République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A .MIRA de Béjaïa.

Faculté des Sciences Exactes.

Département de Recherche Opérationnelle.

Mémoire de Magister

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option: Modélisation Mathématique et Techniques de Décision.

Thème : Contrôle Optimal d'un Système Dynamique Linéaire avec Coût Quadratique et Etat Initial Libre.

Présenté par : M^{elle} MEDJDOUB Samia

Devant le jury d'examen composé de**:**

Président :	**Mr. Mohammed Said RADJEF**	**Professeur**	**Université de Béjaïa.**
Rapporteur :	**Mr.Mohand Ouamer BIBI**	**Professeur**	**Université de Béjaïa.**
Examinateur :	**Mr.Mohamed AIDENE**	**Professeur**	**Université de Tizi Ouzou.**
Examinateur :	**Mr. Karim ABBAS**	**MCA**	**Université de Béjaïa.**

2012

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Magister

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème : Contrôle Optimal d'un Système Dynamique Linéaire avec Coût Quadratique et État Initial Libre

Présenté par : M^{elle} MEDJDOUB Samia

Rapporteur Mr.M.O.Bibi Professeur. Université de Béjaia

2012

Remerciements

Je tiens à remercier le bon Dieu qui m'a donné la force, le courage et la santé pour pouvoir mener à terme ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à Mr.Mohand Ouamer BIBI, professeur à l'université de Béjaïa sous la direction duquel j'ai eu le plaisir de travailler. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

J'exprime mes sincères remerciements à Mr. Mohammed Said RADJEF, professeur à l'université de Béjaïa qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je suis honorée de la présence dans ce jury de Mr.Mohamed AIDENE, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou et de Mr. Karim ABBAS, Maître de conférences à l'université de Béjaïa et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à ma chère famille, particulièrement mes parents, et à tous mes amis (es), ce modeste travail leur est dédié.

Table des matières

Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final en tenant compte éventuellement de certains critères.

Les systèmes étudiés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard, etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, éléctricité, électronique, biologie, chimie, économie, etc. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contôle optimal).

En mathématique, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notament dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. Historiquement, La théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique.

Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryaguine, fondé par ce dernier en 1956 et qui donne une condition nécessaire d'optimalité, permettant ainsi de calculer les trajectoires optimales.

La théorie moderne du contrôle optimal repose sur la publication en russe en 1958 (1962 en anglais) du livre " Théorie Mathématique des Processus Optimaux" par Pontryaguine, Boltyanski, Gamkrelidze et Mischenko. L'importance de ce livre ne réside pas seulement dans la formulation rigoureuse du calcul des variations avec les variables de contrôle bornées, mais également dans la preuve du principe du maximum pour les problèmes de contrôle optimal.

Dès lors, la théorie a connu un esssor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certains tâches : systèmes de freinage ABS, assistance à la conduite, servomoteurs, chaînes industrielles de montage, opération au laser, robotique, satellites, thermostats, circuits, contrôle des flux routiers, ferroviaires, aériens, boursiers, fluviaux, photographie numérique, filtrage et reconstruction d'images, lecteurs CD et DVD, réseau informatique, moteurs de recherche sur internet, etc. Les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal.

Les points forts de la théorie ont été la découverte de la méthode de programmation dynamique, l'introduction de l'analyse fonctionnelle dans la théorie des systèmes optimaux, la découverte des liens entre les solutions d'un problème de contrôle optimal et les résultats de la théorie de stabilité de Lyapaunov. Plus tard sont apparues les fondations de la théorie du contrôle stochastique et du filtrage des systèmes dynamiques ainsi que le contrôle d'équations aux dérivées partielles (contrôle optimal des systèmes distribués).

Les problèmes de contôle optimal des systèmes dynamiques linéaires ont été étudiés dans la littérature d'une manière très détaillée ([14], [22], [30], [32], [33], [37], [40], [43], [49]). Néamoins, il est difficile de trouver des méthodes numériques très efficaces qui prennent en compte toutes les spécifités du problème.

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires avec un coût quadratique et un état initial libre. Ces systèmes sont d'une grande importance dans la pratique. En effet, un coût quadratique est souvent très naturel dans un problème, par exemple lorsqu'on veut minimiser l'écart au carré par rapport à une trajectoire nominale (problème de poursuite).

Kalman en 1960 a proposé de minimiser un critère de performance quadratique, ce qui a permis de réaliser un compromis entre la qualité de la régulation et l'énergie dépensée en pondérant l'erreur de sortie et l'amplitude de la commande.

Le problème étudié dans ce mémoire se présente comme suit : l'état initial du système à optimiser est inconnu exactement, mais une information à priori de cet état est donnée par l'inclusion $x(0) \in X_0$. Par analogie avec la théorie de filtration, on dit que l'ensemble X_0 est la distribution à priori de l'état initial à contrôler.

Beaucoup d'algorithmes ont été développés pour la résolution du problème de programmation quadratique convexe, la méthode la plus classique étant celle de Wolfe qui n'est autre que la méthode du simplexe légèrement modifiée. Son principe est la résolution du système de Kuhn-Tucker et consiste à trouver une solution réalisable de base pour un système linéaire avec une condition supplémentaire du type $x_j \delta_j = 0$, où x et δ sont des vecteurs de même dimension.

Il existe aussi une autre méthode dite "méthode directe de support" qui est une généralisation de celle du simplexe. Son principe est de changer un seul indice non basique j_0, mais les plans de support admettent encore d'autres métriques pour les directions d'amélioration. Ainsi, on présentera ici la méthode dite "adaptée", développée par R. Gabassov, O.I. Kostyukova et V.M. Raketski, qui a servi pour la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe à variables bornées. Son principe est pratiquement le même que celui de la méthode directe de support, ie, qu'au lieu d'utiliser la métrique du simplexe en changeant un seul indice non basique, on utilise plutôt une autre métrique dite "adaptée" qui consiste à considérer tous les indices non optimaux en fonction desquels on construit une direction d'amélioration de la fonction objectif et le pas le long de cette direction.

Pour finir cette brève introduction, nous indiquons le plan de ce mémoire.

Le chapitre 1 comporte une introduction aux systèmes linéaires et à la commande optimale.
Le chapitre 2 présente la méthode adaptée de la programmation quadratique convexe.
Notre contribution dans ce mémoire se trouve dans le troisième chapitre, ce dernier est consacré à l'optimisation d'un système dynamique linéaire avec un coût quadratique et un état initial libre, et ce, en utilisant la méthode adaptée de la programmation quadratique convexe.

Après avoir formulé le problème et donné les notions de support et de support généralisé, on démontre les critères d'optimalité et de suboptimalité sur la base desquels est construit l'algorithme de résolution. Ce dernier est illustré par un exemple numérique.

Chapitre 1

Introduction aux Systèmes Linéaires et à la Commande Optimale

1.1 Introduction

Partout, l'homme rencontre dans sa vie plusieurs tâches qui sont trop répétitives ou trop complexes, pénibles ou délicates, qui ne peuvent être confiées à lui. Pour ces raisons, il fallait substituer la machine à l'homme dans de telles opérations. Cette machine doit être conçue pour assurer des tâches avec une intervention minimale de l'homme ou même sans intervention. On dit qu'on est devant un problème d'automatisation des systèmes. Automatiser un système, c'est le transformer en vu d'y réduire ou d'y supprimer toute intervention de l'être humain et toute influence indésirable de tout autre élément externe. L'automatique est une science qui fournit la théorie et les méthodes pour concevoir et réaliser les commandes automatiques des systèmes ou procédés. Ainsi un système automatique est capable de fonctionner d'une manière autonome.

1.2 Système contrôlé

Un système contrôlé (ou commandé) est un système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(t) \in M, \qquad u(t) \in V. \tag{1.2.1}$$

En général, le vecteur des états $x(.)$ appartient à une variété différentielle M de dimension n (on supposera que M est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$) et les contrôles $u(.)$ appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles V, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty)$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisamment régulier de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in M$ et tout contrôle admissible $u(.) \in V$, le système (1.2.1) admet une unique solution $x(t)$ telle que $x(0) = x_0$ et que cette solution est définie sur $[0, +\infty)$. On notera cette solution $x(t, x_0, u(.))$.

Ainsi, nous supposons que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy de sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité de la solution $x(t, x_0, u(.))$.

1.3 Stratégie de contrôle d'un système dynamique

Les systèmes automatiques peuvent fonctionner selon l'une des deux configurations suivantes : en boucle ouverte ou en boucle fermée.

- Les systèmes en boucle ouverte : ce sont des systèmes dont l'état de la sortie à un instant donné t ne dépend que de la nature du système et de l'entrée.
- Les systèmes en boucle fermée : ce sont des systèmes dont l'état de la sortie à un instant donné t dépend de la nature du système, de l'entrée et des états antérieurs de la sortie.

1.4 Approximation linéaire d'un système contrôlé

Les systèmes de contrôle sont en général non linéaires, on est alors très souvent amené à linéariser le système le long d'une trajectoire, par exempple dans des problèmes de stabilisation.

L'intérêt de cette linéarisation réside dans le fait que l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez développée comme dans le cas linéaire, qui a été étudié dans la littérature de manière très détaillée.

Le système linéaire s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (1.2.1) autour d'un point d'équilibre (x_e, u_e) pour lequel $f(x_e, u_e) = 0$. En effet, si on pose :

$$\tilde{x} = x - x_e, \qquad \tilde{u} = u - u_e, \qquad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e),$$

on obtient l'équation :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} + \circ(\tilde{x}, \tilde{u}).$$

Le système linéaire commandé $\quad \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad$ s'appelle alors l'approximation linéaire (ou le linéarisé tangent) du système non linéaire (1.2.1).

1.5 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

1.5.1 Contrôlabilité

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle. Plus précisément, on pose la définition suivante :

Définition 1.5.1. On dit que le système (1.2.1) est contrôlable (ou commandable) si pour tous les états $x_0, x_1 \in M$, il existe un temps fini t_1 et un contrôle admissible $u(.) : [0, t_1] \to U$ tel que $x(t_1, x_0, u(.)) = x_1$.

1.5.2 Critère de contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire, dûe à Kalman.

Théorème 1.5.1. *Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, est contrôlable si et seulemnt si la matrice de contrôlabilité (ou de commandabilité) de Kalman $(B, AB, ..., A^{n-1}B)$ est de rang n. On dit alors que la paire (A,B) est commandable.*

1.6 Problème de contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal peut se formuler de la manière suivante :

Soit un système de contrôle, dont la position à un instant donné est représentée par un vecteur. Des contrôles agissent sur le système, affectant la dynamique, sous forme de forces extérieures, de potentiels thermique ou électrique, etc. Une équation est donnée, reliant les variables et modélisant la dynamique du système. Typiquement on peut considérer le cas d'un système d'équations différentielles. Il faut utiliser l'information présente et les caractéristiques du problème pour construire des contrôles adéquats, permettant de réaliser un but précis. Des contraintes sont donc imposées sur le processus ou sur les contrôles, qu'il faut prendre en considération. On se donne un critère permettant de mesurer la qualité du processus conduit. Il peut se présenter sous la forme d'une fonctionnelle dépendant de l'état et des contrôles. En tenant compte des contraintes précédentes, on cherche alors à minimiser (ou maximiser) ce critère de qualité. Par exemple, on peut souhaiter se déplacer en un temps minimal d'un point à un autre. Notons que l'allure des trajectoires optimales dépend fortement du critère d'optimisation.

La problématique générale du contrôle optimal est la suivante : Considérons un système dynamique général

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \geq 0, \tag{1.6.2}$$

où f est une application de classe C^1 de $I \times M \times V$ dans $\mathbb{R}^n$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, M un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $(t_0, x_0) \in I \times M$. Par ailleurs, on suppose que les contrôles $u(.)$ appartiennent à un sous ensemble de $L^\infty_{Loc}(I, \mathbb{R}^m)$. Ces hypothèses assurent pour tout contrôle $u(.)$ l'existence et l'unicité d'une solution $x_u(t)$ sur un intervalle $J \subset I$ du problème de Cauchy (1.6.2).

Par commodité d'écriture, on suppose que $t_0 = 0$. Pour tout contrôle u, la trajectoire associée $x_u(.)$ est définie sur un intervalle maximal $[0, t_e(u)[$, où $t_e(u) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Pour tout $t_1 > 0$, $t_1 \in I$, on note U_{t_1} l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, t_1]$, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles tels que la trajectoire associée soit bien définie sur $[0, t_1]$, autrement dit $t_1 < t_e(u)$.

Soit L une fonction de classe C^1 sur $I \times M \times V$ et φ une fonction continue sur M. Pour tout contrôle $u \in U_{t_1}$, on définit le coût de la trajectoire associée $x_u(.)$ sur l'intervalle $[0, t_1]$:

$$J(u) = \varphi(t_1, x_u(t_1)) + \int_0^{t_1} L(t, x_u(t), u(t))dt. \tag{1.6.3}$$

Soient M_0 et M_1 deux sous ensembles de M ; Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(.)$, solutions de $\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t))$, telles que $x_u(0) \in M_0$ et $x_u(t_1) \in M_1$, et minimisant le coût $J(u)$.

1.7 Rappels et préliminaires

1.7.1 Application entrée-sortie

Considérons pour le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(0) = x_0, \tag{1.7.4}$$

le problème de contrôle suivant : étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps t_1 et un contrôle u sur $[0, t_1]$ tel que la trajectoire x_u associée à u, solution de (1.7.4), vérifie : $x_u(0) = x_0$ et $x_u(t_1) = x_1$. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 1.7.1. Soit $t_1 > 0$. L'application entrée-sortie en temps t_1 du système contrôlé (1.7.4) initialisé à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_{t_1} :& U \to \mathbb{R}^n \\ & u \mapsto x_u(t_1), \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, ie, l'ensemble des contrôles u tel que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, t_1]$.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps t_1 associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u.

1.8 Principe du maximum de Pontryaguine

Le principe du maximum de Pontryaguine a révolutionné la théorie du contrôle optimal, dès la publication (en russe en 1958) du livre " the Mathematical Theory of Optimal Processes" par les mathématiciens soviétiques Pontryaguine, Boltyanski, Gamkrelidze et Mischenko.

Un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution dans un problème de contrôle optimal est connu sous le nom du " Principe du Maximum de Pontryaguine".
Soit le système :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1.8.5}$$

où f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^{1+n+m}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.8.1. Le Hamiltonien du système (1.8.5) est la fonction

$$\begin{aligned} H :& \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ & (t, x, \psi, u) \mapsto H(t, x, \psi, u) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle, \end{aligned}$$

où $\langle . \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.8.1. *Avec les notations matricielles, on peut écrire :*

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \psi'(t) f(t, x(t), u(t)). \tag{1.8.6}$$

Le vecteur qui correspond au vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\psi : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est appelé vecteur d'état adjoint.*

1.8.1 Enoncé général du Principe du Maximum de Pontryaguine

Théorème 1.8.1. *[51]. Dans* $\mathbb{R}^n$ *on considère le système de contrôle (1.8.5), où* f *est une application de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}^{1+n+m}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle* $[0, t_1[$ *de* $\mathbb{R}^+$ *et à valeurs dans* $U \subset \mathbb{R}^m$*. Soient* M_0 *et* M_1 *deux sous-ensembles de* $\mathbb{R}^n$*. On note* U *l'ensemble des contrôles admissibles* u *dont les trajectoires associées relient un point initial de* M_0 *à un point final de* M_1 *en temps* $t(u) \leq t_1$*. Par ailleurs, on définit le coût d'un contrôle* u *sur* $[0, t_1]$ *:*

$$J(t_1, u) = \varphi(t_1, x(t_1)) + \int_0^{t_1} L(s, x(s), u(s)) ds, \tag{1.8.7}$$

où $L : \mathbb{R}^{1+n+m} \to \mathbb{R}$ *et* $\varphi : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ *sont de classe* C^1*, et* $x(.)$ *est la trajectoire associée au contrôle* u*, solution de (1.8.5).*

On considère le prolème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 *à* M_1 *et minimisant le coût (1.8.7). Si le contrôle* $u \in U$ *associé à la trajectoire* $x(.)$ *est optimal sur* $[0, t_1]$*, alors il existe une application* $\psi(.) : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ *absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel* $\psi^0 \leq 0$ *tel que le couple* $(\psi(.), \psi^0)$ *est non trivial, et tels que pour tout* $t \in [0, t_1]$ *:*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi}(t, x(t), \psi(t), \psi^0, u(t)), \tag{1.8.8}$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), \psi(t), \psi^0, u(t)), \tag{1.8.9}$$

où $H(t, x, \psi, \psi^0, u) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle + \psi^0 L(t, x, u)$ *est le Hamiltonien du système, et on a la condition du maximum presque partout sur* $[0, t_1]$ *:*

$$H(t, x(t), \psi(t), \psi^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), \psi(t), \psi^0, v). \tag{1.8.10}$$

Remarque 1.8.2. *La convention* $\psi^0 \leq 0$ *conduit au principe du maximum. La convention* $\psi^0 \geq 0$ *conduirait au principe du minimum.*

Définition 1.8.2. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(.), \psi(.), \psi^0, u(.))$, solution des équations (1.8.8), (1.8.9) et (1.8.10) .

