

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderahmane Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle

# Mémoire de Magister

En

Mathématiques Appliquées

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

## Thème

# Applications de la théorie des jeux dans les réseaux de télécommunications

Présenté par :

M<sup>elle</sup> BELAKBIR Naima

Devant le jury composé de :

<b>Président</b>	M <sup>r</sup> Djamil	AÏSSANI	Professeur	Université de Béjaïa.
<b>Rapporteur</b>	M <sup>r</sup> Mohammed Saïd	RADJEF	Professeur	Université de Béjaïa.
<b>Examineur</b>	M <sup>r</sup> Mohand Ouamer	BIBI	Professeur	Université de Béjaïa.
<b>Examineur</b>	M <sup>me</sup> Louiza	BOUALLOUCHE	M.C.A	Université de Béjaïa.

Béjaïa, 2011

## Remerciements

Grande est ma joie de pouvoir remercier aujourd'hui mon directeur de mémoire, le Professeur **M.S. RADJEF**. Je le remercie tout particulièrement et très sincèrement pour ses nombreux conseils, sa disponibilité ainsi que pour la confiance qu'il m'a témoignée en dirigeant ce travail.

Je remercie vivement le Professeur **D. AISSANI**, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements chaleureux s'adressent également au Professeur **M.O. BIBI** et au Docteur **L. BOUALLOUCHE** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, en particulier Docteur **H. SLIMANI**.

Je ne peux oublier de remercier tous les membres de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements particulièrement **mes parents**.

## *Dédicaces*

*J*e dédie ce travail :

- ★ À ma source de courage, à ceux que j'ai de plus cher : mes parents,
- ★ À ma Sœur Zina,
- ★ À mes frères,
- ★ À toute ma famille.
- ★ À tous mes amis.

# Introduction générale

Les réseaux de communications sont devenus une partie intégrante de notre vie. Les réseaux mobiles et l'Internet sont un exemple de l'essor que connaissent les réseaux de communications. Ces derniers occupent, notamment depuis la fin des années 1980 [41], une place de plus en plus importante en termes de recherche, d'investissements, de revenus et d'abonnés.

L'association des services mobiles aux communications sans fils est l'une des plus importantes évolutions qu'ait observé le secteur des télécommunications. En effet, la miniaturisation des composants a permis de réduire la taille des produits électroniques sans fils en général et le matériel informatique en particulier [16]. Les ordinateurs portables sont de plus en plus légers, petits et puissants en termes de capacité de traitement et de stockage de données. De plus, ils sont dotés d'une multitude de fonctionnalités qui permettent d'assurer différents types d'applications et de services tels que la connexion. Ces équipements mobiles et la communication sans fils permettent aux utilisateurs en déplacement d'être rapidement connectés et d'avoir accès à des réseaux et à leurs services associés en n'importe quel instant et dans n'importe quel lieu.

Les réseaux sans fils offrent une grande flexibilité ainsi qu'une rapidité et facilité de mise en place. Ils seront d'un grand apport lors des catastrophes naturelles, des incendies, où il sera indispensable de disposer rapidement d'un réseau pour organiser les secours et les opérations de sauvetage [59].

On trouve dans la pratique deux catégories de réseaux d'équipements mobiles : les réseaux avec infrastructure fixe préexistante et les réseaux sans infrastructure [59]. Dans la première catégorie, le modèle de la communication utilisé est généralement le modèle cellulaire. Dans ce type de réseaux, on trouve des stations de base, qui assurent les communications entre les équipements. La seconde catégorie est constituée des réseaux Ad-Hoc. Ces derniers sont sans infrastructure fixe préexistante et les mobiles communiquent directement entre eux.

Les réseaux Ad-Hoc ont été développés au début pour des applications militaires où les champs de bataille ne permettent pas d'installer des stations de base [41]. Plusieurs difficultés sont rencontrées dans les réseaux Ad-Hoc telles que le problème de routage, la contrainte d'énergie, la bande de fréquence limitée et la sécurité [58].

La théorie des jeux est une théorie mathématique qui vise à analyser les situations d'interaction entre plusieurs agents rationnels qui essaient de maximiser leurs gains. La rationalité partage la théorie des jeux en deux classes : la théorie des jeux classiques, quand la rationalité résulte de l'intelligence des joueurs et la théorie des jeux évolutionnaires quand la rationalité résulte d'un processus d'apprentissage et d'adaptation.

Les racines de la théorie des jeux sont basées sur des situations de la vie courante. Une analyse mathématique fut initialement proposée pour étudier des problèmes impliquant plusieurs joueurs, tels que les échecs ou les jeux de cartes. Le texte fondateur de la théorie des jeux est le livre "*Theory of Games and Economic Behavior*", de J. Von Neumann and O. Morgenstern, apparu en 1944 [64]. Ce livre donne un formalisme pour les jeux coopératifs aussi bien que non-coopératifs. Ces concepts ont été ensuite étendus par J. Nash ([60, 61, 62, 63]) en définissant en particulier l'un des équilibres plus utilisés qui porte son nom (Equilibre de Nash). Actuellement, la théorie des jeux est utilisée dans de nombreux domaines, en économie [34], en biologie mathématique, ainsi que dans l'étude des réseaux de télécommunications [46].

L'intérêt croissant pour le déploiement de réseaux à organisation automatique (Ad Hoc) et leur nature qui est fait d'interactions entre les mobiles qui partagent la même ressource pour l'envoi de paquets, font de la théorie des jeux un outil intéressant pour résoudre plusieurs problèmes posés dans ce type de réseau. Les études menées par Dimitris E Charilas et Athanasios D Panagopoulos [22], V. Srivastava et Al [79] et M. Felegyhazi et J. P Hubaux [29] portent sur les applications de la théorie des jeux dans les communications sans fils.

D'autres travaux sur les réseaux de télécommunications impliquant la théorie des jeux peuvent être trouvés dans [12, 8].

La théorie des jeux évolutionnaires, adaptée de la biologie mathématique, est employée pour décrire et prévoir les propriétés de populations denses, dont l'évolution dépend d'un grand nombre d'interactions locales, chacune impliquant un nombre fini d'individus. La théorie des jeux évolutionnaires peut être reliée à Darwin [90], qui a introduit le concept de sélection naturelle et donc la compétition entre les génotypes et les phénotypes des individus. C'est J. Maynard Smith [74] qui a véritablement défini les jeux évolutionnaires, et en particulier leur solution possible, en introduisant le concept fondamental de stratégie évolutionnairement stable (ESS). Dans le contexte biologique, l'utilité gagnée par un individu est directement reliée à sa capacité de reproduction.

Bien que définie dans un contexte biologique, l'ESS est pertinente dans un contexte d'ingénierie [89]). En particulier, en ce qui concerne l'accès à un médium commun [85, 83, 84].

Dans un réseau Ad-hoc, les mobiles partagent la même bande de fréquence limitée. Cette bande de fréquence est divisée en canaux physiques, et chaque canal est affecté à une seule communication. Lorsque deux mobiles envoient simultanément sur un même canal, un phénomène d'interférence se produit et les paquets envoyés seront perdus.

En pratique, l'interférence est inévitable, car le nombre de canaux physiques est inférieur au nombre de mobiles du réseau. Ce problème, connu dans la littérature sous le nom : "problème d'accès au médium". Il a été analysé par la théorie des jeux classiques par MacKenzie et Wicker dans [52, 51] et par la théorie des jeux évolutionnaires par Tembine et al [83, 82], où ils considèrent les mobiles comme des joueurs possédant deux stratégies : transmettre et attendre. Lorsque deux mobiles transmettent en même temps, l'accès des mobiles au canal échouera. En conséquence, les deux paquets envoyés seront perdus.

Pour réduire le nombre de paquets perdus, Altman et al. [13], ont introduit la possibilité pour un mobile de transmettre avec deux niveaux d'énergie : niveau haut et niveau bas. Dans ce cas, lors d'une interférence, il y a une possibilité de récupérer un paquet. Lorsque deux mobiles transmettent en même temps, l'un avec un niveau haut et l'autre avec un niveau bas, celui qui envoie avec un niveau haut aura l'accès au canal et réussira donc sa transmission et l'autre perdra son paquet. Comme les niveaux de transmission de chaque mobile dépendent des états d'énergie de sa batterie, le mobile ne peut transmettre avec un niveau haut que si sa batterie est bien chargée. Par ailleurs, un mobile qui transmet toujours avec le niveau haut minimise automatiquement sa durée de vie dans le réseau.

Afin de faire face à cette situation, dans le cadre de ce mémoire, nous avons introduit, en plus du critère de débit, un autre critère qui est la durée de vie. Notre modèle consiste à étudier deux critères simultanément : le nombre de paquets envoyés avec succès et la durée de vie des mobiles, ce qui nous a conduit à construire un jeu évolutionnaire bi-critères. Ce modèle prendra en considération la gestion efficace de la consommation d'énergie, et permettra de réduire le nombre de paquets perdus.

Le mémoire est réparti en cinq chapitres dont voici une brève présentation.

Dans le premier chapitre, nous présentons une étude bibliographique sur les réseaux mobiles Ad-Hoc, ainsi que ses contraintes et ses applications.

Le deuxième chapitre est consacré aux rappels des notions fondamentales de la théorie des jeux classiques, qui est basé sur l'hypothèse de rationalité, et de la théorie des jeux évolutionnaires, qui est basée sur un processus d'apprentissage et d'adaptation.

Différents problèmes liés aux contraintes des réseaux Ad-Hoc, tels que le problème de routage causé par le caractère dynamique du système, le problème d'interférence causé par la bande de fréquence limitée du réseau, la durée de vie limitée due aux batteries à charges limitées, et d'autres sont traités par la théorie des jeux dans le chapitre trois.

Les deux problèmes majeurs qui sont : la limitation de la durée de vie des mobiles et la bande de fréquence limitée qui cause des difficultés d'accès aux canaux physiques, sont modélisés sous forme d'un jeu évolutionnaire et résolus pour voir l'existence d'un équilibre évolutionnairement stable. Notre contribution est de modéliser les deux problèmes que nous venons de citer sous

forme d'un jeu évolutionnaire multicritère et d'analyser les conditions d'existence d'un équilibre évolutionnairement stable.

Le dernier chapitre illustre les résultats de la simulation, basés sur l'étude dynamique du système décrit par l'évolution du réplicateur dynamique, l'étude de la variation du comportement des mobiles entre le comportement agressif qui est la transmission avec un niveau haut de puissance et le comportement passif qui est la transmission avec un niveau bas de puissance, et l'étude des conditions d'existence d'équilibre pour le jeu multicritère.

# 1

## Généralités sur les réseaux mobiles ad hoc

### Introduction

L'évolution récente des moyens de la communication sans fil a permis la manipulation de l'information à travers des unités de calculs portables qui ont des caractéristiques particulières et accèdent à un réseau à travers une interface de communication sans fil. Par rapport à l'ancien environnement dit statique où les unités sont fixes, le nouveau environnement est appelé environnement mobile.

Les environnements mobiles offrent une grande flexibilité d'emploi. En particulier, ils permettent la mise en réseau des sites dont le câblage serait trop onéreux à réaliser ou même impossible. Ils peuvent être classés en deux classes : les réseaux avec infrastructure qui utilisent généralement le modèle de la communication cellulaire, et les réseaux sans infrastructure, appelés aussi réseaux ad hoc, qui sont l'objet de ce chapitre.

Un réseau ad hoc peut être défini comme une collection d'entités mobiles interconnectées par une technologie sans fil formant un réseau temporaire sans l'aide d'aucune administration ou de tout support fixe. Dans ce qui suit, nous définissons les environnements mobiles en général, ensuite nous présentons les réseaux ad hoc avec leurs caractéristiques et leurs applications.



## 1.1 Les environnements mobiles

Un environnement mobile est un système composé de sites mobiles, qui permet à ses utilisateurs d'accéder à l'information indépendamment de leurs positions géographiques. Cet environnement n'astreint plus l'utilisateur à une localisation fixe, mais lui permet une libre mobilité tout en assurant sa connexion avec le réseau. Les réseaux mobiles peuvent être répartis en deux classes : les réseaux avec infrastructure et les réseaux sans infrastructure [15, 16, 42].

### 1.1.1 Les réseaux avec infrastructure

Ce mode désigne un réseau composé d'une infrastructure permettant l'échange d'information entre les différentes stations du réseau. Cette infrastructure est basée sur un matériel spécifique qui fournit un ensemble de services. Ce matériel est appelé point d'accès (**PA**) ou bien station de base (**SB**).

A chaque station de base correspond une cellule à partir de laquelle des unités mobiles (**UM**) peuvent émettre et recevoir, alors que les sites fixes sont interconnectés entre eux à travers un réseau de communication filaire.

Une unité mobile ne peut être, à un instant donné, directement connectée qu'à une seule station de base. Elle peut communiquer avec les autres sites à travers la station à laquelle elle est directement attachée.

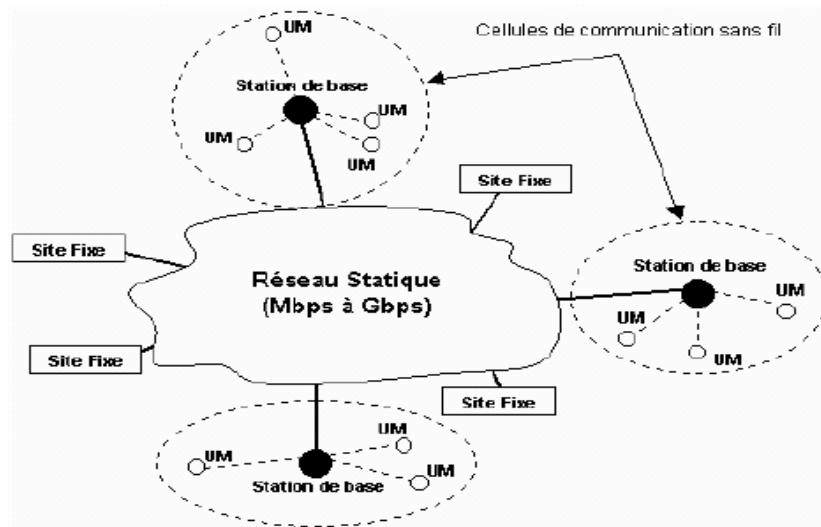


FIG. 1.1 – Modèle de réseaux mobiles avec infrastructure.

### 1.1.2 Les réseaux sans infrastructure

Le modèle de réseau sans infrastructure préexistante ne comporte pas l'entité (**SB**) ou (**AP**), tous les sites du réseau sont mobiles et communiquent d'une manière directe en utilisant leurs interfaces de communication (portées de communication) sans fil. L'absence d'infrastructure oblige les unités mobiles à se comporter comme des routeurs qui participent à la découverte et à la maintenance des chemins des autres mobiles (hôtes) du réseau.

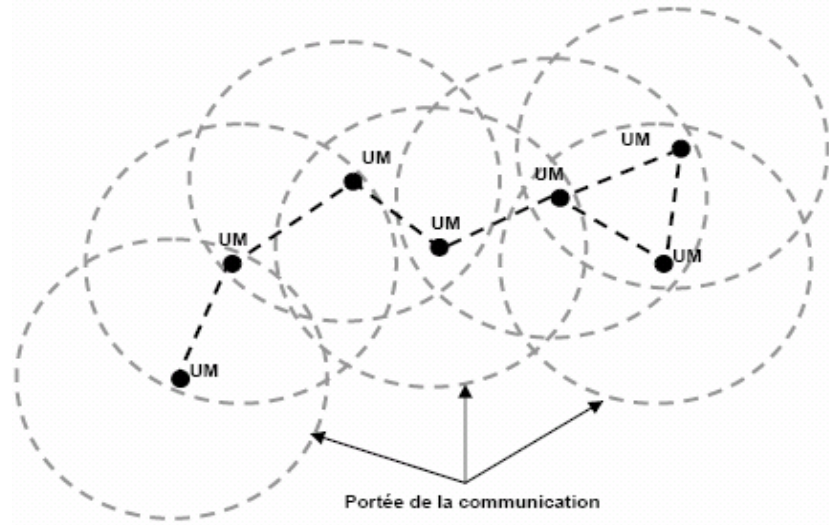


FIG. 1.2 – Modèle des réseaux mobiles sans infrastructure.

## 1.2 Définition d'un réseau ad hoc

Un réseau ad hoc, appelé généralement MANET (Mobile Ad hoc Network), est un ensemble de noeuds mobiles qui sont dynamiquement et arbitrairement éparpillés d'une manière où l'interconnexion entre les noeuds peut changer à tout moment et qui peuvent communiquer entre eux ; nous parlons alors de réseaux auto-adaptatifs (capables de s'organiser par eux mêmes) [58].

## 1.3 Modélisation d'un réseau ad hoc

Un réseau ad hoc peut être modélisé par un graphe  $G_t = (V_t, E_t)$ , où  $V_t$  représente l'ensemble des noeuds (i.e. les unités ou les mobiles) du réseau et  $E_t$  modélise l'ensemble des connections qui existent entre ces noeuds ( voir la figure 1.3). Si  $e = (u, v) \in E_t$ , cela veut dire que les noeuds  $u$  et  $v$  peuvent communiquer directement à l'instant  $t$  [18, 42, 86]. La topologie du réseau peut

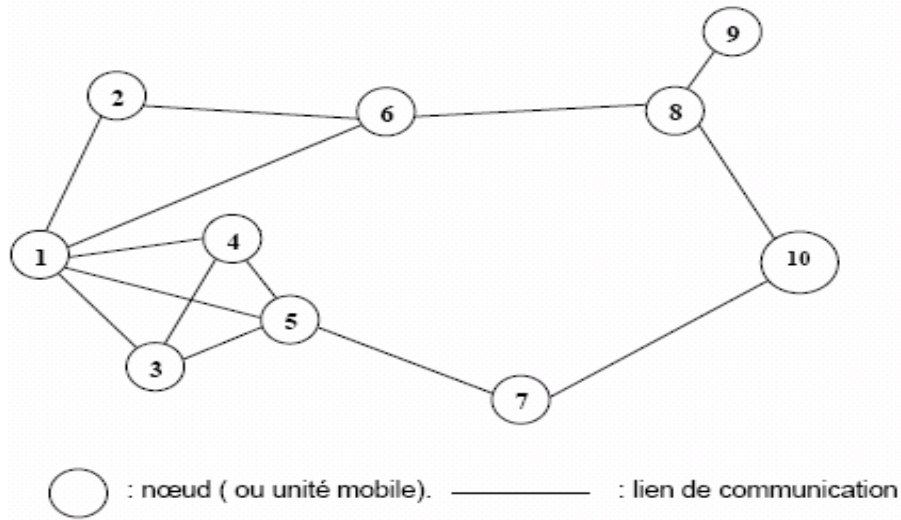


FIG. 1.3 – Modélisation d’un réseau ad hoc par un graphe.

changer à tout moment (voir la figure 1.4). Elle est donc dynamique et imprévisible ce qui fait que la déconnexion des unités soit très fréquente.

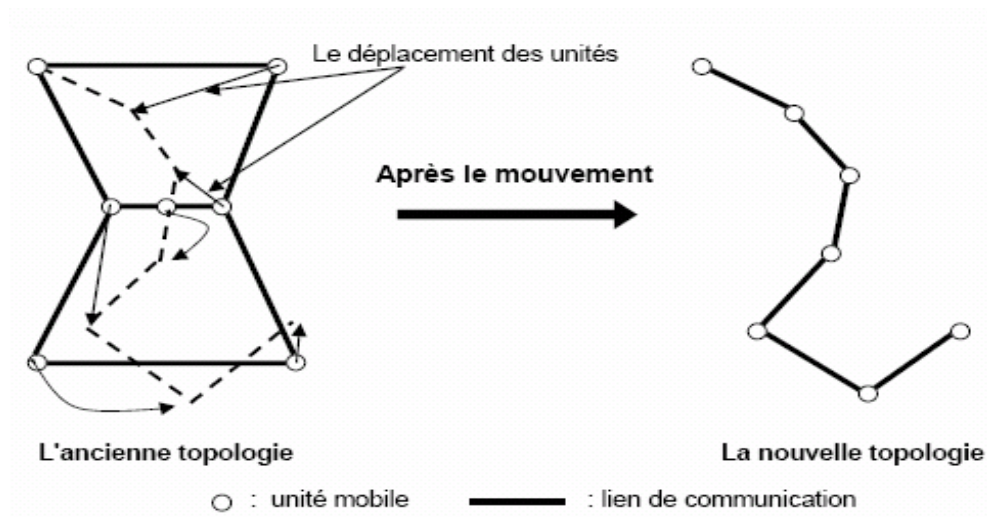


FIG. 1.4 – Changement de topologie.

## 1.4 Caractéristiques et contraintes des réseaux ad hoc

Les réseaux ad hoc présentent des avantages non négligeables. Outre la mobilité qui est l’avantage principal, le prix peut également être un atout, puisqu’un peu d’électronique peut compenser un câblage manquant. Ces réseaux peuvent être facilement installés dans les endroits difficiles à

câbler, ce qui élimine une bonne part du travail et du coût généralement liés à l'installation et réduit d'autant le temps nécessaire à la mise en route. De plus, les périphériques peuvent être déplacés à tout moment lorsque l'utilisateur décide de refaire ou d'étendre son installation.

Cependant, les réseaux ad hoc imposent de nombreuses contraintes, en voici quelques-unes [18] :

**Topologie dynamique** : les unités mobiles du réseau se déplacent d'une façon libre et arbitraire. Par conséquent, la topologie du réseau peut changer, à des instants imprévisibles, d'une manière rapide et aléatoire.

**Absence d'infrastructure** : les réseaux ad-hoc se distinguent des autres formes de réseaux sans fil par une absence totale d'infrastructure et d'administration centralisée. Les mobiles sont responsables d'établir et de maintenir la connectivité du réseau d'une manière continue.

**L'hétérogénéité des nœuds** : les nœuds ad hoc peuvent être équipés d'une ou de plusieurs interfaces radio. Ils ne disposent pas des mêmes propriétés physiques et logicielles, c'est-à-dire, des capacités de transmission variantes et opérant des plages de fréquences différentes, mais ils doivent interopérer pour établir un réseau commun.

**L'auto-configuration** : l'auto-configuration permet aux nœuds de s'intégrer facilement dans un réseau. Elle facilite la gestion du réseau, car l'interconnexion des éléments ne nécessite qu'un minimum d'intervention technique externe. Cette fonctionnalité est de plus en plus nécessaire pour un déploiement à grande échelle des réseaux sans fil ad hoc.

**Bande passante limitée** : les réseaux sans fil utilisent un médium de communication partagé, leur bande passante est limitée et partagée entre les nœuds d'un même voisinage, elle dépend du nombre de nœuds et du trafic de données à transportées.

**Contrainte d'énergie** : les MANET sont cependant composés de mobiles alimentés généralement en énergie par une batterie dont la durée de vie est limitée. Une telle limitation a mis la conservation d'énergie au premier rang des soucis pour permettre la communication entre les mobiles, surtout que dans les réseaux Ad-Hoc chaque nœud est à la fois un hôte et un routeur pour acheminer les paquets des autres.

**Sécurité limitée** : la transmission sans fil entre les nœuds est assurée par les ondes électromagnétiques dans l'air, c'est donc un média de communication ouvert. Il peut être très

facilement surveillé, capturé et analysé ce qui compromet la sécurité du réseau. De plus, le manque de gestion centralisée dans les réseaux Ad-Hoc rend difficile la mise en place d'une politique de sécurité.

**Multi-sauts** : la particularité de ce type de réseau est que chaque nœud peut communiquer avec n'importe quel autre nœud du réseau. En effet, chaque deux nœuds peuvent communiquer soit d'une manière directe, ou en passant par une série de nœuds intermédiaires qui joueront le rôle de relais entre la source et la destination.

**Débit faible** : les réseaux ad hoc sont moins fiables que les réseaux filaires à cause de la bande passante limitée et les contraintes physiques.

**Les interférences** : les liens radios ne sont pas isolés. Deux transmissions simultanées sur une même fréquence ou utilisant des fréquences proches peuvent interférer.

## 1.5 Domaines d'application des réseaux mobiles ad hoc

Les réseaux Ad-hoc ne nécessitent pas d'infrastructure pour fonctionner. De ce fait, ils sont facilement mis en œuvre et ne nécessitent aucun coût supplémentaire lié à l'installation. La mobilité des nœuds n'étant plus dépendante d'un point fixe, ces réseaux sont facilement extensibles et peuvent couvrir de longues distances. Tous ces avantages en font le mode prisé pour les applications militaires ou lors des catastrophes naturelles où il n'y a pas d'infrastructure au service des équipements [20].

