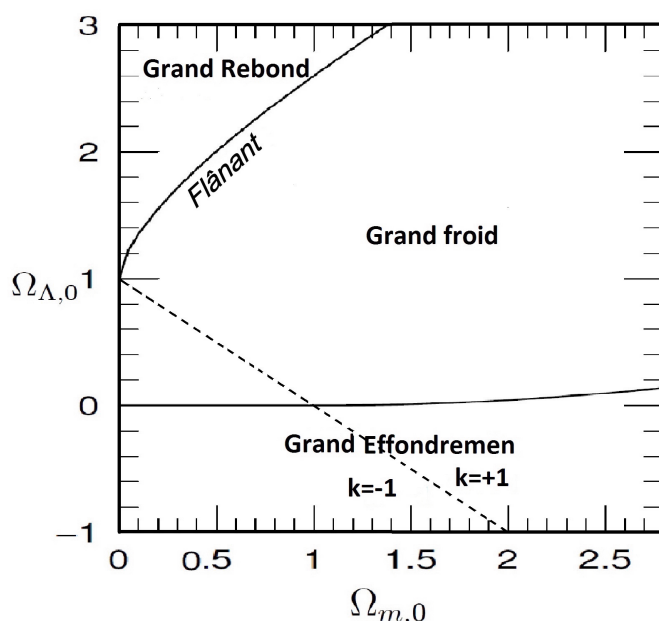


FIG. 4.5 – Les différents destins correspondants à un univers à courbure+ matière+ constante cosmologique : le Grand Froid ($a \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$), le Grand Effondrement ($a \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow t_{effond}$), l'univers à phase de Flânerie ($a \sim \text{constant}$ pour une longue période) et le Grand Rebond ($a = a_{\min}$ quand $t = t_{reb}$).

deviendra négatif. Ainsi, pour un choix particulier de $\Omega_{m,0}$ et de $\Omega_{\Lambda,0}$, si le facteur d'échelle prend des valeurs très petites ou très grandes, le membre droit de l'équation ci dessus est positif et les solutions physiques pour H et a existent. Cependant, si a prend des valeurs intermédiaires, le membre droit deviendra négatif et on aura des solutions non physiques pour H et a . Par conséquent, pour un certain choix des paramètres $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$, on aura un intervalle interdit pour le facteur d'échelle.

Considérons un Univers ayant de tels paramètres mais qui commence à se contracter d'un état de basse densité et dominé par la constante cosmologique, c'est à dire $a \gg 1$ et $H = \dot{a}/a < 0$. Quand cet Univers se contracte, le terme négatif de la courbure s'accroît progressivement, ce qui arrêtera la contraction à $a = a_{\min}$. Après, l'Univers s'étendra à nouveau et $a \rightarrow \infty$. Un tel destin est appelé "le Grand Rebond" (Big Bounce) [16]. Ainsi, cet Univers peut subir une expansion sans avoir commencé par un Big Bang. Par conséquent, notre Univers étant en expansion, cela ne signifie pas nécessairement qu'il a commencé à partir d'un Big Bang (où $a = 0$ à $t = 0$).

Par un autre choix des paramètres $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$ on peut avoir un autre nouveau comportement : c'est "l'Univers Flânant", appelé parfois aussi l'Univers de *Lemaître* [20],[16]. L'Univers "Flânant" commence par l'expansion d'un état dominé par la matière, puis il entre dans une très longue phase où le facteur d'échelle est presque invariant. A la fin de cette phase, le terme de la constante cosmologique l'emportera et l'Univers poursuivra l'expansion d'une manière exponentielle.

Bien entendu, en plus de ces nouveaux comportements, d'autres choix pour les paramètres $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$ peuvent nous amener à des Univers dont le destin est un "Grand froid" ou un "Grand Effondrement". La figure 4.5 généralise tous les comportements correspondant à l'Univers à matière +courbure +constante cosmologique. La ligne à tirets correspond aux modèles où $k = 0$. Les modèles situés au dessus de cette ligne correspondent à $k = +1$, les modèles situés au dessous correspondent à $k = -1$. Au dessus de cette ligne, étant donnée les valeurs des paramètres de la densité $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$, l'évolution et le destin de l'Univers seront déterminés.

La figure 4.6 d'autre part, montre le comportement du facteur d'échelle $a(t)$ pour quatre modèles différents. Les quatre modèles ont le même paramètre de la densité $\Omega_{m,0} = 0.3$, mesuré à $t = t_0$ et $a = 1$. Cependant, ils ont des différents paramètres de la densité $\Omega_{\Lambda,0}$

(i) La ligne à tirets correspond au paramètre $\Omega_{\Lambda,0} = -0.3$, et $k = -1$: cet Univers se terminera dans un "Grand Effondrement".

(ii) La ligne pointillés représente le modèle ayant $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$ et $k = 0$: l'Univers se terminera dans un "Grand Froid".

(iii) La ligne en point-tirets correspond au $\Omega_{\Lambda,0} = 1.7134$ et $k = +1$: C'est un Univers "Flânant" qui passe un longtemps avec un facteur d'échelle constant $a_{flân} \approx 0.44$.

(iv) Finalement, la ligne continue représente les valeurs $\Omega_{\Lambda,0} = 1.8$ et $k = +1$: cet Univers passe par un "Grand Rebond" lorsque $a_{reb} \approx 0.56$.

D'après la figure 4.6, les quatre modèles représentés ont la même valeur du facteur d'échelle maintenant à t_0 . Malgré qu'ils aient la même valeur du facteur d'échelle et qu'ils soient en expansion au voisinage de t_0 , leurs comportements générales sont très différents. Ainsi, notre Univers étant en expansion, ne signifie pas qu'il se terminera dans un "Grand Froid".

Cependant, il y a des fortes preuves qui excluent la supposition de l'Univers "Flânant" ou celui subissant un "Grand Rebond". Supposons par exemple que nous soyons dans un Univers "Flânant". Dans ce cas, si on regarde dans l'espace, on verrait, à peu près, le même décalage vers le rouge, $z_{flân} = 1/a_{flân} - 1$, pour des galaxies situées à un grand intervalle de distances. De telles galaxies n'ont jamais été observées sur aucun décalage vers le rouge dans notre Univers réel.