Si $\psi^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale, et si $\psi^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

1.8.2 Principe du Maximum avec Contrainte sur l'état

Le principe du maximum tel qu'il vient d'être énoncé prend en compte des contraintes sur le contrôle, mais ne prend pas en compte d'éventuelles contraintes sur l'état. Ce problème est en effet beaucoup plus difficile. Il existe plusieurs variantes du principe du maximum avec contraintes sur l'état. La théorie est cependant beaucoup plus compliquée. Une différence fondamentale avec le principe du maximum classique est que la présence de contraintes sur l'état peut rendre le vecteur adjoint discontinu. On rajoute alors des conditions de saut, ou de jonction.

Méthode de pénalisation

Un moyen simple de manipluler des contraintes sur l'état est de résoudre un problème de contrôle optimal modifié, où, comme dans le théorie linéaire quadratique, on pondère cette contrainte de manière à la forcer à être vérifiée.
Le principe de cette méthode est le suivant : supposons qu'on veuille imposer à l'état d'appartenir à un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$. Donnons-nous une fonction φ sur $\mathbb{R}^n$, nulle sur C et strictement positive ailleurs. Alors , en ajoutant au coût $J(t, u)$ le scalaire $\lambda \int_0^{t_1} \varphi(x(t))dt$, où $\lambda > 0$ est un poids que l'on peut choisir assez grand, on espère que la résolution de ce problème de contrôle optimal modifié va forcer la trajectoire à rester dans l'ensemble C. En effet, si $x(t)$ sort de l'ensemble C, et si λ est grand, alors le coût correspondant est grand, et probablemnt la trajectoire ne sera pas optimale.

Chapitre 2

Méthode Adaptée de Programmation Quadratique Convexe

Dans ce chapitre, nous allons d'abord faire un rappel sur la programmation quadratique convexe, puis on va présenter une méthode dite adaptée, utilisée pour minimiser un problème de programation quadratique à variables bornées.

Cette méthode a été développée par N. Abassi et M.O. Bibi en 2004 [1] en s'inspirant de la méthode directe de support en programmation quadratique convexe et des travaux de R. Gabassov, F.M. Kirillova, O.I. Kostyukova, V.M. Raketsky ([27], [28]), ainsi que celui de A.Faradji [23], qui portent sur la minimisation d'un problème de programmation quadratique convexe à variables bornées.

Cette méthode tient compte des spécifités du problème et de ce fait, elle traite les contraintes telles qu'elles se présentent, c'est-à-dire, sans chercher à les modifier. Cela évite d'agrandir les dimensions du problème et permet donc d'économiser l'espace mémoire sur ordinateur. En outre, cette méthode présente l'avantage d'arrêter l'algorithme dès qu'une solution suboptimale est obtenue. Sa particularité est le fait de changer tous les indices non optimaux à la fois.

2.1 Rappels sur la programmation quadratique convexe

2.1.1 Formes quadratiques et leurs propriétés

Définition 2.1.1. (**Forme quadratique**)

Une forme quadratique de n variables $x_1, ..., x_n$ est une fonction réelle qui s'écrit de la façon suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{2.1.1}$$

En posant $x = (x_1, ..., x_n)$, $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$, on a alors :

$$F(x) = x' A x. \tag{2.1.2}$$

La matrice A peut toujours être supposée symétrique ; sinon on définit une nouvelle matrice D symétrique telle que

$$D = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow D' = \frac{(A + A')'}{2} = \frac{A' + A}{2} = D.$$

Ainsi, on peut écrire

$$F(x) = x'Ax = x'Dx, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour cela, il est naturel de considérer que la matrice associée à une forme quadratique est toujours symétrique.

Définition 2.1.2. (**Gradient d'une forme quadratique**)

Soit une forme quadratique avec une matrice D symétrique :

$$F(x) = x'Dx. \tag{2.1.3}$$

En écrivant la matrice D sous forme de vecteurs colonnes

$$D = (d_1, d_2, ..., d_j, ..., d_n),$$

on aura

$$F(x) = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n) \begin{pmatrix} d_1'x \\ d_2'x \\ \vdots \\ d_j'x \\ \vdots \\ d_n'x \end{pmatrix} = x_1 d_1'x + x_2 d_2'x + \ldots + x_j d_j'x + \ldots + x_n d_n'x.$$

Par conséquent, le gradient de $F(x)$ est :

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= d'_1x + d_{11}x_1 + ... + d_{1j}x_j + ... + d_{1n}x_n \\
&= 2d'_1x \\
\frac{\partial F}{\partial x_2} &= d'_2x + d_{21}x_1 + ... + d_{2j}x_j + ... + d_{2n}x_n \\
&= 2d'_2x \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial x_j} &= d'_jx + d_{j1}x_1 + ... + d_{jj}x_j + ... + d_{jn}x_n \\
&= 2d'_jx \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial x_n} &= d'_nx + d_{n1}x_1 + ... + d_{nj}x_j + ... + d_{nn}x_n \\
&= 2d'_nx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\nabla F(x) = 2 \begin{pmatrix} d'_1x \\ d'_2x \\ \vdots \\ d'_jx \\ \vdots \\ d'_nx \end{pmatrix} = 2Dx.$$

Définition 2.1.3. (**Fome quadratique définie positive**)

$F(x)$ est dite définie positive si $x'Dx > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. On dit que D est définie positive et se note $D > 0$.

Définition 2.1.4. (**Fome quadratique semi-définie positive**)

$F(x)$ est dite semi-définie positive si $x'Dx \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\exists x_0 \neq 0$ tel que $x'_0Dx_0 = 0$. On dit que D est semi-définie positive et se note $D \geq 0$.

Définition 2.1.5. (**Fome quadratique définie négative**)

$F(x)$ est dite définie négative si $x'Dx < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. On dit que D est définie négative et se note $D < 0$.

Définition 2.1.6. (**Fome quadratique semi-définie négative**)

$F(x)$ est dite semi-définie négative si $x'Dx \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. On dit que D est semi-définie négative et se note $D \leq 0$.

Définition 2.1.7. (**Fome quadratique non définie**)

Une forme quadratique $F(x)$ est dite non définie si elle est positive pour certains valeurs de x et négative pour d'autres.

Définition 2.1.8. (**Mineur d'une matrice** D)

Considérons la matrice symétrique suivante :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le mineur de la matrice D, formé des lignes $i_1, i_2, ..., i_p$, et des colonnes $j_1, j_2, ..., j_p$, sera noté comme suit :

$$D\begin{pmatrix} i_1, i_2, ..., i_p \\ j_1, j_2, ..., j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{i_1 j_1} & \dots & d_{i_1 j_p} \\ d_{i_2 j_1} & \dots & d_{i_2 j_p} \\ . & \dots & . \\ d_{i_p j_1} & \dots & d_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Ce mineur est dit principal si $i_1 = j_1, i_2 = j_2, ..., i_p = j_p$, c'est à dire s'il est formé de lignes et de colonnes portant les mêmes numéros. Les mineurs suivants

$$D_1 = d_{11},\ D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

sont appelés mineurs principaux successifs.

Théorème 2.1.1. *[1](**Critère de sylvester**)*

(i) *Pour qu'une matrice D soit définie positive ($D > 0$), il est nécessaire et suffisant que les mineurs principaux successifs de D soient positifs :*

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0, ..., D_n > 0;$$

(ii) *pour qu'une matrice D soit semi-définie positive ($D \geq 0$), il est nécessaire et suffisant que les mineurs principaux de D soient non négatifs :*

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, ..., i_p \\ i_1, i_2, ..., i_p \end{pmatrix} \geq 0, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n,\ p = 1, 2, \ldots, n.$$

2.1.2 Convexité

La notion de convexité joue un rôle fondamental dans la théorie de l'optimisation. Dans le cas de la minimisation convexe, les conditions d'optimalité sont à la fois nécessaire et suffisantes.

Définition 2.1.9. (**Ensemble convexe**)

Un ensemble S dans $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si $\forall x_1, x_2 \in S$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, le vecteur $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.

Définition 2.1.10. (**Hyperplan**)

On appelle hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tout ensemble H de dimension $(n-1)$, ayant la forme :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a'x = \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ est appelé le vecteur normal à H. Cet hyperplan sépare l'espace $\mathbb{R}^n$ en deux demi-espaces :

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a'x \leq \alpha\}, \qquad H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a'x \geq \alpha\},$$

où H^- et H^+ sont convexes.

Définition 2.1.11. (**Polyèdre**)

L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces est un polyèdre convexe. Un polyèdre borné est appelé polytope.

Définition 2.1.12. (**Fonction convexe**)

Une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe S de $\mathbb{R}^n$, est dite convexe, si $\forall x, y \in S$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{2.1.4}$$

Propriété 2.1.1. *(Forme quadratique convexe)*
Une forme quadratique $F(x) = x'Dx$ est dite convexe si est seulement si D est semi-définie positive.

2.1.3 Programmation non linéaire

Soit f une fonction non linéaire, définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1. Le problème de programmation non linéaire, consiste à trouver $x^* \in S \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x^*) = \min f(x),\ x \in S. \tag{2.1.5}$$

L'ensemble des contraintes S est donné en général par des équations et des inéquations, linéaires ou non. Il peut être représenté de la manière suivante :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/ g(x) \leq 0\}, \tag{2.1.6}$$

où la fonction g est une fonction vectorielle, définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et de classe C^1, avec

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix},\ \nabla g(x) = (\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \ldots, \nabla g_m(x)),$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Le problème que l'on étudie ici dans ce travail est celui de la recherche du minimum d'une fonction quadratique convexe avec des contraintes d'égalités et d'inégalités, où le domaine admissible est du type :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b,\ d^- \leq x \leq d^+\}.$$

Pour cela, nous allons rappeler les résultats importants concernant les problèmes de minimisation avec contraintes.
Ainsi, soit f une fonction réelle, définie sur un ensemble ouvert S de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.13. (**Minimum local**)

La fonction f admet un minimum local en $x^* \in S$ si $\exists B(x^*, \varepsilon) = \{x / \|x - x^*\| < \varepsilon\} \subset S$ telle que

$$f(x) \geq f(x^*), \forall x \in B(x^*, \varepsilon). \tag{2.1.7}$$

Définition 2.1.14. (**Minimum local au sens strict**)

La fonction f admet un minimum local au sens strict en $x^* \in S$ si $\exists B(x^*, \varepsilon) = \{x / \|x - x^*\| < \varepsilon\} \subset S$ telle que

$$f(x) > f(x^*), \forall x \in B(x^*, \varepsilon), \, x \neq x^*. \tag{2.1.8}$$

Définition 2.1.15. (**Minimum global**)

La fonction f admet un minimum global en $x^* \in S$ si

$$f(x) \geq f(x^*), \forall x \in S. \tag{2.1.9}$$

Définition 2.1.16. (**Direction admissible**)

Le vecteur $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, est appelé direction admissible en un point $x \in S$ s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $x + \theta d \in S, \quad \forall \theta \in [0, \alpha]$.

Lemme 2.1.2. *Si x^* est un minimum local de f et si f est différentiable en x^*, alors pour toute direction d admissible en x^*, on a :*

$$d' \nabla f(x^*) \geq 0.$$

Théorème 2.1.3. *[1] Si x^* est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$ et si f est différentiable en x^*, alors*

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{2.1.10}$$

Un point vérifiant la condition (2.1.10) est appelé un point stationnaire.

Théorème 2.1.4. *[1] Si x^* est un minimum local (global) de f sur $\mathbb{R}^n$ et si f est deux fois différentiable en x^*, alors*

i) $\nabla f(x^*) = 0$ *(stationnarité) ;*

ii) *$H(x^*)$ est semi-définie positive, où $H(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ est le Hessien de la fonction f au point x^*.*

Théorème 2.1.5. *[1](**Conditions suffisantes de minimalité locale**)*
Si x^* est un point où f est deux fois différentiable, et si

(i) $\nabla f(x^*) = 0$ *(stationnarité) ;*

(ii) $H(x^*)$ *est définie positive ;*

alors x^* est un minimum local strict de f sur $\mathbb{R}^n$.

Conditions nécessaire de minimalité de Karush-Kuhn-Tucher

Soit f une fonction non linéaire, définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1. Le problème de minimisation de la fonction f avec des contraintes linéaires de type inégalité se présente ainsi :

$$f(x) \to \min, \tag{2.1.11}$$

sous les contraintes suivantes :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) = A'_i x - b_i \leq 0,\ i \in I = \{1, 2, ..., m\}\}, \tag{2.1.12}$$

où b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et A est une matrice d'ordre $m \times n$, avec $\text{rang}A = m < n$, formée des vecteurs-colonnes et des vecteurs-lignes suivants :

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n), \qquad A = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ \vdots \\ A'_m \end{pmatrix}, \qquad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix},$$

où $g(x)$ est une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.1.17. (**Solution admissible**)
On appelle solution admissible (réalisable) ou plan du problème (2.1.11)-(2.1.12), tout vecteur x vérifiant les inégalités (2.1.12).

Définition 2.1.18. (**Fonction de Lagrange**)
La fonction $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ est appelée fonction de Lagrange associée au problème de minimisation de f sur S, où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \geq 0$, est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

Définition 2.1.19. L'ensemble des indices actifs au point x^* est formé des indices i de I qui vérifient $g_i(x^*) = 0$. Il est noté comme suit :

$$I_a = I_a(x^*) = \{i \in I/g_i(x^*) = 0\}. \tag{2.1.13}$$

Le théorème de Karush-Kuhn-Tucher est fondamental et donne sous certaines conditions qu'on appelle "qualification des contraintes", une condition nécessaire de minimalité locale du problème (2.1.11)-(2.1.12).

Faire l'hypothèse de qualification des contraintes (Kuhn-Tucher 1951, Abadie 1967) en x^* qu'on note $(QC)_{x*}$, revient à chercher l'existence d'une direction d pointant à l'intérieur du cône convexe défini par :

$$K = \{d \in \mathbb{R}^n/\nabla g_i(x^*)'d \leq 0, \forall i \in I_a(x^*)\}, \tag{2.1.14}$$

c'est à dire :

$$(QC)_{x*} \Leftrightarrow \exists d/\nabla g_i(x^*)'d < 0, \quad i \in I_a(x^*). \tag{2.1.15}$$

Lemme 2.1.6. *Pour que (QC) soit verifiée en tout point $x \in S$, il suffit que l'une des conditions (a) ou (b) soit réalisée :*

(a) *toutes les fonction g_i sont linéaires (Karlin 1959) ;*

(b) *toutes les fonction g_i sont convexes et S a un intérieur non vide (Slater 1950).*

Pour que (QC) soit verifiée en un point $x^* \in S$, il suffit que l'on a :

(c) *les gradients $\nabla g_i(x^*)$, $i \in I_a(x^*)$, des contraintes saturées en x^* sont linéairement indépendants (Fiacco et McCormick 1968)*

Théorème 2.1.7. *(**théorème de Karush-Kuhn-Tucher**)*

Si x^* est un minimum local de f sur S et si $(QC)_{x*}$ a lieu, alors il existe $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*) \geq 0$ tel que :

(i) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$

(ii) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i \in I.$

Ce qu'exprime (i) n'est autre que $\nabla L_x(x^*, \lambda^*) = 0$, qui n'est d'après Lagrange que l'extension de la condition de minimalité $\nabla f(x^*) = 0$, établie pour un problème de minimisation sans contraintes de la fonction de Lagrange $L(x, \lambda)$.

2.1.4 Programmation convexe

L'hypothèse de convexité apporte élégance et simplicité à la théorie de l'optimisation. En particulier, les conditions nécessaires de minimalité deviennent également suffisantes, et tout le résultat acquiert un caractère global.

Définition 2.1.20. On dit qu'un programme mathématique est convexe (resp. strictement convexe), s'il consiste à minimiser une fonction convexe (resp. strictement convexe) sur un domaine convexe.

L'objet de la programmation convexe est l'étude des problèmes convexes et des algorithmes de résolution correspondants. Notons que :

- Les problèmes convexes sont synonymes de minimisation.
- Les problèmes convexes sont les bons problèmes de la théorie : ceux pour lesquel il existe des algorithmes de résolution efficaces.
- L'hypothèse de convexité ne garantit cependant ni l'existence ni l'unicité d'une éventuelle solution.

Citons certaines propriétés et théorèmes concernant la programmation convexe.

Propriété 2.1.2. *Soit f une fonction convexe définie sur un convexe S de $\mathbb{R}^n$. Alors, l'ensemble des points où f atteint son minimum est convexe.*

Propriété 2.1.3. *Tout problème strictement convexe admet au plus une solution.*

Propriété 2.1.4. *Tout minimum local est un minimum global.*

Propriété 2.1.5. *Si la fonction f est strictement convexe, alors son minimum global est atteint en un seul point x^*.*

Considérons d'abord le problème sans contraintes donné sous la forme (2.1.11), où f est une fonction convexe de classe C^1.