**Le domaine militaire** : Il adopte une recherche plus intensive pour obtenir les meilleures performances. Un réseau ad hoc doit pouvoir être déployé à la demande, fonctionner sans infrastructure de communication préexistante et bien sûr tolérer la mobilité. Il doit aussi garantir des échanges fiables et de qualité, car de plus en plus les informations échangées sur le champ de bataille comportent des images et des vidéos.

**Les services d'urgence** : Ils peuvent être utilisés pour la mise en communication d'unités de secours, lorsqu'une catastrophe naturelle (telle qu'un tremblement de terre, une inondation) a détruit les infrastructures de télécommunications et que l'établissement d'une liaison satellite pour chaque entité en communication représente un coût trop élevé.

**Des applications civiles** : Outre les applications scientifiques et militaires, des applica-

tions civiles ont commencé à tirer profit des caractéristiques des réseaux ad hoc. Ils peuvent être utilisés pour la mise en place instantanée d'un réseau reliant plusieurs ordinateurs entre eux. Ils s'avèrent particulièrement utiles lors de l'organisation d'événements tels que des colloques afin de proposer un réseau de partage de l'information.

**Applications commerciales** : Les réseaux ad hoc sont utilisés pour un paiement électronique distant en utilisant l'accès mobile à l'internet.

Généralement, les réseaux ad hoc sont utilisés dans toute application où le déploiement d'une infrastructure est très difficile ou impossible.

## 1.6 Principales catégories de communications

La communication dans les réseaux ad hoc est soumise à divers phénomènes qui caractérisent les communications par onde radio. La plus connue est une forte atténuation du signal avec la distance, qui empêche deux hôtes trop éloignés l'un de l'autre de communiquer ensemble.

Pour fonctionner correctement, un réseau ad hoc doit requirir deux grandes fonctions :

- Le routage : dont le but est de trouver un chemin possible entre deux hôtes donnés.
- Le transport qui consiste à acheminer les paquets le long d'un chemin prédéfini.

Dans cette section, nous donnons un type transport nommé diffusion ensuite nous présentons brièvement le routage et sa difficulté [18, 26, 39].

### 1.6.1 Diffusion

La diffusion ou l'inondation consiste à transmettre un paquet dans le réseau entier. Un nœud qui initie l'inondation envoie le paquet à tous ses voisins directs. De même, si un nœud quelconque du réseau reçoit le paquet, il le rediffuse à tous ses voisins. Ce comportement se répète jusqu'à ce que le paquet atteigne tous les nœuds du réseau ( voir la figure 1.5 ). Le mécanisme de diffusion est utilisé généralement dans la première phase du routage plus exactement dans la procédure de découverte des routes, et cela dans le cas où le nœud source ne connaît pas la localisation exacte de la destination.

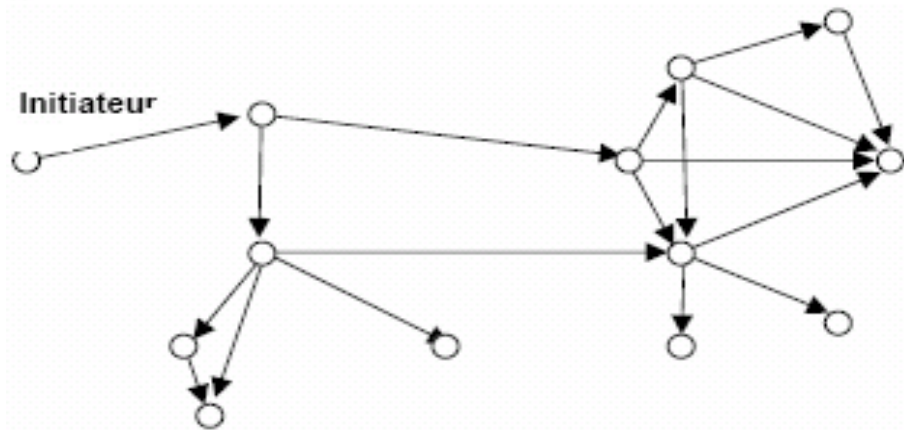


FIG. 1.5 – Le mécanisme de diffusion.

### 1.6.2 Routage

Généralement, le routage est une méthode d’acheminement des informations à la bonne destination à travers un réseau de connexion donné. Le problème de routage consiste, pour un réseau dont les arcs, les nœuds et les capacités sur les arcs sont fixés, à déterminer un acheminement optimal des paquets à travers le réseau au sens d’un certain critère de performance.

Par exemple, si on suppose que les coûts des liens sont identiques, le chemin indiqué dans la figure 1.6 est le chemin optimal reliant la station source et la station destination. Une bonne stratégie de routage utilise ce chemin dans le transfert des données entre les deux stations.

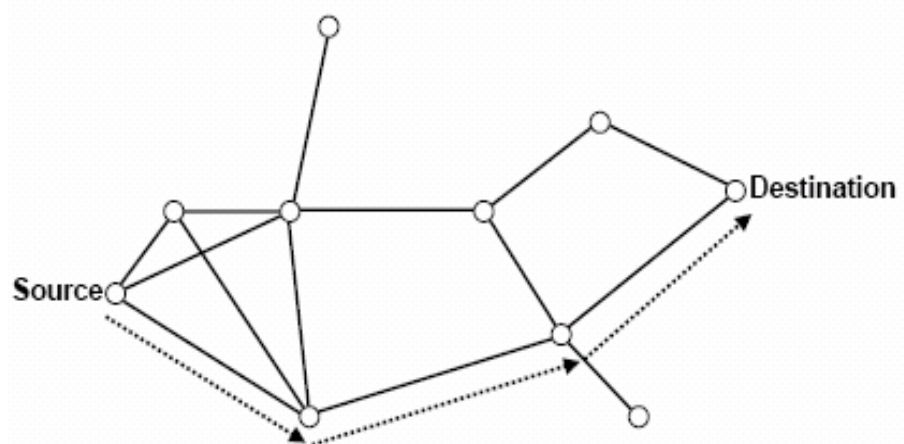


FIG. 1.6 – Le chemin utilisé dans le routage entre la source et la destination.

## 1.7 Technologies et techniques de transmission dans les réseaux ad hoc

Dans ce paragraphe, nous allons voir les différentes techniques de transmission qui sont, ou peuvent être, utilisées dans les réseaux ad hoc.

### 1.7.1 Les médias de transmission

Deux différents médias peuvent être utilisés pour communiquer dans un réseau ad hoc : les infrarouges et les radiofréquences [2, 45].

#### Infrarouge

Les systèmes infrarouges sont simples et peu coûteux. Ce médium convient aux réseaux à faible portée. Les émetteurs et récepteurs à infrarouge sont capables de fournir des débits très élevés à des coûts relativement faibles. De plus, les bandes passantes disponibles sont très larges. Les infrarouges pénètrent à travers le verre, mais pas à travers les murs, donc les communications se font dans la même pièce ; ce qui facilite la sécurité.

#### Radiofréquence

Le principe est d'émettre des ondes électromagnétiques qui constituent la porteuse du signal à transmettre. Le spectre radio est découpé en bandes de fréquences divisées en canaux.

Les ondes radiofréquences traversent les obstacles contrairement aux infrarouges. Cependant, elles peuvent subir l'évanouissement (la somme des signaux arrivant au mobile s'annule) ou l'interférence. L'architecture des cellules et le choix des fréquences jouent un rôle capital afin de minimiser ces effets.

### 1.7.2 Les techniques de transmission

Les techniques d'accès au médium permettent à plusieurs utilisateurs de se partager les ressources. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons présenter diverses techniques d'accès au médium utilisées dans les réseaux sans fil en général [2, 45]. Ces techniques sont classées en deux grandes familles, l'accès centralisé où le réseau dispose d'une ou plusieurs stations de base qui gèrent l'allocation des canaux et l'accès distribué où le réseau ne dispose pas de stations qui gèrent l'accès au canal.



## Accès centralisé

**FDMA (*Frequency Division Multiple Access*)**

Le spectre est divisé en canaux. Chaque canal fréquentiel est affecté à un seul utilisateur à la fois. La méthode d'affectation est alors basée sur une règle du type : premier arrivé, premier servi (FIFO).

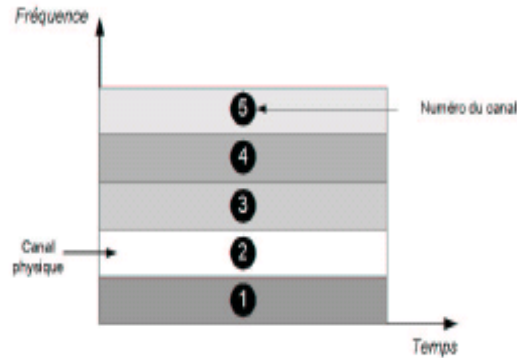


FIG. 1.7 – Accès centralisé suivant la méthode FDMA.

**TDMA (*Time Division Multiple Access*)**

En TDMA, les canaux sont multiplexés sous la forme d'intervalles de temps de telle manière que chaque utilisateur accède à toute la bande passante allouée pour le système de transmission durant un intervalle.

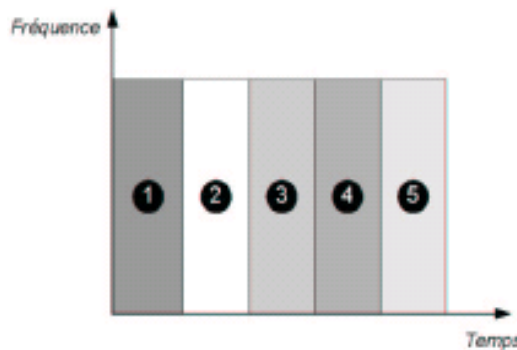


FIG. 1.8 – Accès centralisé suivant la méthode TDMA.

**CDMA (*Code Division Multiple Access*)**

En CDMA, chaque utilisateur émet sur une large bande au moyen d'un code pseudo-aléatoire personnel. Ainsi, tous les utilisateurs utilisent simultanément la même bande de

fréquences. Ceci permet d'avoir une bonne immunité au bruit, d'utiliser la diversité de fréquences et le cryptage (codage et decodage de l'information).

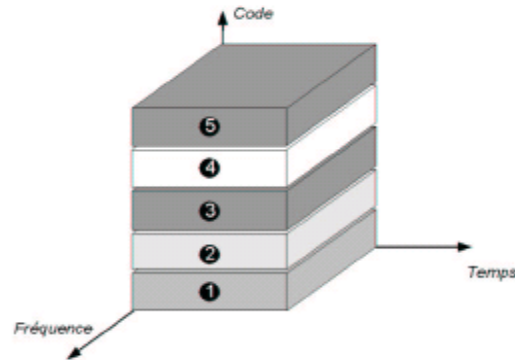


FIG. 1.9 – Accès centralisé suivant la méthode CDMA.

### Accès distribué

En 1970, le protocole **ALOHA** [1] est proposé comme le premier protocole de gestion d'accès au canal pour les réseaux Ad Hoc. L'idée du protocole ALOHA est simple ; un nœud accède au canal quand il a des données à transmettre. Si plusieurs nœuds accèdent au canal en même temps, les trames de données rentrent en collision ce qui engendre des retransmissions. Après une collision, les nœuds attendent un temps aléatoire avant de réessayer de transmettre à nouveau. Deux ans après, L.J Roberts [69] a proposé une amélioration du protocole ALOHA qui s'appelle ALOHA discrétisé (slotted ALOHA). Dans ce protocole, le temps est divisé en slots correspondant aux paquets de données. Les nœuds se synchronisent entre eux et ils transmettent des paquets de données au début de chaque slot. La collision se produit seulement quand deux nœuds émettent en même temps sur le même canal. ALOHA discrétisé génère de meilleures performances que ALOHA classique.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les réseaux mobiles ad hoc qui occupent une place chaque jour plus grande en termes de recherche, d'investissements, de revenus, d'abonnés, etc. Il est indéniable que l'association des services mobiles aux communications sans fil est l'une des plus importantes évolutions qu'ait observé le secteur des télécommunications.

Les réseaux ad hoc sont l'objet de plusieurs recherches, notamment la gestion de la consommation d'énergie qui est une contrainte principale dans la communication sans fil, et la problématique de la mobilité qui rend le routage des paquets très difficile.

# 2

## Rappels sur la théorie des jeux

### Introduction

La théorie des jeux consiste à étudier les situations de conflits qui peuvent exister entre des individus en interaction. Cependant, nous distinguons deux classes différentes, la théorie des jeux classique et la théorie des jeux évolutionnaire, chaque théorie est basée sur un ensemble différent d'hypothèses et cherche à atteindre un but bien particulier.

Dans ce chapitre, nous présentons les deux classes de la théorie des jeux en exposant les notions de base et les concepts proposés et utilisés dans chacune d'elle.

### 2.1 Qu'est ce qu'un jeu ?

Un jeu est une situation où des individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance (les règles du jeu). Les résultats de ces choix constituent une issue du jeu à laquelle est associé un gain pour chacun des participants. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur et ne dépendent pas non plus uniquement du hasard, bien que celui-ci puisse intervenir.

## 2.2 La théorie des jeux classique

Des situations de conflit sont souvent présentes dans notre vie réelle, sociale, économique ou tout autre domaine où les individus interagissent entre eux. Le but principal pour chaque individu consiste à savoir comment réagir et quelle sera la décision à prendre pour satisfaire son intérêt personnel. Pour répondre à ces besoins, plusieurs études ont été entamées pour pouvoir analyser et, dans certains cas, résoudre ces conflits. Cette étude des conflits d'intérêts est appelée *Théorie des jeux*.

La théorie des jeux fut fondée par Von Neumann et Morgenstern en 1944 lors de la parution de leur ouvrage *Theory of Games and Economic Behavior* [64]. Cette théorie prend comme hypothèse principale la rationalité forte des individus. Chaque individu cherche à maximiser ses gains personnels en prenant en considération le comportement de ses adversaires. La théorie classique cherche à trouver une solution optimale pour résoudre les conflits. Dans ce cadre, les théoriciens des jeux ont introduit la notion d'équilibre.

### 2.2.1 Jeu fini sous forme normale

La forme normale, également connue sous le nom de forme stratégique, est la représentation la plus familière des interactions stratégiques dans la théorie des jeux. Un jeu écrit de cette façon s'élève à une représentation de l'utilité de chaque joueur, l'ensemble de ses stratégies et les issues possibles du jeu .

**Définition 2.1.** [68] Un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme

$$\langle \mathcal{N}, \{X_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{u_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle, \quad (2.1)$$

où

1.  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  est l'ensemble des joueurs ;
2.  $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$  désigne l'ensemble des stratégies du joueur  $i \in \mathcal{N}$  ;  
 $X = \prod_{i=1}^N X_i$  est l'ensemble des issues du jeu ;
3.  $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction gain du  $i^{eme}$  joueur.

### Jeu fini à N joueurs

**Définition 2.2. Jeu fini à N joueurs** [68]

Le jeu (2.1) est dit fini, si chacun des joueurs a un ensemble fini de stratégies, c'est-à-dire

$$\langle \mathcal{N}, \{X_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{u_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle; \quad (2.2)$$

cardinal de  $X_i = |X_i| < +\infty, \forall i \in \mathcal{N}$ .

### Jeu symétrique à deux joueurs

Quand on parle d'un jeu symétrique à deux joueurs, on suppose qu'il y a deux joueurs et ils ont les mêmes stratégies.

Formellement la définition est donnée comme suit :

#### Définition 2.3. Jeu symétrique à deux joueurs [30]

Un jeu à deux joueurs est dit symétrique si et seulement si  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$  (il y a deux joueurs),  $X_1 = X_2 = X$  (les deux joueurs ont accès aux mêmes stratégies) et

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, \quad u_1(x_1, x_2) = u_2(x_2, x_1). \quad (2.3)$$

En particulier, si les fonctions de gains des joueurs sont identiques,  $u_1 = u_2 = u$  alors le jeu (2.3) devient un jeu doublement symétrique.

### Notion de stratégie

Une stratégie est un plan d'actions complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier à chaque étape du jeu et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu. La stratégie décrit totalement le comportement d'un joueur.

Notons par :

- $X_i$  : l'ensemble des stratégies pures du joueur  $i$  ;
- $\Delta_i$  : l'ensemble des stratégies mixtes du joueur  $i$ .

**Définition 2.4.** Une **stratégie pure** du joueur  $i$  est une action, ou un plan d'actions, choisie avec certitude.

**Définition 2.5.** Une **stratégie mixte** du joueur  $i$  est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures pour chacun des joueurs. Une stratégie mixte pour le joueur  $i$  est représenté par un vecteur  $\Delta_i$  défini comme suit :

$$\Delta_i = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i} : 0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n_i\}, \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j = 1 \right\};$$

où  $n_i$  est le nombre de stratégie pures du joueur  $i$ , et  $\alpha$  représente une stratégie mixte de ce joueur.

## 2.2.2 Concepts de solution

Maintenant que nous avons défini c'est quoi un jeu sous forme normale et quels sont les stratégies disponibles aux joueurs, la question est comment raisonner au sujet de tels jeux.

Les théoriciens de jeu traitent ce problème en identifiant certains sous-ensembles de résultats, appelés *les concepts de solution*. Dans cette section, nous décrivons quelques concepts de solution et les deux concepts les plus fondamentaux à savoir : Optimalité de **Pareto** et **équilibre de Nash**.

### Équilibre en stratégies dominantes

**Définition 2.6.** [92] Considérons le jeu sous forme normale (2.2). On dit que la stratégie  $x_i \in X_i$  est une **stratégie dominante**, si  $\forall y_i \in X_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}$

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}).$$

La stratégie  $x_i \in X_i$  est dominante pour le joueur  $i$ , si  $x_i$  domine  $y_i$ .

**Définition 2.7.** [92] Une stratégie  $x_i \in X_i$  est une **stratégie strictement dominante** pour le joueur  $i$  dans le jeu (2.2), si  $\forall y_i \in X_i, y_i \neq x_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}$ , on a :

$$u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}).$$

**Définition 2.8.** [92] Une stratégie  $x_i$  est **faiblement dominante**, si :

$$\begin{aligned} &\forall y_i \in X_i, y_i \neq x_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}, u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}); \\ &\exists x_{-i} \in X_{-i}, u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}). \end{aligned}$$

### Définition 2.9. Équilibre en stratégies dominantes

Une situation  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in X$  est appelée équilibre en stratégies dominantes dans le jeu (2.2), si chaque composante  $x_i^* \in X_i$  est une stratégie dominante pour le joueur  $i, \forall i \in \mathcal{N}$ .

### Meilleure réponse

**Définition 2.10.** [48] Une stratégie  $x_i$  est une **meilleure réponse** aux stratégies des autres joueurs  $x_{-i}$ , si :

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}), \quad \forall y_i \in X_i.$$

On note  $B(x_{-i})$ , l'ensemble de toutes les stratégies dont chacune est une meilleure réponse à  $x_{-i}$ , autrement dit,

$$B(x_{-i}) = \{x_i^* \mid u_i(x_i^*, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}), \quad \forall y_i \in X_i\}. \quad (2.4)$$

## Équilibre de Nash

Le concept clé de la théorie des jeux est le concept d'équilibre de Nash introduit par le mathématicien John Nash en 1950.

Un équilibre de Nash correspond donc à une situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la situation d'équilibre.

### A) Équilibre de Nash en stratégies pures

**Définition 2.11.** [32, 65] Une situation  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in X$  est un **équilibre de Nash** dans le jeu (2.2), si pour chaque joueur  $i \in \mathcal{N}$ , on a

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X_i.$$

**Définition 2.12. Equilibre de Nash strict** [32, 65]

Une situation  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in X$  est un **équilibre de Nash strict** dans le jeu (2.2), si pour chaque joueur  $i \in \mathcal{N}$ , on a

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) > u_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X_i, \quad x_i \neq x_i^*.$$

### B) Équilibre de Nash en stratégies mixtes

**Définition 2.13.** [32, 65] Une situation  $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*) \in \Delta = \prod_{i=1}^N \Delta_i$  est un équilibre de Nash dans le jeu (2.2), si pour chaque  $i \in \mathcal{N}$ , on a :

$$u_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq u_i(\beta_i, \alpha_{-i}^*), \quad \forall \beta_i \in \Delta_i.$$

**Remarque 2.1.** *Tout équilibre en stratégies dominantes dans le jeu (2.2) est un équilibre de Nash, mais l'inverse n'est pas vraie.*

**Proposition 2.1.** [32] *Si  $\alpha^*$  est une stratégie faiblement dominante,  $\alpha^*$  est un équilibre de Nash. Si  $\alpha^*$  est une stratégie strictement dominante alors  $\alpha^*$  est l'unique équilibre de Nash.*

## Équilibre de Pareto

Un optimum de pareto est un état dans lequel on ne peut pas améliorer le bien-être ou le gain d'un individu sans détériorer celui d'un autre [48].

**Définition 2.14.** [48] Une situation  $x^* \in X$  est appelée équilibre de Pareto dans le jeu (2.2), s'il n'existe pas une autre stratégie  $x \in X$  telle que :

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq u_i(x_i, x_{-i}), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{2.5}$$

et pour au moins un  $j_0 \in I$ , on ait :

$$u_{j_0}(x_i^*, x_{-i}^*) < u_{j_0}(x_i, x_{-i}). \tag{2.6}$$

## 2.3 La théorie des jeux évolutionnaires

La théorie des jeux évolutionnaire est apparue suite aux expériences effectuées par des biologistes. Ces derniers ont constaté que le comportement des espèces est peu rationnel au sens décrit par la théorie classique. En théorie des jeux évolutionnaire, chaque individu cherche à améliorer non pas son gain personnel mais le gain total de la population dont il fait partie. La théorie des jeux évolutionnaire cherche à étudier la dynamique de l'évolution en se basant sur deux concepts fondamentaux, les stratégies évolutionnairement stables et le réplicateur dynamique.

### Définitions et Concepts de base

**Définition 2.15.** [17] Une population est un ensemble d'individus qui coexistent dans le même environnement.

Un individu peut être une personne, un animal, une entreprise, une machine (ordinateur), etc. . .

**Définition 2.16.** [17] Un comportement particulier, ou une suite de comportements, que l'individu adopte est appelé stratégie.

**Définition 2.17.** [17] Un individu est dit mutant, s'il change son comportement (sa stratégie) au cours du temps par rapport à son comportement initial.

**Définition 2.18.** [17] Une stratégie est dite mutante, si elle est adoptée par un mutant.

**Définition 2.19.** [17] Une stratégie est dite originelle, si elle n'est pas une stratégie mutante.

**Définition 2.20.** [17] Une stratégie  $\alpha$  est dite envahie par une stratégie  $\beta$  si les individus jouant la stratégie  $\beta$  obtiennent un gain plus élevé que les autres individus de la population jouant la stratégie  $\alpha$ .

**Définition 2.21.** [17] Une stratégie  $\alpha$  est stable, si le gain des individus qui adoptent cette stratégie est supérieur au gain de tout autre mutant. S'il existe une stratégie mutante qui peut envahir la stratégie  $\alpha$ , alors celle-ci est dite instable.

### 2.3.1 Stratégie évolutionnairement stable

Dans cette section, nous présentons la notion d'une Stratégie évolutionnairement stable (***Evo-lutionarily Stable Strategy ESS***), introduite par John Maynard Smith [74, 76] en 1973. Ce concept a été par la suite analysé et étudié par plusieurs théoriciens des jeux [37, 93].

Une stratégie évolutionnairement stable est une stratégie qui résiste aux pressions évolutives exercées par l'environnement, terme qui doit être compris comme l'ensemble des stratégies



alternatives disponibles (le terme de stratégies mutantes est également utilisé), alors une population jouant une telle stratégie ne peut être envahie par aucune autre stratégie mutante.

John Maynard Smith et Price [74, 76] ont donné des conditions mathématiques pour qu'une stratégie soit évolutionnairement stable en se basant sur des hypothèses précises sur la nature d'évolution. Les hypothèses essentielles qui ont été utilisées dans leur modèle consistaient à considérer que la population est infinie, les combats se font par paire d'individus et que chaque paire de concurrents est considérée comme étant deux adversaires qui ont les mêmes aptitudes (c'est à dire un combat symétrique). Ils considèrent que les individus disposent d'un nombre fini de stratégies.

Ceci permet de décrire le jeu entre deux individus par une matrice  $A$  des gains, ce qui donne des jeux symétriques matriciels à deux joueurs, chaque élément  $a_{ij}$  représente le gain de l'individu quand il choisit de jouer sa  $i^{\text{eme}}$  stratégie pure et son adversaire sa  $j^{\text{eme}}$  stratégie pure.

Comme il est supposé que chaque individu de la population dispose d'un même ensemble fini de stratégies (on suppose que le nombre de stratégies est  $n$ ), alors on est conduit à considérer des jeux finis à deux joueurs avec des matrices des gains  $A_1 = A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$  et  $A_2 = A^t$ .