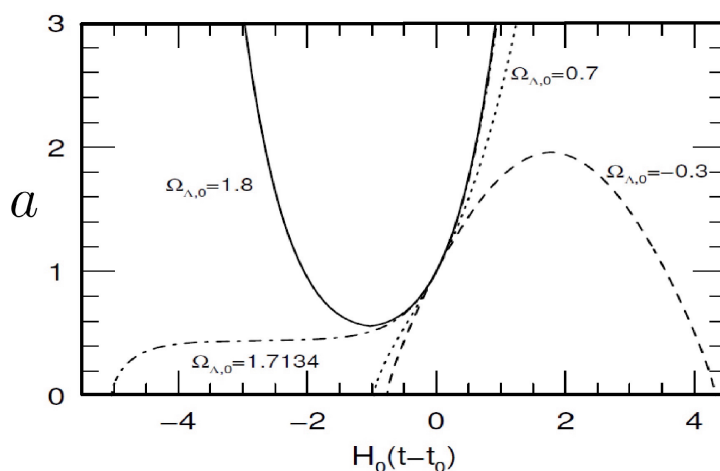


FIG. 4.6 – Les différents comportements de facteur d'échelle pour un univers à matière+ courbure+ constante cosmologique.

Supposons maintenant que nous soyons dans un Univers de "Grand Rebond". Dans ce cas, si on observe l'espace on verrait des galaxies ayant un décalage vers le rouge qui s'accroît avec la distance jusqu'à la valeur maximale $z_{\max} = 1/a_{reb} - 1$. Après, la valeur de z devra décroître avec la distance et tendre vers zéro. Si on observe plus loin, les galaxies présenteraient un décalage vers le bleu. Dans notre Univers, on n'a jamais vu ces lointaines galaxies ayant un décalage vers le bleu. Ainsi, il apparaît que notre Univers subit un "Grand Froid" qui se termine par une expansion éternelle.

4.7.4 Univers à rayonnement et à matière

On a vu précédemment que l'égalité rayonnement-matière a eu lieu quand le facteur d'échelle a été $a_{rm} \approx 2.8 \times 10^{-4}$. Longtemps avant cette époque, l'Univers est bien décrit par le modèle à rayonnement uniquement qu'on a vu auparavant. Mais lorsque a devient comparable à a_{rm} , l'Univers est mieux décrit par un modèle à rayonnement et à matière simultanément. En mettant $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ et $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0}$, l'équation de Friedmann (4.56) s'écrit

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{m,0}a + \Omega_{r,0}}} = H_0 dt, \quad (4.63)$$

où on a utilisé $H = \dot{a}/a$. L'intégration de cette équation nous donne la relation entre le temps et le facteur d'échelle

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{m,0}a + \Omega_{r,0}}} = \int_0^t H_0 dt \quad (4.64)$$

$$H_0 t = \frac{4a_{rm}^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{rm}} \right) \left(1 + \frac{a}{a_{rm}} \right)^{1/2} \right] \quad (4.65)$$

où a_{rm} est donné par l'équation (4.37). Dans les limites où $a \ll a_{rm}$, on retrouve le comportement attendus pour un Univers dominé par le rayonnement (comparer avec (4.51))

$$a \approx \left(3\sqrt{\Omega_{r,0}} H_0 t \right)^{1/2}, \quad a \ll a_{rm},$$

tandis que lorsque $a \gg a_{rm}$, on retrouve

$$a \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{r,0}} H_0 t \right)^{2/3}, \quad a \gg a_{rm},$$

conformément à ce qu'on a vu précédemment pour un Univers dominé par la matière (l'équation (4.49)). Pour obtenir le temps correspondant à l'égalité rayonnement-matière, il suffit de substituer a par a_{rm} dans (4.64)

$$t_{rm} = \frac{4a_{rm}^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} H_0^{-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.391 \frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{\Omega_{m,0}^2} H_0^{-1}.$$

Pour le modèle de référence, où $\Omega_{r,0} = 8.4 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0.3$ et $H_0^{-1} = 14 \times 10^9$ années, le moment de l'égalité rayonnement-matière est

$$t_{rm} = 3.34 \times 10^{-6} H_0^{-1} = 47000 \text{ années}. \quad (4.66)$$

On voit que l'époque où le rayonnement a dominé n'a duré que 47 millénaires. Comme cela est suffisamment bref, on peut considérer l'âge de l'Univers donnée par (4.60) comme acceptable, malgré qu'on ait ignoré les effets du rayonnement. Ainsi, tenir compte des effets du rayonnement ne changerait presque pas l'âge de l'Univers, $t_0 = 13.5 \times 10^9$ années, qu'on a obtenu précédemment (l'équation (4.60)).

4.7.5 Le modèle de référence

On a vu précédemment que ce modèle est considéré comme étant le modèle le plus compatible avec les observations actuelles. C'est un modèle spatialement plat ($k = 0$). Cela signifie que le paramètre de densité totale est

$\Omega_0 = 1$. Dans ce modèle, l'Univers est formé du rayonnement, de la matière et de la constante cosmologique. La constante de Hubble dans ce modèle vaut $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Le rayonnement est constitué de photons et de neutrinos. Les photons sont principalement fournis par le fond cosmique micro-onde avec un paramètre de densité $\Omega_{fcm,0} = 5 \times 10^{-5}$ [16]. Les neutrinos (supposés relativistes) ont le paramètre de densité de $\Omega_{\nu,0} = 3,4 \times 10^{-5}$ [16] (calculé théoriquement). Donc, la contribution totale du rayonnement est $\Omega_{r,0} = 8,4 \times 10^{-5}$. La matière à son tour est formé de deux types : la matière baryonique et la matière nonbaryonique, appelé souvent matière noire [20],[19]. Des observations indiquent que la majorité de la matière dans notre Univers est sous forme de matière noire ($\Omega_{mn,0} \approx 0.26$ pour la matière noire, tandis que $\Omega_{mbar,0} \approx 0.04$ pour la matière baryonique). Donc, la contribution totale de la matière est $\Omega_{m,0} \approx 0.3$. Ainsi, la contribution de la constante cosmologique est $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} \approx 0.70$. Donc la constante cosmologique fait plus de deux tiers de la densité d'énergie totale de l'Univers dans ce modèle.