Théorème 2.1.8. *Soit f une fonction convexe continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x^* est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *x^* est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$.*

(iii) *x^* est un point stationnaire de f,i.e, $\nabla f(x^*) = 0$.*

Remarque 2.1.1. *Dans le cas convexe, la stationnarité à elle seule constitue une condition nécessaire et suffisante de minimalité globale.*

Considérons maintenant le problème avec contraintes donné sous la forme (2.1.11)-(2.1.12), où f est une fonction convexe de classe C^1.

Théorème 2.1.9. *Soit (x^*, λ^*) un couple de vecteurs tel que $g(x^*) \leq 0$ et $\lambda^* \geq 0$, vérifiant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker :*

(i) $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$,

(ii) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i \in I$.

Alors le vecteur x^* constitue un minimum global de f sur S.

Programmation quadratique convexe

Il s'agit d'une classe de problèmes d'optimisation où la fonction objectif est quadratique, s'écrivant sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x, \tag{2.1.16}$$

avec D symétrique, que l'on minimise sur un polyèdre convexe fermé. Ce genre de programme est convexe dès que la matrice D est semi-définie positive.

Remarque 2.1.2. *On remarquera qu'un problème linéaire n'est autre qu'un problème quadratique dégénéré $(D = 0)$, et c'est toujours un problème convexe.*

2.1.5 Dualité en programmation quadratique convexe

On retrouve souvent le concept de la dualité dans la littérature sur la programmation mathématique. Le but est de trouver une formulation alternative équivalente du problème de programmation mathématique, qui convient le plus à la pratique ou qui a une signification théorique importante. Le problème original est dit problème primal et le problème transformé est le problème dual. Les variables dans le problème dual peuvent être interprétées comme des multiplicateurs de Lagrange pour le cas linéaire et prennent la valeur λ^* comme solution duale, où λ^* est le multiplicateur associé à la solution optimale primale x^*. Cependant, dans le cas non linéaire il existe toujours une fonction objectif, souvent reliée à la fonction de Lagrange, qui doit être optimisée. Ici, on traitra de la dualité associée à un problème de programation convexe comme problème primal.

Remarque 2.1.3. *Si le problème primal n'est pas convexe, alors le problème dual peut ne pas avoir de solution à partir de laquelle la solution primale peut être déduite.*

Grâce à cette remarque, on déduit qu'on ne peut pas appliquer la dualité comme technique générale dans le but de chercher une solution.

Nous allons par conséquent nous contenter d'introduire un résultat de base de la théorie de la dualité en programmation convexe.

Dualité en programation convexe

Définition 2.1.21. (Problème primal)
On définit un problème primal comme un problème de minimisation, qui consiste à trouver un vecteur x^*, s'il existe, tel que

$$(PCP)\begin{cases} F(x^*) = \min_S F(x), \\ x^* \in S = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \leq 0\}, \end{cases} \tag{2.1.17}$$

où F est une fonction réelle convexe, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, et g est une fonction vectorielle convexe de classe C^1, définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.1.22. (Problème dual)
On définit le problème dual de (PCP) comme un problème de maximisation, qui consiste à trouver deux vecteurs $\kappa^* \in \mathbb{R}^n$ et $y^* \in \mathbb{R}^m$, s'ils existent, tels que

$$(PCD)\begin{cases} L(\kappa^*, y^*) = \max_V L(\kappa, y), \\ (\kappa^*, y^*) \in V = \{(\kappa, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / \nabla_\kappa L(\kappa, y) = 0,\ y \geq 0\}, \end{cases} \tag{2.1.18}$$

où $L(\kappa, y) = F(\kappa) + y'g(\kappa)$ est la fonction de Lagrange associée au problème (PCP).

Les relations existantes entre le programme primal et de son dual sont données par les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.1.10. ***(théorème faible de la dualité, Wolfe 1961)***

Soit $F(x)$ et $L(\kappa, y)$ les fonctions objectifs respectivement des problèmes primal et dual. On a alors

$$L(\kappa, y) \leq F(x), \quad \forall(\kappa, y) \in V, \forall x \in S.$$

Théorème 2.1.11. ***(théorème fort de la dualité, Wolfe 1961)***

Soit x^* une solution optimale du problème primal (PCP). Alors il existe $y^* \in \mathbb{R}^m$, $y^* \geq 0$, tel que le couple (x^*, y^*) est une solution du problème dual (PCD) et on a

$$F(x^*) = L(x^*, y^*).$$

Le problème quadratique convexe à variables bornées

Soit le problème primal de programmation quadratique convexe à variables bornées :

$$\begin{aligned} F(x) = \tfrac{1}{2}x'Dx + c'x &\rightarrow min, \\ Ax &= b, \\ d^- \leq x &\leq d^+, \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

où $D' = D \geq 0$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, d^-, $d^+ \in \mathbb{R}^n$, $rangA = m < n$.

Le problème dual de (2.1.19) se formule ainsi :

$$\begin{cases} L(\kappa, y, v, w) = \frac{1}{2}\kappa' D\kappa + c'\kappa + y'(-A\kappa + b) + v'(-\kappa + d^-) + w'(\kappa - d^+) \rightarrow \max, \\ \frac{\partial L}{\partial \kappa} = D\kappa + c - A'y - v + w = 0, \\ \kappa \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^n, v \geq 0, \quad w \in \mathbb{R}^n, w \geq 0. \end{cases}$$

La relation $D\kappa + c - A'y - v + w = 0$ implique

$$\kappa' D\kappa + c'\kappa - y'A\kappa - v'\kappa + w'\kappa = 0.$$

En utilisant cette dernière égalité dans la fonction objectif, le problème dual de (2.1.19) s'écrit finalement :

$$\begin{cases} L(\kappa, y, v, w) = -\frac{1}{2}\kappa' D\kappa + b'y + v'd^- - w'd^+ \rightarrow \max, \\ D\kappa + c - A'y - v + w = 0, \\ \kappa \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0. \end{cases}$$

2.2 Méthode adaptée de programmation quadratique convexe

2.2.1 Position du problème

Considérons le problème de programmation quadratique convexe suivant :

$$F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x \rightarrow min, \tag{2.2.20}$$

$$Ax = b, \tag{2.2.21}$$

$$d^- \leq x \leq d^+, \tag{2.2.22}$$

où

- D : matrice carrée d'ordre n, symétrique et semi-définie positive,
- A : matrice d'ordre $m \times n$, avec rang$(A) = m < n$,
- c, d^-, d^+, x : vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
- b : vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Les ensembles d'indices des lignes et colonnes de A sont respectivement notés par :

$I = \{1, 2, ..., m\}$, $J = \{1, 2, ..., n\} = J_B \cup J_N$, avec $J_B \cap J_N = \emptyset$, $|J_B| = m$.

On peut alors écrire et fractionner les vecteurs et la matrice A de la manière suivante :

$x = x(J) = \begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{pmatrix}, \qquad x_B = (x_j, j \in J_B), \qquad x_N = (x_j, j \in J_N),$

$c = c(J) = \begin{pmatrix} c_B \\ \hline c_N \end{pmatrix}, \qquad c_B = (c_j, j \in J_B), \qquad c_N = (c_j, j \in J_N),$

$d^- = (d_j^-, j \in J), \qquad d^+ = (d_j^+, j \in J), \qquad b = b(I) = (b_i, i \in I),$

$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J), \qquad A = (a_j, j \in J), \qquad a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$

$A = (A_B | A_N), \qquad A_B = A(I, J_B), \qquad A_N = A(I, J_N).$

2.2.2 Définitions

Définition 2.2.1. (**Solution réalisable ou plan**)

Un vecteur vérifiant les contraintes (2.2.21)-(2.2.22) est appelé plan ou solution réalisable du problème (2.2.20)-(2.2.22).

Définition 2.2.2. (**Plan optimal**)

Un plan x^* est dit optimal si

$$F(x^*) = \frac{1}{2}(x^*)'Dx^* + c'x^* = \min \frac{1}{2}x'Dx + c'x,$$

où x est pris parmi tous les vecteurs vérifiant les contraintes (2.2.21)-(2.2.22).

Définition 2.2.3. (**Plan suboptimal**)

Un plan x^ε est ε-optimal ou suboptimal si

$$F(x^\varepsilon) - F(x^*) = \frac{1}{2}(x^\varepsilon)'Dx^\varepsilon + c'x^\varepsilon - \frac{1}{2}(x^*)'Dx^* + c'x^* \leq \varepsilon,$$

où ε est un nombre arbitraire positif ou nul et x^* est une solution optimale du problème (2.2.20)-(2.2.22).

Définition 2.2.4. (**Support**)

L'ensemble $J_B \subset J$, $|J_B| = m$, est appelé support des contraintes (2.2.21)-(2.2.22) si

$$\det A_B \neq 0.$$

Définition 2.2.5. (**Plan de support**)

Le couple $\{x, J_B\}$, formé du plan x et du support J_B, est appelé plan de support des contraintes.

Définition 2.2.6. (**Plan de support non dégénéré**)

Le plan de support est dit non dégénéré si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+,\ j \in J_B.$$

2.2.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2.2.20)-(2.2.22) et considérons un autre plan quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors

$$
\begin{aligned}
F(\bar{x}) - F(x) &= \frac{1}{2}\bar{x}'D\bar{x} + c'\bar{x} - \frac{1}{2}x'Dx - c'x \\
&= \frac{1}{2}(x+\Delta x)'D(x+\Delta x) + c'(x+\Delta x) - \frac{1}{2}x'Dx - c'x \\
&= \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x) + (\Delta x)'(Dx+c), \\
F(\bar{x}) - F(x) &= g(x)'(\Delta x) + \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x),
\end{aligned}
\tag{2.2.23}
$$

où $g(x) = (Dx + c)$ est le gradient de la fonction F en x, avec $g(x) = g(J) = (g_j, j \in J)$,

$$g = \begin{pmatrix} g_B \\ \hline g_N \end{pmatrix}, \qquad g_B = g(J_B), \qquad g_N = g(J_N).$$

Par ailleurs on a : $\begin{cases} Ax = b, \\ A\bar{x} = b. \end{cases}$

Donc $A\bar{x} = A(x + \Delta x) = Ax + A\Delta x = b$, par conséquent $A\Delta x = 0$, et en fractionnant le vecteur Δx comme suit :

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \hline \Delta x_N \end{pmatrix}, \qquad \Delta x_B = \Delta x(J_B), \qquad \Delta x_N = \Delta x(J_N),$$

l'égalité $A\Delta x = 0$ s'écrit alors ainsi :

$$A_B\Delta x_B + A_N\Delta x_N = 0 \Leftrightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1}A_N\Delta x_N. \tag{2.2.24}$$

En vertu de la relation (2.2.24), la formule (2.2.23) devient :

$$
\begin{aligned}
F(\bar{x}) - F(x) &= g_B'\Delta x_B + g_N'\Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_B, \Delta x_N)'D(\Delta x_B, \Delta x_N) \\
&= g_B'(-A_B^{-1}A_N\Delta x_N) + g_N'\Delta x_N + \frac{1}{2}(-A_B^{-1}A_N\Delta x_N, \Delta x_N)'D(-A_B^{-1}A_N\Delta x_N, \Delta x_N) \\
&= [g_N' - g_B'A_B^{-1}A_N]\Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta x_N' \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix} \Delta x_N,
\end{aligned}
$$

où $I_N = I(J_N, J_N)$ est une matrice identité d'ordre $(n - m)$. Posons

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix}, \qquad M = M(J_N, J_N) = Z'DZ, \tag{2.2.25}$$

et définissons le vecteur des potentiels u ainsi que le vecteur des estimations E de la manière suivante :

$$u' = g'_B A_B^{-1}, \qquad E' = E'(J) = g' - u'A = (E'_B, E'_N),$$

où

$$E'_N = g'_N - u'A_N, \qquad E'_B = 0.$$

Finalement, l'accroissement (2.2.23) aura la forme finale suivante :

$$F(\bar{x}) - F(x) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta x'_N M \Delta x_N. \tag{2.2.26}$$

2.2.4 Critère d'optimalité

Théorème 2.2.1. *[1] Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2.2.20)-(2.2.22). Alors les relations :*

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & si\ x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & si\ x_j = d_j^+, \\ E_j = 0, & si\ d_j^- < x_j < d_j^+, \forall j \in J_N, \end{cases} \tag{2.2.27}$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan x.

Ces même relations sont aussi nécessaires, si $\{x, J_B\}$ est non dégénéré.

Preuve 2.2.2. a) ***Condition suffisante :*** *Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes vérifiant les relations (2.2.27). Pour tout plan $\bar{x}$ du problème (2.2.20)-(2.2.22), la formule d'accroissement (2.2.26) devient :*

$$F(\bar{x}) - F(x) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta x'_N M \Delta x_N \geq E'_N \Delta x_N,$$

car la matrice M est semi-définie positive.

D'où

$$F(\bar{x}) - F(x) \geq \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j(\bar{x}_j - x_j) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j(\bar{x}_j - x_j).$$

Comme $d_j^- \leq \bar{x}_j \leq d_j^+$, on a $\bar{x}_j - d_j^- \geq 0$, et $\bar{x}_j - d_j^+ \leq 0$, et en vertu des relations d'optimalité (2.2.27), on aura :

$$F(\bar{x}) - F(x) \geq \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j(\bar{x}_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j(\bar{x}_j - d_j^+) \geq 0,$$

d'où

$$F(\bar{x}) \geq F(x).$$

Par conséquent, x est optimal.

b) ***Condition nécessaire :*** *Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support optimal non dégénéré du problème (2.2.20)-(2.2.22) et supposons que les relations (2.2.27) ne sont pas vérifiées, c'est à dire, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$, tel que :*

$$(E_{j_0} < 0,\, x_{j_0} < d^+_{j_0})\, ou\, (E_{j_0} > 0,\, x_{j_0} > d^-_{j_0}).$$

On construit un autre plan $\bar{x} = x + \theta l$, où θ est un nombre réel positif et $l = l(J)$ est un vecteur de direction à construire comme suit :

$$\begin{cases} l_{j_0} = -signE_{j_0}, \\ l_j = 0,\, j \neq j_0,\, j \in J_N. \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir

$$A\bar{x} = Ax + \theta Al = b \Leftrightarrow Al = A_B l_B + A_N l_N = 0,$$

d'où

$$l_B = -A_B^{-1} A_N l_N = A_B^{-1} a_{j_0} signE_{j_0}.$$

On a donc

$$\begin{cases} l_{j_0} = -signE_{j_0}, \\ l_j = 0,\, j \neq j_0,\, j \in J_N, \\ l_B = A_B^{-1} a_{j_0} signE_{j_0}. \end{cases}$$

En outre, le vecteur $\bar{x}$ doit vérifier l'inégalité $d^- \leq \bar{x} \leq d^+ \Leftrightarrow d^- \leq x + \theta l \leq d^+$. Soit, en écrivant composante par composante

$$\begin{cases} d^-_j - x_j \leq \theta l_j \leq d^+_j - x_j,\, j \in J_B, \\ d^-_{j_0} - x_{j_0} \leq \theta l_{j_0} \leq d^+_{j_0} - x_{j_0}. \end{cases}$$

Comme le plan de support est non dégénéré, on peut toujours trouver un nombre positif θ assez petit tel que le vecteur $\bar{x}$ sera un plan pour le problème (2.2.20)-(2.2.22). D'après la *formule d'accroissement (2.2.26), on aura alors :*

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) - F(x) &= E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x'_N M \Delta x_N \\ &= \theta E'_N l_N + \frac{1}{2} \theta^2 l'_N M l_N \\ &= \theta(-E_{j_0} sign E_{j_0} + \frac{1}{2} \theta l'_N M l_N) \\ &= \theta(-|E_{j_0}| + \frac{1}{2} \theta l'_N M l_N). \end{aligned}$$

Pour θ et l ainsi choisis, on aura $-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta l'_N M l_N < 0$. D'où $F(\bar{x}) - F(x) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de x. Donc les relations (2.2.27) sont forcèment vérifiées si le plan de support optimal est non dégénéré.

2.2.5 Critère de suboptimalité

Définition 2.2.7. (**Estimation de suboptimalité**)

Un nombre $\beta(x, J_B)$ qui estime l'écart entre la valeur optimale $F(x^*)$ et une autre valeur $F(x)$ d'un plan de support des contraintes quelconque $\{x, J_B\}$ est appelé estimation de suboptimalité.

Théorème 2.2.3. *[1] Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2.2.20)-(2.2.22), et ε un nombre positif ou nul arbitraire. Si le nombre*

$$\beta(x, J_B) = \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j(x_j - d_j^+) \leq \varepsilon, \tag{2.2.28}$$

alors $\{x, J_B\}$ est ε-optimal.

Preuve 2.2.4. *Soit x^* une solution optimale du problème (2.2.20)-(2.2.22). En remplaçant $\bar{x}$ par x^* dans la formule d'accroissement (2.2.26) et en minorant l'expression, on aura :*

$$\begin{aligned} F(x^*) - F(x) &= E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x'_N M \Delta x_N \\ &= \sum_{j \in J_N} E_j(x_j^* - x_j) + \frac{1}{2} \Delta x'_N M \Delta x_N, \\ &\geq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j^* - x_j). \end{aligned}$$

D'où

$$F(x) - F(x^*) \leq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j - x_j^*) = \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j(x_j - x_j^*) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j(x_j - x_j^*).$$

Nous avons $d_j^- \leq x_j^* \leq d_j^+$, $j \in J_N$, *alors on aura :*

$$E_j(x_j - x_j^*) \leq E_j(x_j - d_j^-),\ si\, E_j > 0,$$

$$E_j(x_j - x_j^*) \leq E_j(x_j - d_j^+),\ si\, E_j < 0.$$

D'où

$$F(x) - F(x^*) \leq \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j(x_j - d_j^+) \leq \varepsilon.$$

Par conséquent x *est* ε*-optimal.*

- *Si* $\beta(x, J_B) = \varepsilon = 0$, *alors* x *est optimal.*
- *Si* $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, *il faut améliorer le plan* x.