L'ensemble des stratégies mixtes associé à chaque individu est

$$\Delta = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \in [0, 1], \forall i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}.$$

Comme l'évolution de la population est considérée comme la résultante de confrontation d'individus (de cette population) par paire et donc connue des jeux matriciels, alors si ces jeux sont traités en stratégies mixtes, alors le gain espéré pour chaque individu, s'il adopte une stratégie mixte  $\alpha \in \Delta$  et son adversaire une stratégie mixte  $\beta \in \Delta$ , sera :

$$u(\alpha, \beta) = \alpha^t A \beta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_i \beta_j.$$

Ainsi, l'étude de l'évolution de la population se ramène à l'étude du jeu symétrique à deux joueurs en stratégies mixtes :

$$\langle X, Y, u_1, u_2 \rangle, \tag{2.7}$$

où  $X = Y = \Delta$ ,

$$u_1(\alpha, \beta) = u(\alpha, \beta) = \alpha^t A_1 \beta = \alpha^t A \beta,$$

$$u_2(\alpha, \beta) = \alpha^t A_2 \beta = \beta^t A_2^t \alpha = u(\beta, \alpha).$$

Le jeu (2.7) est entièrement caractérisé par

$$\langle \Delta, u \rangle.$$

**Définition d'une ESS**

Supposons qu'à l'état initial, l'ensemble des individus de cette population adopte une même stratégie  $\alpha$  (pure ou mixte). Dans ce cas, on note par  $u(\alpha; \alpha)$  le gain d'un individu dans le jeu à deux joueurs.

Supposons maintenant qu'une proportion  $\epsilon$  de cette population adopte une autre stratégie  $\beta$  (une stratégie mutante), tandis que le reste de la population maintient la stratégie  $\alpha$ .

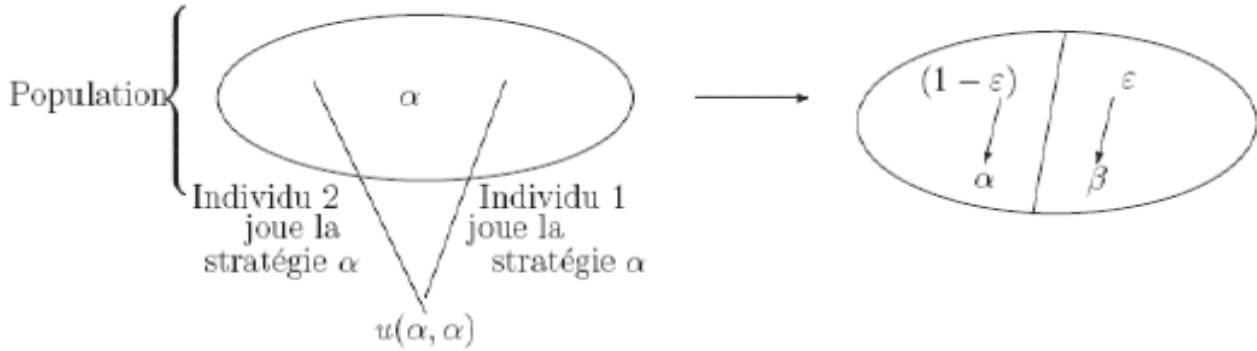


FIG. 2.1 – Changement de stratégie dans la population.

Mettons nous à la place d'un individu jouant une stratégie  $\alpha$ . Alors la probabilité d'être apparié à un joueur jouant une stratégie  $\alpha$  sera de  $(1 - \epsilon)$  et la probabilité d'être apparié à un joueur jouant une stratégie  $\beta$  sera  $\epsilon$ . Alors l'espérance de gain du joueur jouant une stratégie  $\alpha$  sera :

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)u(\alpha, \alpha) + \epsilon u(\alpha, \beta) &= (1 - \epsilon)\alpha^t A\alpha + \epsilon\alpha^t A\beta \\ &= \alpha^t A((1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta) \\ &= u(\alpha, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta). \end{aligned}$$

Par contre, l'espérance de gain du joueur jouant une stratégie  $\beta$  sera :

$$u(\beta, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta).$$

La stratégie  $\alpha$  sera gagnante face à la stratégie mutante  $\beta$ , si

$$u(\alpha, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta) > u(\beta, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta).$$

**Définition 2.22.** [37] Une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est une Stratégie évolutionnairement stable (ESS), si :

$$\forall \beta \in \Delta, \exists \bar{\epsilon}_\beta > 0, \forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_\beta), \quad u(\alpha, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta) > u(\beta, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta), \quad (2.8)$$

où

$$\bar{\epsilon}_\beta = \sup\{\epsilon \in (0, 1) \mid u(\alpha, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta) > u(\beta, (1 - \epsilon)\alpha + \epsilon\beta)\}. \quad (2.9)$$

**Proposition 2.2.** [37] Une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est une **ESS**, si et seulement si :

$$\forall \beta \in \Delta, \quad u(\alpha, \alpha) \geq u(\beta, \alpha). \quad (2.10)$$

$$\forall \beta \in \Delta, \quad \beta \neq \alpha, \text{ si } u(\alpha, \alpha) = u(\beta, \alpha) \Rightarrow u(\alpha, \beta) > u(\beta, \beta). \quad (2.11)$$

On peut donner une autre formulation équivalente

**Proposition 2.3.** [37] Une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est une **ESS**, si et seulement si on a : soit

$$\forall \beta \in \Delta, \quad \beta \neq \alpha, \quad u(\alpha, \alpha) > u(\beta, \alpha). \quad (2.12)$$

soit

$$\begin{cases} \forall \beta \in \Delta, \beta \neq \alpha, u(\alpha, \alpha) = u(\beta, \alpha) & \text{et;} \\ u(\alpha, \beta) > u(\beta, \beta) & . \end{cases} \quad (2.13)$$

**Proposition 2.4.** [19]

Si une stratégie  $\alpha$  est une **ESS**, alors

$$\forall \beta \in \Delta, \quad \beta \neq \alpha, \quad u(\alpha, \alpha) \geq u(\beta, \alpha)$$

Si  $\forall \beta \in \Delta, \beta \neq \alpha, u(\alpha, \alpha) > u(\beta, \alpha)$ , alors stratégie  $\alpha \in \Delta$  est une **ESS**

Notons par  $\Delta^{EN}$ , l'ensemble des stratégies d'équilibre de Nash.

**Proposition 2.5.** [93]  $\Delta^{ESS} = \{\alpha \in \Delta^{NE} \mid u(\alpha, \beta) > u(\beta, \beta), \quad \forall \beta \in B(\alpha), \quad \beta \neq \alpha\}$ .

### ESS dans le jeu du Faucon et de la Colombe (Hawk and Dove)

Comme exemple de ce premier concept, considérons le problème du Faucon et de la colombe, analysé par Maynard Smith et Price dans la logique du conflit animal [75]. Dans ce jeu, deux individus concurrencent pour une ressource d'une valeur fixe  $V$ . (dans des contextes biologiques, la valeur  $V$  de la ressource correspond à une augmentation de la forme physique darwinienne de l'individu qui obtient la ressource); chaque individu suit exactement une des deux stratégies décrites ci-dessous :

$H$  : Comportement agressif, représente la stratégie faucon (Hawk), qui consiste à combattre à fond jusqu'à ce qu'il gagne (en blessant l'autre ou en le faisant fuir) ou qu'il soit lui même blessé.

$D$  : Comportement passif représente la stratégie colombe (Dove), qui consiste à combattre conventionnellement et s'enfuir dès que ca devient dangereux, avant d'être blessé.

L'ensemble des stratégies est par défini  $X = \{H, D\}$ .

Le gain est déterminé par :

- le gain (gain de la ressource);
- la perte (perte de la ressource);

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & H & D \\ \hline H & \frac{V-C}{2} & V \\ \hline D & 0 & \frac{V}{2} \\ \hline \end{array}$$

TAB. 2.1 – *Forme stratégique du jeu Faucon-Colombe.*

– la perte résultant d’un conflit (les blessures... etc) d’une valeur  $v$ .

Ainsi que la matrice des gains associée est :

- ◊ Lorsque les deux individus adoptent tous les deux une stratégie  $D$ , alors ils partagent pacifiquement la ressource  $V$  et ne subissent aucune perte, ce qui donnera un gain

$$u(D, D) = \frac{V}{2}.$$

- ◊ Lorsque le joueur adopte la stratégie agressive  $H$  et son adversaire la stratégie pacifique  $D$ , alors il obtiendrait la totalité de la source.

$$u(H, D) = V.$$

- ◊ Lorsque le joueur adopte la stratégie pacifique  $D$  et son adversaire la stratégie agressive  $H$ , alors il ne gagnerait rien et ne subirait pas de perte.

$$u(D, H) = 0.$$

- ◊ Lorsque le joueur adopte la stratégie agressive et son adversaire adopte le même comportement, alors il obtiendrait la moitié de la ressource avec une perte dû aux blessures .

$$u(H, H) = \frac{V}{2} - \frac{C}{2}.$$

### Recherche des ESS

- ◊ Si  $V > C$ , alors :

$$u(H, H) = \frac{V - C}{2} > u(D, H) = 0.$$

Alors, il n’y a pas une autre stratégie qui peut envahir la stratégie  $H$ , par conséquent  $H$  est l’unique ESS du jeu.

- ◊ Si  $V = C$ , alors :

$$0 = \frac{V - C}{2} = u(H, H) = u(D, H) = 0,$$

et

$$V = u(H, D) > u(D, D) = \frac{V}{2}.$$

Donc, la stratégie  $H$  est l’unique ESS du jeu.

◇ Si  $V < C$ , alors

$$u(H, H) = \frac{V - C}{2} < u(D, H) = 0.$$

Par conséquent,  $H$  n'est pas une stratégie évolutionnairement stable.

Par ailleurs, on a

$$u(D, D) = \frac{V}{2} < u(H, D) = V.$$

D'où,  $D$  n'est pas une stratégie évolutionnairement stable. Donc le jeu n'admet pas de stratégie évolutionnairement stable en stratégies pure.

Supposons maintenant qu'un individu va jouer sa stratégie  $H$  avec une probabilité  $\epsilon$  et sa stratégie  $D$  avec une probabilité  $(1 - \epsilon)$ , il va donc jouer une stratégie mixte

$$\alpha = (\epsilon, (1 - \epsilon)) \text{ avec } \epsilon = \frac{V}{C}.$$

D'après [17],  $\alpha$  est l'ESS du jeu.

Plus généralement [81], pour la matrice représentée par le tableau 2.2 caractérisé par  $A_{11} < A_{22} <$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & H & D \\ \hline H & A_{11} & A_{12} \\ \hline D & A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array}$$

TAB. 2.2 – *Forme stratégique d'un jeu symétrique à deux stratégies pures.*

$A_{12}$  et  $A_{21} < A_{22}$  alors :

1. si  $A_{11} > A_{21}$ , alors la stratégie pure  $H$  est l'unique **ESS**.
2. si  $A_{11} < A_{21}$ , alors il existe une unique **ESS** en stratégie mixte avec

$$p_H = \frac{s}{s + r}, \text{ où } s = A_{12} - A_{22} \text{ et } r = A_{21} - A_{11}.$$

### Caractéristique des ESS

**Corollaire 2.1.** [19] *Si une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est une ESS, alors  $\alpha \in \Delta^{NE}$ .*

**Proposition 2.6.** [88] *Si la stratégie  $\alpha$  est un équilibre de Nash strict, alors  $\alpha$  est une ESS.*

### 2.3.2 Réplicateur Dynamique

Dans le réplicateur dynamique, la part d'une stratégie dans la population augmente à un taux égal à la différence entre le gain de cette stratégie et le gain moyen de la population.

Nous considérons une population et deux stratégies pures  $A$  et  $B$ .

$$u = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & A & B \\ \hline A & a & b \\ \hline B & c & d \\ \hline \end{array}$$

TAB. 2.3 – La matrice des gain d'un jeu symétrique à deux stratégies pures.

A des moments discrets dans le temps, les individus se disputent par paires. Les gains d'un joueur sont représentés dans la matrice suivante :

La matrice des gains du deuxième joueur est la transposée de  $u$ . C'est une caractéristique des jeux symétriques.

supposons que :

$$c > a,$$

$$b > d.$$

Alors, le jeu admet une unique stratégie évolutionnairement stable mixte.

$$\alpha^* = \frac{\delta_2}{\delta},$$

où

$$\delta_1 = c - a, \delta_2 = b - d, \delta = \delta_1 + \delta_2.$$

$\alpha^*$  est une fraction d'une population infinie jouant la stratégie  $A$  à l'équilibre, c'est-à-dire l'ESS unique du jeu.

### Réplicateur Dynamique standard

Supposons que durant un petit intervalle de durée  $\epsilon$ , tel que  $0 \leq \epsilon \leq 1$  (très proche de zéro), une fraction  $\epsilon$  de la population prend part à une compétition par paire [5].

Soit  $P_i(t)$   $i = A, B$ , le nombre d'individus jouant à l'instant  $t$  la stratégie  $A$  et  $B$  respectivement.

$P(t) = P_A(t) + P_B(t)$  est alors le nombre total de joueurs et  $\alpha(t) = \frac{P_A(t)}{P(t)}$  la fraction de la population jouant la stratégie  $A$ .

Soient :

$$u_A(t) = a\alpha(t) + b(1 - \alpha(t)),$$

le gain moyen des individus jouant la stratégie  $A$ ,

$$u_B(t) = c\alpha(t) + d(1 - \alpha(t)),$$

le gain moyen des individus jouant la stratégie  $B$ .

Pour exprimer le nombre d'individus jouant la stratégie  $i = A, B$ , nous écrivons :

$$p_i(t + \epsilon) = (1 - \epsilon)p_i(t) + \epsilon p_i(t)u_i(t), \quad i = A, B. \quad (2.14)$$

Alors :

$$p_A(t + \epsilon) = (1 - \epsilon)p_A(t) + \epsilon p_A(t)u_A(t), \quad (2.15)$$

et

$$p_B(t + \epsilon) = (1 - \epsilon)p_B(t) + \epsilon p_B(t)u_B(t). \quad (2.16)$$

Supposons que tous les gains ne sont pas inférieurs à zéro (0) ; ainsi  $P_A$  et  $P_B$  sont toujours non négatifs.

L'équation pour tous les joueurs est :

$$P(t + \epsilon) = (1 - \epsilon)P(t) + \epsilon P(t)\tilde{u}(t), \quad (2.17)$$

où

$$\tilde{u}(t) = \alpha(t)u_A(t) + (1 - \alpha(t))u_B(t), \quad (2.18)$$

représente le gain moyen de la population.

En divisant (2.15) sur (2.17), on obtient

$$\alpha(t + \epsilon) = \frac{P_A(t + \epsilon)}{P(t + \epsilon)} = \frac{P_A(t)}{P(t)} \frac{[(1 - \epsilon) + \epsilon u_A(t)]}{[1 - \epsilon + \epsilon \tilde{u}(t)]} = \alpha(t) \frac{[(1 - \epsilon) + \epsilon u_A(t)]}{[1 - \epsilon + \epsilon \tilde{u}(t)]}.$$

$$\alpha(t + \epsilon) - \alpha(t) = \epsilon \frac{\alpha(t)[u_A(t) - \tilde{u}(t)]}{1 - \epsilon + \epsilon \tilde{u}(t)}.$$

Par définition

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \epsilon) - \alpha(t)}{\epsilon}.$$

Alors

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha(t)[u_A(t) - \tilde{u}(t)]. \quad (2.19)$$

Ce qu'est bien l'équation différentielle du réplicateur dynamique. En remplaçant  $\tilde{u}(t)$  par sa valeur, l'équation ci dessus peut être écrite comme suit :

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha(t)(1 - \alpha(t))[u_A(t) - u_B(t)] \quad (2.20)$$

Un autre modèle plus général a été donné dans [7, 9], pour un nombre  $N$  de stratégies. Soit  $\alpha$  un vecteur de dimension  $N$  où le  $i^{\text{ème}}$  élément  $\alpha_i$  est la fraction de la population utilisant la stratégie pure  $x_i$ .

On a ainsi  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$  et  $\alpha_i \geq 0$ . Par la suite, on note par  $u(x_i, x_k)$  le gain espéré du joueur utilisant la stratégie  $x_i$  quand il rencontre un joueur utilisant la stratégie  $x_k$ .

notons par :

$$u(x_i, \alpha) = \sum_{j=1}^N u(x_i, x_j) \alpha_j,$$

le gain espéré du joueur utilisant la stratégie  $x_i$  dans la compétition.

Dans le cas général, le réplicateur dynamique est représenté comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i(t) &= \alpha_i K \left( u(x_i, \alpha) - \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) u(x_j, \alpha) \right) \\ &= \alpha_i K \left( \sum_{j=1}^N x_j(t) u(x_i, x_j) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N x_j(t) u(x_j, x_k) \alpha_k(t) \right), \end{aligned}$$

où

- $K$  est une constante positive qui n'intervient pas sur la solution du jeu. Il peut être interprété comme un paramètre qui permet de contrôler la vitesse d'adaptation [7, 9].
- $\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j(t) u(x_j, x_k) \alpha_k(t)$  est le gain de la population à l'instant  $t$ .

### Réplicateur Dynamique avec retard

En réalité, l'adaptation des populations ne se fait pas instantanément, les joueurs ont besoin d'un certain temps  $\tau$  pour ajuster leur comportement, alors le gain aura lieu après que le combat a eu lieu avec un certain retard. Ici, on suppose que le gain obtenu à l'instant  $t$  va avoir un impact sur la croissance d'une population après un temps  $\tau$  plus tard. En d'autres termes, on suppose que les individus à l'instant  $t$  se reproduisent grâce au gain obtenu par leurs stratégies à l'instant  $t - \tau$ .

Pour modéliser cette situation, on introduit le concept de réplicateur avec retard, défini de la manière suivante :

$$p_i(t + \epsilon) = (1 - \epsilon)p_i(t) + \epsilon p_i(t) u_i(t - \tau), \quad i = A, B. \quad (2.21)$$

Cette équation décrit le nombre d'individus qui jouent à l'instant  $t$  la stratégie  $i \in \{A, B\}$ .

Le gain moyen d'individu jouant la stratégie  $A$  est donné par :

$$u_A(t - \tau) = a\alpha(t - \tau) + b(1 - \alpha(t - \tau)).$$

Le gain moyen d'individu jouant la stratégie  $B$  est donné par :

$$u_B(t - \tau) = c\alpha(t - \tau) + d(1 - \alpha(t - \tau)).$$



L'équation pour tous les joueurs est :

$$P(t + \epsilon) = (1 - \epsilon)P(t) + \epsilon P(t)\tilde{u}_0(t - \tau), \quad (2.22)$$

où

$$\tilde{u}_0(t - \tau) = \alpha(t)u_A(t - \tau) + (1 - \alpha(t))u_B(t - \tau), \quad (2.23)$$

représente le gain moyen de la population.

$$\alpha(t + \epsilon) - \alpha(t) = \epsilon \frac{\alpha(t)[U_A(t - \tau) - \tilde{U}_0(t - \tau)]}{1 - \epsilon + \epsilon\tilde{u}_0(t - \tau)}. \quad (2.24)$$

Cette équation est obtenue en suivant la même démarche que pour le réplicateur dynamique sans retard, défini précédemment. On aboutit ainsi à l'équation générale du réplicateur dynamique avec retard suivante :

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \epsilon) - \alpha(t)}{\epsilon}.$$

Alors

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \alpha(t)[u_A(t - \tau) - \tilde{u}_0(t - \tau)]. \quad (2.25)$$

En remplaçant  $\tilde{u}_0(t - \tau)$  par sa valeur, l'équation ci dessus peut être écrite comme suit :

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha(t)(1 - \alpha(t))[u_A(t - \tau) - u_B(t - \tau)]. \quad (2.26)$$

Ensuite, nous remplaçons  $u_A(t - \tau)$  et  $u_B(t - \tau)$  par leur valeurs respectives. En tenant compte de la valeur de  $\delta$  et  $\alpha^*$ , on obtient l'équation simplifiée suivante :

$$\dot{\alpha}(t) = -\delta\alpha(t)(1 - \alpha(t)(\alpha(t - \tau) - \alpha^*)). \quad (2.27)$$

C'est une équation pour deux stratégies  $A, B$ . Ici,  $\dot{\alpha}(t)$  représente la fraction d'individus jouant la stratégie  $A$ , qui sont apparus (ou disparus) dans la population à l'instant  $t$ , qui est le résultat d'une compétition qui a eu lieu à l'instant  $t - \tau$ .

Pour un modèle à  $N$  stratégies, on donne l'équation suivante, définie comme suit : Soit  $\alpha(t)$  un vecteur de dimension  $N$  où la  $j^{\text{ème}}$  composante  $\alpha_j(t)$  représente la fraction de la population utilisant la stratégie  $x_j$  à l'instant  $t$  ce qui fait que :  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$  et  $\alpha_j(t) \geq 0$ .

La matrice des gains est  $A = (Ka_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$ ,  $K$  est le paramètre qui accélère la convergence du réplicateur. On note par  $u_j(\alpha(t - \tau)) = \sum_{k=1}^N u(x_j, x_k)\alpha_k(t - \tau)$  le gain du joueur utilisant la stratégie  $x_j$  à l'instant  $t$  après une rencontre avec un joueur dans la population à l'instant  $t - \tau$ . La composition de la population était  $\alpha(t - \tau)$  à l'instant  $t - \tau$ . L'équation du réplicateur dynamique avec retard qui explique la dynamique des  $\alpha_i(t)$  est alors la suivante :

$$\dot{\alpha}_i(t) = \alpha_i(t)K\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(t - \tau)u(x_i, x_j) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j(t)u(x_j, x_k)\alpha_k(t - \tau)\right), \quad (2.28)$$

où  $\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j(t)u(x_j, x_k)\alpha_k(t - \tau)$  est le gain de toute la population à l'instant  $t$ .

## 2.4 Jeu évolutionnaire Multicritère

L'approche qui consiste à considérer un seul critère ou objectif qu'un individu souhaite maximiser, n'est souvent pas suffisante pour décrire les besoins et le comportement des individus.

Dans [77], Kiran Somasundaram étend la notion de stabilité évolutionnaire aux jeux avec fonctions de paiement vectorielles. Il espère que cette notion de stabilité évolutionnaire multicritère, permettra de modéliser une classe plus large des problèmes d'interactions.

Comme dans les jeux à un seul objectif, il se focalise sur les interactions par paires symétriques dans une large population. On ne compromet pas les interactions entre plus que deux individus à un instant.

### 2.4.1 Les stratégies évolutionnairement stables

#### Notations

On considère les mêmes hypothèses qu'on a posé précédemment.

On a le jeu

$$\langle I, X, U \rangle, \quad (2.29)$$

où

- $I$  : population d'individus (joueurs),
- $X$  : L'ensemble des issues du jeu en stratégies pures,
- $\Delta$  : L'ensemble des stratégies mixtes, tel que  $\Delta = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$ ,
- $U$  : on associe à chaque joueur une sequence de matrices des gains. Supposons qu'il y a  $l$  critères (objectifs) en jeu. Pour le joueur  $I$ , on lui associe les matrices des gains suivantes

$$A_1, A_2, \dots, A_l,$$

avec

$A_i$  : la matrice des gains du joueur I en considérons le critère  $i$ .

$B_i = A'_i$  : la matrice des gains du joueur II en considérons le critère  $i$ .

La fonction de gain quand le joueur  $I$  joue la stratégie  $\alpha \in \Delta$  et le joueur  $II$  joue la stratégie  $\beta \in \Delta$  est donné par

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta) &= (u^1, u^2, \dots, u^l)(\alpha, \beta) \\ &= (u^1(\alpha, \beta), u^2(\alpha, \beta), \dots, u^l(\alpha, \beta)) \\ &= (\alpha' A_1 \beta, \alpha' A_2 \beta, \dots, \alpha' A_l \beta). \end{aligned}$$

### Relation d'ordre

Les différentes relations de classement  $\succ$  de  $\mathbb{R}^l$  que nous considérons sont indiquées dans le tableau 2.4.

Notation	Définition	Nom
$\alpha \gg \beta$	$\alpha_i > \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, l$	Ordre de préférence stricte
$\alpha > \beta$	$\alpha_i \geq \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, l$ et $\alpha \neq \beta$	Ordre de préférence
$\alpha >_{\text{lex}} \beta$	$\alpha_j > \beta_j, \quad j = \min\{i, \alpha_i \neq \beta_i\}, \quad j \leq l$	Ordre lexicographique
$\alpha_\lambda > \beta_\lambda$	$\lambda' \alpha > \lambda' \beta, \quad \lambda \geq 0$	$\lambda$ -scalarisé

TAB. 2.4 – Les relations d'ordre.