Le modèle de référence a commencé à s'étendre d'un état très dense et de température très élevée : c'est le Big Bang ($a \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$). Pendant ses premiers stades, l'Univers a été dominé par le rayonnement. Quelque millénaires plus tard, $4.7 \times 10^4 \text{ années}$, il a atteint l'époque de l'égalité rayonnement-matière, où le facteur d'échelle a été $a_{rm} = \Omega_{r,0}/\Omega_{m,0} \approx 2.8 \times 10^{-4}$. Par la suite, l'Univers est entré dans la phase où c'est la matière qui domine. Cette phase a duré jusqu'à l'égalité matière-constante cosmologique à $t_{m\Lambda} = 9.8 \times 10^9 \text{ années}$, où le facteur d'échelle a valu $a_{m\Lambda} = (\Omega_{m,0}/\Omega_{\Lambda,0})^{1/3} \approx 0.75$. Dans ce modèle, l'Univers est actuellement dans une phase dominée par la constante cosmologique avec un âge de $t_0 = 13.5 \times 10^9 \text{ années}$.

Dès que les paramètres $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$ sont déterminés, le facteur d'échelle dans ce modèle peut être calculé numériquement en utilisant l'équation de Friedmann (4.56). La figure 4.7 représente le facteur d'échelle dans ce modèle. En connaissant la fonction $a(t)$, on peut calculer les distances propres $d_p(t_0)$ et $d_p(t_e)$ dans ce modèle. Lorsque $z \rightarrow \infty$, la distance propre dans ce modèle est $d_p(t_0) \sim 3.24c/H_0 = 14 \times 10^3 \text{ Mpc}$, ce qui signifie que l'horizon de la particule est fini. Par ailleurs, ça veut dire que les photons émis par les galaxies situées actuellement au-delà de cette distance n'ont pas eu suffisamment du temps pour nous atteindre maintenant. Quant à la distance propre au moment d'émission, lorsque $z \rightarrow \infty$, la distance $d_p(t_e)$ tend vers $0.41c/H_0$. Au début du siècle courant, les plus lointaines galaxies observées ont eu $z = 6$, ce qui est équivalent à une distance propre de $d_p(t_0) = 1.92c/H_0 = 8300 \text{ Mpc}$, environ 60% de l'horizon de la particule courant. Les photons qu'on reçoit de ces galaxies étaient émis quand l'âge

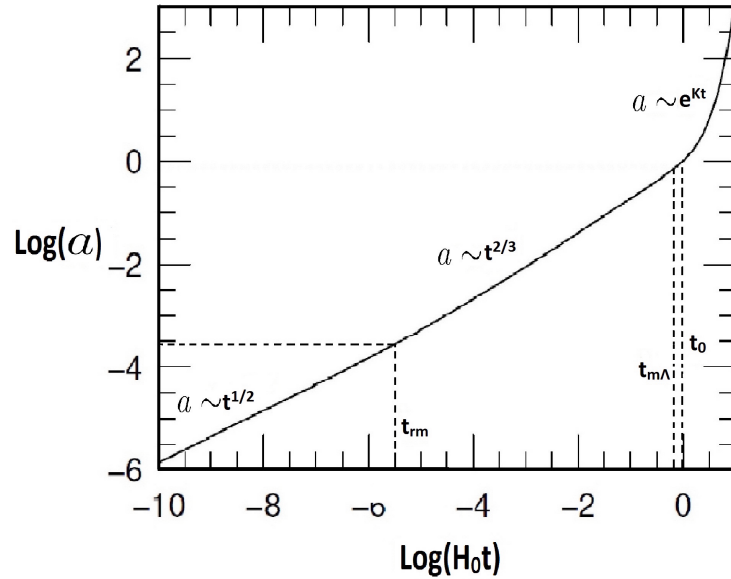


FIG. 4.7 – Le facteur d'échelle en fonction du temps. Les lignes en tirets correspondent à l'égalité rayonnement-matière $a_{rm} \approx 2.8 \times 10^{-4}$, l'égalité matière-constante cosmologique $a_{m\Lambda} \approx 0.75$, et l'instant actuelle $a_0 = 1$.

de l'Univers était $t_e = 0.066 H_0^{-1} = 0.9 \times 10^9$ années, environ 7% de l'âge de l'Univers actuelle $t_0 = 13.5 \times 10^9$ années.

4.8 L'inflation

Malgré le grand succès achevé par la théorie du Big Bang, cette théorie présente quelques problèmes : le problème de la platitude, le problème de l'horizon et le problème des monopôles [16],[17]. En 1981, Alan Guth a proposé l'inflation comme une solution pour ces problèmes. L'inflation ne représente pas un remplacement de la théorie de Big Bang, mais une idée complémentaire décrivant des époques extrêmement reculées de l'histoire de l'Univers [37],[38].

Depuis 1981, il y avait d'autres théories qui ont été proposées comme alternatives de l'inflation pour décrire les époques extrêmement reculées de l'Univers [40].

4.8.1 Problème de la platitude

Les observations actuelles montrent que la densité totale ε_0 est très proche de la densité critique ε_c . Autrement dit, le paramètre de la densité totale est actuellement $\Omega_0 = \varepsilon_0/\varepsilon_{0,c} \sim 1$ et que la géométrie de l'Univers est quasiment plate (l'équation (4.27)).

Pour comprendre le problème davantage, considérons l'équation de Friedmann sous la forme

$$1 - \Omega(t) = \frac{-k}{a^2 H^2}.$$

Par souci de simplification, considérons les expressions du facteur d'échelle pour les Univers dominés par le rayonnement et la matière, $a \sim t^{1/2}$ et $a \sim t^{2/3}$ respectivement. Comme k est une constante, si $\Omega(t) = 1$, elle demeure ainsi indéfiniment. Si $\Omega(t) \neq 1$, on aura

$$\begin{aligned} a^2 H^2 \sim t^{-1} &\Rightarrow |\Omega(t) - 1| \sim t, \text{ domination du rayonnement.} \\ a^2 H^2 \sim t^{-2/3} &\Rightarrow |\Omega(t) - 1| \sim t^{2/3}, \text{ domination de la matière.} \end{aligned}$$

Cela signifie que la géométrie plate n'est pas une situation stable : n'importe quelle petite déviation de la géométrie plate va faire évoluer $\Omega(t)$ très loin de l'unité. Ainsi, pour que la géométrie de l'Univers soit quasiment plate telle qu'elle est aujourd'hui, elle devait être extrêmement proche de la platitude aux époques extrêmement reculées. Pour plus de simplification, considérons l'époque de la domination du rayonnement où

$$|\Omega(t) - 1| \leq bt,$$

b étant une constante. Sachant que maintenant $|\Omega(t_0) - 1| \leq 0.5$, où $t_0 = 13.5 \times 10^9 \text{ années} \approx 4 \times 10^{17} \text{ secondes}$ est l'âge de l'Univers, on peut réécrire l'inégalité précédente sous la forme [16]

$$|\Omega(t) - 1| \leq 10^{-18}t. \tag{4.67}$$

Examinons la signification de cette inégalité pour les époques extrêmement reculées de l'âge de l'Univers :