2.2.6 Méthode de résolution

Avant de présenter le méthode de résolution, donnons quelques définitions essentielles.

Définition 2.2.8. (**Support de la fonction objectif**)

On appelle support de la fonction objectif du problème (2.2.20)-(2.2.22), l'ensemble des indices $J_S \subset J_N$ tel que :

$$\det M_S = \det M(J_S, J_S) \neq 0,$$

où M est la matrice (2.2.25). On posera $J_{NN} = J_N \setminus J_S$.

Définition 2.2.9. (**Support du problème**)

L'ensemble des indices $J_P = \{J_B, J_S\}$ est appelé support du problème (2.2.20)-(2.2.22), il est formé du support des contraintes J_B et de celui de la fonction objectif J_S.

Définition 2.2.10. (**Plan de Support**)

On appelle plan de support du problème (2.2.20)-(2.2.22), la paire $\{x, J_P\}$ formée du plan x et du support J_P ; il est dit accordé si $E(J_S) = 0$.

Étant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ε et un plan de support initial $\{x, J_P\}$ accordé, le but de l'algorithme est alors de construire un plan ε-optimal x^ε ou carrément un plan optimal x^*. L'itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{x, J_P\}$ à $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$ tel que $F(\bar{x}) \leq F(x)$. Pour cela, construisons le nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l,$$

où l est la direction d'amélioration, et θ le pas le long de cette direction.

Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Soit :

- l_S : direction correspondant aux indices appartenant à J_S,
- l_{NN} : direction correspondant aux indices appartenant à J_{NN},
- l_B : direction correspondant aux indices appartenant à J_B,
- l_N : direction correspondant aux indices appartenant à J_N.

Dans cet algorithme, on choisira la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j,\ j \in J_{NN} = J_N \setminus J_S. \tag{2.2.29}$$

Cette métrique dépend du plan x, et de ce fait, elle est dite adaptée. Afin de calculer les composantes de la direction admissible d'amélioration l, considérons l'accroissement

$$\Delta F = F(x+l) - F(x) = \sum_{\substack{j \in J_{NN} \\ E_j > 0}} E_j l_j + \sum_{\substack{j \in J_{NN} \\ E_j < 0}} E_j l_j + \frac{1}{2} l'_N M l_N.$$

En tenant compte de la métrique (2.2.29), la partie linéaire de ΔF atteint son minimum pour les valeurs des composantes de l_{NN} suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j, & \text{si } E_j > 0, \\ d_j^+ - x_j, & \text{si } E_j < 0, \\ 0, & \text{si } E_j = 0,\ j \in J_{NN}. \end{cases} \tag{2.2.30}$$

Nous calculons les composantes de l_S de manière à assurer que $\bar{E}_j = E_j(x + \theta l) = 0$, $j \in J_S$. En vertu de (2.2.25), nous avons :

$$E'_N = g'_N - g'_B A_B^{-1} A_N = (g'_B, g'_N) \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} = g(x)'Z.$$

Comme l doit être admissible, alors

$$Al = A_B l_B + A_N l_N = 0 \Rightarrow l_B = -A_B^{-1} A_N l_N,$$

donc

$$l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N l_N \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} l_N = Z l_N,$$

on aura donc

$$\bar{E}'_N = g(x + \theta l)' Z = g(x)' Z + \theta l' D Z = g(x)' Z + \theta l'_N Z' D Z = E'_N + \theta l'_N M.$$

Finalement, nous avons

$$\bar{E}_N = E_N + \theta M l_N.$$

Comme $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\bar{E}(J_S) = 0$ est équivalente à :

$$M(J_S, J_N) l_N = 0 \Rightarrow M(J_S, J_S) l_S + M(J_S, J_{NN}) l_{NN} = 0,$$

donc

$$l_S = -M_S^{-1} M(J_S, J_{NN}) l_{NN}. \tag{2.2.31}$$

Puis, nous calculons l_B tel que $Al = 0$:

$$l_B = -A_B^{-1}(A_S l_S + A_{NN} l_{NN}). \tag{2.2.32}$$

Changement de plan

Construisons le nouveau plan $\bar{x}$ sous la forme suivante :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l,$$

où l est la direction d'amélioration définie par les formules (2.2.30)-(2.2.32) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction, avec $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$. Les nombres $1, \theta_{j_1}$ et θ_{j_S} se calculent de façon à ce que les contraintes directes sur le vecteur $\bar{x}$ soient vérifiées :

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j,\ j \in J_{NN}, \tag{2.2.33}$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j,\ j \in J_B, \tag{2.2.34}$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j,\ j \in J_S. \tag{2.2.35}$$

Donc

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \; \theta_{j_S} = \min_{j \in J_S} \theta_j,$$

où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j < 0, \\ \infty, & \text{si } l_j = 0. \end{cases}$$

Le nombre $\theta^0 = 1$ représente le pas correspondant aux indices de J_{NN}.

Quand à θ_F, il se calcule de façon que le passage de x à $\bar{x}$ assure une relaxation maximale de la fonction objectif tout en gardant le même signe pour E_j et $\bar{E}_j$, où

$$E'_N(x) = g'(x)Z, \qquad \bar{E}_N(\bar{x}) = E_N(x) + \theta^0 M l_N = E_N(x) + \theta^0 \delta_N.$$

On posera donc $\theta_F = \sigma_{j_*} = \min \sigma_j, \; j \in J_{NN}$, avec

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j}{\delta_j}, & \text{si } E_j \delta_j < 0, \\ 0, & \text{si } E_j = 0, \delta_j < 0, \\ \infty, & \text{si } E_j \delta_j \geq 0, \end{cases}$$

où $\delta_j = M(j, J_N) l_N$.

Estimation de suboptimalité

Calculons la nouvelle estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B)$ en fonction de $\beta(x, J_B)$:

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{\substack{j \in J_N \\ \bar{E}_j > 0}} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ \bar{E}_j < 0}} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_j^+).$$

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{\substack{j \in J_N \\ \bar{E}_j > 0}} \bar{E}_j(x_j + \theta^0 l_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ \bar{E}_j < 0}} \bar{E}_j(x_j + \theta^0 l_j - d_j^+) \\ &= \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} (E_j + \theta^0 \delta_j)(x_j + \theta^0 l_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} (E_j + \theta^0 \delta_j)(x_j + \theta^0 l_j - d_j^+) \\ &= \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j \theta^0 l_j + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} \theta^0 \delta_j (x_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} \theta^0 \delta_j \theta^0 l_j \\ &+ \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j(x_j - d_j^+) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j \theta^0 l_j + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} \theta^0 \delta_j (x_j - d_j^+) + \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} \theta^0 \delta_j \theta^0 l_j. \end{aligned}$$

En vertu des relations (2.2.30), l'estimation deviendra alors :

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{x}, J_B) &= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} E_j(d_j^- - x_j) + \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} E_j(d_j^+ - x_j) + \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} \delta_j(-l_j) \\
&+ \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} \delta_j(-l_j) + (\theta^0)^2 \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j > 0}} \delta_j l_j + (\theta^0)^2 \sum_{\substack{j \in J_N \\ E_j < 0}} \delta_j l_j \\
&= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) - \theta^0 \delta'_N l_N + (\theta^0)^2 \delta'_N l_N.
\end{aligned}$$

Finalement, on aura la formule suivante :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) - \theta^0(1 - \theta^0) l' D l. \tag{2.2.36}$$

Changement de support

- Si $\theta^0 = 1$, alors le vecteur $x^0 = \bar{x} = x + l$ est une solution optimale du problème (2.2.20)-(2.2.22).

Le changement de support s'effectue lorsque $\theta^0 < 1$ et $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$. Dans ce qui suit, on énumère les différents changements de support suivant la valeur que prend θ^0.

- Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, dans ce cas le choix de l'indice j_0 n'est pas unique contrairemnet au simplexe, ce qui est particulier à cette méthode. Lorsque ce cas se réalise pour un indice $j_1 \in J_B$, on a alors

  $$l_{j_1} = - \sum_{j \in J_N} e'_{j_1} A_B^{-1} a_j l_j = - \sum_{j \in J_N} x_{j_1 j} l_j \neq 0,$$

  où e_{j_1} est un vecteur unitaire de dimension m dont la composante j_1 vaut 1. Il existe alors $j_0 \in J_N$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$. Cette dernière condition nous assure par conséquent que $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ est bel est bien un support.

  Si on peut avoir $x_{j_1 j_0} \neq 0$, avec $j_0 \in J_S$, on posera donc

  $$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \qquad \bar{J}_S = (J_S \setminus j_0).$$

  Sinon, on choisira un indice $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$ et on posera

  $$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \qquad \bar{J}_S = J_S.$$

- Si $\theta^0 = \theta_{j_s}$, on pose :

  $$\bar{J}_B = J_B \qquad \bar{J}_S = J_S \setminus j_s.$$

- Si $\theta^0 = \theta_F = \sigma_{j_*}$: dans ce cas, on aura

$$\bar{J}_B = J_B \qquad \bar{J}_S = J_S \cup j_*.$$

Finalement, on pose

$$\bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

Une fois ces étapes exécutées, on recommence une autre itération avec le nouveau plan de support $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$ si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, où le support $\bar{J}_P$ satisfait les conditions algébriques

$$\det \bar{A}_B = \det A(I, \bar{J}_B) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det M(\bar{J}_S, \bar{J}_S) \neq 0.$$

Algorithme de la méthode

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Méthode adaptée pour le problème posé.

Debut

1. Soit un nombre réel positif ou nul quelconque ε, et un plan de support initial $\{x, J_P\}$ tel que $J_P = \{J_B, J_S\}$, avec $J_S = \emptyset$ pour plus de facilité ;
2. Calculer le vecteur des potentiels $u' = g'_B A_B^{-1}$ et le vecteur des estimations $E'_N = g'_N - u' A_N$;
   - **SI** $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors x est ε-optimal ; aller à **FIN**.
   - **SINON** Aller en 3 ;
   - **FINSI**.
3. Changement du plan x par $\bar{x}$ tel que $\bar{x} = x + \theta^0 l$
   - Calculer la direction d'amélioration l ;
   - Calculer le pas $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$;
   - Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 l$;
   - Calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)(\beta - \theta^0 l' D l)$;
     - **SI** $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\bar{x}$ est ε-optimal ; aller à **FIN** ;
     - **SINON** Aller en 4 ;

4. Changement de support
   - **SI** $\theta^0 = 1$, alors $\bar{x} = x + l$; $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$; $\bar{x}$ est optimal ; aller à **FIN** ;
   - **SINON SI** $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors
     - **SI** $j_0 \in J_S$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$, alors $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \qquad \bar{J}_S = (J_S \setminus j_0)$;
     - **SINON SI** $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$, alors $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \qquad \bar{J}_S = J_S$;
     - **FINSI**
   - **SINON SI** $\theta^0 = \theta_{j_s}$, alors $\bar{J}_B = J_B, \qquad \bar{J}_S = J_S \setminus j_s$;
     - **SINON**
       - **SI** $\theta^0 = \theta_F = \sigma_{j_*}$, alors $\bar{J}_B = J_B \qquad \bar{J}_S = J_S \cup j_*$;
       - **FINSI**
     - **FINSI**
   - **FINSI**
   - **SI** $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, alors aller en 2 en partant de $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$;
   - **FINSI**.

   FIN.

Exemple Numérique

Considérons le problème de programmation quadratique suivant :

$$F(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \to \min, \tag{2.2.37}$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \tag{2.2.38}$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \tag{2.2.39}$$

$$-2 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 2 \leq x_3 \leq 5, \quad -3 \leq x_4 \leq 6, \tag{2.2.40}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad d^- = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad d^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Soit $x = (0, 0, 3, 4)$ un plan initial du problème (2.2.37)-(2.2.40). Posons $J_B = \{3, 4\}$, $J_N = \{1, 2\}$. Nous avons alors $A_B = (a_3, a_4) = I_2$; $A_N = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons les matrices suivantes :

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculons le vecteur gradient $g(x) = (g_B, g_N)$:

$$g(x) = Dx + c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$g_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le vecteur des estimations $E_N = g_N - (g'_B A_B^{-1} A_N)'$

$$E_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \Big((-3,-1)\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\Big)' = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Posons $J_S = \emptyset$, $J_{NN} = J_N \setminus J_S = \{1,2\}$. La paire $\{x, J_P\}$, avec $J_P = \{J_B, J_S\}$ est alors le plan de support du problème (2.2.37)-(2.2.40). Calculons l'estimation de suboptimalité :

$$\begin{aligned}
\beta(x, J_B) &= \sum_{\substack{j\in J_N \\ E_j>0}} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{\substack{j\in J_N \\ E_j<0}} E_j(x_j - d_j^+) \\
&= E_1(x_1 - d_1^-) + E_2(x_2 - d_2^+) \\
&= 7(0+2) + (-10)(0-4) \\
&= 54 > \epsilon.
\end{aligned}$$

Itération 1 :

Calculons la direction d'amélioration :

$$l_1 = d_1^- - x_1 \quad \text{car} \quad E_1 > 0,$$

$$l_2 = d_2^+ - x_2 \quad \text{car} \quad E_2 < 0,$$

on a alors

$$l(J_{NN}) = (l_j, j \in J_{NN}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$l(J_S) = (l_j, j \in J_S) = 0, \quad \text{car} \quad J_S = \emptyset$$

$$l(J_B) = (l_j, j \in J_B) = -A_B^{-1} A_{NN} l_{NN} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\delta_N = \delta(J_N) = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = M l_N = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Calculons le pas θ le long de cette direction :

Pour $j \in J_{NN}$, nous avons : $\theta^0 = 1$.

Pour $j \in J_B$, nous avons :

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = \min\{\theta_3, \theta_4\} = \min\{\frac{1}{9}, \infty\} = \theta_3 = \frac{1}{9} \Rightarrow j_1 = 3.$$

Pour $j \in J_S$, nous avons : $\theta_{j_s} = \infty$, car $J_S = \emptyset$.

Pour θ_F, nous avons $\sigma_{j_*} = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$, tel que : $\sigma_1 = \frac{-E_1}{\delta_1} = \frac{7}{32}$; $\sigma_2 = \frac{-E_2}{\delta_2} = \frac{5}{12}$.

D'où $\theta^0 = \min\{1, \frac{1}{9}, \infty, \frac{7}{32}\} = \theta_3 = \frac{1}{9}$.

On a alors

$$\bar{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} \frac{-2}{9} \\ \frac{4}{9} \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

et

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)(\beta(x, J_B) - \theta^0 l' D l) = \frac{2608}{81} \simeq 32.19.$$

Soit $X = X(J_B) = A_B^{-1} a_{j_0} = \begin{pmatrix} x_{j_1 j_0} \\ x_{j_2 j_0} \end{pmatrix}$, avec $j_0 \in J_N$ non optimal.

$$X = X(J_B) = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{41} \end{pmatrix} = A_B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{j_1 j_0} = 1 \neq 0, \quad \text{avec} j_1 = 3, j_0 = 1.$$

D'où

$$\bar{J}_B = \{3, 4\} \setminus \{3\} \cup \{1\},$$

avec $\bar{A}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\bar{J}_B = \{1, 4\}; \quad \bar{J}_S = \emptyset; \quad \bar{J}_{NN} = \{2, 3\}; \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

On commence la deuxième itération par le plan de support $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$:

Calculons alors le nouveau vecteur des estimations :

$$g(\bar{x}) = D\bar{x} + c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{9} \\ \frac{4}{9} \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{9} \\ \frac{33}{9} \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{E}_N = \begin{pmatrix} \frac{58}{9} \\ \frac{-31}{9} \end{pmatrix},$$

ainsi que la nouvelle estimation de suboptimalité :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \bar{E}_2(\bar{x}_2 - d_2^-) + \bar{E}_3(\bar{x}_3 - d_3^+) = \frac{232}{81} \simeq 2.86.$$

Déterminons la matrice M

$$M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & -28 \\ -28 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculons la direction l :

$$l(\bar{J}_{NN}) = \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l(\bar{J}_B) = (l_j, j \in \bar{J}_B) = -A_B^{-1} A_{NN} l_{NN} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{9} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\delta_N = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = M l_N = \begin{pmatrix} 100 & -28 \\ -28 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-400}{9} \\ \frac{112}{9} \end{pmatrix}.$$

Calculons le pas le long de cette nouvelle direction :

Pour $j \in \bar{J}_{NN}$, nous avons : $\theta^0 = 1$.