**Remarque 2.2.** – L'ensemble des équilibres Pareto Nash symétrique est noté par

$$\Delta^{PNE}.$$

L'ensemble des équilibres de Nash Pareto pour un vecteur de fonction de gain du jeu symétrique à deux joueurs est donné par

**Définition 2.23.** [77]

$$\Delta^{PNE} = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha = \arg \max_{\beta \in \Delta}^P U(\beta, \alpha)\}.$$

– L'ensemble des meilleures réponses Pareto pour une stratégie  $\beta$  est noté par  $B^{P*}(\beta)$ .

### Stabilité évolutionnaire

**Définition 2.24.** [77] Une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre  $\succ$ ), si  $\forall \beta \in \Delta, \beta \neq \alpha, \exists \bar{\epsilon}_\beta$  tel que  $\forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_\beta)$ , on a

$$U(\alpha, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha) \succ U(\beta, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha).$$

**Remarque 2.3.** Les différentes relations de classements donnent lieu à plusieurs définitions de la stabilité évolutionnaire dans le cadre multi-objectif.

### Stabilité évolutionnaire fortement idéale

Quand on choisit la relation d'ordre "Ordre de préférence stricte", nous obtenons la stabilité évolutionnaire idéalement forte.

La séquence de composants de jeux symétriques est donnée par les matrices de paiement  $A_m$ ,  $B_m = A'_m$ ,  $1 \leq m \leq l$  qui correspondent aux matrices dans le jeu multi-objectif original.

On note

- $G_m^c$ ,  $1 \leq m \leq l$  : un jeu en considérant la  $m^{\text{ème}}$  composante de  $U$ .

$$\langle I, X, u^m \rangle.$$

- $B^{m*}(\beta)$  : les meilleures réponses correspondantes pour le jeu  $G_m^c$ .
- $\Delta^{NE(G_m^c)}$  : l'ensemble des équilibres de Nash pour le jeu  $G_m^c$ .
- $\Delta^{ESS(G_m^c)}$  : l'ensemble des équilibres évolutionnairement stables pour le jeu  $G_m^c$ .
- $\Delta^{SIESS}$  : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables fortement idéales.

**Définition 2.25.** Une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre  $\succ$ ), si  $\forall \beta \in \Delta$ ,  $\beta \neq \alpha$ ,  $\exists \bar{\epsilon}_\beta$  tel que  $\forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_\beta)$ , on a

$$U(\alpha, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha) \gg U(\beta, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha).$$

**Proposition 2.7.** [77]  $\Delta^{SIESS} = \bigcap_m \Delta^{ESS(G_m^c)}$ .

### Stabilité évolutionnaire idéale

Quand on choisit la relation d'ordre "Ordre de Préférence", nous obtenons la stabilité évolutionnaire idéale.

On considère  $G_m^c$ ,  $1 \leq m \leq l$ . On note

- $\Delta^{IESS}$  : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables idéales.

**Définition 2.26.** [77] Une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre  $\succ$ ), si  $\forall \beta \in \Delta$ ,  $\beta \neq \alpha$ ,  $\exists \epsilon_\beta$  tel que  $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_\beta)$ , on a

$$U(\alpha, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha) > U(\beta, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha).$$

**Proposition 2.8.** [77]  $\Delta^{IESS} = \{\alpha \in \bigcap_m \Delta^{NE(G_m^c)}, U(\alpha, \beta) > U(\beta, \beta), \forall \beta \in \bigcap_m B^{*m}(\alpha), \beta \neq \alpha\}$ .

### Stabilité évolutionnaire lexicographique

Quand on choisit la relation d'ordre "Ordre lexicographique", nous obtenons la stabilité évolutionnaire lexicographique.

On considère  $G_m^c$ ,  $1 \leq m \leq l$ . On note

- $\Delta^{LESS}$  : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables lexicographiques.

**Définition 2.27.** [77] Une stratégie  $\alpha \in \Delta$  est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre  $\succ$ ), si  $\forall \beta \in \Delta, \beta \neq \alpha, \exists \bar{\epsilon}_\beta$  tel que  $\forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_\beta)$ , on a

$$U(\alpha, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha) >_{\text{lex}} U(\beta, \epsilon\beta + (1 - \epsilon)\alpha).$$

**Proposition 2.9.** [77]  $\Delta^{LESS} = \{\alpha \in \bigcap_m^j \Delta^{NE(G_m^c)} \mid u^1(\alpha, \beta) \geq u^1(\beta, \beta), \dots, u^{j-1}(\alpha, \beta) \geq u^{j-1}(\beta, \beta), u^j(\alpha, \beta) > u^j(\beta, \beta), \forall \beta \in \bigcap_m^j B^{*m}(\alpha), \beta \neq \alpha\}$ .

### Stabilité évolutionnaire Biaisée

Quand on choisit la relation d'ordre "λ-scalarisé", nous obtenons la stabilité évolutionnaire biaisée.

On considère le jeu scalarisé  $G(\lambda)$ . On note

- $\Delta^{BESS}$  : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables biaisées.
- $\lambda'U(\alpha, \beta)$  : la fonction de gain dans le jeu  $G(\lambda)$ ,  $\alpha \in \Delta, \beta \in \Delta$

**Proposition 2.10.** [77]  $\Delta^{BESS} = \{\alpha \in \Delta^{PNE(G)} \mid \beta \neq \alpha, \beta \in \beta^{*P}(\alpha) \Rightarrow \alpha \text{ domine } \beta \text{ comme réponse à la st}$

## 2.4.2 Réplicateur Dynamique

On considère que :

- Les individus sont programmés à jouer un jeu symétrique à deux joueurs multicritère avec une fonction de gain  $U$ .
- $p_i(t)$  le nombre d'individus qui sont programmés à jouer la stratégie pures  $x_i \in X$  à l'instant  $t$ .
- $p(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) > 0$  la population totale.
- $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_k(t))$  est l'état de la population.
- $\alpha_i(t)$  est la proportion des individus qui sont programmés à jouer la stratégie pure  $x_i$  à l'instant  $t$  :

$$\alpha_i(t) = p_i(t)/p(t).$$

- $\alpha(t) \in \Delta$ .
- ★  $U(x_i, \alpha)$  : est le gain espéré quand la stratégie pure  $x_i$  est jouée contre le profil de stratégie  $\alpha$ .
- ★  $U(\alpha, \alpha)$  : est le gain espéré quand le profil de stratégie  $\alpha$  est joué dans la population (le gain moyen dans la population avec la stratégie  $\alpha$ ).

$$U(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i U(x_i, \alpha).$$

★  $\dot{\alpha}_i$  : est la proportion d'individus qui joueront la stratégie pure  $x_i$  à la prochaine génération [77].

La dynamique de la population correspondante est :

$$\dot{\alpha}_i = \alpha_i[\lambda'U(x_i, \alpha_{-i}) - \lambda'U(\alpha, \alpha)]. \quad (2.30)$$

## Conclusion

Nous avons étudié quelques notions des jeux classiques et évolutionnaires en mettant en évidence le concept de solution dans l'aspect classique, des stratégies évolutionnairement stables (ESS) et du réplicateur dynamique dans l'approche évolutionnaire. Le ESS est un concept clé qui caractérise le mécanisme naturel de la mutation alors que le réplicateur dynamique caractérise le mécanisme de la sélection.

# 3

## Impact de la théorie des jeux classique dans les réseaux Ad Hoc

### Introduction

La théorie des jeux a trouvé un champ d'application très fertile dans les réseaux de communication sans fils, elle représente un domaine intéressant pour considérer des mobiles en tant qu'entités indépendantes aux comportements égoïstes administrant leurs transmissions et cherchant à réaliser un objectif commun (le bien-être du système dans son ensemble, par exemple maximiser le débit global du système), ou bien à maximiser leurs propres gains (débits, durées de vie...).

Dans ce chapitre, nous décrivons à quel point les diverses interactions dans les réseaux ad hoc sans fil peuvent être modélisées sous forme d'un jeu et nous examinons la littérature récente sur ces applications au contrôle de puissance et à l'adaptation des formes d'onde, au contrôle d'accès au medium et au cheminement des paquets.

### 3.1 Pourquoi la théorie des jeux

La théorie des jeux, comme nous l'avons déjà vu, développe des outils mathématiques nécessaires pour l'étude des interactions des agents autonomes. À ce niveau, il devrait être clair comment la théorie des jeux peut être utile pour l'analyse des réseaux ad hoc.

Dans un réseau ad hoc, chaque mobile (nœud) doit prendre ses propres décisions. Ces décisions peuvent être conditionnées par les règles ou les algorithmes d'un protocole, mais finalement chaque nœud aura une certaine marge de performance en plaçant des paramètres ou en changeant le mode de fonctionnement. Ces nœuds, alors, qui sont des agents autonomes, prennent des décisions sur la puissance de transmission, l'expédition de paquets, le partage de la ressource, et ainsi de suite.

En prenant ces décisions, que recherchent les nœuds à optimiser ?.

Dans certains cas, les nœuds cherchent à réaliser un objectif commun (le bien-être du système dans son ensemble, par exemple maximiser le débit global du système). Dans d'autres cas, les nœuds peuvent se comporter d'une manière égoïste et donc cherchent à maximiser leurs propres intérêts. Dans ce dernier cas, les nœuds peuvent se comporter avec malveillance, cherchant à ruiner les performances du réseau pour d'autres utilisateurs.

### 3.2 Modélisation des réseaux Ad-Hoc comme jeux

Dans un jeu, les joueurs sont des preneurs de décisions indépendants, dont les profits dépendent des actions des autres joueurs. Des nœuds dans un réseau ad-hoc sont caractérisés par le même dispositif. Cette similitude entre les composants de la théorie des jeux et les éléments d'un réseau ad-hoc est illustrée dans le tableau suivant :

Les éléments du jeu	Les éléments du réseau
joueurs	nœuds dans le réseau
stratégies	action liée à la fonctionnalité à étudier (la puissance de transmission, sélection de la forme d'onde, l'accès au medium, expédition des paquets,...)
fonction utilité	les performances du réseau (le débit, la durée de vie,...)

TAB. 3.1 – *Similitude entre la théorie des jeux et les réseaux ad hoc*



### 3.3 Théorie des jeux dans les réseaux Ad Hoc

Dans cette section, nous récapitulons quelques applications potentielles de la théorie des jeux aux différents problèmes rencontrés dans les réseaux ad hoc. Pour ce faire, nous introduisons d'abord quelques notations que nous utiliserons par la suite.

Symbole	Signification	Symbole	Signification
$N$	ensemble des nœuds dans le réseau $\{1, 2, \dots, n\}$	$p_j$	puissance choisie par le $j^{\text{ème}}$ mobile
$h_{ij}$	le taux de succès de transmission des paquets en utilisant le lien de $i$ vers $j$ ( $h_{ij} \in [0, 1]$ )	$\mathbf{P}_j$	l'ensemble des niveaux de puissance de puissance du $j^{\text{ème}}$ mobile
$H$	la matrice des taux de succès de transmission de tous les liens du réseau $H = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & 1 & & & \vdots \\ h_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{P}$	L'espace des puissances formé du produit cartésien de tous les $\mathbf{P}_j$ $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots \times \mathbf{P}_N$
		$\omega_j$	la forme d'onde choisie par le $j^{\text{ème}}$ mobile
		$\Omega_j$	l'ensemble des formes d'onde du $j^{\text{ème}}$ nœud.
$u_j(\mathbf{p}, \omega, H)$	la fonction utilité du $j^{\text{ème}}$ mobile	$\Omega$	L'espace de formes d'onde formé du produit cartésien de tous les $\omega_j$ $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$
$\mathbf{p}$	$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$	$\omega$	$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

TAB. 3.2 – Modélisation d'un réseau ad hoc sous forme d'un jeu

D'une manière générale, nous pouvons modéliser un réseau ad hoc par le jeu suivant :

$$G = \langle \mathcal{N}, \{P_j, \Omega_j\}, \{u_j(\mathbf{P}, \omega, H)\} \rangle, \quad (3.1)$$

où les joueurs sont les nœuds (mobiles) du réseau, les stratégies peuvent être les puissances de transmission, les formes d'ondes et même les liens du réseau (comme dans le problème de routage que nous allons voir dans la section 3.3.6) et la fonction utilité représente les performances du réseau comme le débit ou la durée de vie de réseau.

#### 3.3.1 Contrôle de puissance

Le choix optimal de la puissance de transmission dans un canal de transmission dans les réseaux cellulaires est, en général, déterminé par la station de base (ou point d'accès au réseau) et

transmis comme un message de contrôle à tous les utilisateurs (mobiles) du réseau ; ce problème est connu sous le nom contrôle centralisé de puissance.

Dans le cas de réseaux ad hoc, comme ce type de réseaux est décentralisé (pas de base de station), chaque mobile joue le rôle de la station de base et donc détermine sa puissance optimale de transmission, et, dans ce cas, le problème est connu sous le nom contrôle de puissance distribué.

Le but principal du contrôle de puissance est de combattre l'interférence à long terme. En effet, quand le contrôle de puissance est administré, un émetteur emploie le niveau minimum de puissance de transmission qui est exigé pour communiquer avec le récepteur désiré. Ceci réduit au minimum l'interférence causée par cette transmission, améliore la largeur de la bande passante et minimise la consommation d'énergie.

Ce problème est largement étudié dans le cas de réseaux cellulaires [3, 6, 35, 44, 54, 36].

### Cas des liens simples

Nous supposons que chaque noeud  $i$  dans un ensemble  $\mathcal{N}$  des noeuds maintient un lien simple (un lien est dit simple s'il ne peut transporter qu'un seul paquet à la fois) avec sa destination  $\nu_i$  et essaye de maximiser sa fonction SINR (la qualité d'une transmission d'un noeud  $i$  vers un noeud  $\nu_i$  est mesurée par le ratio du signal sur interférence plus bruit (SINR) en  $\nu_i$ )[79].

Ce qui donne la fonction objectif suivante :

$$u_i(p_1, \dots, p_N) = - \left[ \hat{\gamma}_i - \frac{h_{i\nu_i} p_i}{\sigma_{\nu_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}, j \neq i} h_{i\nu_i} p_j} \right]^2, \quad (3.2)$$

où

- $\hat{\gamma}_i$  est la fonction SINR du  $i^{\text{ème}}$  joueur.
- $\sigma_{\nu_i}$  est le bruit au niveau de la destination.

Le bruit est l'ensemble des perturbations ne contenant pas d'informations utiles au signal émis. Il est classé en deux catégories : le bruit interne qui correspond au bruit engendré par les différents composants d'un système de transmission et le bruit externe dû à l'absorption des ondes par les molécules de l'atmosphère à certaines fréquences précises et à l'activité humaine.

### Cas des liens MIMO

Liang et Dandekar considèrent dans [49] la caractérisation et la gestion de l'interférence dans les réseaux ad-hoc sans fil en utilisant des techniques d'accès multiples (MIMO) (un mobile peut

transmettre et recevoir plusieurs paquets de données en même temps sur un canal MIMO). Selon cette approche, la puissance d'allocation dans le  $i^{\text{ème}}$  lien est modélisé sous forme d'un jeu non coopératif en utilisant la fonction utilité suivante :

$$u_i = C_i - \gamma_i p_i, \quad (3.3)$$

où

- $\gamma_i$  est un facteur de scalarisation pour que  $p_i$  et  $C_i$  aient les mêmes unités ;
- $C_i$  est le débit réalisable du lien ;
- $p_i$  est la puissance de transmission du lien.

### 3.3.2 Adaptation de la forme d'onde

L'adaptation de la forme d'onde dans les réseaux ad hoc comporte le choix d'une forme d'onde par un noeud de façon que l'interférence au niveau du récepteur soit réduite. L'interférence au récepteur est une fonction dépendante de la forme d'onde d'un mobile avec les formes d'ondes des autres mobiles dans le réseau.

Ce problème a été modélisé sous forme d'un jeu dans [55, 79]. En outre, en général, les différents noeuds impliqués à la transmission n'ont pas ou ont très peu d'informations sur l'environnement d'interférence du récepteur. La fonction d'interférence a été définie comme suit :

$$u_i(\omega_i, \omega_{-i}) = f_1(\omega_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^N f_2(I(\omega_j, \omega_i), p_j, p_i, h_{ji}) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \gamma_{ij} f_3(I(\omega_i, \omega_j), p_i, p_j, h_{ij}),$$

où

- la fonction  $f_1$  mesure le bénéfice lié au choix particulier de la forme  $\omega_i$  ;
- la fonction  $f_2$  mesure l'interférence du joueur  $i$  aperçue au noeud de réception due aux autres utilisateurs présents dans le système ;
- $I$  est une certaine fonction qui mesure la corrélation entre les formes  $\omega_j$  et  $\omega_i$  ;
- la fonction  $f_3$  mesure l'interférence aux récepteurs causée par un utilisateur particulier avec d'autres utilisateurs dans le réseau ;
- $\gamma_{ij}$  est un facteur de poids.

### 3.3.3 Partage du spectre radio

Le problème de partage du spectre radio (bande de fréquences) aborde la question de la façon dont il faut partager le spectre disponible limité entre les dispositifs sans fil. Ce problème a trouvé sa part de recherche dans la théorie des jeux [47, 66, 67, 97]. Il a été modélisé sous forme d'un

jeu coopératif [31, 80].

Selon cette approche, la largeur de la bande disponible est divisée équitablement en plusieurs canaux. Chaque noeud peut transmettre dans n'importe quelle combinaison des canaux à tout moment et peut placer sa puissance de transmission sur chaque canal.

Soit  $\chi = \{1, \dots, K\}$  l'ensemble des canaux disponibles et  $B$  la largeur de la bande de fréquence. Alors la largeur de chaque canal est donnée par  $\frac{B}{K}$  et  $N$  est le nombre d'émetteurs dans le réseau. Le jeu associé au partage du spectre est formulé comme suit :

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  : l'ensemble des émetteurs (qui sont considérés comme des joueurs) ;
- $P_i = \{p_i = (p_i^1, \dots, p_i^K), p_i^k \geq 0, k \in \chi, \sum_{k \in \chi} p_i^k < \mathbf{p}_{max}\}$  est l'ensemble des stratégies, où  $p_i^k$  est la puissance de transmission du  $i^{\text{ème}}$  mobile sur le  $k^{\text{ème}}$  canal ;
- la fonction objectif d'un joueur représente la capacité de transmission (taux de transmission) du joueur sur tous les canaux disponibles, elle est définie par la relation suivante :

$$C_i(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N) = \frac{B}{K} \sum_{k=1}^K \log_2 \left( 1 + \frac{h_{ji}^k p_i^k}{\frac{\sigma^2}{K} \sum_{j \neq i} h_{ji}^k p_j^k} \right), \quad (3.4)$$

où

- $\mathbf{p}_{max}$  la puissance maximale de transmission,
- $\sigma^2$  est le bruit sur la bande de fréquences.

### 3.3.4 Contrôle d'accès au medium

Le medium (support) de communication dans les réseaux sans fils est un spectre radio (une bande de fréquences). Cette ressource est organisée en canaux physiques et chaque canal est affecté à une seule communication. Comme le nombre de canaux est très inférieur au nombre de communications potentielles, alors plusieurs mobiles tentent d'accéder au même canal radio et, dans ce cas, on aura collision et, donc, perte de tous les paquets. La gestion de cette ressource constitue un problème connu sous le nom de contrôle d'accès au medium.

Plusieurs études ont traité ce problème avec les outils de la théorie des jeux [11, 40, 73, 95, 96]. A titre d'exemple, nous allons illustrer les travaux [51, 52] de MacKenzie et Wicker qui ont modélisé le problème d'accès aléatoire au slot Aloha. Dans cette étude, les utilisateurs souhaitent effectuer des transmissions au tant que possible. Cependant, si plusieurs utilisateurs essayent de transmettre simultanément, alors tous les accès échoueront. En plus, les tentatives de transmissions qui ont échoué peuvent être coûteuses en terme d'énergie. Dans le protocole Aloha, le temps est divisé en petits intervalles du temps, appelés slots.

Soit  $G(n)$  le jeu dans lequel participent  $n$  utilisateurs. A chaque étape de  $G(n)$ , chacun des joueurs doit prendre une décision qui peut être :

- transmettre ( $t$ ) ou
- attendre ( $w$ ).
- Si un joueur décide de transmettre (jouer la stratégie  $t$ ), pendant que les autres décident d'attendre (jouent la stratégie  $w$ ), alors il recevra un profit de 1 paquet, et chacun des  $(n - 1)$  autres joueurs jouera dans le jeu  $G(n - 1)$  qui se déroulera dans la période suivante.
- Si aucun utilisateur ne transmet (tous jouent  $w$ ), ou plus d'un utilisateur transmettent (jouent  $t$ ), tous les joueurs participeront au jeu  $G(n)$  qui se déroulera dans la période suivante. Les joueurs auront une valeur du gain, aux étapes postérieures, inférieure à celle du gain courant. Ceci est représenté par un facteur de dégradation  $\delta < 1$ .

Soit  $u_{i,n}$  - l'utilité du  $i^{\text{ème}}$  joueur dans le jeu  $G(n)$  et  $K$  la variable aléatoire qui représente le nombre d'utilisateurs qui transmettent dans un slot donné, alors

$$u_{i,n}(t) = p(K = 0) + \delta u_{i,n}(t)p(K > 0);$$

$u_{i,n}(t)$  est le débit du  $i^{\text{ème}}$  utilisateur dans le jeu  $G(n)$  (il y a  $n$  utilisateurs), lorsqu'il joue la stratégie  $t$ . Il est égal à un paquet, si ce joueur est le seul à transmettre avec une probabilité  $p(K = 0)$ , ce qui donne  $(1.p(K = 0))$  et il prend la valeur  $\delta u_{i,n}(t)$  dans la prochaine étape, s'il y a d'autres utilisateurs qui transmettent en même temps que lui avec une probabilité  $(p(K > 0))$ .

$$u_{i,n}(w) = \delta u_{i,n-1}p(K = 1) + \delta u_{i,n}(w)p(K \neq 1),$$

$u_{i,n}(w)$  est le débit du  $i^{\text{ème}}$  utilisateur dans le jeu  $G(n)$  (avec  $n$  utilisateurs) lorsqu'il joue la stratégie  $w$  (ne pas transmettre). Dans ce cas, le débit est égal à  $\delta u_{i,n-1}(t)$  qu'il aura dans la prochaine étape dans le jeu  $G(n - 1)$  si, dans  $G(n)$ , il y aura un seul transmetteur ( $p(K = 1)$ ) et il est égal à  $\delta u_{i,n}(w)$ , si, dans la prochaine étape où il jouera  $G(n)$ , il y aura plusieurs utilisateurs qui transmettent en même temps ( $p(K \neq 1)$ ).

Ainsi, le jeu est décrit comme suit :

- l'ensemble des joueurs est constitué des utilisateurs ;
- les joueurs ont tous un même ensemble de stratégies constitué de :  $\{t, w\}$  ;
- la fonction utilité est  $u_{i,n}$  définie par :

$$u_{i,n}(t) = \frac{p(K = 0)}{1 - \delta p(K > 0)}, \tag{3.5}$$

et

$$u_{i,n}(w) = \frac{\delta p(K = 1)}{1 - \delta p(K \neq 1)} u_{i,n-1}. \tag{3.6}$$

### 3.3.5 Contrôle de topologie

Le contrôle de topologie, consistant à modifier la topologie radio en ajustant l'interface de communication (la portée radio), est défini comme un problème d'attribution des puissances de transmission aux différents noeuds du réseau afin que la topologie du réseau atteigne certaines propriétés de connectivité, de capacité et que la consommation d'énergie des noeuds soit réduite.

Ce problème a été modélisé comme un jeu sous forme normale [43], où :

- les joueurs sont les mobiles  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ ,
- les stratégies sont les puissances de transmission :  $p_i \in [0, p_i^{max}]$ ,
- la fonction d'utilité est donnée par :

$$u_i(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N) = M_i f_i(p) - p_i, \quad (3.7)$$

où

- $f_i(p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)$  est le nombre de noeuds qui peuvent être atteints par le noeud  $i$  par l'intermédiaire des liens directs et des chemins.
- $M_i$  est une valeur associée à chaque noeud mesurant sa capacité d'être relié aux autres noeuds.

### 3.3.6 Routage et l'expédition des paquets

La théorie des jeux peut être appliquée pour aider un noeud à déterminer l'itinéraire optimal ou à décider s'il devrait expédier un paquet reçu.

#### Le routage

Le problème de routage est devenu un problème majeur et prioritaire à traiter dans les réseaux ad hoc. Des études ont été dévouées surtout à produire des protocoles décentralisés pour garantir le routage des paquets en tenant compte de la mobilité des noeuds du réseau [94].