- Le moment de découplage des photons par exemple a eu lieu à $t \approx 10^{13} \text{ secondes}$. C'est quand l'Univers s'est étendu et a refroidi de façon que les électrons aient cessé d'interagir avec les photons et aient pu se combiner avec les noyaux pour former les atomes [23]. D'après (4.67), à cette époque, le paramètre de la densité totale a été

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-5}.$$

- Au moment de l'égalité rayonnement-matière, on a vu que $t \approx 47000$ années $\approx 10^{12}$ secondes, ce qui donne

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-6}.$$

- A l'époque de la nucléosynthèse primordiale [23], l'époque où l'Univers est devenu peu dense et peu chaud pour que les neutrons et les protons puissent former les noyaux atomiques, l'âge de l'Univers a été $t \approx 1s$. Ainsi, l'équation (4.67) devient

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-18}.$$

Cela veut dire que, à cette époque,

$$0.999999999999999999 < \Omega < 1.000000000000000001.$$

C'est un domaine extrêmement rigoureux, et n'importe quelle autre valeur pour Ω à cette époque nous amènerait à un Univers très différent de celui qu'on observe aujourd'hui [17]! Malheureusement, on ne peut pas dire simplement que le paramètre de la densité totale est égale à 1, parce qu'il n'y a pas de raison pour préférer ce choix. Donc, on doit trouver une explication physique pour cette restriction imposé à Ω .

4.8.2 Problème de l'horizon

C'est le problème le plus important avec la théorie du Big Bang. Il est dû au fait que la lumière ne peut parcourir qu'une distance limitée pendant l'âge fini de l'Univers. Rappelons d'abord quelques propriétés du fond cosmique micro-onde. C'est un rayonnement de corps noir à une température de $T = 2.725K$ qui s'est produit quand l'Univers était extrêmement dense et chaud. Ce rayonnement est isotrope, ça veut dire que les rayonnements reçus des différentes régions du ciel ont la même température avec une grande précision [15]. Le fait que des différentes régions ont la même température signifie qu'elles étaient en équilibre thermique bien avant d'émettre ces rayonnements.

On a défini la distance de l'horizon comme étant la plus grande distance parcourue par la lumière pendant l'âge de l'Univers. Ainsi, les points situés à l'horizon d'un certain point constituent une sphère tridimensionnelle. Les régions se trouvant hors de l'horizon de ce point n'ont pas encore interagi avec ce point et, par conséquent, ne peuvent pas être en équilibre thermique avec lui. Par ailleurs, le rayonnement fossile que nous recevons des différentes régions de l'Univers a voyagé sans interruption depuis l'époque de découplage⁵,

⁵C'est l'époque où les photons de fond cosmique micro-onde devenaient moins énergétiques pour ioniser les atomes.

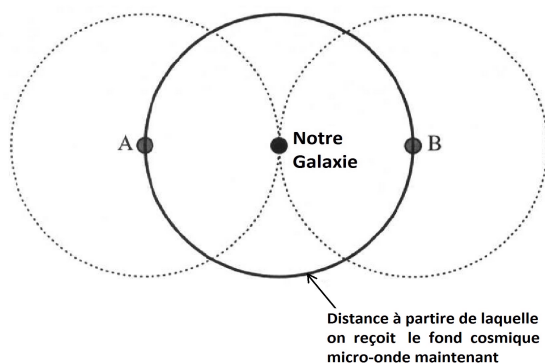


FIG. 4.8 – Une représentation de la distance de l’horizon (la plus lointaine distance que la lumière peut parcourir) pour les régions A, B et notre galaxie. Comme nous sommes situé à l’horizon de la région B, la lumière émise par cette région nous est arrivée juste maintenant et n’avait pas le temps pour nous dépasser vers la région A. Par conséquent, les régions A et B ne peuvent pas encore être en équilibre thermique.

peu après le Big Bang [23]. Donc, les rayonnements fossiles émis par une certaine région se trouvent presque à l’horizon de cette région.

Considérons deux régions *A* et *B* opposées du ciel (figure 4.8). Comme les rayonnements fossiles émis par ces régions nous sont arrivées juste maintenant, nous sommes presque à l’horizon de chacune de ces deux régions. Donc, la distance entre ces deux régions est presque le double de la distance de l’horizon, ce qui signifie qu’elles ne sont pas encore en équilibre thermique. Comment expliquer le fait que les rayonnements fossiles émis par ces régions ont la même température ?

Malheureusement, le problème est plus complexe. Comme le rayonnement fossile a voyagé depuis le découplage sans interruption, toutes les régions du ciel devaient être en équilibre thermique même avant cette époque. Cependant, avant le découplage, la lumière ne pouvait parcourir qu’une petite distance. Cela veut dire que même dans les régions très voisines dans le ciel (séparées par un angle de $1 \rightarrow 2$ degrés), l’équilibre thermique ne pouvait pas s’établir [16],[17]. La figure 4.9 représente ce problème.

4.8.3 Problème de monopôles

Ce problème provient de la combinaison du modèle de Big Bang avec la physique des particules. La Théorie de la Grande Unification, une branche de

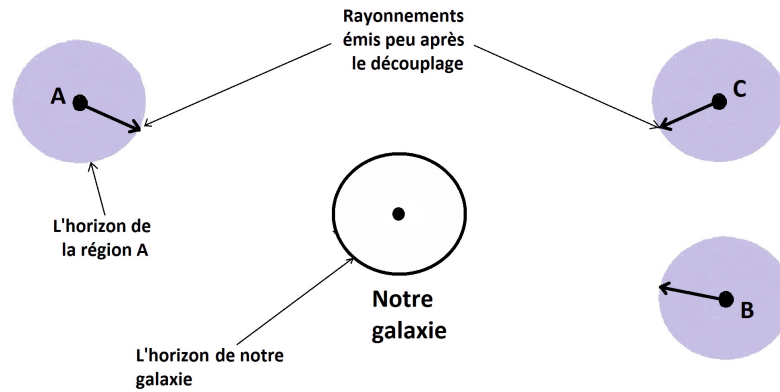


FIG. 4.9 – Représentation des horizons des régions A et B et C . Les flèches représentent le fond cosmique micro-onde qui quittait ces régions au moment du découplage pour nous atteindre maintenant. Evidemment, les régions C et B n'ont pas encore pu interagir à ce moment. Donc, comment on en reçoit des rayonnements de la même température ?

la physique des particules moderne, prévoit la production de nouveau type des particules aux époques très reculées de l'âge de l'Univers. Ces particules, dont certaines sont appelées *monopôles* devaient être massives et en grande abondance. Si de telles particules existaient, leur contribution à la densité totale devrait être considérable et devrait l'emporter sur les autres composants même maintenant. Comme l'Univers actuel n'est pas dominé par de telles particules, le modèle de Big Bang est incompatible avec la Théorie de la Grande Unification.