Pour $j \in \bar{J}_B$, nous avons :

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in \bar{J}_B} \theta_j = \min\{\theta_1, \theta_4\}, \quad \text{tel que} \quad \theta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \theta_4 = \frac{1}{2}.$$

$$\theta_{j_1} = \theta_4 = \frac{1}{2}.$$

Pour $j \in \bar{J}_S$, nous avons : $\theta_{j_s} = \infty$, car $\bar{J}_S = \emptyset$.

Pour θ_F, nous avons $\sigma_{j_*} = \min_{j \in \bar{J}_{NN}} \sigma_j = \min\{\sigma_2, \sigma_3\}$, tel que : $\sigma_2 = \frac{29}{200}$; $\sigma_3 = \frac{31}{112}$.

$$\theta_F = \sigma_{j_*} = \sigma_2 = \frac{29}{200}.$$

Ainsi $\theta^0 = \sigma_{j_*} = \sigma_2 = \frac{29}{200}$.

Nous avons alors :

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \theta^0 l = \begin{pmatrix} -\frac{24}{50} \\ \frac{19}{50} \\ 5 \\ \frac{229}{50} \end{pmatrix},$$

et

$$\bar{\bar{J}}_B = \bar{J}_B = \{1,4\}; \quad \bar{\bar{J}}_S = \{2\}; \quad \bar{\bar{J}}_{NN} = \{3\}; \quad \bar{\bar{J}}_P = \{\bar{\bar{J}}_B, \bar{\bar{J}}_S\}.$$

Donc le nouveau vecteur des estimations vaut :

$$g(\bar{\bar{x}}) = D\bar{\bar{x}} + c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{24}{50} \\ \frac{19}{50} \\ 5 \\ \frac{229}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{84}{25} \\ \frac{111}{25} \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{E}}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{41}{25} \end{pmatrix},$$

et

$$\beta(\bar{\bar{x}}, \bar{J}_B) = (1-\theta^0)(\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) - \theta^0 l' D l) = 0.$$

La valeur de $\beta(\bar{\bar{x}}, \bar{J}_B)$ étant nulle, le critère d'optimalité est alors vérifié.

D'où $x^* = (-\frac{24}{50}, \frac{19}{50}, 5, \frac{229}{50})$ est un plan optimal, avec $F(x^*) = -\frac{911}{50} = -18.22$.

Chapitre 3

Contrôle Optimal d'un Système Dynamique Linéaire Avec Coût Quadratique et État Initial Libre

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec un coût quadratique et un état initial libre.

Le problème se présente comme suit : l'état initial du système à optimiser n'est pas fixe, mais appartient à un polyèdre. Une information à priori de l'état initial est donnée par l'inclusion $x(0) \in X_0$. Par analogie avec la théorie de filtration, on dit que l'ensemble X_0 est la distribution à priori de l'état initial à contrôler.

On se propose de développer une méthode de résolution pour minimiser un critère quadratique terminal, et ce, en appliquant la méthode adaptée, conçue déjà pour résoudre des problèmes de programmation quadratique convexe.

3.1 Position du problème

Sur un intervalle de temps $T = [0, t_1]$, considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$J(v) = J(z, u) = \frac{1}{2}x'(t_1)Qx(t_1) + c'x(t_1), \tag{3.1.1}$$

sur les trajectoires d'un système dynamique linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\ x(0) = z \in X_0 = \{z \in \mathbb{R}^n, Gz = \gamma, d^- \leq z \leq d^+\}, \tag{3.1.2}$$

où

- Q : matrice symétrique semi-définie positive ;
- c : vecteur de dimension n ;
- $x(t)$: vecteur de dimension n représentant l'état du système à l'instant t ;
- $u(t)$: commande à l'instant t (signal d'entrée), fonction scalaire constante par morceaux, telle que $|u(t)| \leq 1$; $t \in T = [0, t_1]$;
- $x(0) = z$: position initiale du système non fixé, où $z \in X_0$ qui est l'ensemble des états initiaux possibles, et $v = (z, u)$;
- A : matrice (réelle) carrée d'ordre n qui caractérise le système (pour plus de simplicité on la suppose constante, c'est-à-dire ne dépendant pas de la variable t) ;
- b : vecteur de $\mathbb{R}^n$;
- G : matrice d'ordre $l \times n$, avec rang $G = l < n$;
- γ : vecteur de $\mathbb{R}^l$;
- d^+ et d^- sont des vecteurs de dimension n.

On suppose de plus que la trajectoire $x(t), t \in T$, solution du système (3.1.2) est soumise à une contrainte terminale au temps $t = t_1$:

$$Hx(t_1) = g, \tag{3.1.3}$$

où H est une matrice d'ordre $m \times n$, avec rang $H = m$, $m + l \leq n$ et g un m-vecteur.

On définit les ensembles d'indices suivants : $I = \{1, ..., m\}, J = \{1, ..., n\}, L = \{1, ..., l\}$.

Ainsi, le problème considéré se présente sous la forme :

$$J(v) = J(z, u) = \frac{1}{2}x'(t_1)Qx(t_1) + c'x(t_1) \to min, \tag{3.1.4}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\ x(0) = z \in X_0 = \{z \in \mathbb{R}^n, Gz = \gamma, d^- \leq z \leq d^+\}, \tag{3.1.5}$$

$$Hx(t_1) = g, \tag{3.1.6}$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_1], \tag{3.1.7}$$

avec $A = A(J, J), b = b(J), c = c(J), G = G(L, J), \gamma = \gamma(L), d^- = d^-(J), d^+ = d^+(J), H = H(I, J), g = g(I)$.

La solution du système dynamique (3.1.5) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)[z + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau], t \in T, \tag{3.1.8}$$

où $F(t) = exp(At)$ est une matrice carrée d'ordre n, solution du système différentiel homogène

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n, \end{cases}$$

I_n étant la matrice identité d'ordre n.

L'état final s'écrit alors

$$x(t_1) = F(t_1)[z + \int_0^{t_1} F^{-1}(t)bu(t)dt]. \tag{3.1.9}$$

Si l'on note $q(t) = F(t_1)F^{-1}(t)b$, on obtient :

$$x(t_1) = F(t_1)z + \int_0^{t_1} q(t)u(t)dt, \tag{3.1.10}$$

$$Hx(t_1) = HF(t_1)z + \int_0^{t_1} Hq(t)u(t)dt. \tag{3.1.11}$$

Posons :

$$\begin{cases} D(I, J) = HF(t_1) \\ p(t) = Hq(t),\ t \in T. \end{cases}$$

En remplaçant la solution (3.1.10) dans le problème (3.1.4)-(3.1.7), on obtient la formulation équivalente suivante :

$$J(v) = J(z, u) = \frac{1}{2}x'(t_1)Qx(t_1) + c'x(t_1) \to min, \tag{3.1.12}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\ x(0) = z, \tag{3.1.13}$$

$$D(I, J)z + \int_0^{t_1} p(t)u(t)dt = g, \tag{3.1.14}$$

$$G(L, J)z = \gamma, \tag{3.1.15}$$

$$d^- \leq z \leq d^+,\ |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_1]. \tag{3.1.16}$$

– ***Objectif du contrôle*** : L'objectif du contrôle est de diriger la trajectoire du système (3.1.13) à partir d'un ensemble $X_0 = \{z \in \mathbb{R}^n, Gz = \gamma, d^- \leq z \leq d^+\}$, i.e, $x(0) \in X_0$, en un temps fini fixe $t_1 > 0$ vers un ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n, Hx = g\}$, i.e, $x(t_1) \in S$, tout en satisfaisant les contraintes sur la commande et en minimisant le critère quadratique terminal $J(z, u)$.

3.2 Définitions

Définition 3.2.1. (**Commande généralisée**)

La paire $v = (z, u)$, formée du vecteur $z \in \mathbb{R}^n$, et de la commande $u \equiv u(.) = (u(t), t \in T)$, est appelée commande généralisée.

Définition 3.2.2. (**Commande admissible**)

La commande généralisée $v = (z, u)$ est dite admissible si elle satisfait les contraintes (3.1.14)-(3.1.16).

Définition 3.2.3. (**Commande optimale**)

Une commande admissible $v^0 = (z^0, u^0)$ est dite optimale si elle minimise la fonctionnelle $J(v) = J(z, u)$, i.e,

$$J(v^0) = \min_v J(v),$$

où v est prise parmi toutes les commandes généralisées admissibles.

Définition 3.2.4. (**Commande suboptimale**)

Pour $\varepsilon \geq 0$, on appelle commande ε-optimale (ou suboptimale) toute commande admissible $v^\varepsilon = (z^\varepsilon, u^\varepsilon)$ satisfaisant l'inégalité :

$$J(v^\varepsilon) - J(v^0) \leq \varepsilon,$$

où v^0 est une commande optimale du problème (3.1.12)-(3.1.16).

Définition 3.2.5. (**Support des contraintes**)

On choisit un sous-ensemble $T_B \subset T$ de k moments isolés $(k \leq m)$ et un sous-ensemble $J_B \subset J$ de $m + l - k$ éléments. On forme la matrice :

$$P_B = \begin{pmatrix} D(I, J_B) & p(t), \text{t} \in T_B \\ G(L, J_B) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.17}$$

avec $P_B \in \mathbb{R}^{(m+l)\times(m+l)}$. L'ensemble $S_B = \{J_B, T_B\}$ est un *support des contraintes* (3.1.14)-(3.1.16) si $\det P_B \neq 0$.

Définition 3.2.6. (**Commande de support des contraintes**)

La paire $\{v, S_B\}$ formée d'une commande admissible $v = (z, u)$ et d'un support S_B est dite *commande de support des contraintes* (3.1.14)-(3.1.16).

Définition 3.2.7. (**Commande de support non dégénérée**)

La commande de support des contraintes $\{v, S_B\}$ est primalement non dégénérée si :

1. $d_j^- < z_j < d_j^+, j \in J_B$;
2. Pour $t_j \in T_B$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|u(t)| < 1, t \in [t_j - \delta, t_j + \delta]$; ou bien t_j est un point de discontinuité de $u(t)$.

3.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{v, S_B\}$ une commande de support des contraintes du problème (3.1.12)-(3.1.16). Considérons une autre commande admissible $\bar{v} = (\bar{z}, \bar{u}) = v + \Delta v$, où $\bar{z} = z + \Delta z$, $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$, et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in T$. L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\Delta J(v) &= J(\bar{v}) - J(v)\\ &= (Qx(t_1) + c)'\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)'Q\Delta x(t_1),\\ &= (Qx(t_1) + c)'[F(t_1)\Delta z + \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t)dt] + \Gamma,\end{aligned}$$

où $\Gamma = \frac{1}{2}\Delta x(t_1)'Q\Delta x(t_1) \geq 0$. On obtient donc

$$\Delta J(v) = J(\bar{v}) - J(v) = (Qx(t_1) + c)'F(t_1)\Delta z + (Qx(t_1) + c)' \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t)dt + \Gamma.$$

Construisons le vecteur des potentiels ν :

$$\nu' = q_B' P_B^{-1}, q_B' = \Big([(Qx(t_1) + c)'F(t_1)]_j, j \in J_B, (Qx(t_1) + c)'q(t), t \in T_B\Big), \tag{3.3.18}$$

où $\nu = \begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+l}, \nu_u \in \mathbb{R}^m, \nu_z \in \mathbb{R}^l$,

et introduisons le vecteur des estimations E pour la variable z :

$$E' = \nu' \begin{pmatrix} D(I, J) \\ G(L, J) \end{pmatrix} - (Qx(t_1) + c)'F(t_1), \tag{3.3.19}$$

avec $E' = E'(J) = (E'(J_B), E'(J_N)) \in \mathbb{R}^n$, $J_N = J \setminus J_B$.

Soit la fonction $\psi(t)$ définie comme suit :

$$\psi'(t) = [\nu_u' H - (Qx(t_1) + c)']F(t_1)F^{-1}(t), t \in T,$$

qui est solution du système conjugué suivant :

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \psi(t_1) = [H'\nu_u - (Qx(t_1) + c)]. \tag{3.3.20}$$

Introduisons la fonction de co-commande $\Delta(t)$, $t \in T$:

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= \psi'(t)b \\
&= [\nu_u' H - (Qx(t_1) + c)']F(t_1)F^{-1}(t)b \\
&= [\nu_u' H - (Qx(t_1) + c)']q(t) \\
&= \nu_u' Hq(t) - (Qx(t_1) + c)'q(t).
\end{aligned}$$

Comme $p(t) = Hq(t)$, alors la co-commnande s'écrit sous la forme :

$$\Delta(t) = \nu_u' p(t) - (Qx(t_1) + c)'q(t), t \in T. \tag{3.3.21}$$

Montrons que $E(J_B) = 0$ et $\Delta(T_B) = 0$: on a

$$\begin{aligned}
\nu' = q_B' P_B^{-1} \quad &\Rightarrow \quad \nu' P_B = q_B' \\
&\Rightarrow \quad (\nu_u', \nu_z') \begin{pmatrix} D(I, J_B) & p(t), t \in T_B \\ G(L, J_B) & 0 \end{pmatrix} = q_B' \\
&\Rightarrow \quad (\nu_u' D(I, J_B) + \nu_z' G(L, J_B), \quad \nu_u' p(T_B)) = q_B',
\end{aligned}$$

$$E'(J_B) = \nu' \begin{pmatrix} D(I, J_B) \\ G(L, J_B) \end{pmatrix} - [(Qx(t_1) + c)'F(t_1)](J_B),$$

et

$$\Delta(T_B) = \nu_u' p(T_B) - (Qx(t_1) + c)'q(T_B).$$

D'où

$$(E'(J_B), \Delta(T_B)) = \left[\nu' \begin{pmatrix} D(I, J_B) \\ G(L, J_B) \end{pmatrix}, \nu_u' p(T_B)\right] - \Big[[(Qx(t_1) + c)'F(t_1)](J_B), (Qx(t_1) + c)'q(T_B)\Big]$$

$(E'(J_B), \Delta(T_B)) = \nu' P_B - q'_B = q'_B - q'_B = 0$, d'où $E(J_B) = 0$ et $\Delta(T_B) = 0$.

En vertu de (3.3.19) et (3.3.21), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta J(v) &= J(\bar{v}) - J(v) \\
&= (Qx(t_1) + c)' F(t_1)\Delta z + (Qx(t_1) + c)' \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t)dt + \Gamma \\
&= [\nu' \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} - E']\Delta z + \int_0^{t_1} [\nu'_u p(t) - \Delta(t)]\Delta u(t)dt + \Gamma \\
&= \nu' \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} \Delta z - E'\Delta z + \int_0^{t_1} \nu'_u p(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t)dt + \Gamma.
\end{aligned}$$

De l'admissibilité de v et $\bar{v}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} D(I,J)z + \int_0^{t_1} p(t)u(t)dt = g \\ D(I,J)\bar{z} + \int_0^{t_1} p(t)\bar{u}(t)dt = g \end{array}\right\} \Longrightarrow D(I,J)\Delta z + \int_0^{t_1} p(t)\Delta u(t)dt = 0,$$

et

$$\left.\begin{array}{l} G(L,J)z = \gamma \\ G(L,J)\bar{z} = \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow G(L,J)\Delta z = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\nu' \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} \Delta z + \int_0^{t_1} \nu'_u p(t)\Delta u(t)dt &= \nu'_u D(I,J)\Delta z + \nu'_z G(L,J)\Delta z + \int_0^{t_1} \nu'_u p(t)\Delta u(t)dt \\
&= \nu'_u \Big[D(I,J)\Delta z + \int_0^{t_1} p(t)\Delta u(t)dt\Big] + \nu'_z G(L,J)\Delta z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\Delta J(v) = J(\bar{v}) - J(v) = -E'\Delta z - \int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t)dt + \Gamma, \tag{3.3.22}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\Delta J(v) = J(\bar{v}) - J(v) = -\sum_{j \in J_N} E_j \Delta z_j - \int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t)dt + \Gamma. \tag{3.3.23}$$

3.4 Critère d'optimalité

Théorème 3.4.1. *Soit $\{v, S_B\}$ une commande de support des contraintes. Alors les relations :*

$$\begin{cases} \Delta(t) \geq 0, & si\ u(t) = +1, \\ \Delta(t) \leq 0, & si\ u(t) = -1, \\ \Delta(t) = 0, & si\ -1 < u(t) < +1, t \in T_N = T \setminus T_B, \\ E_j \geq 0, & si\ z_j = d_j^+, \\ E_j \leq 0, & si\ z_j = d_j^-, \\ E_j = 0, & si\ d_j^- < z_j < d_j^+, j \in J_N, \end{cases} \tag{3.4.24}$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénéréscence, aussi nécessaires pour l'optimalité de la commande de support des contraintes $\{v, S_B\}$.

Preuve 3.4.2. Condition suffisante *: Soit $\{v, S_B\}$ une commande de support des contraintes vérifiant les relations (3.4.24). Pour toute autre commande admissible $\bar{v} = (\bar{z}, \bar{u})$ du problème (3.1.12)-(3.1.16), la formule d'accroissement (3.3.23) donne alors :*

$$J(\bar{v}) - J(v) = -E_N' \Delta z_N - \int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t)dt + \Gamma \geq -E_N' \Delta z_N - \int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t)dt,$$

car la matrice Q est semi-définie positive.