Le problème de routage dans les réseaux ad hoc peut être modélisé sous forme d'un jeu non coopératif à deux joueurs [22, 79] :

- le premier joueur est le noeud source  $i$  ;
- le deuxième joueur est un représentant de la coalition constituée du reste des noeuds du réseau  $\mathcal{N} \setminus \{i\}$  qu'on notera  $-i$  ;
- une stratégie pour un joueur est un chemin possible le reliant à une destination donnée ;
- l'objectif de chaque noeud est d'acheminer son paquet de données vers sa destination à moindre coût.

### L'expédition des paquets

Dans un réseau ad hoc, un noeud source communique avec sa destination :

- d'une manière directe si elle est à sa portée de communication ;
- d'une manière indirecte en utilisant des chemins multi-sauts (à l'aide des noeuds intermédiaires) si elle n'est pas à sa portée de communication.

L'établissement des itinéraires de multi-sauts dans un réseau ad-hoc se fonde sur l'expédition des paquets des autres noeuds.

Cependant, un noeud égoïste, afin de conserver ses ressources énergétiques limitées, pourrait décider de ne pas participer au processus d'expédition par le changement ou la coupure de son interface de communication. Si tous les noeuds décident de changer leurs comportements de cette façon, agissant d'une manière égoïste, ceci peut mener à l'effondrement du réseau.

Les travaux [14, 24, 25, 27, 28, 56, 57, 78, 87] développent les modèles théoriques de jeux pour l'analyse du comportement égoïste dans l'expédition des paquets. Ces modèles sont résumés comme suit :

- les noeuds du réseau ad hoc constituent l'ensemble des joueurs ;
- chaque joueur  $i$ , possède deux stratégies  $X_i = \{0, 1\}$  ;

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si le mobile ne participe pas dans le processus d'expédition,} \\ 1, & \text{s'il décide de participer.} \end{cases}$$

- la fonction utilité du  $i^{\text{ème}}$  mobile est donnée par :

$$u_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = \alpha_i(x) + \beta_i(x), \quad (3.8)$$

où

- $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$  est le gain du  $i^{\text{ème}}$  mobile, lorsque les autres mobiles participent dans l'acheminement (transfert, expédition) de ses transmissions.  $\alpha_i(0) = 0$ , et  $\alpha_i(x) > 0$  si  $\exists j$  tel que  $x_j = 1$ .
- $\beta_i(x) = \beta_i(x_i)$  est le gain du  $i^{\text{ème}}$  mobile lorsqu'il participe dans le transfert des paquets des autres mobiles.  $\beta_i(x_i)$  peut être négative ; dans ce cas elle représente la perte d'énergie. Elle peut être positive dans le cas d'existence d'incitations financières.

### 3.3.7 Contrôle de la congestion

Le contrôle de la congestion est basé sur le contrôle de la charge du réseau en limitant l'admission des sessions aux nouveaux utilisateurs et en résolvant les situations non désirées de surcharge. Le contrôle d'admission et le contrôle de charge constituent les mécanismes principaux pour la

gestion des ressources dans les réseaux sans fils.

Cependant, le volume de la recherche a été concentré sur les réseaux filaires [4, 33, 72] et les réseaux cellulaires [21, 23, 50, 91], mais cette recherche peut servir pour le développement d'un modèle théorique de jeu pour analyser le contrôle de congestion dans les réseaux ad hoc.

## 3.4 La théorie des jeux évolutionnaire dans les réseaux Ad Hoc

La théorie des jeux classique a été largement appliquée dans le domaine des télécommunications, mais avec le nombre croissant d'utilisateurs, les interactions répétées entre eux, l'évolution des services et l'apparition de nouveaux protocoles tels que la version du TCP, il est devenu nécessaire que ces dernières évolutions et variétés soient prises en considération. La théorie des jeux évolutionnaire fournit un cadre théorique pour comprendre et prévoir l'évolution des services, des protocoles et de l'architecture des réseaux décentralisés afin d'atteindre des objectifs désirés de stabilité et d'efficacité.

Actuellement, ne sont pas nombreux les travaux qui utilisent les jeux évolutionnaires dans la télécommunication [10, 85].

### 3.4.1 Contrôle d'accès au medium

Considérons une large population de terminaux mobiles dans un réseau ad-hoc. Supposons que la densité du réseau est faible, de sorte que si un mobile essaye de transmettre, la probabilité d'interférence avec plus d'un mobile (appelé le voisin) est négligeable. Un mobile peut décider de transmettre ou non un paquet à un récepteur. L'interférence se produit, comme dans le protocole d'ALOHA, si plus de deux voisins transmettent un paquet en même temps, il y a alors une collision [82, 83].

Le problème d'accès au support de communication est modélisé sous forme d'un jeu évolutionnaire symétrique à deux joueurs, comme suit :

- Les mobiles représentent les joueurs,
- les combats se font par paire d'individus,
- chaque mobile a le choix entre transmettre ( $t$ ) et attendre ( $w$ ),
- la matrice des gains est donnée comme suit :



<i>joueur1/joueur2</i>	<i>t</i>	<i>w</i>
<i>t</i>	$-\Delta$	$1 - \Delta$
<i>w</i>	0	0

TAB. 3.3 – Modélisation de problème d'accès au support sous forme d'un jeu symétrique.

où

–  $\Delta$  représente le coût de la transmission (dépense d'énergie).

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différents exemples de problèmes rencontrés dans les réseaux ad hoc qui ont été traités par la théorie des jeux classique.

Nous avons vu aussi que même la théorie des jeux évolutionnaire a pu trouver sa part de recherche dans les réseaux ad hoc, ce qu'a montré le problème d'accès au support de communication.

# 4

## Application des jeux évolutionnaires dans les réseaux Ad Hoc

### Introduction

Nous pouvons adopter des notions de biologie, non seulement à travers le concept des jeux évolutionnaires, mais aussi à travers des applications liées à la gestion de l'énergie. Cette dernière joue un rôle principal dans les réseaux mobiles. Dans le contexte de la biologie, la durée de vie et le taux de reproduction sont liés à la quantité d'énergie d'un animal, et donc au comportement de l'animal lors d'une compétition avec d'autres animaux sur des ressources. Des exemples de travaux sur l'administration de l'énergie en biologie en utilisant les jeux évolutionnaires sont donnés dans [38, 53].

Par analogie, dans les réseaux mobiles, chaque mobile adopte des stratégies basées sur le niveau d'énergie de sa batterie dans le but de maximiser son débit (nombre de paquets envoyés avec succès) et maximiser sa durée de vie, lors d'une compétition avec d'autres mobiles.

Dans ce chapitre, dans une première partie, nous allons modéliser cette situation dans les mobiles ad hoc sous forme d'un jeu évolutionnaire mono critère avec une analyse et une résolution de ce jeu. Dans la deuxième partie, nous allons proposer une modélisation sous forme d'un jeu multicritère qu'on analysera et on développera sa résolution.

## 4.1 Position du problème

Comme les mobiles partagent une même bande passante, alors surgissent des conflits. C'est ainsi que les mobiles sont vus en compétition pour transmettre leurs paquets. Il existe deux niveaux de puissance pour la transmission : niveau haut et niveau bas. Le problème consiste alors à choisir entre les deux niveaux de puissance de manière non coopérative en supposant que les mobiles sont des entités égoïstes et rationnelles. Leurs stratégies consistent à choisir la probabilité de transmission pour chaque niveau de puissance et les gains sont les débits (nombre de paquets envoyés par succès) obtenus ainsi que les durées de vie. Les stratégies dépendent du niveau d'énergie des batteries des mobiles, et avec l'autonomie des mobiles. Pour maximiser la durée de vie d'un mobile, il faut économiser autant que possible son énergie et pour maximiser son débit, il faut dépenser beaucoup d'énergie. Pour faire face à cette situation antagoniste, nous allons utiliser la théorie des jeux évolutionnaires.

## 4.2 Modélisation

On considère une large population de mobiles qui partagent les canaux radios d'un réseau ad hoc distribué selon la technique Aloha. Supposons que la densité du réseau est faible, c'est-à-dire qu'au voisinage de chaque mobile, nous ne trouvons pas un nombre très important de mobiles. Alors, si un mobile tente une transmission, on peut négliger la probabilité qu'il y ait interférence avec plus qu'un voisin qui transmette en même temps que lui. L'interférence (collision) se produit dans ce type de réseau, lorsque deux voisins transmettent en même temps. Dans ce cas, pour éviter de perdre les deux paquets, nous supposons que le mobile qui a une batterie très bien chargée transmette avec un niveau haut de puissance, ce qui permettra de récupérer le paquet transmis avec basse puissance à chaque fois qu'une collision se produise.

Plus précisément, on considère un jeu non coopératif entre une large population d'utilisateurs de terminaux mobiles. Un terminal  $i$  tente ses transmissions durant des séquences  $\{t_n^i\}$  du temps, appelées moments d'opportunités ou slots. On notera  $\{t_n^i\}$ , le  $n^{eme}$  slot de transmission du  $i^{eme}$  mobile. A chaque tentative de transmission, un mobile doit prendre une décision : avec quelle puissance doit-il transmettre tenant compte de l'état de l'énergie de sa batterie ? Pour simplifier, on suppose que l'état de l'énergie d'une batterie d'un mobile peut prendre trois valeurs possibles  $\{F, A, E\}$ , où :

- $F$  : batterie chargée (Full) ;
- $A$  : batterie presque déchargée (Almost empty) ;
- $E$  : batterie déchargée (Empty).

La puissance de transmission d'un signal d'un terminal peut être élevée :  $h$  (high) ou faible :  $l$  (low).  $h$  et  $l$  seront appelées actions d'un mobile.

Un mobile à l'état  $F$  a la possibilité de transmettre soit avec une puissance élevée  $h$  ou avec une faible puissance  $l$ .

Un mobile à l'état  $A$  ne peut transmettre qu'avec une faible puissance  $l$ .

Un mobile à l'état  $E$  ne peut transmettre de paquets.

La durée de vie d'un mobile peut être caractérisée par le nombre de slots durant lesquels sa batterie n'est pas déchargée.

On considère un jeu du type Aloha, où un mobile transmet un paquet avec succès durant un slot, si :

- il est le seul à transmettre durant ce slot
- ou
- il transmet avec une puissance élevée, pendant que les autres mobiles transmettent dans le même slot avec une faible puissance.

On adoptera les notations suivantes :

- $p$  : la probabilité pour qu'un mobile soit le seul à transmettre durant un slot donné ;
- $Q_i(a)$  : la probabilité qu'un mobile qui est à l'état d'énergie  $i \in \{E, F, A\}$  reste dans cet état lorsqu'il transmet avec une puissance  $a \in \{h, l\}$  ;

Comme à l'état  $A$ , un mobile ne peut transmettre qu'avec une faible puissance  $l$ , alors on notera  $Q_A$  au lieu de  $Q_A(l)$  ;

- $\alpha$  est la proportion de la population qui transmet avec la puissance  $h$  à tout instant donné ;

Notons que pour un  $\alpha$  donné, la proportion de la population qui choisit l'action  $h$  à l'état  $F$  est plus grande que  $\alpha$  puisque on a :

$$\gamma = \frac{\text{Nombre de mobiles utilisant } h \text{ à l'état } F}{\text{Nombre de mobiles à l'état } F} = \frac{N_F^h}{N_F},$$

$$\alpha = \frac{\text{Nombre de mobiles utilisant } h}{\text{Nombre total de mobiles}} = \frac{N^h}{N_A + N_F + N_E},$$

d'où

$$\alpha \leq \gamma.$$

### 4.2.1 Les stratégies

Habituellement, dans la théorie des jeux évolutionnaires, un joueur prend une seule décision c'est-à-dire, il adopte une seule stratégie pendant tout le déroulement du jeu et le résultat est représenté sous forme d'une matrice  $R$  où un élément  $R_{ij}$  représente le gain (la satisfaction) d'un

individu jouant la stratégie  $i$  quand il rencontre un autre individu jouant la stratégie  $j$ . Ainsi, si une proportion  $\alpha_j$  de la population joue la stratégie  $j$ , alors le gain espéré d'un individu jouant la stratégie  $i$  est

$$\sum_j \alpha_j R_{ij}.$$

Nous traitons ici, un jeu différent des jeux évolutionnaires habituels, dans le sens qu'un individu (mobile) peut prendre différentes décisions durant sa durée de vie. Ainsi, le gain d'un mobile ne peut être représenté simplement comme un élément d'une matrice, dont les lignes correspondent aux stratégies du mobile. En effet, une entrée va correspondre au gain total espéré que le joueur (mobile) va obtenir durant sa durée de vie comme une fonction de sa stratégie.

Une politique générale  $u$  est une suite  $u = (u_1, u_2, \dots)$ , où  $u_i$  est la probabilité de choisir la puissance de transmission  $h$  si, à l'instant  $i$ , son état est  $F$ .

Une politique stationnaire est une politique telle que à tout instant où l'individu est à l'état  $F$ , la probabilité  $u_i$  qu'il choisisse  $h$  est la même. On utilisera un même nombre réel  $\beta$  pour désigner la politique stationnaire d'un individu.  $\beta$  désignera ainsi la probabilité qu'un mobile choisisse  $h$  si son état est  $F$ .

Une politique stationnaire sera dite pure, si elle n'est pas aléatoire (dans notre cas, il existe deux politiques stationnaires pures : l'une est celle qui utilise  $h$  à l'état  $F$  et l'autre est celle qui utilise  $l$  à l'état  $F$ ); les autres politiques stationnaires seront dites mixtes (elles joueront le rôle de stratégies mixtes dans les jeux évolutionnaires standards).

### 4.2.2 Les utilités

Considérons un certain terminal et soit  $R_t$  le nombre de paquets (zéro ou 1) transmis avec succès par le terminal à l'instant  $t$ .

On définit l'utilité du terminal par

$$\sum_{t=1}^{\infty} R_t,$$

c-à-d le nombre total de paquets transmis avec succès durant sa durée de vie.

Supposons que  $\alpha$  est fixé et ne change pas avec le temps (on considérera par la suite le cas où il varie avec le temps). Alors, l'utilité optimale espérée d'un individu commençant à un état initial donnée peut être calculée en utilisant la théorie standard de la programmation dynamique. Cette dernière montre en particulier, qu'il existe une politique stationnaire optimale (c-à-d une politique telle qu'à tout instant où l'individu est à l'état  $F$ , la probabilité  $u_i$  qu'il choisisse  $h$  est la même). On se restreindra ainsi aux politiques stationnaires, sauf indication contraire.

**Quelques définitions.**

- $V_\beta(i, \alpha)$  est l'utilité totale espérée (ie une récompense ou une perte) d'un utilisateur donné qui utilise une politique  $\beta$  quand il est à l'état  $i \in \{E, A, F\}$  compte tenu du paramètre  $\alpha$  (proportion de la population qui utilise la stratégie  $h$  à tout instant donné).
- On définit avec un certain abus de notation  $V_h(i, \alpha)$  (respectivement  $V_l(i, \alpha)$ ) l'utilité totale espérée pour un utilisateur donné qui est à l'état  $i$  et utilise la stratégie  $h$  (respectivement  $l$ ) et compte tenu du paramètre  $\alpha$ .

### 4.3 Calcul de l'utilité et des temps de séjour

On procède au calcul de l'utilité totale espérée et de la durée de vie correspondante à l'état initial donné et à la politique stationnaire  $\beta$ . Nous notons toutefois que ce n'est qu'à l'état  $F$  qu'elle dépendra de  $\beta$ . Dans les autres états, un mobile n'a d'autre choix que de choisir la stratégie  $l$ . On utilisera les notations suivantes :

- $p$  : la probabilité qu'un mobile soit le seul à transmettre dans un slot.
- $Q_i(a)$  : la probabilité qu'un mobile reste à l'état  $i$  lorsqu'il transmet avec la puissance  $a$ .
- $\alpha$  : La proportion de la population utilisant la stratégie  $h$ .
- $V_l(i, \alpha)$  : le gain total espéré d'un mobile à l'état  $i$ , utilisant la stratégie  $l$  à chaque fois qu'il est dans cet état.
- $V_h(i, \alpha)$  : le gain total espéré d'un mobile à l'état  $i$ , utilisant la stratégie  $h$  à chaque fois qu'il est dans cet état.

On va étudier chacun des états possibles.

#### 4.3.1 Etat E.

Rappelons qu'un mobile dont l'état initial est  $E$  signifie que sa batterie est déchargée et n'a plus d'énergie pour transmettre des messages. Par conséquent, son débit (le nombre de paquets transmis avec succès) est nul, ce qui donne

$$V(E) = 0.$$

#### 4.3.2 Etat A.

Un mobile dont l'état initial est  $A$  (batterie presque déchargée) ne peut transmettre qu'avec une basse puissance  $l$ . Soit  $V(A)$  le débit total espéré d'un mobile entamant la compétition avec un état  $A$ , qui se calcule de la manière suivante.

Pour le premier slot, le mobile peut transmettre :

- soit 1 paquet, s'il est seul à transmettre pendant ce slot ;

– soit aucun paquet, dans le cas contraire.

A partir de deuxième slot, après la première transmission deux cas peuvent apparaître :

- **1<sup>er</sup> cas** : le mobile reste à l'état  $A$  avec une probabilité égale à  $Q_A(l)$ , et, dans ce cas, le nombre total (son débit) espéré de paquets transmis avec succès restera le même, c-à-d  $V(A)$ .
- **2<sup>eme</sup> cas** : L'état du mobile, qui était  $A$ , se dégrade après la première transmission pour passer à l'état  $E$  avec une probabilité  $1 - Q_A$ . Alors, le nombre total de paquets transmis à partir de cet état sera  $V(E)$ .

Ainsi, le nombre total espéré de paquets transmis avec succès à partir de l'état initial est l'espérance mathématique de tous les événements précédemment décrits et qui se traduisent par la relation :

$$V(A) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 + Q_A(l)V_A + (1 - Q_A(l))v(E) = p + Q_A(l)V(A) + (1 - Q_A) \underbrace{V(E)}_{=0},$$

En posant  $Q_A(l) = Q_A$  et sachant que  $V(E) = 0$ , on déduit :

$$V(A) = \frac{p}{1 - Q_A}. \quad (4.1)$$

### ***Le temps de séjour espéré***

Notons par  $T(A)$  le temps de séjour d'un mobile se trouvant à l'état  $A$ .

Au cours du premier slot, le mobile tente de transmettre son paquet avec une puissance  $l$ . A la fin du slot, il aurait vécu ce slot.

Après la tentative de transmission dans le premier slot, dès le début du deuxième slot, deux cas peuvent apparaître :

- si à la fin du 1er slot, le mobile est resté dans son état  $A$ , alors son temps de séjour à partir de cet instant serait encore  $T(A)$  ; le mobile reste à l'état  $A$ , alors le temps de séjour espéré est toujours  $T(A)$ .
- si l'état du mobile s'est dégradé à l'état  $E$ , alors il se déconnecte et nous pouvons dire que c'est un mobile mort.

Ainsi, le temps de séjour espéré par un mobile se trouvant à l'état  $A$  est donné par l'équation suivante :

$$T(A) = 1 + Q_A T(A) + (1 - Q_A) \cdot 0 = 1 + Q_A T(A),$$

d'où :

$$T(A) = \frac{1}{1 - Q_A}. \quad (4.2)$$

### 4.3.3 Etat F

Un mobile à l'état  $F$  est un mobile avec une batterie pleine. Il peut transmettre avec une forte puissance  $h$  avec une probabilité  $\beta$  ou avec une faible puissance  $l$ . Notons par  $Y(v, a, \alpha)$  l'opérateur de la programmation dynamique qui désigne le nombre de paquets transmis avec succès par un mobile partant à partir d'un état initial  $F$ , qui agit de la manière suivante :

- il choisit l'action  $a$  pendant le premier slot ;
- si au début du deuxième slot, son état reste  $F$ , alors, dorénavant, on notera par  $v$  le nombre total espéré de paquets transmis avec succès ;
- à tout instant où le mobile tente une transmission avec une puissance  $h$ , la probabilité qu'un autre mobile transmette en même temps que lui avec une puissance  $h$  est  $\alpha$ .

Par la suite, le paramètre  $\alpha$  sera omis pour le cas, où  $a = l$  puisque la dépendance en fonction de  $\alpha$  n'apparaît que pour l'action  $a = h$ , ie on notera :

$$Y(v, l, \alpha) = Y(v, l).$$

Calculons le nombre total espéré de paquets transmis avec succès (gain total espéré).

→ Supposons que le mobile choisit, à l'état initial, de transmettre un paquet avec une puissance faible  $l$ , alors :

⇒ s'il est le seul à transmettre, il réussira à transmettre avec succès son paquet ;

⇒ à partir du deuxième slot, après la transmission avec une puissance  $l$  durant le premier slot, deux cas peuvent avoir lieu : ⇒ soit le mobile reste à l'état  $F$  avec une probabilité  $Q_F(l)$ , alors son gain espéré sera  $v$  ;

⇒ soit le mobile passe de l'état  $F$  à l'état  $A$  après le premier slot avec une probabilité  $(1 - Q_l)$  et son gain espéré à partir de cet état sera  $V(A)$ .

Ainsi, le nombre espéré de paquets transmis avec succès pour un mobile partant de l'état initial  $F$  avec une stratégie  $l$  et prenant en compte le paramètre  $\alpha$  sera :

$$Y(v, l, \alpha) = Y(v, l) = p.1 + Q_F(l)v + (1 - Q_F(l))V(A) \quad \Rightarrow$$

$$Y(v, l) = p + Q_F(l)v + p \frac{1 - Q_F(l)}{1 - Q_A}. \quad (4.3)$$

→ Supposons maintenant qu'un mobile, se trouvant à l'état initial  $F$ , choisit de transmettre avec la puissance forte  $h$ . Alors :

⇒ durant le premier slot, il transmet avec succès un paquet,

⇒ s'il est le seul à transmettre, ou bien

⇒ s'il est le seul à transmettre avec la puissance  $h$

⇒ au début du second slot, après la transmission avec une puissance  $h$  durant le premier slot, deux cas peuvent avoir lieu :



$\Rightarrow$  soit le mobile reste à l'état  $F$  avec une probabilité  $Q_F(h)$ , alors son gain espéré sera  $v$  ;

$\Rightarrow$  soit le mobile passe de l'état  $F$  à l'état  $A$  avec une probabilité  $(1 - Q_F(h))$  et son gain espéré sera  $V(A)$  à compter de cet état.

Ainsi, on aura :

$$Y(v, h, \alpha) = \alpha(p + Q_F(h)v + (1 - Q_F(h))V(A)) + (1 - \alpha)(1 + Q_F(h)v + (1 - Q_F(h))V(A))$$

$\Rightarrow$

$$Y(v, h, \alpha) = \alpha p + (1 - \alpha) + Q_F(h)v + p \frac{1 - Q_F(h)}{1 - Q_A}. \quad (4.4)$$

Ainsi, le gain total espéré  $v = V_\beta(F, \alpha)$  d'un mobile à l'état  $F$  est une solution de l'équation

$$v = \beta Y(v, h, \alpha) + (1 - \beta)Y(v, l). \quad (4.5)$$

En remplaçant,  $Y(v, l)$  et  $Y(v, h, \alpha)$  dans (4.5), on obtient

$$v = \beta \left( \alpha p + (1 - \alpha) + Q_F(h)v + p \frac{1 - Q_F(h)}{1 - Q_A} \right) + (1 - \beta) \left( p + Q_F(l)v + p \frac{1 - Q_F(l)}{1 - Q_A} \right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} v(1 - (1 - \beta)Q_F(l) - \beta Q_F(h)) &= \frac{p}{1 - Q_A} [(1 - Q_F(l)) + \beta(1 - Q_F(h)) - \beta(1 - Q_F(l))] \\ &+ p(1 - \beta) + \beta(\alpha p - 1) + 1 \\ &= \frac{p}{1 - Q_A} (1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta)Q_F(l)) \\ &+ (p + \beta(1 - \alpha)(1 - p)), \end{aligned}$$

d'où

$$v = \frac{p}{1 - Q_A} + \frac{p + \beta(1 - \alpha)(1 - p)}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta)Q_F(l)}.$$

Ainsi,

$$V_\beta(F, \alpha) = V(A) + \frac{p + \beta(1 - \alpha)(1 - p)}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta)Q_F(l)}. \quad (4.6)$$

- Si  $\beta = 1$  (politique agressive), alors

$$V_1(F, \alpha) = V(A) + \frac{1 - \alpha(1 - p)}{1 - Q_F(h)}. \quad (4.7)$$

- Si  $\beta = 0$ , alors

$$V_0(F, \alpha) = V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)}. \quad (4.8)$$

**Remarque 4.1.**  $V_\beta(F, \alpha)$  est une fonction constante ou strictement monotone par rapport à la variable  $\beta$ . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dV_\beta(F, \alpha)}{d\beta} &= \frac{(1-p)(1-\alpha)(1-Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))}{(1-Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2} \\ &\quad - \frac{(Q_F(l) - Q_F(h))(p + \beta(1-p)(1-\alpha))}{(1-Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2} \\ &= \frac{(1-p)(1-\alpha)(1-Q_F(l) - p(Q_F(l) - Q_F(h)))}{(1-Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{dV_\beta(F, \alpha)}{d\beta} = \frac{(1-p)(1-\alpha)(1-Q_F(l) - p(Q_F(l) - Q_F(h)))}{(1-Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2}. \quad (4.9)$$

L'expression (4.9) est telle que :

- le dénominateur est strictement positif;
- le numérateur ne dépend pas de  $\beta$ , alors il est :
  - soit strictement positif pour tout  $\beta \in [0, 1]$ ;
  - soit strictement négatif pour tout  $\beta \in [0, 1]$ ;
  - soit égal à zéro pour tout  $\beta \in [0, 1]$ .

ce qui en est de même pour

$$\frac{dV_\beta(F, \alpha)}{d\beta}.$$

On conclut alors que  $V_\beta(F, \alpha)$  est soit constante, soit strictement monotone par rapport à  $\beta$  sur tout l'intervalle  $[0, 1]$ .