4.8.4 L'expansion inflationnaire

L'inflation a été proposée pour la première par Alan Guth comme une solution pour ces problèmes [18]. Grosso modo, l'inflation est définie comme étant une phase dans les époques extrêmement reculées de l'histoire de l'Univers où le facteur d'échelle a été accéléré

$$\text{L'inflation} \iff \ddot{a}(t) > 0.$$

En considérant l'équation d'accélération (l'équation (4.23))

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3p),$$

on voit que $\varepsilon + 3p < 0$. Comme la densité d'énergie est positive, cela implique que la pression doit être négative $p < -\varepsilon/3$. Les idées modernes de la physique des particules de la violation de symétrie montre qu'il y a des cas où la pression est négative [17].

L'inflation est supposée avoir lieu lorsque l'Univers a passé par une époque appelée *transition de phase* [23]. Pendant cette époque, un champ scalaire, inconnue jusqu'à maintenant, a produit l'inflation, puis il s'est désintégré.

L'exemple classique de l'inflation consiste à modéliser le champ scalaire produisant l'inflation par une constante cosmologique " Λ_{inf} ". L'équation d'état de Λ_{inf} est

$$p_{\Lambda_{inf}} = -\varepsilon_{\Lambda_{inf}} = \Lambda_{inf}c^2/(8\pi G).$$

Dans ce cas, l'équation de Friedmann (4.38) devient

$$H_{inf}^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_{inf}}{3},$$

et le facteur d'échelle correspondant à l'expansion inflationnaire est

$$a_{inf}(t) = a_i \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda_{inf}}{3}}t\right), \quad (4.68)$$

a_i étant une constante. Evidemment, l'expansion dans ce cas est extrêmement plus rapide que les autres cas qu'on a vus précédemment.

Avant le déclenchement de l'inflation, l'Univers était dominé par le rayonnement, avec un paramètre de Hubble de $H_{ray} = 1/(2t)$, donné par l'équation (4.52). Quand l'âge de l'Univers était $t_i \sim 10^{-36}$ secondes, l'inflation s'est déclenchée et l'Univers est devenu dominé par la constante cosmologique Λ_{inf} avec un paramètre de Hubble de

$$H_{inf} \approx H_{ray}(t_i) = \frac{1}{2t_i} = \frac{1}{2}10^{36} s^{-1}.$$

L'inflation est supposée être achevée lorsque l'âge de l'Univers était $t_f \sim 10^{-34}$ secondes.

Il faut signaler ici que la valeur de la densité d'énergie de Λ_{inf} est supérieure à celle de la constante cosmologique dominant l'Univers actuel par plusieurs ordres de grandeur. D'après les observations, le paramètre de la densité de Λ est $\Omega_{\Lambda,0} = \varepsilon_{\Lambda,0}/\varepsilon_{c,0} \approx 0.7$. Sachant que la valeur de la densité critique actuelle est $\varepsilon_{c,0} \approx 5200 MeV m^{-3}$ [16], la densité de la constante cosmologique Λ est $\varepsilon_{\Lambda,0} \approx 0.7\varepsilon_{c,0} \approx 4 GeV$. Quant à la densité d'énergie de Λ_{inf} , d'après l'équation (4.32c), elle vaut

$$\varepsilon_{inf} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda_{inf} = \frac{3c^2}{8\pi G}H_{inf}^2 \sim 10^{109} GeV.$$

Cette valeur est gigantesque devant celle de la constante cosmologique qui domine l'Univers actuel.

4.8.5 Solution du problème de la platitude

Notre problème a été le fait que l'expression

$$1 - \Omega(t) = \frac{-k}{a^2 H^2} \quad (4.69)$$

s'accroît toujours avec le temps, ce qui mène Ω loin de l'unité. La condition de l'inflation s'écrit

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{a} > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(aH) > 0.$$

Ainsi, d'après (4.69), la condition de l'inflation est exactement celle qui mène Ω vers l'unité plutôt que l'éloigner, puisque $(a_{inf}H_{inf})$ est une fonction croissante du temps.

Dans le cas de l'inflation exponentielle donné par (4.68), on aura

$$|\Omega(t) - 1| \sim \exp\left(-\sqrt{\frac{4\Lambda_{inf}}{3}}t\right).$$

Ce résultat montre que $\Omega \rightarrow 1$, c'est-à-dire, l'Univers tend à être plat.

4.8.6 Solution du problème de l'horizon

Avec l'inflation, les régions de l'Univers, qui sont suffisamment petites pour être en équilibre thermique avant l'inflation, pouvaient en fait s'étendre pour être beaucoup plus grandes que l'Univers visible actuel (figure 4.10). Ainsi, les micro-ondes venant des différents cotés du ciel ont la même température parce qu'ils ont été déjà en équilibre thermique. Autrement dit, à cause de l'expansion inflationnaire, la distance que les micro-ondes ont parcouru entre le Big Bang et le moment de découplage est beaucoup plus grande que celle parcouru entre le découplage jusqu'à maintenant [17].

4.8.7 Solution du problème des monopôles

L'expansion extrêmement rapide de l'Univers pendant l'inflation est suffisante pour réduire la densité des particules indésirables comme les monopôles plus rapidement que la densité de la constante cosmologique Λ_{inf} , parce que cette dernière est constante tandis que la première est proportionnelle à a^{-3} . En plus, l'expansion ultérieure de l'Univers après l'inflation rend impossible l'observation de telles particules aujourd'hui.