Soit

$$J_N^+ = \{j \in J_N : E_j > 0\}, \quad J_N^- = \{j \in J_N : E_j < 0\},$$

$$T_N^+ = \{t \in T_N : \Delta(t) > 0\}, T_N^- = \{t \in T_N : \Delta(t) < 0\}.$$

D'où

$$J(\bar{v}) - J(v) \geq \sum_{j \in J_N^+} E_j(z_j - \bar{z}_j) + \sum_{j \in J_N^-} E_j(z_j - \bar{z}_j) + \int_{T_N^+} \Delta(t)(u(t) - \bar{u}(t))dt + \int_{T_N^-} \Delta(t)(u(t) - \bar{u}(t))dt.$$

Comme $d_j^- \leq \bar{z}_j \leq d_j^+, j \in J$, et $-1 \leq \bar{u}(t) \leq +1, t \in T$, on a alors

$$d_j^- - \bar{z}_j \leq 0, \quad d_j^+ - \bar{z}_j \geq 0, \quad -1 - \bar{u}(t) \leq 0, \quad 1 - \bar{u}(t) \geq 0.$$

Les relations (3.4.24) nous permettent ensuite d'écrire :

$$J(\bar{v}) - J(v) \geq \sum_{j \in J_N^+} E_j(d_j^+ - \bar{z}_j) + \sum_{j \in J_N^-} E_j(d_j^- - \bar{z}_j) + \int_{T_N^+} \Delta(t)(1 - \bar{u}(t))dt + \int_{T_N^-} \Delta(t)(-1 - \bar{u}(t))dt \geq 0.$$

D'où

$$J(\bar{v}) \geq J(v) \Rightarrow \quad v \quad \text{est optimale.}$$

Condition nécessaire *: Soit $\{v, S_B\}$ une commande de support optimale non dégénérée, où $S_B = \{J_B, T_B\}$, $T_B = \{t_j, j = \overline{1,k}\}, k \leq m$. On suppose que les relations (3.4.24) ne sont pas vérifiées. Deux cas peuvent se présenter :*

(1) $\exists t_0 \in T_N$ *tel que :* $\Delta(t_0) < 0$ *et* $u(t_0) > -1$ *ou bien* $\Delta(t_0) > 0$ *et* $u(t_0) < 1$;

(2) $\exists j_0 \in J_N$ *tel que :* $E_{j_0} < 0$ *et* $z_{j_0} > d^-_{j_0}$ *ou bien* $E_{j_0} > 0$ *et* $z_{j_0} < d^+_{j_0}$.

Supposons qu'on a le cas (1) *:* $\Delta(t_0) > 0$ *et* $u(t_0) < 1$*. Comme* $\Delta(t), t \in T$*, est continue et la commande* $u(t), t \in T$*, est continue à droite, alors* $\exists \alpha > 0$ *tel que*

$$\Delta(t) > 0 \quad \text{et} \quad u(t) < 1, t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Pour la commande de support optimale non dégénérée $\{v, S_B\}$, on peut considérer sans nuir à la généralité que les premiers p moments de support $t_j, j = \overline{1,p}, p \leq k$, sont des points de commutation de la commande $u(t)$, les autres moments (s'ils existent) sont tels que :

$$-1 < u(t) < +1, t \in [t_j - \delta, t_j + \delta], j = \overline{p+1,k}, \quad \delta > 0. \tag{3.4.25}$$

La condition (3.4.25) montre qu'il existe des nombres $\gamma_j > 0$ tels que :

$$u(t) + \gamma_j \leq 1, \quad u(t) - \gamma_j \geq -1, t \in [t_j - \delta, t_j + \delta], j = \overline{p+1,k}.$$

Construisons une nouvelle commande admissible $\bar{v}_\alpha = (\bar{z}, \bar{u}(t,\alpha))$ telle que $\bar{z} = z + \Delta z$ et $\bar{u}(t,\alpha) = u(t) + \Delta u(t,\alpha), t \in T$, où

$$\Delta z_N = 0, \tag{3.4.26}$$

$$\Delta z_B = \Delta z(J_B) = \theta_B = (\theta_j, j = \overline{k+1, m+l}), \tag{3.4.27}$$

et

$$\Delta u(t,\alpha) = \begin{cases} 1 - u(t), & si \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha[, \\ u(t_j - 0) - u(t_j + 0), & si \quad t \in [t_j, t_j + \theta_j[, \theta_j > 0, \\ u(t_j + 0) - u(t_j - 0), & si \quad t \in [t_j + \theta_j, t_j[, \theta_j < 0, j = \overline{1,p}, \\ \gamma_j, & si \quad t \in [t_j, t_j + \theta_j[, \theta_j > 0, \\ -\gamma_j, & si \quad t \in [t_j + \theta_j, t_j[, \theta_j < 0, j = \overline{p+1,k}, \\ 0, & ailleurs. \end{cases} \tag{3.4.28}$$

Soit $\theta = (\theta_j, j = \overline{1, m+l})$ *et* $F(\alpha,\theta) = \begin{pmatrix} F_1(\alpha,\theta) \\ F_2(\alpha,\theta) \end{pmatrix}$, *où*

$$F_1(\alpha,\theta) = D(I, J_B)\theta_B + \int_0^{t_1} p(t)\Delta u(t,\alpha)dt,$$

$$F_2(\alpha,\theta) = G(L, J_B)\theta_B.$$

Alors

$$F(\alpha,\theta) = \begin{pmatrix} D(I, J_B)\theta_B + \int_{t_0}^{t_0+\alpha} p(t)(1-u(t))dt + \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{t_j}^{t_j+\theta_j} p(t)dt \\ G(L, J_B)\theta_B \end{pmatrix}, \tag{3.4.29}$$

où

$$a_j = u(t_j - 0) - u(t_j + 0) \neq 0, j = \overline{1,p}; a_j = \gamma_j \neq 0, j = \overline{p+1,k}.$$

On a

$$\frac{\partial F(\alpha,\theta)}{\partial \theta_B} = \begin{pmatrix} D(I, J_B) \\ G(L, J_B) \end{pmatrix},$$

et pour $j = \overline{1,k}$, *on a :*

$$\frac{\partial F(\alpha,\theta)}{\partial \theta_j} = \begin{pmatrix} a_j p(t_j + \theta_j) \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\frac{\partial F(\alpha,\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} D(I, J_B) & a_j p(t_j+\theta_j), j = \overline{1,k} \\ G(L, J_B) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta}(0,0) = \begin{pmatrix} D(I, J_B) & a_j p(t_j), j = \overline{1,k} \\ G(L, J_B) & 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction $F(\alpha,\theta)$ *est continûment différentiable au voisinage du point* $(\alpha,\theta) = (0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+l}$ *et satisfait les conditions suivantes*

$$F(0,0) = 0, \quad \det \frac{\partial F}{\partial \theta}(0,0) = \prod_{j=1}^{k} a_j \det P_B \neq 0.$$

En vertu du théorème des fonctions implicites, on déduit alors pour $\alpha > 0$ *suffisamment petit l'existence d'une fonction continûment différentiable* $\theta(\alpha) = (\theta_j(\alpha), j = \overline{1, m+l})$ *telle que*

$$\theta(0) = 0 \quad et \quad F(\alpha, \theta(\alpha)) \equiv 0. \tag{3.4.30}$$

Par conséquent, en posant $\theta_j = \theta_j(\alpha)$ *dans les formules (3.4.27) et (3.4.28) et en tenant* *compte de la formule (3.4.30) et de la non dégénéréscence de* $\{v, S_B\}$*, on conclut que la nouvelle commande* $\bar{v}_\alpha = (\bar{z}, \bar{u}(t,\alpha))$*, est admissible pour tout* $\alpha > 0$ *suffisamment petit.*

Soit alors $\bar{x}(t,\alpha), t \in T$*, la trajectoire du système (3.1.13) correspondant au contrôle* $\bar{v}_\alpha = (\bar{z}, \bar{u}(t,\alpha)), t \in T$*. Posons* $\Delta x(t,\alpha) = \bar{x}(t,\alpha) - x(t,\alpha), t \in T$*. Alors pour* $\alpha > 0$ *assez petit, il s'ensuit que :*

$$\begin{aligned}
\Delta x(t_1,\alpha) &= F(t_1)(J,J)\Delta z(J) + \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t,\alpha)dt \\
&= F(t_1)(J,J_B)\theta_B(\alpha) + \int_{t_0}^{t_0+\alpha} q(t)(1-u(t))dt + \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{t_j}^{t_j+\theta_j(\alpha)} q(t)dt \\
&= \alpha F(t_1)(J,J_B)\frac{d\theta_B}{d\alpha}(0) + \alpha q(t_0)(1-u(t_0)) + \alpha \sum_{j=1}^{k} a_j q(t_j)\frac{d\theta_j}{d\alpha}(0) + \circ(\alpha) \\
&= \alpha\Big[F(t_1)(J,J_B)\frac{d\theta_B}{d\alpha}(0) + q(t_0)(1-u(t_0)) + \sum_{j=1}^{k} a_j q(t_j)\frac{d\theta_j}{d\alpha}(0) + \frac{\circ(\alpha)}{\alpha}\Big] \\
&= \alpha f(\alpha),
\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

où $f(\alpha)$ *est une fonction bornée au voisinage de* $\alpha = 0$ *et* $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\circ(\alpha)}{\alpha} = 0$.

D'où

$$\Gamma = \frac{1}{2}\Delta x'(t_1,\alpha)Q\Delta x(t_1,\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}f'(\alpha)Qf(\alpha). \tag{3.4.32}$$

Calculons alors l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}
J(\bar{v}_\alpha) - J(v) &= -E'_N\Delta z_N - \int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t,\alpha)dt + \Gamma \\
&= -\int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t,\alpha)dt + \Gamma \\
&= -\int_{t_0}^{t_0+\alpha} \Delta(t)(1-u(t))dt - \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{t_j}^{t_j+\theta_j(\alpha)} \Delta(t)dt + \Gamma.
\end{aligned} \tag{3.4.33}$$

En vertu de $\Delta(t_j) = 0, j = \overline{1,k}$*, et de la relation (3.4.32), on obtient :*

$$J(\bar{v}_\alpha) - J(v) = \alpha[\Delta(t_0)(u(t_0)-1) + \frac{\circ(\alpha)}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}f'(\alpha)Qf(\alpha)]. \tag{3.4.34}$$

Comme $\Delta(t_0)(u(t_0)-1) < 0$*, alors pour* $\alpha > 0$ *suffisamment petit, on obtient l'inégalité* $J(\bar{v}_\alpha) < J(v)$*, contredisant l'optimalité de la commande de support des contraintes* $\{v, S_B\}$*.*

La preuve pour les autres cas se fait de manière analogue que pour le premier cas.

3.5 Calcul de l'estimation de suboptimalité et critère d'ε-optimalité

Le nouveau contrôle $\bar{v} = (\bar{z}, \bar{u})$ admissible satisfait les contraintes :

$$d_j^- - z_j \leq \Delta z_j \leq d_j^+ - z_j, j \in J_N \qquad \text{et} \qquad -1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq +1 - u(t), t \in T. \quad (3.5.35)$$

Le minimum de la partie linéaire de la fonctionnelle (3.3.23) sous les contraintes (3.5.35) est atteint pour :

$$\Delta z_j = \begin{cases} d_j^- - z_j, & \text{si } E_j < 0, \\ d_j^+ - z_j, & \text{si } E_j > 0, \\ \in [d_j^- - z_j, d_j^+ - z_j], & \text{si } E_j = 0, j \in J_N, \end{cases}$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ +1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \in [-1 - u(t), +1 - u(t)], & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T. \end{cases}$$

On introduit l'expression :

$$\beta(v, S_B) = \sum_{j \in J_N^+} E_j(d_j^+ - z_j) + \sum_{j \in J_N^-} E_j(d_j^- - z_j) + \int_{T_N^+} \Delta(t)(1 - u(t))dt + \int_{T_N^-} \Delta(t)(-1 - u(t))dt, \quad (3.5.36)$$

où

$$T_N^+ = \{t \in T_N : \Delta(t) > 0\}, \quad T_N^- = \{t \in T_N : \Delta(t) < 0\}, T_N = T \setminus T_B,$$

$$J_N^+ = \{j \in J_N : E_j > 0\}, \quad J_N^- = \{j \in J_N : E_j < 0\}, J_N = J \setminus J_B.$$

Le nombre $\beta(v, S_B)$ est appellé estimation de suboptimalité de la commande de support des contraintes $\{v, S_B\}$. On a la condition suffisante d'ε-optimalité suivante :

Théorème 3.5.1. *Pour $\varepsilon \geq 0$, la commande admissible v est ε-optimale si $\beta(v, S_B) \leq \varepsilon$.*

Preuve 3.5.2. *Tout d'abord, montrons l'inégalité*

$$J(v) - J(v^0) \leq \beta(v, S_B).$$

En effet, en remplaçant dans la formule d'accoissement (3.3.23) le vecteur $\bar{v} = (\bar{z}, \bar{u})$ *par une commande optimale* $v^0 = (z^0, u^0)$ *et en minorant l'expression, on aura alors :*

$$\begin{aligned} J(v^0) - J(v) &= -\sum_{j\in J_N} E_j \Delta z_j - \int_0^{t_1} \Delta(t)\Delta u(t)dt + \Gamma \\ &= -\sum_{j\in J_N} E_j (z_j^0 - z_j) - \int_0^{t_1} \Delta(t)(u^0(t) - u(t))dt + \Gamma \\ &\geq -\sum_{j\in J_N} E_j (z_j^0 - z_j) - \int_0^{t_1} \Delta(t)(u^0(t) - u(t))dt. \end{aligned}$$

D'où

$$J(v) - J(v^0) \leq \sum_{j\in J_N} E_j (z_j^0 - z_j) + \int_0^{t_1} \Delta(t)(u^0(t) - u(t))dt.$$

Nous avons $d_j^- \leq z_j^0 \leq d_j^+, j \in J_N$, *alors on aura*

$$d_j^- - z_j \leq z_j^0 - z_j \leq d_j^+ - z_j,$$

donc

$$E_j(z_j^0 - z_j) \leq E_j(d_j^+ - z_j), \quad si \quad E_j > 0,$$

$$E_j(z_j^0 - z_j) \leq E_j(d_j^- - z_j), \quad si \quad E_j < 0.$$

D'autre part, on a $-1 \leq u^0(t) \leq +1, t \in T$ *; donc*

$$-1 - u(t) \leq u^0(t) - u(t) \leq 1 - u(t),$$

$$\Delta(t)(u^0(t) - u(t)) \leq \Delta(t)(1 - u(t)), \quad si \quad \Delta(t) > 0,$$

$$\Delta(t)(u^0(t) - u(t)) \leq \Delta(t)(-1 - u(t)), \quad si \quad \Delta(t) < 0.$$

D'où

$$J(v) - J(v^0) \leq \sum_{j\in J_N^+} E_j(d_j^+ - z_j) + \sum_{j\in J_N^-} E_j(d_j^- - z_j) + \int_{T_N^+} \Delta(t)(1 - u(t))dt + \int_{T_N^-} \Delta(t)(-1 - u(t))dt.$$

Par conséquent, on obtient :

$$J(v) - J(v^0) \leq \beta(v, S_B).$$

Finalement, si $\beta(v, S_B) \leq \varepsilon$, *on obtient* $J(v) - J(v^0) \leq \beta(v, S_B) \leq \epsilon \Rightarrow v$ *est* $\epsilon-$*optimale.*

3.6 Algorithme numérique pour résoudre le problème

Soit $\varepsilon \geq 0$ et $\{v, S_B\}$ une commande de support du problème (3.1.12)-(3.1.16) qui ne satisfait pas les critères d'optimalité et d'ε-optimalité. La méthode suggérée est ittérative, son but est de construire une solution ε-optimale ou carrément optimale du problème (3.1.12)-(3.1.16). L'itération consiste à passer d'une commande de support initiale $\{v, S_B\}$ à une nouvelle commande de support $\{\bar{v}, \bar{S}_B\}$ telle que $J(\bar{v}) < J(v)$.

Pour cela, l'algorithme se décompose en deux procédures :

- Changement de commande $v \to \bar{v}$,
- Procédure finale.

Au début de chaque ittération, les informations suivantes sont stockées :

- Une commande admissible v,
- Un support S_B,
- La valeur de suboptimalité $\beta(v, S_B)$.

3.6.1 Conditions de passage à la procédure finale

On considère une commande de support telle que $\beta(v, S_B) > \varepsilon$. On construit la quasi-commande $\tilde{v} = (\tilde{z}, \tilde{u})$ avec :

$$\tilde{z}_j = \begin{cases} d_j^-, & \text{si } E_j < 0, \\ d_j^+, & \text{si } E_j > 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+], & \text{si } E_j = 0, j \in J, \end{cases}$$

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ +1, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \in [-1, +1], & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T, \end{cases}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\tilde{x} = (\tilde{x}(t), t \in T)$, du système $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + b\tilde{u}$, $\tilde{x}(0) = \tilde{z}$.