## ***Le temps de séjour espéré***

Le temps de séjour d'un mobile à l'état  $F$  dépendra du choix de la puissance de transmission ( $h$  ou  $l$ ) et donc de  $\beta$ ; on le notera par  $T_\beta(F)$ .

Supposons qu'un mobile utilise la stratégie  $h$  avec la probabilité  $\beta$  à l'état  $F$ .

Au cours du premier slot, le mobile tentera de transmettre son paquet et il survivra donc à la fin de ce slot.

Après la tentative de transmission dans le premier slot, à partir du deuxième slot, on peut considérer les différentes situations suivantes :

- Si le mobile avait choisi de transmettre pendant le premier slot avec une puissance  $h$ , alors deux cas peuvent se présenter :
  - le mobile reste à l'état  $F$  avec une probabilité  $Q_F(h)$  et le temps de séjour espéré est  $T_\beta(F)$ ;

→ le mobile passe de l'état  $F$  à l'état  $A$  avec une probabilité  $(1 - Q_F(h))$  et le temps de séjour espéré sera  $T_\beta(A)$ .

- Si le mobile avait choisi de transmettre pendant le premier slot avec une puissance  $l$ , alors deux cas peuvent se présenter :

→ le mobile reste dans l'état  $F$  avec une probabilité  $Q_F(l)$  et le temps de séjour espéré est toujours  $T_\beta(F)$  ;

→ le mobile passe de l'état  $F$  à l'état  $A$  avec une probabilité  $(1 - Q_A(l))$  et le temps de séjour espéré sera  $T_\beta(A)$ .

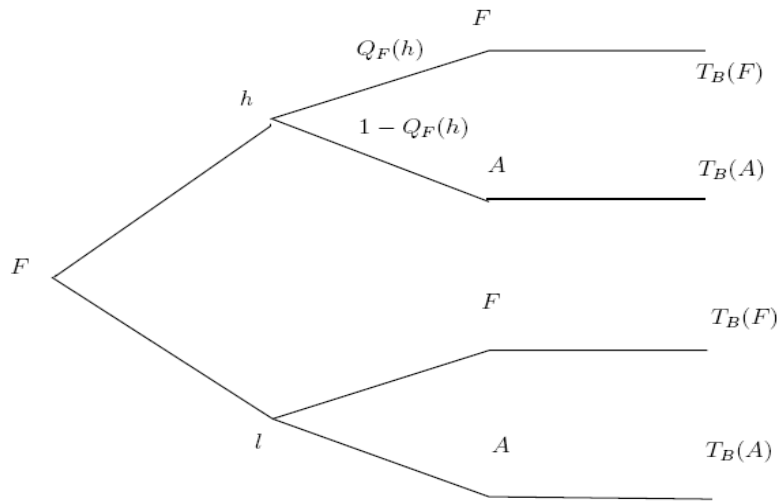


FIG. 4.1 – Les stratégies et les gains d'un mobile à l'état  $F$ .

Ainsi le temps espéré qu'il reste à l'état  $F$  sera :

$$\begin{aligned}
 T_\beta(F) &= \beta[1 + Q_F(h)T_\beta(F)] + (1 - \beta)[1 + Q_F(l)T_\beta(F)] \\
 &= 1 + \beta Q_F(h)T_\beta(F) + (1 - \beta)Q_F(l)T_\beta(F).
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

D'où

$$T_\beta(F) = \frac{1}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta)Q_F(l)}.
 \tag{4.11}$$

### Estimation du paramètre $\alpha$

Le paramètre  $\alpha$  désigne la proportion de la population des mobiles qui transmettent avec la puissance  $h$  à tout instant. D'autre part, si on choisit aléatoirement deux mobiles, alors  $\alpha$  désignera la probabilité que les deux mobiles voisins transmettent en même temps avec la puissance  $h$  et donc qu'il y ait interférence.

Notons par  $\hat{\alpha}(\beta)$  la proportion du temps qu'un mobile utilise l'action  $h$ .

Pour utiliser l'action  $h$ , le mobile devrait être à l'état  $F$ . Sa durée de vie est

$$T_\beta(F) + T_\beta(A).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\beta) &= \beta \frac{T_\beta(F)}{T_\beta(F) + T_\beta(A)} \\ &= \beta \frac{\frac{1}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta) Q_F(l)}}{\frac{1}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta) Q_F(l)} + \frac{1}{1 - Q_A}} \\ &= \beta \frac{1}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta) Q_F(l)} \frac{(1 - Q_A)(1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta) Q_F(l))}{2 - Q_A - \beta(Q_F(h) - Q_F(l)) - Q_F(l)} \\ &= \beta \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - \beta(Q_F(h) - Q_F(l)) - Q_F(l)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\hat{\alpha}(\beta) = \beta \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - \beta Q_F(h) - (1 - \beta) Q_F(l)}. \quad (4.12)$$

**Proposition 4.1.**

- La fonction  $\hat{\alpha}(\beta)$  est strictement croissante par rapport à  $\beta \in [0, 1]$ .
- La fonction  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\gamma))$  est strictement décroissante par rapport à  $\gamma \in [0, 1]$

**Preuve.** De (4.12), on a

$$\frac{d\hat{\alpha}(\gamma)}{d\gamma} = \frac{[2 - Q_A - Q_F(l)](1 - Q_A)}{[2 - Q_A - \gamma Q_F(h) - (1 - \gamma) Q_F(l)]^2} > 0,$$

ce qui prouve que  $\hat{\alpha}(\gamma)$  est une fonction strictement croissante par rapport à  $\gamma \in [0, 1]$ .

De (4.6), on déduit

$$\frac{dV_\beta(F, \alpha)}{d\alpha} = - \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta) Q_F(l)} < 0,$$

qui démontre que  $V_\beta(F, \alpha)$  est une fonction strictement décroissante de  $\alpha \in [0, 1]$ .

Comme la composition d'une fonction strictement décroissante avec une fonction strictement croissante donne une fonction strictement décroissante, alors la fonction  $V_\beta(F, \alpha(\gamma))$  est strictement décroissante par rapport à  $\gamma$ .

## 4.4 Le modèle de jeu évolutionnaire

Etant donné que les interactions entre les mobiles sont répétées, la taille du réseau est dynamique et les compétitions se font par paire d'individus c'est-à-dire deux mobiles voisins rentrent

en compétition sur un canal radio pour la transmission des paquets, alors il est logique de présenter la notion biologique des jeux évolutionnaires dans un contexte de réseau Ad Hoc.

On considère une large population, où les individus sont des mobiles. Chaque individu doit occasionnellement prendre une décision (décider de transmettre un paquet avec une puissance  $h$  ou  $l$ ). Au moment de la transmission, il peut y avoir interférence avec un autre mobile "voisin" qui transmet un paquet en même temps.

L'utilité totale espérée  $J(\beta, \beta')$  d'un mobile utilisant une stratégie stationnaire  $\beta$ , s'il débute avec un état stationnaire  $F$  et s'il rencontre un autre mobile utilisant une stratégie stationnaire  $\beta'$  sera définie par

$$J(\beta, \beta') = V_\beta(F, \alpha),$$

où  $\alpha = \hat{\alpha}(\beta')$  est défini par (4.12).

$J(\beta, \beta') = V_\beta(F, \alpha)$  est l'utilité totale espérée d'un mobile qui utilise une stratégie stationnaire  $\beta$  quand il est à l'état initial  $F$  avec un paramètre  $\alpha = \hat{\alpha}(\beta')$  (proportion de la population qui utilise  $h$  à tout instant, qui est aussi la probabilité que deux mobiles transmettent en même temps avec la puissance  $h$  et donc qu'il y ait interférence).

Ainsi, en remplaçant  $\alpha$  par  $\hat{\alpha}(\beta')$  dans l'équation (4.6), on obtient la forme de la fonction de gain de chaque mobile :

$$V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) = V(A) + \frac{p + \beta(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta'))}{1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h))}. \quad (4.13)$$

qui représente le débit total espéré d'un mobile jouant la stratégie  $\beta$  qui rencontre un autre mobile jouant la stratégie  $\beta'$ .

#### 4.4.1 Le modèle

Considérons le jeu évolutionnaire, où

- l'ensemble des joueurs est l'ensemble des mobiles ;
- les compétitions se font par paire de mobiles ;
- les stratégies des mobiles sont  $\{h, l\}$  ;
- la fonction d'utilité :

$$V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) = V(A) + \frac{p + \beta(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta'))}{1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h))}.$$

### 4.5 Résolution du jeu

On donne le corollaire suivant qui se déduit directement de la proposition 2.4.

**Corollaire 4.1.** [13]

– Une condition nécessaire pour que  $\beta^*$  soit une **ESS** est :

$$\forall \beta' \neq \beta^*, \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \geq V_{\beta'}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)). \quad (4.14)$$

– Une condition suffisante pour que  $\beta^*$  soit une **ESS** est :

$$\forall \beta' \neq \beta^* \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) > V_{\beta'}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \quad (4.15)$$

On présentera ci-après une propriété structurelle de l'ESS. Il s'agit d'une adaptation au jeu étudié d'un résultat connu dans les jeux évolutionnaires standards, à savoir qu'uniquement les stratégies pures peuvent satisfaire (2.12), alors qu'une politique stationnaire impure ne peut être une ESS que si elle vérifie (2.13).

**Théorème 4.1.** [13]

(i) Une condition nécessaire pour qu'une stratégie impure stationnaire  $\beta^*$  soit une **ESS** est que :

$$\forall \beta \neq \beta^*, \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) = V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)).$$

(ii) Supposons maintenant que pour une certaine politique stationnaire  $\beta^*$  et pour un certain  $\beta \neq \beta^*$ , on a

$$V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \neq V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)), \quad (4.16)$$

alors, une condition nécessaire pour que  $\beta^*$  soit une **ESS** est qu'elle soit une stratégie pure.

**Preuve.**

(i) On doit démontrer :

$$\text{La stratégie impure } \beta^* \text{ est une ESS} \Rightarrow \forall \beta \neq \beta^*, \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) = V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)).$$

Supposons qu'il existe  $\beta \neq \beta^*$  tel que

$$V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \neq V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)).$$

→ Si  $V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) < V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta^*))$ , alors, d'après le corollaire 4.1, on déduit que  $\beta^*$  n'est pas une ESS.

→ Si  $V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) > V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta^*))$  et  $\beta^*$  n'est pas une stratégie pure, c-à-d ( $\beta \in ]0, 1[$ ).

D'après la remarque 4.1, avec  $\alpha = \hat{\alpha}(\beta^*)$  et  $\beta = \beta^*$ , deux cas peuvent apparaître :

- soit  $V_1(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) > V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*))$ ,
- soit  $V_0(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) > V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*))$ .

Dans les deux cas, d'après la condition nécessaire du corollaire 4.1,  $\beta^*$  n'est pas une **ESS**.

(ii) Supposons que :  $\exists \beta' \neq \beta^*$  tel que :  $V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \neq V_{\beta'}(F, \hat{\alpha}(\beta^*))$  et que  $\beta^*$  n'est pas une stratégie pure. Alors d'après (i),  $\beta^*$  ne peut pas être une **ESS**, d'où la condition nécessaire sur  $\beta^*$  pour qu'elle soit une **ESS** est qu'elle soit pure. ■

**Définition 4.1.** Une stratégie ESS  $\beta^*$  vérifiant

$$\forall \beta' \neq \beta^*, \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) = V_{\beta'}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)), \quad (4.17)$$

sera appelée **ESS faiblement immunisée** et une stratégie ESS  $\beta^*$  vérifiant

$$\forall \beta' \neq \beta^*, \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) > V_{\beta'}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \quad (4.18)$$

sera appelée **ESS fortement immunisée**.

**Remarque 4.2.** La remarque 4.1 implique qu'une ESS  $\beta^*$  est soit fortement, soit faiblement immunisée.

En effet, si  $\beta^*$  est une ESS, alors, d'après le corollaire 4.1, on a (4.14). D'autre part, d'après la remarque 4.1, on a soit (4.17) (et donc  $\beta^*$  est une ESS faiblement immunisée), soit (4.18) (et donc  $\beta^*$  est une ESS fortement immunisée). Autrement dit, on ne peut avoir la relation (4.17) vérifiée pour certains  $\beta' \neq \beta^*$  et la relation (4.18) vérifiée pour d'autres  $\beta' \neq \beta^*$ .

On va procéder à l'identification des classes de paramètres pour lesquelles diverses structures d'ESS peuvent être obtenues.

### 4.5.1 L'équilibre en stratégies pures : Puissance forte à l'état $F$

On définit une multi-politique agressive comme celle où tous les mobiles utilisent la puissance forte de transmission à chaque instant où il se trouve à l'état  $F$ .

Un mobile utilisant toujours une puissance forte de transmission à chaque instant où il se trouve à l'état  $F$  aura une espérance de vie  $T(F)$ , qu'on déduit des relations (4.10)-(4.11)

$$T(F) = \frac{1}{1 - Q_F(h)}. \quad (4.19)$$

Tenant compte de (4.2) et de (4.19), la fraction du temps qu'un mobile reste à l'état  $F$  sera donc

$$\alpha(1) = \frac{T(F)}{T(F) + T(A)} = \frac{\frac{1}{1 - Q_F(h)}}{\frac{1}{1 - Q_F(h)} + \frac{1}{1 - Q_A}} = \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)}. \quad (4.20)$$

**Théorème 4.2.** [13]

Soit  $u$  la stratégie pure agressive qui consiste en l'utilisation permanente de la puissance  $h$  à l'état  $F$ , et posons

$$\Delta_h = \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)}(1 - p) - \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)}p. \quad (4.21)$$

Alors

- (i)  $\Delta_h > 0$  est une condition suffisante pour que  $u$  soit une **ESS**,
- (ii)  $\Delta_h \geq 0$  est une condition nécessaire pour que  $u$  soit une **ESS**.

**Preuve.** En remplaçant (4.20) dans (4.7), on obtient

$$V_1(F, \alpha(1)) = V(A) + \frac{1 - \alpha(1 - p)}{1 - Q_F(h)} = V(A) + \frac{1}{1 - Q_F(h)} \left( 1 - (1 - p) \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)} \right) \quad (4.22)$$

Pour démontrer (i), on doit vérifier que si  $\Delta_h > 0$ , alors pour tout  $\beta \neq 1$ , on aura :

$$V_1(F, \alpha(1)) > V_\beta(F, \alpha(1)). \quad (4.23)$$

Considérons le cas où  $\beta = 0$ . En faisant la différence entre (4.7) et (4.8), on obtient

$$\begin{aligned} V_1(F, \alpha(1)) - V_0(F, \alpha(1)) &= \frac{1}{1 - Q_F(h)} \left( 1 - (1 - p) \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)} \right) - \frac{p}{1 - Q_F(l)} \\ &= \frac{1}{1 - Q_F(h)} \left[ \left( 1 - (1 - p) \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)} \right) - p \frac{(1 - Q_F(h))}{1 - Q_F(l)} \right] \\ &= \frac{1}{1 - Q_F(h)} \left[ 1 - \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)} + p \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)} - p \frac{(1 - Q_F(h))}{1 - Q_F(l)} \right] \\ &= \frac{1}{1 - Q_F(h)} \left[ \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)} \right] \\ &+ \frac{p}{1 - Q_F(h)} \left[ \frac{(1 - Q_A)(1 - Q_F(l)) - (2 - Q_A - Q_F(h))(1 - Q_F(h))}{(2 - Q_A - Q_F(h))(1 - Q_F(l))} \right] \\ &= \frac{1}{1 - Q_F(h)} \left[ \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)} + p \frac{Q_F(h) - 1}{2 - Q_A - Q_F(h)} + p \frac{Q_F(h) - Q_F(l)}{1 - Q_F(l)} \right] \\ &= \frac{1}{1 - Q_F(h)} \left[ \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)}(1 - p) - p \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)} \right] \\ &= \frac{\Delta_h}{1 - Q_F(h)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ainsi, si  $\Delta_h > 0$ , alors

$$V_1(F, \alpha(1)) > V_0(F, \alpha(1))$$

et la relation (4.23) est ainsi vérifiée pour  $0 = \beta \neq 1$ .

On doit montrer qu'elle reste vraie pour  $\beta \in ]0, 1[$ . D'après la remarque 4.1, on doit avoir :



- soit  $V_1(F, \alpha(1)) > V_\beta(F, \alpha(1)), \quad \forall \beta \in [0, 1[;$
- soit  $V_1(F, \alpha(1)) = V_\beta(F, \alpha(1)), \quad \forall \beta \in [0, 1[.$

Or on a montré que si  $\Delta_h > 0$ , on a l'inégalité stricte pour  $\beta = 0$ , donc elle restera vraie sur tout l'intervalle  $[0, 1[$ . D'après le corollaire 4.1, on déduit que si  $\Delta_h > 0$ , alors  $\beta = 1$  est une ESS.

Démontrons la condition nécessaire (ii). Supposons que la stratégie pure  $u$  est une ESS, ce qui est équivalent à dire que  $\beta^* = 1$  est une ESS. D'après le corollaire 4.1, on a :

$$\begin{aligned} & V_1(F, \alpha(1)) \geq V_\beta(F, \alpha(1)), \quad \forall \beta \in [0, 1[, \\ \Rightarrow & V_1(F, \alpha(1)) \geq V_0(F, \alpha(1)), \\ \Rightarrow & V_1(F, \alpha(1)) - V_0(F, \alpha(1)) \geq 0, \\ \Rightarrow & \Delta_h \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

On peut en déduire différentes conséquences du théorème précédent, dont voici les plus importantes

### Remarque 4.3.

1. Notons qu'on a  $Q_F(l) > Q_F(h)$ , puisqu'en utilisant la puissance faible  $l$ , un mobile a plus de chance de rester dans son état  $F$  que s'il utilise une puissance forte  $h$ .  
Si pour une raison quelconque, on a  $Q_F(l) = Q_F(h)$ , alors la stratégie "h= puissance forte" est évidemment une ESS (Théorème 4.2).
2. Si  $p = 1$  (c-à-d la probabilité qu'il y ait un autre mobile qui transmette simultanément est nulle), alors il n'y a plus de raison de transmettre avec une puissance forte. En effet, en posant  $p = 1$  dans (4.21), on déduit

$$\Delta_h = -\frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)} < 0,$$

et, par conséquent, d'après le théorème 4.2,  $h$  n'est pas une ESS.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \Delta_h &= \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)}(1 - p) - \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)}p = \\ &= \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)} - p \left( \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)} + \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta_h > 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p \left( \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)} + \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)} \right) < \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)} \\ &\Leftrightarrow p < \frac{(1 - Q_F(h))(1 - Q_F(l))}{(1 - Q_F(h))(1 - Q_F(l)) + (2 - Q_A - Q_F(h))(Q_F(l) - Q_F(h))}. \end{aligned}$$

D'où le résultat suivant :

3. En posant

$$p_h^* = \frac{(1 - Q_F(h))(1 - Q_F(l))}{(1 - Q_F(h))(1 - Q_F(l)) + (2 - Q_A - Q_F(h))(Q_F(l) - Q_F(h))},$$

on aura :

- si  $p < p_h^*$ , alors  $\Delta_h > 0$  et  $u$  sera une ESS (d'après le théorème 4.2);
- si  $p > p_h^*$ , alors  $\Delta_h < 0$  et  $u$  ne sera pas une ESS.

Du théorème 4.2, on déduit également le résultat suivant

**Conséquence 4.1.** La stratégie pure  $u = h$ , correspondant à  $\beta^* = 1$ , est une ESS fortement immunisée si et seulement, si  $\Delta_h > 0$ .

**Preuve.**

(i) Supposons que  $\Delta_h > 0$ . D'après le théorème 4.2 (condition suffisante),  $u$  est une ESS. De plus, dans la preuve de ce théorème 4.2, nous avons démontré la relation (4.23), qui signifie, par définition, que  $\beta^* = 1$ , ou ce qui est équivalent,  $u$  est une ESS fortement immunisée.

(ii) Supposons que  $u$  est fortement immunisée. Par définition (4.19), cela signifie que

$$\forall \beta \neq 1, \quad V_1(F, \alpha(1)) = V_\beta(F, \alpha(1)).$$

En tenant compte de (4.24), on déduit que  $\Delta_h > 0$ .

## 4.5.2 L'équilibre en stratégies pures : Faible puissance à l'état $F$

Nous allons étudier sous quelles conditions un utilisateur choisirait en toute circonstance la puissance faible  $l$  pour toute transmission de paquet.

**Théorème 4.3.** [13]

Soit  $v$  la stratégie pure consistant à transmettre en toute circonstance avec la puissance faible  $l$  dès que le mobile se trouve en l'état  $F$  et posons

$$\Delta_l = p(1 - Q_F(h)) - (1 - Q_F(l)). \quad (4.25)$$

Alors

- (i) Si  $\Delta_l > 0$ , alors la stratégie  $v$  est une **ESS**.
- (ii) Si  $v$  est une **ESS**, alors  $\Delta_l \geq 0$ .

**Preuve.** Notons que  $\alpha(0) = 0$ . D'après (4.7) et (4.8), on a :

$$V_1(F, 0) - V_0(F, 0) = \frac{p}{1 - Q_F(l)} - \frac{1}{1 - Q_F(h)} = \frac{\Delta_l}{(1 - Q_F(h))(1 - Q_F(l))}.$$

Alors, si  $\Delta_l > 0$ , alors  $V_0(F, 0) > V_\beta(F, 0)$ , pour  $\beta = 1$ . Comme nous l'avons fait dans la preuve du théorème 4.2, on peut utiliser la remarque 4.1 pour démontrer qu'on a  $V_0(F, 0) > V_\beta(F, 0)$ , pour tout  $\beta \neq 0$ . En appliquant le corollaire 4.1, on conclut que si  $\Delta_l > 0$ , alors la stratégie  $v$  (c-à-d  $\beta^* = 0$ ) est une **ESS**.

Démontrons la condition nécessaire. Supposons que la stratégie  $v$  (c-à-d  $\beta^* = 0$ ) une ESS. D'après le corollaire 4.1, on a

$$\begin{aligned} V_0(F, 0) \geq V_\beta(F, 0), \quad \forall \beta \in ]0, 1] &\Rightarrow V_0(F, 0) \geq V_1(F, 0) \\ &\Rightarrow V_0(F, 0) - V_1(F, 0) \geq 0 \\ &\Rightarrow \Delta_l \geq 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

On peut en déduire différentes conséquences du théorème précédent, dont voici les plus importantes

**Remarque 4.4.**

1. Supposons que  $Q_F(l) < 1$  ou bien que  $p < 1$ . Si  $Q_F(h) = Q_F(l)$ , alors, d'après (4.25), on aura  $\Delta_l < 0$ , et, par conséquent,  $v$  n'est pas une ESS.

2. On définit

$$p_1^* = \frac{1 - Q_F(l)}{1 - Q_F(h)}.$$

On peut aisément vérifier que pour tout  $p < p_1^*$ , alors la stratégie  $v$  est une ESS, et pour tout  $p > p_1^*$ ,  $v$  ne serait pas une ESS.

3. Remarquons que les conditions (théorème 4.2), pour que la stratégie  $u$  soit une ESS, dépendent de  $Q_A$ , alors que les conditions (théorème 4.3), pour que  $v$  soit une ESS, ne le sont pas. La raison se trouve dans le fait que dans les conditions pour qu'une stratégie  $\beta$  soit une ESS nécessitent d'utiliser  $\alpha(\beta)$  qui dépend de  $Q_A$  pour tous les  $\beta$  à l'exception de  $\beta = 0$ .