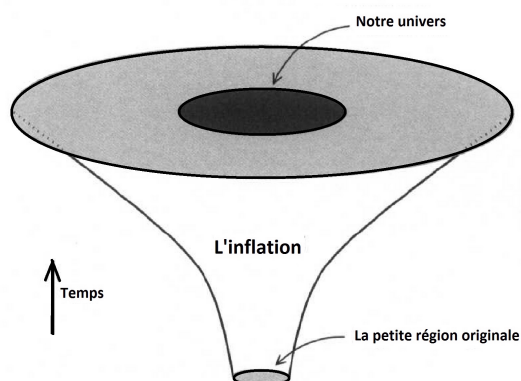


FIG. 4.10 – Les micro-ondes venant des cotés opposés du ciel ont la même température parce qu'ils ont été déjà en équilibre thermique.

4.9 Comparaison entre la cosmologie newtonienne et la cosmologie relativiste

Dans le chapitre précédent, on a vu que la cosmologie newtonienne souffre de quelques insuffisances. Dans le cadre relativiste, ces problèmes sont résolus de la façon suivant :

- D'après la loi de Hubble, $v = Hr$, pour des objets situés à des positions $r > c/H$, la vitesse de récession est supérieure à celle de la lumière. En relativité restreinte où l'espace est statique, la vitesse relative des objets massifs ne doit pas dépasser celle de la lumière. Dans le cadre de la relativité générale, la vitesse relative n'a de sens que localement. A grandes distances, la relativité générale n'interdit pas des vitesses supérieures à celle de la lumière. Par ailleurs, il n'y a pas de violation de la causalité comme aucun signal lumineux ne peut être transmis entre ces objets.

- Hubble pensait que le décalage vers le rouge présenté par les galaxies observées était dû à l'effet Doppler. Dans le cas de la relativité générale, on a vu que le décalage vers le rouge n'est qu'un résultat de l'expansion de l'Univers.

- Dans l'approche newtonienne, pour dériver l'équation de Friedmann, il faut supposer que l'espace est euclidien et que l'Univers est un milieu ayant une symétrie sphérique, ce qui est en contradiction avec le principe cosmologique. En relativité générale, l'équation de Friedmann s'obtient par l'application des équations d'Einstein à la métrique de Robertson-Walker, qui est en accord avec le principe cosmologique.

- Dans le cadre de la relativité, la présence de la pression dans l'équation d'accélération est interprétée. En effet, comme la pression apparaît dans le tenseur énergie-impulsion, elle contribue à la courbure de l'espace et, par conséquent, accélère les objets massifs.

Chapitre 5

Conclusion

Bien entendu, la relativité générale est le cadre adéquat de n'importe quelle théorie de cosmologie. La relativité générale est basée sur le principe d'équivalence. D'après ce principe, l'espace-temps en présence de la gravitation est équivalent localement à un référentiel accéléré. Du point de vue géométrique, cela veut dire que la présence de l'énergie courbe l'espace. En fait, ce principe découle de l'équivalence entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle. Les équations du champ en relativité générale sont celles d'Einstein. Elles décrivent la relation entre le tenseur énergie-impulsion et la courbure de l'espace temps.

Dans notre manuscrit, on a examiné deux solutions des équations d'Einstein : la solution de Schwarzschild et celle de Robertson-Walker. La solution de Schwarzschild est la solution statique et ayant une symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide. Par conséquent, cette solution est appropriée pour décrire beaucoup d'objets astronomiques telles que les étoiles [2]. Dans la limite classique, les équations d'Einstein pour la métrique de Schwarzschild donne l'équation de Poisson. Les trous noirs sont parmi les nouveaux concepts apportés par la relativité générale [13]. Ils sont des régions de l'espace-temps dont la gravitation est tellement forte que rien ne peut s'en échapper, même la lumière. Les trous noirs sont classés en trois catégories [3],[12] : (i) les trous noirs statiques sans charge, décrits par la solution de Schwarzschild, (ii) les trous noirs chargés décrits par la solution de Reissner-Nordstrøm, (iii) les trous noirs en rotation, décrit par la solution de Kerr. Les trous noirs de Schwarzschild sont caractérisés par un rayon qui vaut $2GM/c^2$, appelé l'horizon du trou noir. A l'extérieur de cet horizon, le trou noir fonctionne comme n'importe quel astre massif. A l'intérieur de l'horizon, les particules seront guidées inévitablement vers la singularité du centre du trou noir.

La cosmologie est fondée sur le principe cosmologique. Ce principe stipule

qu'à grand échelle l'Univers est homogène et isotrope. Hubble a montré que toutes les galaxies s'éloignent de nous, en s'appuyant sur l'observation du décalage vers le rouge présenté par ces galaxies. On a montré que la loi de Hubble implique que n'importe quel observateur dans l'Univers doit voir les autres galaxies s'éloigner de lui, ce qui est en accord avec le principe cosmologique. En combinant la loi de Hubble et la théorie newtonienne, on peut obtenir les équations de la dynamique de l'Univers : l'équation de Friedmann, l'équation du fluide et celle de l'accélération. Ce sont les mêmes équations qu'on obtient en utilisant la relativité générale. Selon l'équation de Friedmann, le destin de l'Univers est déterminé par la densité de masse ρ . En supposant un Univers en expansion, si la densité ρ est supérieure à la densité critique ρ_c , au bout d'un certain temps, l'expansion s'arrêtera et l'Univers commencera à se contracter. Si la densité ρ est inférieure ou égale à la densité critique ρ_c , l'Univers s'étendra indéfiniment. Cependant, pour dériver les équations de la dynamique dans le cadre newtonien, on doit ajouter des hypothèses qui présentent des aspects non satisfaisants, comme l'hypothèse de la structure euclidienne de l'Univers par exemple.

Afin d'aborder la cosmologie dans le contexte relativiste [29], on doit d'abord construire la métrique de Robertson-Walker qui obéit au principe cosmologique. En relativité générale, le principe cosmologique est traduit par la décomposition de l'espace-temps en hypersurfaces $t = \text{constante}$, qui sont homogènes et isotropes. L'expansion (ou la contraction) de l'Univers est prise en compte via le facteur d'échelle $a(t)$ affectant la partie spatiale de la métrique. Comme la métrique de Schwarzschild est une métrique isotrope autour de l'origine, nous avons profité des résultats obtenus pour cette métrique pour les utiliser dans l'élaboration de la métrique de Robertson-Walker. Il faut lui imposer d'être isotrope autour de n'importe quel point sur les hypersurfaces $t = \text{constante}$. Quant à l'homogénéité, elle est garantie en exigeant à tous les tenseurs, y compris le tenseur de courbure, d'être constants sur ces hypersurfaces. En adoptant la transformation adéquate, on aura donc trois types de géométries à courbure constante pour l'Univers : la géométrie sphérique, la géométrie plate et la géométrie hyperbolique.