On définit les ensembles suivants :

$$J^* = \{j \in J_N : signE_j \neq signE_j(\tilde{v})\},$$

$$T^* = \{t \in T : sign\Delta(t) \neq sign\Delta(\tilde{v}, t)\},$$

où $E_j(\tilde{v}), j \in J$, et $\Delta(\tilde{v}, t), t \in T$, sont respectivement l'estimation et la co-commande correspondant au couple $\{\tilde{v}, S_B\}$.

Construisons le vecteur :

$$\lambda(J_B, T_B) = P_B^{-1} \begin{pmatrix} D(I, J)\tilde{z} + \int_0^{t_1} p(t)\tilde{u}(t)dt - g \\ G(L, J)\tilde{z} - \gamma \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.6.1. *Si $\|\lambda(J_B, T_B\| = 0$, alors la quasi commande $\tilde{v}$ est admissible pour le problème (3.1.12)-(3.1.16). Celle-ci est optimale si de plus on a $J^* = \emptyset$ et $|T^*| = 0$.*

On choisit trois paramètres positifs μ_1, μ_2 et μ_3. Ainsi, lorsque les inégalités suivantes

$$\|\lambda(J_B, T_B)\| \leq \mu_1, |E_j| \leq \mu_2, |E_j(\tilde{v})| \leq \mu_2, j \in J^* \quad \text{et} \quad |T^*| \leq \mu_3, \tag{3.6.37}$$

sont vérifiées, alors on passe à la procédure finale.

3.6.2 Changement de commande

Soient $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ et $h > 0$ comme étant les paramètres de l'algorithme. Soient les ensembles suivants :

$$J_0 = \{j \in J : |E_j| \leq \alpha_1\}, \quad J_* = \{j \in J : |E_j| > \alpha_1\}, \quad \text{où} \quad |J_0| = K,$$

$$T_0 = \{t \in T : |\Delta(t)| \leq \alpha_2\}, \quad T_* = \{t \in T : |\Delta(t)| > \alpha_2\},$$

et subdivisons T_0 en sous-intervalles $[\tau_i, \tau^i]$, $i = \overline{1, M}$, tels que $\tau_i < \tau^i \leq \tau_{i+1}$, $T_0 = \bigcup_{i=1}^{M}[\tau_i, \tau^i]$, $\tau^i - \tau_i \leq h$, $T_B \subset \{\tau_i, i = \overline{1, M}\}$, $u(t) = u_i = const, t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, M}$.

On pose $\bar{K} = J_0 \cup \{K+1\}$, $\bar{M} = \{1, ..., M, M+1\}$, $d = (d_j, j \in \bar{K})$, $l = (l_i, i \in \bar{M})$, et on construit une nouvelle commande $\bar{v} = (\bar{z}, \bar{u})$ telle que :

$$\bar{z}_j = \begin{cases} z_j + d_j, \quad d_j^- - z_j \leq d_j \leq d_j^+ - z_j, j \in J_0, \\ z_j + d_{K+1}(\tilde{z}_j - z_j), j \in J_*, \quad 0 \leq d_{K+1} \leq 1, \end{cases}$$

et

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_i + l_i, t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, M}, \quad l_i^- \leq l_i \leq l_i^+, i = \overline{1, M}, \\ u(t) + l_{M+1}(\tilde{u}(t) - u(t)), t \in T_*, \quad l_{M+1}^- \leq l_{M+1} \leq l_{M+1}^+, \end{cases}$$

où

$$l_i^- = -1 - u_i, l_i^+ = 1 - u_i, i = \overline{1, M}, l_{M+1}^- = 0, l_{M+1}^+ = 1.$$

L'acroissement de la fonctionnelle vaut :

$$\Delta J(v) = J(\bar{v}) - J(v) = (Qx(t_1)+c)'\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)'Q\Delta x(t_1).$$

On calcule d'abord $\Delta x(t_1)$:

$$\begin{aligned}
\Delta x(t_1) &= F(t_1)(J,J)\Delta z + \int_0^{t_1} q(t)\Delta u(t)dt \\
&= \sum_{j\in J_0} F(t_1)(J,j)d_j + d_{K+1}\sum_{j\in J_*} F(t_1)(J,j)(\tilde{z}_j - z_j) + \sum_{i=1}^{M}\int_{\tau_i}^{\tau^i} q(t)l_i dt \\
&+ l_{M+1}\int_{T_*} q(t)[\tilde{u}(t)-u(t)]dt.
\end{aligned}$$

On pose

$$f_j = F(t_1)(J,j), j\in J_0, \quad f_{K+1} = \sum_{j\in J_*} F(t_1)(J,j)(\tilde{z}_j - z_j),$$

$$q_i = \int_{\tau_i}^{\tau^i} q(t)dt, i=\overline{1,M}, \quad q_{M+1} = \int_{T_*} q(t)[\tilde{u}(t)-u(t)]dt.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta x(t_1) &= \sum_{j\in J_0} f_j d_j + f_{K+1}d_{K+1} + \sum_{i=1}^{M} q_i l_i + l_{M+1}q_{M+1} \\
&= \sum_{j\in J_0\cup\{K+1\}} f_j d_j + \sum_{i=1}^{M+1} q_i l_i,
\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta J(v) = (Qx(t_1)+c)'(\sum_{j\in J_0\cup\{k+1\}} f_j d_j + \sum_{i=1}^{M+1} q_i l_i) + \frac{1}{2}(\sum_{j\in J_0\cup\{k+1\}} f_j d_j + \sum_{i=1}^{M+1} q_i l_i)'Q(\sum_{j\in J_0\cup\{k+1\}} f_j d_j + \sum_{i=1}^{M+1} q_i l_i). \tag{3.6.38}$$

Soient

$$r_j = (Qx(t_1)+c)'f_j, j\in\bar{K}, \quad s_i = (Qx(t_1)+c)'q_i, i\in\bar{M},$$

$$R_j = Hf_j, j\in\bar{K}, \quad S_i = Hq_i, i\in\bar{M}.$$

On a alors

$$H\Delta x(t_1) = 0 \Rightarrow \sum_{j\in\bar{K}} R_j d_j + \sum_{i\in\bar{M}} S_i l_i = 0.$$

On pose

$$G_j = G(L,j), j \in J_0, \quad G_{K+1} = \sum_{j \in J_*} G(L,j)(\tilde{z}_j - z_j),$$

d'où

$$G\Delta z = 0 \Rightarrow \sum_{j \in \bar{K}} G_j d_j = 0.$$

Pour trouver $d = (d_j, j \in \bar{K})$ et $l = (l_i, i \in \bar{M})$, on considère le problème de programmation quadratique suivant appelé problème de support :

$$\Delta J(v) = \sum_{j \in \bar{K}} r_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} s_i l_i + \frac{1}{2}(\sum_{j \in \bar{K}} f_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} q_i l_i)' Q (\sum_{j \in \bar{K}} f_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} q_i l_i) \to \min, \tag{3.6.39}$$

$$\sum_{j \in \bar{K}} R_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} S_i l_i = 0, \tag{3.6.40}$$

$$\sum_{j \in \bar{K}} G_j d_j = 0, \tag{3.6.41}$$

$$l_i^- \leq l_i \leq l_i^+, i = \overline{1, M}, \quad 0 \leq l_{M+1} \leq 1, \tag{3.6.42}$$

$$d_j^- - z_j \leq d_j \leq d_j^+ - z_j, j \in J_0, \quad 0 \leq d_{K+1} \leq 1. \tag{3.6.43}$$

On résoud ce problème par la méthode adaptée de programmation quadratique convexe. On obtient un plan de support $\varepsilon-$optimal $(d_j^\varepsilon, l_i^\varepsilon, \bar{J}_B, \bar{T}_B)$. La nouvelle commande $\bar{v} = (\bar{z}, \bar{u})$ se construit comme suit :

$$\bar{z}_j = \begin{cases} z_j + d_j^\varepsilon, j \in J_0, \\ z_j + d_{K+1}^\varepsilon(\tilde{z}_j - z_j), j \in J_*, \end{cases}$$

et

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_i + l_i^\varepsilon, t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, M}, \\ u(t) + l_{M+1}^\varepsilon(\tilde{u}(t) - u(t)), t \in T_*, \end{cases}$$

satisfait ainsi l'inégalité $J(\bar{v}) \leq J(v)$.

On calcule la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\bar{v}, \bar{S}_B)$. Si $\beta(\bar{v}, \bar{S}_B) \leq \varepsilon$, alors la commande $\bar{v} = (\bar{z}, \bar{u})$ est $\varepsilon-$optimale ; sinon, cette procédure de changement de commande est répétée jusqu'à ce que les conditions de passage à la procédure finale (3.6.37) soient vérifiées.

3.6.3 Procédure finale

Soit $\{v, S_B\}$ la commande de support obtenue dans la procédure précédante.

On calcule les fontions correspondantes $x(t)$, $\Delta(t)$, $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $\Delta(\tilde{v}, t), t \in T$, et les vecteurs correspondants γ, E, $\tilde{z}$, $E(\tilde{v})$. On considère que les conditions (3.6.37) sont satisfaites.

On désigne par $J^0 = \{j \in J, E_j = 0\}$, avec $|J_B| \leq |J^0| = p \leq n$ et $T^0 = \{t \in T : \Delta(t) = 0\} = \{\theta_i, i = \overline{1, s}\}$, $|T_B| \leq s \leq n$, avec $\theta_0 = 0$, $\theta_{s+1} = t_1$. On suppose que $\dot{\Delta}(\theta_i) \neq 0$, $i = \overline{1, s}$.

La procédure finale consiste à déterminer les vecteurs $y = \nu \in R^{m+l}$, $\xi_j = z_j, j \in J^0$ et $\tau = (\tau_i, i = \overline{1, s})$, en résolvant le système d'équations à $(m + l + p + s)$ inconnues :

$$\begin{cases} H\tilde{x}(t_1, \tau) - g = 0, \\ \sum_{j \in J^0} G_j \xi_j + \sum_{j \in J \setminus J^0} G_j \tilde{z}_j - \gamma = 0, \\ E_j(y, \xi, \tau) = 0, j \in J^0, \\ \Delta(y, \xi, \tau, \tau_i) = 0, i = \overline{1, s}, \end{cases} \tag{3.6.44}$$

où

$$(E_j'(y, \xi, \tau), j \in J^0) = y' \begin{pmatrix} D(I, J^0) \\ G(L, J^0) \end{pmatrix} - (Q\tilde{x}(t_1, \tau) + c)' F(t_1)(J, J^0),$$

$$\Delta(y, \xi, \tau, t) = y_u' p(t) - (Q\tilde{x}(t_1, \tau) + c)' q(t), t \in T;$$

$\tilde{x}(t, \tau), t \in T$, est la trajectoire construite selon la commande suivante $\tilde{u}(t, \tau), t \in T$:

$$\tilde{u}(t, \tau) = \begin{cases} -sign\dot{\Delta}(\theta_1), & \text{si} \quad t \in [0, \tau_1[, \\ -sign\dot{\Delta}(\theta_i), & \text{si} \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i[, \quad i = \overline{2, s}, \\ sign\dot{\Delta}(\theta_s), & \text{si} \quad t \in [\tau_s, t_1]. \end{cases} \tag{3.6.45}$$

On résoud le système (3.6.44) par la méthode de Newton en commançant par l'approximation initiale

$$X^1 = (y^1, \xi^1, \tau^1) = (y, z(J^0), T^0).$$

Pour des paramètres μ_1, μ_2 et μ_3 positifs assez petits, la commande optimale $v^0 = (z^0, u^0)$ s'écrit :

$$\begin{cases} z^0 = (z_j^0, j \in J), \quad \text{avec} \quad z_j^0 = \xi_j, j \in J^0; \quad z_j^0 = \tilde{z}_j, j \in J \setminus j^0; \\ u^0(t) = \tilde{u}(t, \tau), t \in T. \end{cases} \tag{3.6.46}$$

3.6.4 Schéma de l'algorithme

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Méthode adaptée pour le problème posé.

Debut

1. On suppose dés l'introduction que le système est commandable.
2. Soit $\{v, S_B\}$ une commande de support de départ admissible du problème (3.1.12)-(3.1.16).
   - Déterminer la trajectoire admissible $x(t), t \in T$.
   - Calculer $D(I, J) = HF(t_1)$.
   - Calculer $q(t) = F(t_1)F^{-1}(t)b$.
   - Calculer $p(t) = Hq(t)$.
   - Calculer le vecteur des potentiels $\nu' = q'_B P_B^{-1}$.
   - Calculer le vecteur des estimations $E' = \nu' \begin{pmatrix} D(I, J) \\ G(L, J) \end{pmatrix} - (Qx(t_1) + c)'F(t_1)$.
   - Calculer la co-commande $\Delta(t) = \nu'_u p(t) - (Qx(t_1) + c)'q(t), t \in T$.
   - Calculer la valeur de la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}x'(t_1)Qx(t_1) + c'x(t_1)$.
3. Test d'optimalité de la commande de support de départ
   - Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(v, S_B)$, où

$$\beta(v, S_B) = \sum_{j \in J_N^+} E_j(d_j^+ - z_j) + \sum_{j \in J_N^-} E_j(d_j^- - z_j) + \int_{T_N^+} \Delta(t)(1 - u(t))dt + \int_{T_N^-} \Delta(t)(-1 - u(t))dt.$$

   .

   - **SI** $\beta(v, S_B) = 0$, alors la commande de support $\{v, S_B\}$ est optimale ; aller à **FIN**.
   - **SI** $\beta(v, S_B) \leq \varepsilon$, alors la commande de support $\{v, S_B\}$ est ε- optimale ; aller à **FIN**.
   - **SINON**, aller en 4.
   - **FINSI**.
4. Changement de la commande v en $\bar{v}$
   - Construire la quasi-commande $\tilde{v} = (\tilde{z}, \tilde{u})$ avec :

$$\tilde{z}_j = \begin{cases} d_j^-, & \text{si } E_j < 0, \\ d_j^+, & \text{si } E_j > 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+], & \text{si } E_j = 0, j \in J, \end{cases}$$

et

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ +1, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \in [-1, +1], & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T, \end{cases}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\tilde{x} = (\tilde{x}(t), t \in T), \tilde{x}(0) = \tilde{z}$,

– On définit les ensembles suivants :

$$J^* = \{j \in J_N : signE_j \neq signE_j(\tilde{v})\},$$

$$T^* = \{t \in T : sign\Delta(t) \neq sign\Delta(\tilde{v}, t)\}.$$

– Construisons le vecteur $\lambda(\bar{J}_B, \bar{T}_B)$ comme suit :

$$\lambda(J_B, T_B) = P_B^{-1} \begin{pmatrix} D(I, J)\tilde{z} + \int_0^{t_1} p(t)\tilde{u}(t)dt - g \\ G(L, J)\tilde{z} - \gamma \end{pmatrix}$$

SI $\|\lambda(J_B, T_B)\| \leq \mu_1, |E_j| \leq \mu_2, |E_j(\tilde{v})| \leq \mu_2, j \in J^*$ et $|T^*| \leq \mu_3$, alors aller à la procédure finale.

– Construire les ensembles :

$$J_0 = \{j \in J : |E_j| \leq \alpha_1\}, \quad J_* = \{j \in J : |E_j| > \alpha_1\}, \quad \text{où} \quad |J_0| = K,$$

$$T_0 = \{t \in T : |\Delta(t)| \leq \alpha_2\} \quad \text{et} \quad T_* = \{t \in T : |\Delta(t)| > \alpha_2\},$$

– subdiviser l'ensembles T_0 en intervalles $[\tau_i, \tau^i]$, $i = \overline{1, M}$,

– Calculer les quantités suivantes $f_j, r_j, R_j, j \in \bar{K}$ et $q_i, s_i, S_i, i \in \bar{M}$

– Résoudre le problème suivant par la méthode adaptée : minimiser

$$\Delta J(v) = \sum_{j \in \bar{K}} r_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} s_i l_i + \frac{1}{2}(\sum_{j \in \bar{K}} f_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} q_i l_i)' Q (\sum_{j \in \bar{K}} f_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} q_i l_i), \tag{3.6.47}$$

$$\sum_{j \in \bar{K}} R_j d_j + \sum_{i \in \bar{M}} S_i l_i = 0, \tag{3.6.48}$$

$$\sum_{j \in \bar{K}} G_j d_j = 0, \tag{3.6.49}$$

$$l_i^- \leq l_i \leq l_i^+, i = \overline{1, M}, \quad 0 \leq l_{M+1} \leq 1, \tag{3.6.50}$$

$$d_j^- - z_j \leq d_j \leq d_j^+ - z_j, j \in J_0, \quad 0 \leq d_{K+1} \leq 1. \tag{3.6.51}$$

– Calculer la nouvelle commande de support $\{\bar{v}, \bar{S}_B\}$, où

$$\bar{z}_j = \begin{cases} z_j + d_j, j \in J_0, \\ z_j + d_{k+1}(\tilde{z} - z_j), j \in J_*, \end{cases}$$

et

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_i + l_i, t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, M}, \\ u(t) + l_{M+1}(\tilde{u}(t) - u(t)), t \in T_*. \end{cases}$$

5. Test d'optimalité de la nouvelle commande de support $\{\bar{v}, \bar{S}_B\}$
   - Calculer la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\bar{v}, \bar{S}_B)$,
   - **SI** $\beta(\bar{v}, \bar{S}_B) = 0$, alors la commande de support $\{\bar{v}, \bar{S}_B\}$ est optimale ; aller à **FIN**.
   - **SI** $\beta(\bar{v}, \bar{S}_B) \leq \varepsilon$, alors la commande de support $\{\bar{v}, \bar{S}_B\}$ est ε- optimale ; aller à **FIN**.
   - **SINON**, aller en 4.
   - **FINSI**.
6. Procédure finale
7. Résoudre le système suivant par la méthode de Newton :

$$\begin{cases} H\tilde{x}(t_1, \tau) - g = 0, \\ \sum_{j \in J^0} G_j \xi_j + \sum_{j \in J \setminus J^0} G_j \tilde{z}_j - \gamma = 0, \\ E_j(y, \xi, \tau) = 0, j \in J^0, \\ \Delta(y, \xi, \tau, \tau_i) = 0, i = \overline{1, s}, \end{cases}$$

on prend comme approximation initiale le vecteur :

$$X^1 = (y^1, \xi^1, \tau^1) = (y, z(J^0), T^0).$$

8. Déterminer la commande $v^0 = (z^0, u^0)$:

$$\begin{cases} z^0 = (z_j^0, j \in J), \quad \text{avec} \quad z_j^0 = \xi_j, j \in J^0; \quad z_j^0 = \tilde{z}_j, j \in J \setminus j^0; \\ u^0(t) = \tilde{u}(t, \tau), t \in T. \end{cases}$$

FIN.