4.  $\Delta_l$  est une condition nécessaire et suffisante pour que  $v$  soit une ESS fortement immunisée.

### 4.5.3 Equilibre en stratégies mixtes

Dans les sections précédentes, nous avons caractérisé toutes les ESS fortement immunisées. D'après le théorème 4.1, une condition nécessaire pour que la stratégie mixte  $\beta^*$  soit une **ESS** faiblement immunisée est que  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta^*))$  soit indépendante de  $\beta$ . Ceci est équivalent à dire que  $\beta^*$  est telle que sa dérivée par rapport à  $\beta$  au point  $\hat{\alpha}(\beta^*)$  soit nulle, c-à-d  $dV_B(F, \alpha)/d\beta = 0$  pour  $\alpha = \hat{\alpha}(\beta^*)$ . En utilisant l'équation (4.9), cette condition prend la forme :

$$\frac{dV_\beta(F, \alpha)}{d\beta} \Big|_{\alpha=\hat{\alpha}(\beta^*)} = 0 \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{p(Q_F(l) - Q_F(h))}{(1 - p)(1 - Q_F(l))},$$

ce qui donne

$$\alpha = \frac{(1 - Q_F(l)) - p(1 - Q_F(h))}{(1 - p)(1 - Q_F(l))}. \quad (4.26)$$

On utilisera la notation  $\bar{\xi} = 1 - \xi$ .

**Théorème 4.4.** [13]

(a) Chacune des deux conditions suivantes est nécessaire pour qu'une stratégie  $\beta^*$  soit une ESS faiblement immunisée :

Condition (i) :  $\Delta_l \leq 0$  ;

Condition (ii) :  $\Delta_h \leq 0$ .

(b) Supposons que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées. Alors, il existe une unique stratégie **ESS** faiblement immunisée définie par :

$$\beta^* = \frac{(\overline{Q_A} + \overline{Q_F(l)})[\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)}]}{\overline{Q_A p Q_F(l)} - (Q_F(l) - Q_F(h))(\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)})}. \quad (4.27)$$

**Preuve.**

Démontrons la condition nécessaire (i).

Notons que la première condition nécessaire pour que  $\alpha$  de (4.26) corresponde à une ESS est que

$$0 \leq \alpha \leq \hat{\alpha}(1).$$

Nous avons :

$$\alpha = \frac{(1 - Q_F(l)) - p(1 - Q_F(h))}{(1 - p)(1 - Q_F(l))} = \frac{-\Delta_l}{(1 - p)(1 - Q_F(l))},$$

d'où, pour la réalisation de la condition  $\alpha \geq 0$ , on devrait avoir

$$\Delta_l \leq 0,$$

ce qui démontre la nécessité de la condition (i).

En prenant en compte (4.20), la seconde condition  $\alpha \leq \hat{\alpha}(1)$  se traduit par

$$\alpha \leq \hat{\alpha}(1) \Rightarrow \frac{(1 - Q_F(l)) - p(1 - Q_F(h))}{(1 - p)((1 - Q_F(l)))} \leq \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)},$$

ce qui est équivalent à

$$\Delta_m = \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)} - \frac{(1 - Q_F(l)) - p(1 - Q_F(h))}{(1 - p)((1 - Q_F(l)))} \geq 0.$$

Mais, nous avons

$$\begin{aligned} (1 - p)\Delta_m &= \frac{(1 - p)(1 - Q_A)}{2 - Q_A - Q_F(h)} - \frac{1 - Q_F(l)}{1 - Q_F(l)} + p \frac{1 - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)} \\ &= p \frac{1 - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)} - \frac{1 - Q_F(h) + p(1 - Q_A)}{2 - Q_A - Q_F(h)} \\ &= -\Delta_h. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\alpha \leq \hat{\alpha}(1) &\Rightarrow (1-p)\Delta_m \geq 0 \\ &\Rightarrow -\Delta_h \geq 0 \\ &\Rightarrow \Delta_h \leq 0.\end{aligned}$$

On peut conclure que si  $\alpha \leq \hat{\alpha}(1)$ , alors  $\Delta_h \leq 0$ , ce qui prouve la condition nécessaire (ii).

Maintenant, on établit la condition suffisante (b). Supposons que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées.

En remplaçant  $\alpha$  et  $\hat{\alpha}(\beta)$  par leurs valeurs données par (4.26) et (4.12) respectivement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\alpha = \hat{\alpha}(\beta) &\Rightarrow \beta^* (\overline{Q_A p Q_F(l)} + (Q_F(h) - Q_F(l))(\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)})) \\ &= (\overline{Q_A} + \overline{Q_F(l)}) (\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)}) \\ &\Rightarrow \beta^* = \frac{(\overline{Q_A} + \overline{Q_F(l)}) (\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)})}{\overline{Q_A p Q_F(l)} + (Q_F(h) - Q_F(l)) (\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)})},\end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité de  $\beta^*$ .

Il reste à montrer que  $\beta^*$ , définie par (4.27), est réellement une **ESS**.

De ce qui précède et par construction, nous avons :

$$\forall \beta \neq \beta^*, \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) = V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)). \quad (4.28)$$

Il nous reste à montrer que  $\beta^*$  vérifie la condition de stabilité (voir la condition (2.11) dans le chapitre 2).

Pour montrer que  $\beta^*$  est une **ESS**, il suffit de montrer que :

$$\forall \beta \neq \beta^*, \quad V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta)) > V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta)). \quad (4.29)$$

Posons :

$$H(\beta) = V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta)) - V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta)). \quad (4.30)$$

En remplaçant  $V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta))$  et  $V_{\beta}(F, \hat{\alpha}(\beta))$  dans (4.30), on obtient

$$\begin{aligned}H(\beta) &= V(A) + \frac{p + \beta^*(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta))}{1 - Q_F(l) + \beta^*(Q_F(l) - Q_F(h))} - V(A) - \frac{p + \beta(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta))}{1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h))} \\ &= \frac{\beta^*((1-p)\overline{Q_F(l)}(1 - \hat{\alpha}(\beta)) - p\gamma) - \beta((1-p)\overline{Q_F(l)}(1 - \hat{\alpha}(\beta)) - p\gamma)}{(\overline{Q_F(l)} + \beta^*x)(\overline{Q_F(l)} + \beta\gamma)} \\ &= \frac{(\beta^* - \beta)((1-p)\overline{Q_F(l)}(1 - \hat{\alpha}(\beta)) - p\gamma)}{(\overline{Q_F(l)} + \beta^*\gamma)(\overline{Q_F(l)} + \beta\gamma)}.\end{aligned}$$

avec  $\gamma = Q_F(l) - Q_F(h)$ .

Pour que l'équation (4.29) soit vérifiée, il faut que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} \forall \beta > \beta^*, & \hat{\alpha}(\beta) > \frac{\overline{Q_F(l)}(1-p) - p\gamma}{\overline{Q_F(l)}(1-p)}, \\ \forall \beta < \beta^*, & \hat{\alpha}(\beta) < \frac{\overline{Q_F(l)}(1-p) - p\gamma}{\overline{Q_F(l)}(1-p)}. \end{cases}$$

$$\hat{\alpha}(\beta) < \frac{\overline{Q_F(l)}(1-p) - p\gamma}{\overline{Q_F(l)}(1-p)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - \beta Q_F(h) - (1 - \beta)Q_F(l)} < \frac{\overline{Q_F(l)}(1-p) - p(Q_F(l) - Q_F(h))}{\overline{Q_F(l)}(1-p)}$$

$$\Leftrightarrow \beta < \frac{(\overline{Q_A} + \overline{Q_F(l)})(\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)})}{\overline{Q_A p} \overline{Q_F(l)} + (Q_F(h) - Q_F(l))(\overline{Q_F(l)} - p\overline{Q_F(h)})}$$

$$\Leftrightarrow \beta < \beta^*.$$

Nous avons montré que :

$$\hat{\alpha}(\beta) < \frac{\overline{Q_F(l)}(1-p) - p\gamma}{\overline{Q_F(l)}(1-p)} \Leftrightarrow \beta < \beta^*,$$

alors :

$$\forall \beta < \beta^*, \quad \hat{\alpha}(\beta) < \frac{\overline{Q_F(l)}(1-p) - p\gamma}{\overline{Q_F(l)}(1-p)}.$$

De même, on peut démontrer

$$\forall \beta > \beta^*, \quad \hat{\alpha}(\beta) > \frac{\overline{Q_F(l)}(1-p) - p\gamma}{\overline{Q_F(l)}(1-p)}.$$

Alors  $\forall \beta \neq \beta^*$  nous avons  $H(\beta) > 0$ , donc l'équation (4.29) est vérifiée et  $\beta^*$  est une **ESS**. ■

Nous présentons le résultat suivant portant sur les conditions d'existence et d'unicité d'une stratégie ESS.

**Théorème 4.5.** [13] Pour tous les  $Q_A$ ,  $Q_F(l)$ ,  $Q_F(h)$  et  $p$ , l'**ESS**  $\beta^*$  existe et elle est unique.

**Preuve.** Nous avons précédemment vu que l'existence d'une ESS dépend du signe de  $\Delta_l$  et de  $\Delta_h$ .

- Si  $\Delta_h > 0$ , alors, d'après le théorème 4.2,  $\beta^* = 1$  est une **ESS** fortement immunisée.
- Si  $\Delta_l > 0$ , alors, d'après le théorème 4.3,  $\beta^* = 0$  est une **ESS** fortement immunisée.
- Si  $\Delta_l \leq 0$  et  $\Delta_h \leq 0$ , alors, d'après le théorème 4.4, il existe une **ESS** en stratégie mixte faiblement immunisée qui est donnée par (4.27) et elle est unique.

- Il nous reste à montrer que  $\Delta_l$  et  $\Delta_h$  ne peuvent pas être positifs en même temps.

Supposons que  $\Delta_l > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \Delta_l > 0 &\Rightarrow p > \frac{1 - Q_F(l)}{1 - Q_F(h)} \\ \Delta_h > 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)}(1 - p) > \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)}p \\ \min_{Q_A \in [0,1]} \frac{1 - Q_F(h)}{2 - Q_A - Q_F(h)}(1 - p) &> \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)}p \\ (1 - p) &> \frac{Q_F(l) - Q_F(h)}{1 - Q_F(l)}p \\ p &< \frac{1 - Q_F(l)}{1 - Q_F(h)} \\ \Delta_l &< 0. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé que si  $\Delta_h > 0$ , alors  $\Delta_l > 0$ , ce qui met fin à la preuve du théorème.

## Réplicateur dynamique

Dans le contexte biologique, un réplicateur dynamique est une équation différentielle qui décrit la variation dans le temps des stratégies en fonction de leur utilité. D'une manière générale, il est basé sur l'idée que le taux moyen de croissance de l'utilité d'un individu qui utilise une stratégie donnée est proportionnelle à l'excédent d'utilité de la stratégie par rapport à l'utilité moyenne. En ingénierie, le réplicateur de la dynamique pourrait être considéré comme une règle d'adaptation des stratégies par les individus. Il s'agit d'un pouvoir décentralisé, car il ne nécessite que la connaissance de l'utilité moyenne de la population, au lieu de la stratégie de chaque individu.

Bien que chaque mobile  $i$  tente individuellement une transmission à certains moments distincts  $t_n^i$ , ces temps sont supposés être suffisamment variables d'un mobile à un autre afin que la règle d'adaptation de toute la population peut être écrite sous la forme d'une équation différentielle ordinaire qu'on décrit ci-après.

## L'équation du réplicateur dynamique

- Posons  $\vec{\beta} = (\beta, 1 - \beta)$  et  $a \in \{h, l\}$ . On a

$$\frac{d\vec{\beta}(a)}{dt} = K \vec{\beta}(a) [V_a(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h, l\}} \vec{\beta}(b) V_b(F, \hat{\alpha}(\beta))] = W_a(\vec{\beta}). \quad (4.31)$$

- Pour  $a = h$ , elle prend la forme

$$\frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} = K\beta[V_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b)V_b(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.32)$$

- Pour  $a = l$ , l'équation (4.31) prend la forme

$$\frac{d\vec{\beta}(l)}{dt} = K(1 - \beta)[V_l(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b)V_b(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.33)$$

En faisant la somme de (4.32) et de (4.33), on obtient :

$$\frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} + \frac{d\vec{\beta}(l)}{dt} = 0. \quad (4.34)$$

Tenant compte des conditions initiales, l'intégration de l'équation différentielle (4.34) donne

$$\vec{\beta}(h) + \vec{\beta}(l) = 1,$$

en tout instant.

### La convergence du réplicateur dynamique

Dans cette partie, nous allons étudier la convergence du réplicateur et la relation entre les **ESS** et les points stationnaires du réplicateur.

Pour démontrer la convergence et la relation entre l'équilibre et les autres issues de la dynamique, nous allons utiliser la propriété de corrélation positive. En s'inspirant des travaux de Sandholm [70], Sandholm et al. [71] on définit la propriété de corrélation positive ou de la monotonie nette de l'équation différentielle comme suit :

$$\sum_{b \in \{h,l\}} V_b(F, \hat{\alpha}(\beta))W_b(\vec{\beta}) > 0 \text{ avec } W(\vec{\beta}) \neq 0. \quad (4.35)$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} = W(\vec{\beta})$$

Pour les mêmes arguments développés dans [70], on conclut que la corrélation positive nous garantit que tous les équilibres de notre jeu sont des points stationnaires du réplicateur dynamique. Ainsi, un point qui n'est pas stationnaire de l'équation différentielle ne peut pas être un équilibre.



Nous allons donc prouver ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{b \in \{h,l\}} V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) W_b(\beta) &= \sum_{b \in \{h,l\}} V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \frac{d\vec{\beta}}{dt} \\
&= \sum_{b \in \{h,l\}} V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \left( K \vec{\beta}(b) \left[ V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \right] \right) \\
&= K \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) (V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)))^2 - K \left( \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \right)^2 \quad (4.36)
\end{aligned}$$

**Théorème 4.6.** [13]

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Alors, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Si nous posons  $f(x) = f(x_1, x_2) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^2 x_i^2$  et  $\lambda_1 = \beta$ ,  $\lambda_2 = 1 - \beta$ , on déduit de (4.36) :

$$K \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) (V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)))^2 > K \left( \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) V_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \right)^2,$$

qui signifie que l'équation différentielle du réplicateur dynamique vérifie la propriété de corrélation positive et, par conséquent, toute stratégie **ESS** est un point stationnaire du réplicateur.

Nous allons montrer maintenant que le réplicateur dynamique converge presque globalement.

**Théorème 4.7.** [13]

Pour tout point initial  $\beta_0 \in ]0, 1[$ , le réplicateur dynamique, défini par (4.31), converge vers l'**ESS**  $\beta^*$ .

**Preuve.**

Nous pouvons réécrire le réplicateur dynamique associé à la stratégie  $h$  de la manière suivante :

$$\frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} = K \vec{\beta}(h) (1 - \vec{\beta}(h)) [V_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - V_l(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.37)$$

Le signe de la partie droite de l'équation différentielle (4.37) dépend du signe de :

$$[V_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - V_l(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.38)$$

Notons que, d'après (4.8), on a :

$$V_l(F, \hat{\alpha}(\beta)) = V_0(F, \hat{\alpha}(\beta)) = V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)}.$$

On constate que  $V_l(F, \hat{\alpha}(\beta))$  ne dépend pas de  $\beta$ , et donc elle est constante.

D'autre part, on a

$$V_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) = V_1(F, \hat{\alpha}(\beta)) = V(A) + \frac{1 - \hat{\alpha}(\beta)(1 - p)}{1 - Q_F(h)},$$

qui dépend de  $\beta$ .

D'après la proposition 4.1,  $V_h(F, \hat{\alpha}(\beta))$  est une fonction strictement décroissante par rapport à  $\beta \in [0, 1]$ .

**1<sup>er</sup> cas :  $\beta^* = 0$  est une ESS**

Si  $\beta^* = 0$  est une ESS, alors d'après le théorème 4.3, on a

$$\Delta_l \stackrel{(4.25)}{=} p(1 - Q_F(h)) - (1 - Q_F(l)) \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est équivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - Q_F(h)} &\leq \frac{p}{1 - Q_F(l)} \\ V_1(F, \hat{\alpha}(0)) &= V(A) + \frac{1}{1 - Q_F(h)} \leq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)} \\ V_1(F, \hat{\alpha}(0)) = V(A) + \frac{1}{1 - Q_F(h)} &\leq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)} = V_0(F, \hat{\alpha}(0)). \end{aligned}$$

Comme  $V_1(F, \hat{\alpha}(\beta))$  est une fonction strictement décroissante de  $\beta$ , alors :

$$\forall \beta \in ]0, 1[, \quad V_1(F, \hat{\alpha}(\beta)) < V_1(F, \hat{\alpha}(0)) \leq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)} = V_0(F, \hat{\alpha}(\beta)),$$

et par suite

$$V_1(F, \hat{\alpha}(\beta)) - V_0(F, \hat{\alpha}(\beta)) < 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} < 0.$$

Alors, le réplicateur dynamique converge vers  $\beta^* = 0$ .

**2<sup>eme</sup> cas :  $\beta^* = 1$  est une ESS**

Si  $\beta^* = 1$  est une ESS, alors, d'après le théorème 4.2,  $\Delta_h \geq 0$ . De (4.24), on déduit

$$\begin{aligned} \Delta_h &\geq 0 \stackrel{(4.24)}{\Rightarrow} V_1(F, \hat{\alpha}(1)) \geq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)} = V_0(F, \hat{\alpha}(1)), \\ V_1(F, \alpha(1)) &\stackrel{(4.22)}{=} V(A) + \frac{\left(1 - (1 - p)\frac{1 - Q_A}{2 - Q_A - Q_F(h)}\right)}{1 - Q_F(h)} \geq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)} = V_0(F, \hat{\alpha}(1)), \end{aligned}$$

Comme  $V_1(F, \hat{\alpha}(\beta))$  est une fonction strictement décroissante de  $\beta$ , alors :

$$\forall \beta \in ]0, 1[, \quad V_1(F, \hat{\alpha}(\beta)) > V_1(F, \hat{\alpha}(1)) \geq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)},$$

ce qui engendre

$$V_1(F, \hat{\alpha}(\beta)) - V_0(F, \hat{\alpha}(\beta)) > 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} > 0.$$

Alors, le réplicateur dynamique converge vers  $\beta^* = 1$ .

### 3<sup>eme</sup> cas : la stratégie mixte $\beta^*$ est une ESS

Finalemnt, si nous avons  $\beta^*$  est une **ESS** en stratégie mixte, alors, d'après le théorème (4.4),  $\Delta_l \leq 0$  et  $\Delta_h \leq 0$ .

$$\Delta_l \stackrel{(4.25)}{=} p(1 - Q_F(h)) - (1 - Q_F(l)) \leq 0.$$

Cette dernière inégalité est équivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - Q_F(h)} &\geq \frac{p}{1 - Q_F(l)} \\ V_1(F, \hat{\alpha}(0)) = V(A) + \frac{1}{1 - Q_F(h)} &\geq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)} = V_0(F, \hat{\alpha}(0)). \end{aligned}$$

D'où

$$V_1(F, \hat{\alpha}(0)) \geq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)}. \quad (4.39)$$

$$\Delta_h \leq 0 \stackrel{(4.24)}{\Rightarrow} V_1(F, \hat{\alpha}(1)) \leq V_0(F, \hat{\alpha}(1)) \stackrel{(4.8)}{=} V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)}.$$

Ainsi, on a

$$V_1(F, \hat{\alpha}(1)) \leq V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)}. \quad (4.40)$$

Maintenant, de (4.28), on a :

$$V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) = V_1(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) = V_0(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \stackrel{(4.8)}{=} V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)},$$

d'où

$$V_1(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) = V(A) + \frac{p}{1 - Q_F(l)}. \quad (4.41)$$

En regroupant (4.39)-(4.41), on déduit

$$V_1(F, \hat{\alpha}(1)) \leq V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \leq V_1(F, \hat{\alpha}(0)). \quad (4.42)$$

Ainsi, pour  $\beta \in ]0, \beta^*[$ , nous avons

$$\forall \beta \in ]0, \beta^*[ , \quad V_1(F, \hat{\alpha}(\beta)) > V_0(F, \hat{\alpha}(\beta)) \Rightarrow \frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} > 0,$$

et le réplicateur converge vers  $\beta^*$ .

Nous avons aussi pour  $\beta \in ]\beta^*, 1[$ ,

$$\forall \beta \in ]\beta^*, 1[ \quad V_1(F, \hat{\alpha}(\beta)) < V_0(F, \hat{\alpha}(\beta)) \Rightarrow \frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} < 0,$$

alors, le réplicateur converge vers  $\beta^*$ . Ainsi le réplicateur converge vers l'unique ESS  $\beta^*$ .

## 4.6 Approche par la théorie des jeux évolutionnaires multicritères

Dans cette section, nous allons reprendre le problème étudié dans les paragraphes précédents en prenant en considération les deux objectifs pour chaque mobile, à savoir maximiser son nombre de paquets transmis avec succès et prolonger la durée de vie de sa batterie qui lui procure l'énergie pour son fonctionnement.

On considère une large population, où les individus sont des mobiles. Chaque individu doit occasionnellement prendre une décision (décider de transmettre un paquet avec une puissance  $h$  ou  $l$ ). Au moment de la transmission, il peut y avoir interférence avec un autre mobile "voisin" qui transmet un paquet en même temps.

On suppose ici que chaque mobile a pour objectifs de transmettre le plus grand nombre de paquets avec succès et d'allonger au maximum sa durée de vie en gérant d'une manière rationnelle les puissances de transmission et l'utilisation de l'énergie de sa batterie. Ces deux objectifs sont antagonistes. En effet, si un mobile transmet un paquet avec une forte puissance, alors il augmente ses chances de le faire avec succès, mais il dépenserait plus d'énergie. D'autre part, s'il transmet le paquet avec une faible puissance et s'il interfère avec un autre mobile transmettant en même temps avec lui avec une puissance plus forte, alors il échouerait dans sa tentative de transmission de son paquet. Ceci le conduirait à refaire une autre tentative, donc une seconde perte d'énergie. Ainsi, chaque mobile se trouve devant le dilemme : utiliser une forte puissance de transmission pour augmenter sa chance d'un envoi avec succès, mais dépensant une quantité d'énergie plus importante, ou bien utiliser une puissance faible, et donc avec une faible quantité d'énergie, mais réduisant ses chances de succès de sa transmission.

Comme les deux utilités dépendent des interactions des mobiles deux à deux, nous continuerons, comme dans les sections précédentes, à modéliser la problématique sous forme d'un jeu évolutionnaire, en prenant en considération l'aspect multicritère des utilités des mobiles. Pour cela, on s'appuiera sur le travail novateur de Kiran [77].

Dans les sections précédentes, nous avons défini que le débit total espéré d'un mobile utilisant

la stratégie  $\beta$  qui rencontre un autre mobile utilisant la stratégie  $\beta'$  est défini par :

$$V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) = V(A) + \frac{p + \beta(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta'))}{1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h))}.$$

La durée de vie d'un mobile est égale à la durée  $T_\beta(F)$  de séjour à l'état  $F$ , qui dépend de la stratégie  $\beta$ , et le temps de séjour à l'état  $A$ , qui ne peut transmettre qu'avec la faible puissance. Autrement dit, on a

$$T = T_\beta(F) + T(A),$$

où  $T(A)$  et  $T_\beta(F)$  sont définis en (4.2) et (4.11) :

$$T(A) = \frac{1}{1 - Q_A}, \quad T_\beta(F) = \frac{1}{1 - \beta Q_F(h) - (1 - \beta)Q_F(l)}.$$

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié le jeu évolutionnaire, qu'on notera désormais le jeu  $G(V_\beta)$ , relatif à la fonction d'utilité  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  représentant le débit total espéré d'un mobile utilisant la stratégie  $\beta$  qui rencontre un autre mobile utilisant la stratégie  $\beta'$ . Nous allons considérer le jeu évolutionnaire relatif au critère  $T(\beta, \beta')$  qui représente la durée de vie espérée d'un mobile utilisant la stratégie  $\beta$  rencontrant un autre mobile utilisant la stratégie  $\beta'$ .