Dans le cadre de cette métrique, on peut déduire la relation entre le décalage vers le rouge et le facteur d'échelle $a(t)$, la grandeur caractérisant l'expansion de l'Univers. En fait, le décalage vers le rouge observé par Hubble n'était pas une conséquence de l'effet Doppler, mais plutôt une conséquence de l'expansion de l'Univers. Par ailleurs, l'expansion de l'Univers et le fait que sa géométrie n'est pas nécessairement plate affectent la mesure des distances : l'utilisation de la loi du carré inverse reliant la luminosité avec le flux pour déduire la distance n'est plus valable. Les équations d'Einstein correspondantes à la métrique de Robertson-Walker donne les équations de Friedmann

et celle du fluide. L'équation de l'accélération s'obtient à partir de ces deux équations. Ce sont les mêmes équations obtenues dans le cadre newtonien sauf qu'il faut remplacer la densité de masse ρ par la densité d'énergie ε .

La résolution de l'équation de Friedmann donne les expressions temporelles de $a(t)$ et $\varepsilon(t)$. En considérant les trois composantes de l'Univers, le rayonnement, la matière et l'énergie noire, la résolution de cette équation est difficile. Cependant, l'étude de cette équation pour chaque composante séparément donne un aperçu sur l'effet de chacune de ces composantes sur l'évolution de l'Univers. Selon les expressions des densités d'énergie en fonction du facteur d'échelle, les premiers stades de notre Univers ont été dominés par le rayonnement, puis par la matière et finalement par l'énergie noire. Les observations actuelles montrent que notre Univers est constitué de $\sim 70\%$ de l'énergie noire, $\sim 25\%$ de matière noire, $\sim 4\%$ de matière baryonique, et le reste est du rayonnement. Cela signifie que nous sommes à l'époque de la domination de la constante cosmologique. En plus, d'après ces observations, l'égalité rayonnement-matière avait lieu lorsque l'âge de l'Univers était de 47 milles d'années ($a_{rm} \approx 2,8 \times 10^{-4}$), tandis que l'égalité matière-constante cosmologique avait lieu lorsque l'âge de l'Univers était de 9.8 milliards d'années ($a_{m\Lambda} \approx 0,75$). En considérant l'équation de Friedmann à plusieurs composantes, les scénarios obtenus pour l'évolution de l'Univers sont spectaculaires. Selon les paramètres de densité de chaque composante, le destin de l'Univers peut être un Grand froid, un Grand Effondrement, un Grand Rebond ou un Univers Flânant. Aujourd'hui, il y a des théories qui prédisent que les galaxies, les étoiles, les atomes et les noyaux se seront déchirés à cause de l'expansion incessante de l'Univers. Ce destin est appelé Grande Déchirure (Big Rip) [33]. Le modèle de l'Univers plat à rayonnement+matière indique que l'époque de domination du rayonnement a duré 47 milles d'années. Cette époque étant courte, on peut utiliser le modèle à matière+constante cosmologique pour estimer l'âge de l'Univers. Ce modèle combiné avec les observations actuelles montrent que l'âge de l'Univers est environ 13,5 milliards d'années [16]. Selon ce même modèle, l'époque de domination de la constante cosmologique a commencé il y a environ quatre milliards d'années.

La théorie du Big Bang est maintenant la théorie la plus compatible avec les évidences observationnelles. Cependant, elle manque encore de raffinement pour devenir plus solide et cohérente. La théorie de l'inflation est une théorie qui s'ajoute au Big Bang afin de surmonter les problèmes de la platitude, de l'horizon et des monopôles. L'inflation est définie comme étant une époque extrêmement reculée de l'Univers où le rythme de l'expansion était extraordinairement rapide. L'expansion se produisant pendant l'inflation, supposée terminer quand l'Univers était âgé de 10^{-34} secondes, est extrêmement ra-

pide devant celle ayant suivi le reste de l'âge de l'Univers, c'est à dire 13,5 milliards d'années.

Bien que la cosmologie ait fait des grands pas vers la compréhension de notre Univers, il y a des aspects qui ne trouvent pas encore des explications. Parmi les défis qui affrontent la cosmologie aujourd'hui et qui font l'objet des recherches intenses, on cite :

- L'asymétrie matière-antimatière : généralement, quand l'Univers était jeune et chaud, il était en équilibre statistique. Cela signifie que le nombre de baryons devait être égale au nombre d'antibaryons. Cependant, les observations montrent que presque tout l'Univers visible est constitué de baryons.

- L'énergie et la matière noire : les évidences montrent que $\sim 25\%$ de la densité totale d'énergie est sous forme de matière noire et que $\sim 70\%$ est sous forme d'énergie noire. La nature et les caractéristiques de ces formes exotiques de matière et d'énergie restent inconnues.

- L'époque de Planck : c'est l'époque où l'Univers était très dense de sorte que les effets quantiques devaient être prise en compte. Donc, pour examiner cette époque, on a besoin d'une théorie de gravitation quantique, ce qui n'est pas disponible actuellement.

Bibliographie

- [1] A. Einstein, *La Relativité : La théorie de la relativité restreinte et générale, La relativité et le problème de l'espace*, Petite Bibliothèque Payot(1956).
- [2] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge (2009).
- [3] S. Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley (2004).
- [4] D. McMahon, *Relativity Demystified*, McGraw-Hill (2006).
- [5] J.C. Boudenot, *électromagnétisme et gravitation relativistes*, ellipse (1989).
- [6] B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge (1980).
- [7] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley New York (1972).
- [8] N. Ashby, *Relativity in the Global Positioning System*, Living Rev. Relativity, 6, (2003), 1.
- [9] P. Lightman, H. Press, H. Price, & A. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press, Princeton (1975).
- [10] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).
- [11] L.D. Landau & E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon, Oxford (1962).
- [12] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992).
- [13] F. Taylor & A. Wheeler, *Exploring Black Holes : An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco (2000).
- [14] I. Shapiro, *Experimental tests of the general theory of relativity*, 1980.
- [15] M. Roos, *Introduction to Cosmology*, Wiley, Chichester (2003).
- [16] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Addison-Wesley (2002).
- [17] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, Wiley, New York (2003).