3.6.5 Exemple Numérique

Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$J(v) = J(z,u) = \frac{1}{2}x'(t_1)Qx(t_1) + c'x(t_1) \to min, \tag{3.6.52}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases} \text{où} \quad x(0) = z \in X_0 = \{z \in \mathbb{R}^3, Gz = \gamma, d^- \leq z \leq d^+\}, \tag{3.6.53}$$

$$Hx(t_1) = g, \tag{3.6.54}$$

$$|u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_1], \tag{3.6.55}$$

avec $Q = I_3, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

$\gamma = 3, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \frac{3}{2}, \quad d^- = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d^+ = \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \\ +2 \end{pmatrix}, \quad n = 3,$

$m = 1, \quad l = 1, \quad I = \{1\}, \quad J = \{1, 2, 3\}, \quad L = \{1\}, t_1 = 3.$

Soit la commande $v^0 = (z^0, u^0)$ suivante :

$$z^0 = \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \\ z_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^0(t) = \begin{cases} +1, & \text{si } t \in [0, 1[, \\ -1, & \text{si } t \in [1, 2[, \\ +1, & \text{si } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Montrons que cette commande est optimale dans le problème considéré.

Tout d'adord, notons que le système est commandable vu que $rang(b, Ab, A^2b) = 3$.

La solution du système dynamique (3.6.53) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)[z + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau], t \in T,$$

où $F(t) = exp(At)$ est une matrice carrée d'ordre n, solution du système différentiel homogène

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n. \end{cases}$$

On a donc

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons

- $q(t) = F(3)F^{-1}(t)b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} \\ -t+3 \\ 1 \end{pmatrix},$

- $p(t) = Hq(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} \\ -t+3 \\ 1 \end{pmatrix} = -t+3,$

- $D(I,J) = HF(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Sur $[0,1[$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t)[z^0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu^0(\tau)d\tau] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -\tau & \frac{\tau^2}{2} \\ 0 & 1 & -\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \Big] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} - t + 2 \\ \frac{t^2}{2} - 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow x(1) = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sur $]1,2]$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t)[x(1)+\int_1^t F^{-1}(\tau)bu^0(\tau)d\tau] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \int_1^t \begin{pmatrix} 1 & -\tau & \frac{\tau^2}{2} \\ 0 & 1 & -\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \right] \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{6}+t^2-t+\frac{4}{3} \\ -\frac{t^2}{2}+2t-1 \\ -t+2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sur $[2,3]$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t)[x(2)+\int_2^t F^{-1}(\tau)bu^0(\tau)d\tau] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_2^t \begin{pmatrix} 1 & -\tau & \frac{\tau^2}{2} \\ 0 & 1 & -\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6}-t^2+3t+\frac{2}{3} \\ \frac{t^2}{2}-2t+3 \\ t-2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow x(3) = \begin{pmatrix} \frac{31}{6} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$Hx(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{31}{6} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} = g.$$

Puisque $z^0 \in X_0$, la commande $v^0 = (z^0, u^0)$ est alors admissible.

Posons $J_B = \{3\}, \quad J_N = \{1,2\}, \quad T_B = \{1\}$.

A l'aide de l'ensemble $S_B = \{J_B, T_B\}$, on forme la matrice :

$$P_B = \begin{pmatrix} D(I,J_B) & p(t), t \in T_B \\ G(L,J_B) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculons :

- $\nu' = q'_B P_B^{-1}, q'_B = \Big([(Qx(3)+c)'F(3)]_j, j \in J_B, (Qx(3)+c)'q(t), t \in T_B\Big)$, on a

$$(Qx(3)+c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{31}{6} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{6} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[(Qx(3)+c)'F(3)] = \begin{pmatrix} \frac{37}{6} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{6} & 20 & \frac{133}{4} \end{pmatrix},$$

$$[(Qx(3)+c)'F(3)]_{j, j\in J_B} = \frac{133}{4},$$

$$(Qx(3)+c)'q(t), t \in T_B = \begin{pmatrix} \frac{37}{6} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{49}{3},$$

d'où $q'_B = \begin{pmatrix} \frac{133}{4} & \frac{49}{3} \end{pmatrix}$, donc

$$\nu' = \begin{pmatrix} \frac{133}{4} & \frac{49}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{49}{6} & \frac{35}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu'_u & \nu'_z \end{pmatrix};$$

- $E' = \nu' \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} - (Qx(3)+c)'F(3) = \begin{pmatrix} \frac{49}{6} & \frac{35}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{37}{6} & 20 & \frac{133}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{12} & \frac{-233}{12} & 0 \end{pmatrix};$

- $\Delta(t) = \nu'_u p(t) - (Qx(3)+c)'q(t) = -\frac{37}{12}t^2 - \frac{205}{6}t + \frac{231}{4}$.

On a bien

$$\begin{cases} E_1 > 0 \quad \text{et} \quad z_1^0 = 2 = d_1^+, \\ E_2 < 0 \quad \text{et} \quad z_2^0 = -1 = d_2^-, \\ E_3 = 0 \quad \text{et} \quad -2 < z_3^0 < +2, \\ \Delta(t) > 0 \quad \text{si} \quad t \in [0,1[, \quad \text{et} \quad u^0(t) = +1, \\ \Delta(t) < 0 \quad \text{si} \quad t \in [1,2[, \quad \text{et} \quad u^0(t) = -1, \\ \Delta(t) > 0 \quad \text{si} \quad t \in [2,3], \quad \text{et} \quad u^0(t) = +1. \end{cases}$$

Le critère d'optimalité étant vérifié, la commande $v^0 = (z^0, u^0)$ est donc optimale, avec

$$J(v^0) = J(z^0, u^0) = 20.13.$$

Conclusion

Les problèmes linéaires-quadratiques de contôle optimal ont plusieurs applications pratiques et ils sont très souvent utilisés pour une approximation effective des problèmes non linéaires.

Notre travail a consisté en la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec un coût quadratique et un état initial libre, et ce, en utilisant la méthode adaptée de programmation quadratique convexe. Pour cela, nous avons commencé par une introduction aux systèmes linéaires et à la commande optimale, ensuite, nous avons donné quelques notions classiques importantes sur la programmation quadratqiue convexe.

En s'inspirant de la méthode directe de support en programmation quadratique convexe et des travaux de R. Gabassov, F.M. Kirillova, O.I. Kostyukova, V.M. Raketsky ainsi que ceux de M.O. Bibi, A.Faradji, N. Abassi et B.Brahmi, nous avons développé une méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal avec un état initial mobile appartenant à un polyèdre.

Notre travail peut être développé dans plusieurs axes, en particulier, en élaborant une méthode duale pour la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec un coût quadratique, un état initial libre, un signal de sortie borné et une commande vectorielle.

Bibliographie

[1] *Abassi N. Méthode de Support pour la Minimisation d'une Fonctionnelle Quadratique Convexe.-Mémoire de Magister en Mathématiques Appliquées. Université de Béjaia, 2004.*

[2] *Aidène M. Algorithme de Résolution d'un Problème min-max en Contrôle Optimal.-Copte rendus de l'Académie des Sciences de Bélarussie, 1986, 30 :24-27.*

[3] *Aidène M., Vorob'ev I.L. and Oukacha B. Algorithm for solving a linear optimal control with minmax performance index.-Computational Mathematics and Mathematical Physic, 2005, 45(10) :1691-1700.*

[4] *Aidène M. and Louadj K. Optimization of a Problem of Optimal Control with Free Initial State.-Applied Mathematical Sciences, 2010, 4(5) :201-216.*

[5] *Bergounioux M. Optimisation et Contrôle des Systèmes Linéaires.-Dunod, Paris, 2001.*

[6] *Bibi M.O. Methods for Solving Linear-Quadratic Problems of Optimal Control.-Ph.D Dissertation, Minsk, 1985.*

[7] *Bibi M.O. Support Method for Solving a Linear Quadratic Problem with Polyhedral Constraints on Control.-Optimization, 1996, 37 :139-149.*

[8] *Bibi M.O. Optimization of a Linear Dynamic System with Double Terminal Constraint on the Trajectories.-Optimization, 1994, 30 :359-366.*

[9] *Bibi M.O. Optimization of a Linear Dynamic System with Double Terminal Constraint on the Trajectories.-Collected abstracts of the* 16^{th} *IFIP-Conference on systems modelling and optimization, Compiègne, France, 1993.*

[10] *Bibi M.O. Cours de Post-Graduation sur le Contrôle Optimal.-Université de Béjaia, 2010.*

[11] *Bibi M.O. Cours de Post-Graduation sur la Programmation Quadratique Convexe.-Université de Béjaia, 2010.*

[12] *Bibi M.O. Méthode de Résolution d'un Problème Linéaire-Quadratique de Commande Optimale Multivariable.-Actes du Premier Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur, 1987, 37 :97-102.*

[13] *Bibi M.O. and Kostyukova O.I. Optimization of a Linear Control System with Respect to Quadratic terminal cost functional.-Doklay AN BSSR,1986, 30 :16-19.*

[14] *Bhattacharyya S.P., Datta A. and Keel L. H. Linear Control Theory : Structure Robustness, and Optimization.-CRC Press, New York, 2009.*

[15] *Chan N. Constructive Method for Solving a Linear minimax Problem of Optimal Control.-J. Optimization Theory and Applications, 1991, 71(2) :255-275.*

[16] *Chernushevich A.S. Method of Support Problems for Solving a Linear-Quadratic Problem of Terminal Control.-Int. J.Control,1990, 52(6) :1475-1488.*

[17] *Craven B.D. Control and Optimization.- Chapman and Hall, London, 1995.*

[18] *Dmitruk N., Findeisen R. and Allgower F. Optimal Measurement Feedback Control of Finite-time Continuous Linear Systems-Proceedings of the 17th World Congress. The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, 2008, 6-11.*

[19] *Donald E.K. Optimal Control Theory :An Introduction.-University San José, California, 2004.*

[20] *Erovenko L.D. Algorithm for Optimizing non-Stationary Linear System with Inequality Constraints on the State.-Doklay AN BSSR, 1984, 27 :968-971.*

[21] *Faradji A. Algorithmes de Minimisation d'une Fonctionnelle Quadratique.-Mémoire de Magister, Université de Tizi-Ouzou, 1998.*

[22] *Gabasov R. and al. Constructive Methods of Optimization.-P.I.-University Press, Minsk, 1984.*

[23] *Gabasov R. and Kirillova F.M. Constructive Theory of Extremal Problems.- University Press, Minsk, 1980.*

[24] *Gabasov R. and Kirillova F.M. Constructive Methods of Optimization.-P.II : Control Problems, University Press, Minsk, 1984.*

[25] *Gabasov R. and Kirillova F.M. Méthodes de Programmation Linéaire.-Volumes 1,2 et 3.-Edition de l'Université, Minsk, 1977, 1978 et 1980.*

[26] *Gabasov R. and Kirillova F.M. Methods of Optimization.-University Press, Minsk, 1981.*

[27] *Gabasov R. and Kirillova F.M. Real-Time Optimal Control and Observation.-Journal of Computer and Systems Sciences International, 2006, 45(3) :421-441.*

[28] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Balashevich N.V. Open-Loop and Closed-Loop Optimization of Linear Control Systems.-Asian Journal of Control, 2000, 2(3) :155-168.*

[29] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Balashevich N.V. Optimal Controller for a Time Dependent System.-Doklady Mathematics, Minsk, 2001, 64(3) :439-444.*

[30] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Balashevich N.V. Optimal Control of linear Systems with Delay.-Doklady Mathematics, Minsk, 2006, 74(2) :780-785.*

[31] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Kostyukova O.I. Direct Accurate Method to Optimize a Linear Dynamic multi-input System.-Automatica i Telemechanica, 1986, 6 :6-13.*

[32] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Kostyukova O.I. Solution of Linear Quadratic Extremal Problems.-Soviet Math. Dokl, 1985, 31 :99-103.*

[33] *Gabasov R., Kirillova F.M., Kostyukova O.I. and Raketsky V.M. Constructive Methods of Optimization.-P.IV : Convex Problems.-University Press, Minsk, 1987.*

[34] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Raketsky V.M. On Methods for Solving the General Problem of Convex Quadratic Programming.-Soviet Math. Dokl, 1981, 23 :653-657.*

[35] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Pavlenok N.S. Optimal Observation and Control in Linear Systems.-Journal of Mathematical Sciences, 2006, 139(5).*

[36] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Pavlenok N.S. Constructing Open-Loop and Closed-Loop Solutions of Linear-Quadratic Optimal Control Problems.-Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2008, 48(10) :1715-1745.*

[37] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Prischepova S.V. Optimal Feedback Control.-Springer-Verlag, Berlin, 1995.*

[38] *Gabasov R., Kirillova F.M. and Paulianok N.S. Optimal Control of Linear Systems with Quadratic Performance Index.-Appl. Comput. Math. 2008, 7(1) :4-20.*

[39] *Hendicks E., Jannerup O and Sorensen P.H. Linear Systems Control.-Springer-Verlag, Berlin, 2008.*

[40] *Kostina E.A. and kostyukova O.I. Algorithm for Quadratic Programs with Equality and Inequality Constraints-Journal of Applied Mathematics and Physics, 2001, 42(7) :1012-1026.*

[41] *Kostyukova O.I. Optimization of a Linear Dynamic Multi-Input System.-Izv. AN BSSR, seria Fiz-Mat Nauk, 1990, (5) :16-21.*

[42] *Markovitz H.M. The Optimization of Quadratic function subject to Linear Constraints.-Naval Research Logistic Quarterly, 1956, 3 :111-133.*

[43] *Minoux M. Programmation Mathématique,Tome 1 : Théorie et Algorithmes.-Bordas et C.N.E.T-ENST, 1983.*

[44] *Oukacha B. Résolution d'un problème min-max en contrôle optimal-Mémoire de Magister en Recherche Opérationnelle, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2000.*

[45] *Peressini A.L., Sullivan F.E. and Uhl J.J. The Mathematics of Nonlinear Programming.-Springer-Verlag, New York, 1988.*

[46] *Pontryaguine L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V and Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes.-John Wiley and Sons, New Jersey, 1962.*

[47] *Pytlak R. Numerical Methods for Optimal Control Problems with State Contraints.-Springer-Verlag, Berlin, 1999.*

[48] *Trélat E. Contrôle Optimal : Théorie et Applications.-Université Paris-Sud. Laboratoire AN-EDP. Mathématiques. UMR 8628, 2007/2008.*

[49] *Van de Panne C. Methods for Linear and Quadratic Programming.-Amer. Elsevier. Publ. Co., Inc., New York, 1975.*

Résumé

Le but de ce mémoire est de développer une méthode de résolution pour un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec coût quadratique et état initial libre. Après avoir donné une introduction aux systèmes dynamiques linéaires et à la commande optimale, nous avons présenté quelques notions sur la programmation quadratique convexe, ainsi que la méthode adaptée de programmation quadratique convexe. Ensuite, nous avons développé un algorithme de résolution d'un problème de contrôle optimal avec un état initial mobile appartenant à un polyèdre.

Mots-clés : Systèmes dynamiques linéaires, Contrôle optimal, Méthode adaptée de programmation quadratique, Etat initial libre.

Abstract

The purpose of this thesis is to develop a solution method for optimal control problem of a linear dynamical system with quadratic cost and free initial state. After giving an introduction to linear dynamical systems and optimal control, we presented some ideas on convex quadratic programming, as well as the adaptive method of convex quadratic programming. Then, we developed an algorithm for solving a problem of optimal control with a free initial state belonging to a polyhedron.

Keywords: Linear Dynamic Systems, Optimal Control, Adaptive Method of Convex Quadratic Programming, Free Initial State.