-
- [18] A. Liddle & D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press (2000).
- [19] A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press (1999).
- [20] P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press (1993).
- [21] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [22] P. Coles & F. Lucchin, *Cosmology : the Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley, Chichester (2002).
- [23] E.W. Kolb & M.S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City (1994).
- [24] W. Greiner, *Classical Mechanics : Point Particles and Relativity*, Springer (2004).
- [25] J. Rich, *Fundamentals of Cosmology*, Berlin, Springer-Verlag (2001).
- [26] M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, (1993).
- [27] M. Will, *The confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev. Relativity, 9, 3 (2006).
- [28] R. Green & M. Wald, *Newtonian and Relativistic Cosmologies*, arXiv :1111.2997v2 [gr-qc] 7 Feb 2012.
- [29] L. Cervantes-Cota & G. Smoot, *Cosmology today—A brief review*, arXiv :1107.1789v1 [astro-ph.CO] 9 Jul 2011.
- [30] A. Krasinski, *Cosmological models and misunderstandings about them*, Acta Physica Polonica B42, 2263 (2011), arXiv :1110.1828v2 [gr-qc] 2 Dec 2011.
- [31] S. Kumar, *Some FRW Models of Accelerating Universe with Dark Energy*, Astrophys.Space Sci.332 :449-454, 2011, arXiv :1010.0672v1 [gr-qc] 1 Oct 2010.
- [32] S. Carroll, *The Cosmological Constant*, Living Rev. Relativity, 3, 2001, 1.
- [33] R. Caldwell, M. Kamionkowski & N. Weinberg, *Phantom Energy and Cosmic Doomsday*, arXiv :astro-ph/0302506v1 25 Feb 2003.
- [34] Miao Li, Xiao-Dong Li, S. Wang & Y. Wang, *Dark Energy*, Commun.Theor.Phys.56 :525-604,2011, arXiv :1103.5870v6 [astro-ph.CO] 7 Oct 2011.

- [35] L. Labun & J. Rafelski, *Vacuum Structure and Dark Energy*, Int.J.Mod.Phys.D19 :2299-2304,2010, arXiv :1011.3497v1 [hep-ph] 15 Nov 2010.
- [36] Xiao-Dong Li, Shuang Wang, Qing-Guo Huang, Xin Zhang, and Miao Li, *Dark Energy and Fate of the Universe*, *Science China-Physics Mechanics & Astronomy* 55 (2012) 1330-1334, arXiv :1202.4060v2 [astro-ph.CO] 24 Apr 2012.
- [37] D. Langlois, *Lectures on inflation and cosmological perturbations*, arXiv :1001.5259v1 [astro-ph.CO] 28 Jan 2010.
- [38] K. Enqvist, *Cosmological inflation*, CERN Yellow Report CERN-2012-001, pp. 207-215 , arXiv :1201.6164v1 [gr-qc] 30 Jan 2012.
- [39] J. Dunkley *et al*, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP1) Observations*, arXiv :0803.0586v2 [astro-ph] 19 Oct 2008.
- [40] R.Brandenberger, *The Matter Bounce Alternative to In ationary Cosmology*, arXiv :1206.4196v1 [astro-ph.CO] 19 Jun 2012.

Résumé

Ce mémoire est une tentative de présenter quelques aspects de la cosmologie. Comme la cosmologie est l'étude de l'Univers à grande échelle, le cadre approprié pour l'étudier est la relativité générale. Dans la première partie de ce mémoire, on a présenté un rappel de la relativité générale et examiné la solution de Schwarzschild et les trous noirs. Dans la seconde partie, on a abordé la cosmologie dans le contexte newtonien puis dans le contexte relativiste. On a obtenu les équations de la dynamique de l'Univers dans les deux contextes. Dans le cadre relativiste, on a dérivé la métrique de Robertson-Walker et discuté ses conséquences géométriques sur l'Univers. En appliquant les équations d'Einstein sur cette métrique, on a obtenu les équations de la dynamique de l'Univers. Les différents scénarios en fonction des densités des composantes de l'Univers ont été examinés. Cela nous a permis d'estimer l'âge de l'Univers à l'instant actuel et à d'autres époques principales de son histoire. A la fin, on a présenté la théorie de l'inflation, la théorie qui décrit l'évolution de l'Univers pendant les époques extrêmement reculées de son âge.

Abstract

This dissertation is aimed to represent some aspects of cosmology. Since cosmology is the study of the Universe at large scales, its appropriate framework is General Relativity. In the first part of this thesis, we have presented a recall of General Relativity and treated the Schwarzschild solution and Black Holes. In the second part, we have examined Cosmology in the newtonian context and then in the relativistic one. We have obtained the equations describing the Universe's dynamics in the tow contexts. In the relativistic framework, we have derived the Robertson-Walker metric and discussed its geometrical consequences on the Universe. By applying the Einstein's equations on the Robertson-Walker metric, we have got the equations of the Universe's dynamics. Depending on the density of each component of the Universe, the different scenarios of the Universe have been examined. This enabled us to estimate the age of the Universe at the present moment and at other interesting moments of its history. Finally, we have discussed the theory of inflation, the theory assumed describing the Universe's evolution at its very early stages.

المخلص

هذه المذكرة هي محاولة لتقديم بعض مظاهر الكوسمولوجيا (علم الكونيات). بما أن الكوسمولوجيا تهتم بدراسة الكون على السلم الكبير، فإن الإطار المناسب لدراسة هذا العلم هو نظرية النسبية العامة. في الجزء الأول من هذه المذكرة، قدمنا تذكيراً بنظرية النسبية العامة واستعرضنا حل شوارزشيلد (Schwarzschild) و الثقوب السوداء. في الجزء الثاني، تطرقنا إلى الكوسمولوجيا في ضوء نظرية نيوتن ثم نظرية النسبية العامة. لقد حصلنا على المعادلات التي تصف ديناميكيا الكون في إطار النظريتين. في إطار النظرية النسبية، استخرجنا المتر المتري لروبيرتسون-والكر (Robertson-Walker) وناقشنا نتائجه الهندسية على الكون. بتطبيق معادلات اينشتاين على المتر المتري لروبيرتسون-والكر حصلنا على معادلات ديناميكيا الكون. اعتمادا على كثافة كل مكون من مكونات الكون، استعرضنا مختلف مصائر الكون. هذا مكننا من تقدير عمر الكون في الوقت الحالي وفي مراحل أخرى مهمة من تاريخه. وفي النهاية ناقشنا نظرية التضخم، وهي النظرية التي يعتقد أنها تصف تطور الكون خلال مراحل الجد مبكرة.