#### 4.6.1 Jeu sur la durée de vie

On considère la même population de mobiles, où chaque individu doit prendre une décision concernant la puissance avec laquelle il doit transmettre un paquet. Au moment de la transmission, il peut y avoir interférence avec un autre mobile "voisin" qui transmet un paquet en même temps. A chaque transmission, il y a une dépense d'énergie et donc une réduction de la durée de vie du mobile. L'utilité totale espérée  $J(\beta, \beta')$  d'un mobile utilisant une stratégie stationnaire  $\beta$ , s'il débute avec un état  $F$  et s'il rencontre un autre mobile utilisant une stratégie stationnaire  $\beta'$ , sera définie par

$$J(\beta, \beta') = T_\beta(F, \alpha),$$

où  $\alpha$  est la proportion de la population qui utilise  $h$  à tout instant, qui est aussi la probabilité que deux mobiles transmettent en même temps avec la puissance  $h$  et donc qu'il y ait interférence.

A l'aide des relations (4.11) et (4.13), on déduit l'expression de  $T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$

$$T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) = \frac{1}{p + \beta(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta'))} \left[ V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) - \frac{p}{1 - Q_A} \right]. \quad (4.43)$$

qui représente la durée de séjour espérée à l'état  $F$  d'un mobile jouant la stratégie  $\beta$  qui rencontre un autre mobile jouant la stratégie  $\beta'$ .

### 4.6.2 Le modèle du jeu sur la durée de vie

- Considérons le jeu évolutionnaire  $G(T_\beta)$ , où
- l'ensemble des joueurs est l'ensemble des mobiles ;
  - les compétitions se font par paire de mobiles ;
  - les stratégies des mobiles sont  $\{h, l\}$  ;
  - la fonction d'utilité

$$T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) = \frac{1}{p + \beta(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta'))} \left[ V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) - \frac{p}{1 - Q_A} \right]. \quad (4.44)$$

### 4.6.3 Résolution du jeu sur la durée de vie

**Remarque 4.5.** *Comme*

$$T_\beta(F, \alpha) = \frac{1}{p + \beta(1-p)(1 - \alpha)} \left[ V_\beta(F, \alpha) - \frac{p}{1 - Q_A} \right],$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\beta(F, \alpha)}{\partial \beta} &= \frac{-(1-p)(1-\alpha)}{(p + \beta(1-p)(1-\alpha))^2} \left[ V_\beta(F, \alpha) - \frac{p}{1 - Q_A} \right] + \left[ \frac{1}{p + \beta(1-p)(1-\alpha)} \right] \frac{\partial V_\beta(F, \alpha)}{\partial \beta} \\ &= \frac{-(1-p)(1-\alpha)}{(p + \beta(1-p)(1-\alpha))^2} \left[ \frac{p}{1 - Q_A} + \frac{p + \beta(1-\alpha)(1-p)}{1 - \beta Q_F(h) - (1-\beta)Q_F(l)} - \frac{p}{1 - Q_A} \right] \\ &+ \frac{1}{p + \beta(1-p)(1-\alpha)} \left[ \frac{(1-p)(1-\alpha)(1 - Q_F(l) - p(Q_F(l) - Q_F(h)))}{(1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2} \right] \\ &= \left[ \frac{-(1-p)(1-\alpha)(1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))}{(p + \beta(1-p)(1-\alpha))(1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2} \right] \\ &+ \left[ \frac{(1-p)(1-\alpha)(1 - Q_F(l) - p(Q_F(l) - Q_F(h)))}{(p + \beta(1-p)(1-\alpha))(1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2} \right] \\ &= - \left[ \frac{(1-p)(1-\alpha)(Q_F(l) - Q_F(h))(p + \beta)}{(p + \beta(1-p)(1-\alpha))(1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h)))^2} \right]. \end{aligned}$$

Comme

$$(1-p)(1-\alpha)(p + \beta) > 0, \quad \text{et } Q_F(l) > Q_F(h),$$

alors

$$\frac{\partial T_\beta(F, \alpha)}{\partial \beta} < 0.$$

Ainsi, la fonction  $T_\beta(F, \alpha)$  est strictement décroissante par rapport à  $\beta$  pour toute valeur positive de  $\alpha$ .

On peut, sans difficulté, démontrer le résultat suivant :

**Corollaire 4.1.**

Si  $\beta^*$  est une ESS du jeu évolutionnaire  $G(T_\beta)$ , alors

$$\forall \beta \neq \beta^*, \quad T_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) \geq T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta^*)). \quad (4.45)$$

Réciproquement, si l'inégalité (4.45) est stricte, alors  $\beta^*$  est une ESS du jeu  $G(T_\beta)$ .

**Théorème 4.8.** *Le jeu évolutionnaire  $G(T_\beta)$  admet une unique ESS, qui est  $\beta^* = 0$ .*

**Preuve.** Démontrons, dans un premier temps, que  $\beta^* = 0$  est une ESS. Supposons le contraire, alors, d'après le corollaire 4.1, il existerait une stratégie  $\beta \neq \beta^* = 0$ , (c-à-d  $\beta \in ]0, 1]$ ), telle que

$$T_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) < T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta^*)).$$

Or, d'après la remarque 4.5, la fonction  $T(\beta, \alpha)$  est strictement décroissante par rapport à  $\beta$ , et donc on a

$$\forall \beta > \beta^* = 0, \quad T_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\beta^*)) > T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta^*)),$$

qui est en contradiction avec l'inégalité précédente.

**L'équation du réplicateur dynamique**

- Posons  $\vec{\beta} = (\beta, 1 - \beta)$  et  $a \in \{h, l\}$ . On a

$$\frac{d\vec{\beta}(a)}{dt} = K\vec{\beta}(a)[T_a(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h, l\}} \vec{\beta}(b)T_b(F, \hat{\alpha}(\beta))] = \Psi_a(\vec{\beta}). \quad (4.46)$$

- Pour  $a = h$ , elle prend la forme

$$\frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} = K\beta[T_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h, l\}} \vec{\beta}(b)T_b(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.47)$$

- Pour  $a = l$ , l'équation (4.46) prend la forme

$$\frac{d\vec{\beta}(l)}{dt} = K(1 - \beta)[T_l(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h, l\}} \vec{\beta}(b)T_b(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.48)$$

En faisant la somme de (4.47) et de (4.48), on obtient :

$$\frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} + \frac{d\vec{\beta}(l)}{dt} = 0. \quad (4.49)$$

Tenant compte des conditions initiales, l'intégration de l'équation différentielle (4.49) donne

$$\vec{\beta}(h) + \vec{\beta}(l) = 1$$

en tout instant.

### La convergence du réplicateur dynamique pour le jeu de durée de vie

Dans cette partie, nous utiliserons le même raisonnement qui a été poursuivi pour l'étude de la convergence du réplicateur dynamique dans le jeu, où la fonction d'utilité représente le débit. Ainsi, nous allons étudier la convergence du réplicateur et la relation entre les **ESS** et les points stationnaires du réplicateur.

Pour démontrer la convergence et la relation entre l'équilibre et les autres issues de la dynamique, nous allons utiliser la propriété de corrélation positive. En s'inspirant des travaux de Sandholm [70], Sandholm et al. [71] on définit la propriété de corrélation positive ou de la monotonie nette de l'équation différentielle comme suit :

$$\sum_{b \in \{h,l\}} T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \Psi_b(\vec{\beta}) > 0 \text{ avec } \Psi(\vec{\beta}) \neq 0. \quad (4.50)$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} = \Psi(\vec{\beta}).$$

Pour les mêmes arguments développés dans [70], on conclut que la corrélation positive nous garantit que tous les équilibres de notre jeu sont des points stationnaires du réplicateur dynamique. Ainsi, un point qui n'est pas stationnaire de l'équation différentielle ne peut pas être un équilibre. Nous allons donc prouver ce qui suit :

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \{h,l\}} T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \Psi_b(\beta) &= \sum_{b \in \{h,l\}} T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \frac{d\vec{\beta}}{dt} \\ &= \sum_{b \in \{h,l\}} T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \left( K \vec{\beta}(b) \left[ T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \right] \right) \\ &= K \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) (T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)))^2 - K \left( \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

D'après le théorème 4.6, de (4.51), on déduit :

$$K \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) (T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)))^2 > K \left( \sum_{b \in \{h,l\}} \vec{\beta}(b) T_b(F, \hat{\alpha}(\beta)) \right)^2,$$

qui signifie que l'équation différentielle du réplicateur dynamique vérifie la propriété de corrélation positive et, par conséquent, toute stratégie **ESS** est un point stationnaire du réplicateur.

Nous allons montrer maintenant que le réplicateur dynamique converge presque globalement.

#### **Théorème 4.9.** [13]

Pour tout point initial  $\beta_0 \in ]0, 1[$ , le réplicateur dynamique, défini par (4.47), converge vers l'**ESS**  $\beta^* = 0$ .



**Preuve.**

Nous pouvons réécrire le réplicateur dynamique associé à la stratégie  $h$  de la manière suivante :

$$\frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} = K\vec{\beta}(h)(1 - \vec{\beta}(h))[T_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - T_l(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.52)$$

Le signe de la partie droite de l'équation différentielle (4.52) dépend du signe de :

$$[T_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - T_l(F, \hat{\alpha}(\beta))]. \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} [T_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - T_l(F, \hat{\alpha}(\beta))] &= \frac{1}{p + (1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta))} \left[ V_h(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \frac{p}{1 - Q_A} \right] \\ &- \frac{1}{p} \left[ V_l(F, \hat{\alpha}(\beta)) - \frac{p}{1 - Q_A} \right] \\ &= \frac{1}{p + (1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta))} \left[ \frac{p}{(1 - Q_A)} + \frac{p + (1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta))}{1 - Q_F(h)} - \frac{p}{1 - Q_A} \right] \\ &- \frac{1}{p} \left[ \frac{p}{1 - Q_A} + \frac{p}{1 - Q_F(l)} - \frac{p}{1 - Q_A} \right] \\ &= \frac{1}{1 - Q_F(h)} - \frac{1}{1 - Q_F(l)} \\ &= \frac{Q_F(h) - Q_F(l)}{(1 - Q_F(h))(1 - Q_F(l))}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Comme  $Q_F(h) < Q_F(l)$ , alors :

$$\frac{Q_F(h) - Q_F(l)}{(1 - Q_F(h))(1 - Q_F(l))} < 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\vec{\beta}(h)}{dt} < 0.$$

Alors, le réplicateur dynamique converge vers  $\beta^* = 0$ .

## 4.7 Modèle de jeu évolutionnaire multicritère

Considérons le jeu évolutionnaire multicritère  $G$ , où

- l'ensemble des joueurs est l'ensemble des mobiles ;
- les compétitions se font par paire de mobiles ;
- les stratégies des mobiles sont  $\{h, l\}$  ;
- la première fonction d'utilité est définie par (4.6)

$$V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) = V(A) + \frac{p + \beta(1-p)(1 - \hat{\alpha}(\beta'))}{1 - Q_F(l) + \beta(Q_F(l) - Q_F(h))}, \quad (4.55)$$

et la seconde fonction d'utilité est définie par (4.44) :

$$T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta')) = \frac{\hat{\alpha}(\beta')}{(\beta - \hat{\alpha}(\beta'))(1 - Q_A)}. \quad (4.56)$$

### 4.7.1 Résolution du jeu évolutionnaire multicritère

Pour résoudre le jeu évolutionnaire multicritère, nous utiliserons le concept d' **équilibre évolutionnairement stable fortement idéal** (strongly ideal evolutionary stable strategies) qu'on notera par **SIESS**), introduit par Kiran Somasundaram dans [77].

Nous donnons la forme que prendrait la définition de l'SIESS dans le cas de notre jeu  $G$ . Pour cela, considérons le jeu évolutionnaire  $G(V_\beta)$  relatif à la fonction d'utilité  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  définie par (4.55) et représentant le débit d'un mobile et le jeu évolutionnaire  $G(T_\beta)$  relatif à la fonction d'utilité  $T_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  définie par (4.56) et représentant la durée de vie d'un mobile.

On associera l'ensemble  $G^{ESS}(V_\beta)$  (respectivement  $G^{ESS}(T_\beta)$ ) des stratégies évolutionnairement stables dans le jeu  $G(V_\beta)$  (respectivement  $G(T_\beta)$ ).

**Définition 4.2.**  $\beta^* \in [0, 1]$  est un équilibre idéal évolutionnairement fortement stable dans le jeu multicritère  $G$ , si  $\forall \beta \in [0, 1], \beta \neq \beta^*$ , il existe un certain  $\overline{\epsilon(\beta)}$  tel que  $\forall \epsilon \in ]0, \overline{\epsilon(\beta)}[$ , on a

$$V_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\epsilon\beta + (1 - \epsilon)\beta^*)) > V_\beta(F, \hat{\alpha}(\epsilon\beta + (1 - \epsilon)\beta^*)), \quad (4.57)$$

$$T_{\beta^*}(F, \hat{\alpha}(\epsilon\beta + (1 - \epsilon)\beta^*)) > T_\beta(F, \hat{\alpha}(\epsilon\beta + (1 - \epsilon)\beta^*)). \quad (4.58)$$

On notera, par  $G^{SIESS}$ , l'ensemble des stratégies qui sont des équilibres idéaux évolutionnairement fortement stables du jeu évolutionnaire multicritère  $G$ .

**Proposition 4.2.** [77] On a

$$G^{SIESS} = G^{ESS}(V_\beta) \cap G^{ESS}(T_\beta). \quad (4.59)$$

**Théorème 4.10.**

- Si  $\Delta_h > 0$ , alors  $G^{SIESS} = \emptyset$ .
- Si  $\Delta_l > 0$ , alors  $G^{SIESS} = \{\beta^* = 0\}$ .
- Si  $\Delta_l \leq 0$  et  $\Delta_h \leq 0$ , alors  $G^{SIESS} = \emptyset$ .

**Preuve.** D'après la proposition 4.2, une stratégie  $\beta^* \in [0, 1]$  est un équilibre idéal évolutionnairement fortement stable dans le jeu évolutionnaire multicritère  $G$ , si  $\beta^*$  est une ESS en même temps dans les jeux  $G(V_\beta)$  et  $G(T_\beta)$ .

D'après le théorème 4.8, le jeu  $G(T_\beta)$  admet comme seul équilibre ESS, la stratégie  $\beta^* = 0$ , c-à-d  $G^{ESS}(T_\beta) = \{\beta^* = 0\}$ .

Ainsi, si  $\Delta_h > 0$ , alors, d'après le théorème 4.2,  $G^{ESS}(V_\beta) = \{\beta^* = 1\}$ , et par conséquent,  $G^{SIESS} = \emptyset$ .

Si  $\Delta_l > 0$ , alors, d'après le théorème 4.3,  $G^{ESS}(V_\beta) = \{\beta^* = 0\}$ , et par conséquent,  $G^{SIESS} = \{\beta^* = 0\}$ .

Si  $\Delta_l \leq 0$  et  $\Delta_h \leq 0$ , alors, d'après le théorème 4.4, le jeu  $G(V_\beta)$  admet une unique **ESS**  $\beta^* \in ]0, 1[$  donnée par (4.27) et, par conséquent,  $G^{SIESS} = \emptyset$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué en premier lieu, l'approche monocritère de la théorie des jeux évolutionnaires, pour améliorer les qualités de services dans les réseaux ad hoc. Cela en maximisant le débit de chaque mobile. Dans une seconde étape, nous avons appliqué l'approche multicritère en introduisant un second critère, qui est la durée de vie. L'approche multicritère nous permet de minimiser les pertes de données (maximiser le débit), en tenant compte de la contrainte principale dans ce type de réseau, qui est la contrainte d'énergie. Plus précisément, nous avons essayé de minimiser la consommation d'énergie et par conséquent de maximiser la durée de vie de chaque mobile du réseau.

# 5

## Résultats numériques et interprétations

### Introduction

Dans le but de confirmer les résultats théoriques obtenus dans le chapitre précédent, nous avons opté à des programmes de simulation sous l'environnement MATLAB.

Dans ce chapitre, nous exposons les différents résultats obtenus par cette simulation. Dans un premier lieu, nous allons étudier la variation de la stratégie évolutionnairement stable en fonction de  $p$  (qui est la probabilité qu'un mobile soit le seul à transmettre dans un slot), pour chaque critère. Ensuite, nous allons voir la convergence du réplicateur dynamique vers la stratégie évolutionnairement stable, quelque soit la stratégie adoptée au départ par la population.

Dans une deuxième partie, nous considérons les deux critères en même temps (le jeu bicritère). Nous allons voir l'existence de l'ESS en fonction de  $p$ .

### 5.1 Étude de la fonction $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$

Considérons le système suivant :

- une large population de terminaux mobiles ;
- la probabilité qu'un mobile à l'état  $A$ , garde son niveau d'énergie après la transmission avec un niveau bas de puissance  $l$  est  $Q_A = 0.5$  ;

- la probabilité qu'un mobile reste à l'état  $F$  après la transmission avec un niveau haut de puissance  $h$  est  $Q_F(h) = 0.7$ ;
- la probabilité qu'un mobile reste à l'état  $F$  après la transmission avec un niveau bas de puissance  $l$  est  $Q_F(l) = 0.9$ .

### 5.1.1 Variation de l'ESS en fonction de $P$

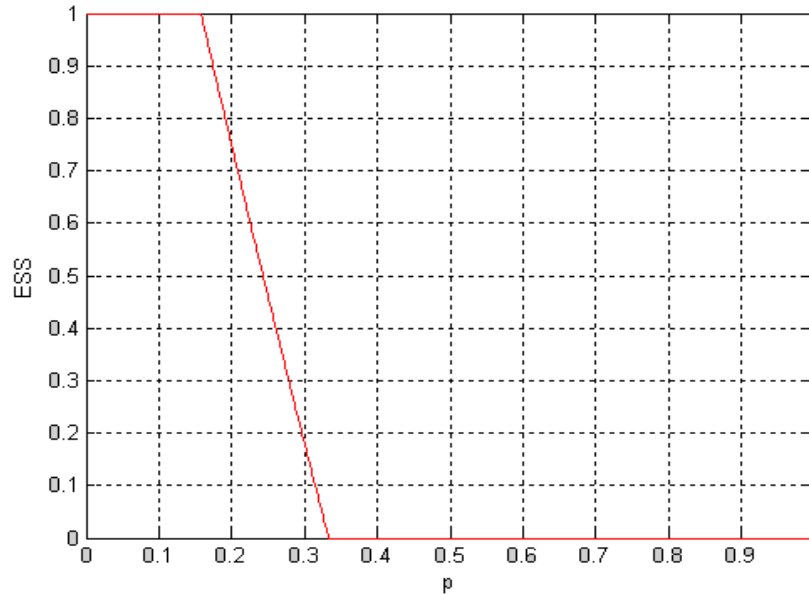


FIG. 5.1 – Variation de l'ESS de  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  en fonction de  $P$ .

D'après la figure ci-dessus, la stratégie évolutionnairement stable est une fonction décroissante de  $p$ . Quand  $p$  devient grande, l'ESS devient moins agressive.

**Interprétation.** Lorsque la probabilité qu'un mobile soit le seul à transmettre dans un slot est nulle, ou proche de zéro, alors le mobile se trouve en compétition avec d'autres mobiles à chaque tentative de transmission, donc il est logique que chaque mobile qui est à l'état  $F$  joue sa stratégie agressive  $h$  pour réussir sa transmission.

Dans le cas contraire, lorsque la probabilité qu'un mobile soit le seul à transmettre dans un slot est égale à 1, ou proche de 1, le mobile n'est pas en compétition avec les autres, donc il est logique qu'il joue sa stratégie passive  $l$ .

### 5.1.2 Convergence du réplicateur dynamique vers l'ESS

Dans cette section, nous allons voir la convergence du réplicateur dynamique de la stratégie  $h$ , vers l'ESS.

Cas de  $p = 0.1$

D'après les résultats de la section précédente, lorsque  $p = 0.1$ ,  $ESS = 1$ . Les résultats de la simulation doivent montrer que, quelque soit la proportion initiale  $\beta_0$ , après certaines évolutions dans le temps, la stratégie évolutionnairement stable sera atteinte.

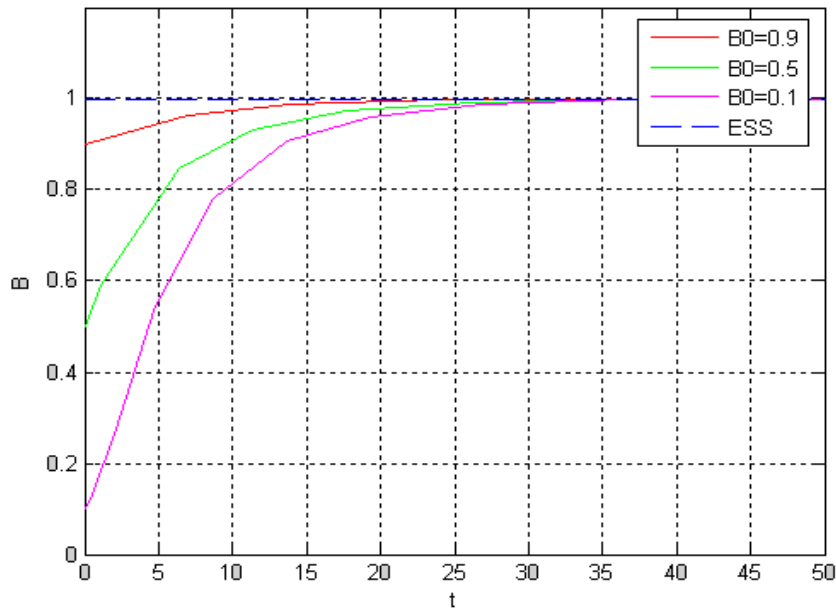


FIG. 5.2 – Convergence du réplicateur de  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  avec  $p = 0.1$  et  $K = 0.3$

D'après la figure 5.2, la stratégie évolutionnairement stable  $\beta^* = 1$ , est atteinte pour  $\beta_0 = 0.9$ ,  $\beta_0 = 0.5$ ,  $\beta_0 = 0.1$  à partir du 19<sup>ème</sup> slot, 25<sup>ème</sup> slot, et 29<sup>ème</sup> respectivement. Donc, plus la solution initiale est proche de l'ESS, plus la rapidité de la convergence vers l'état d'équilibre est importante.

Dans les mêmes conditions, nous allons refaire la simulation mais cette fois ci avec  $K = 1$ , dans le but de voir l'impact de ce paramètre sur la vitesse de convergence du réplicateur.

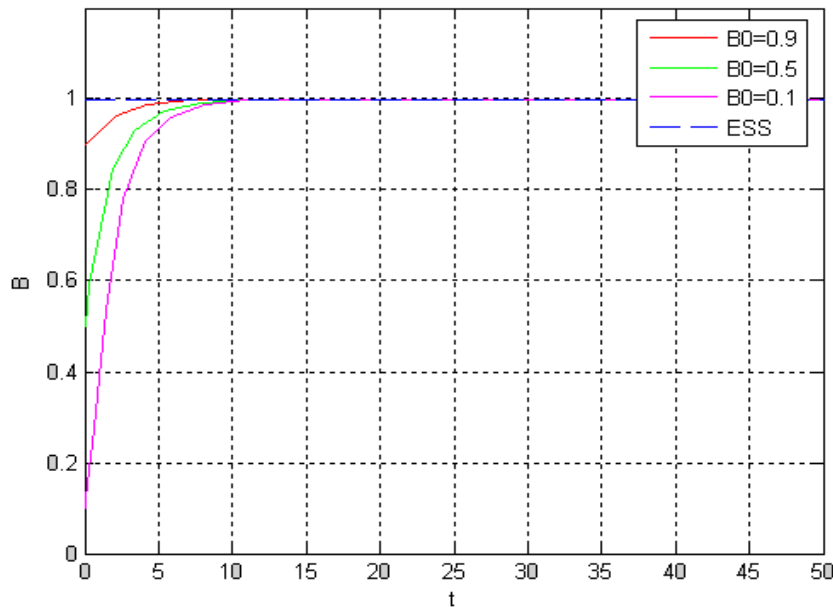


FIG. 5.3 – Convergence du réplicateur de  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  avec  $p = 0.1$  et  $K = 1$

D'après la figure 5.3, la stratégie évolutionnairement stable est atteinte pour  $\beta_0 = 0.9$ ,  $\beta_0 = 0.5$ ,  $\beta_0 = 0.1$  à partir du 5<sup>ème</sup> slot, 8<sup>ème</sup> slot, et 10<sup>ème</sup> slot respectivement.

D'après les figures 5.2 et 5.3, la vitesse de convergence du réplicateur est une fonction croissante de  $K$ .

#### Cas de $p = 0.4$

Dans le cas où  $p = 0.4$ ,  $ESS = 0$  (voir la figure 5.1).

Nous allons voir les résultats de la simulation pour les mêmes conditions initiales ( $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_0 = 0.5$ ,  $\beta_0 = 0.9$ ) et pour  $K = 1$  et  $K = 0.3$ .

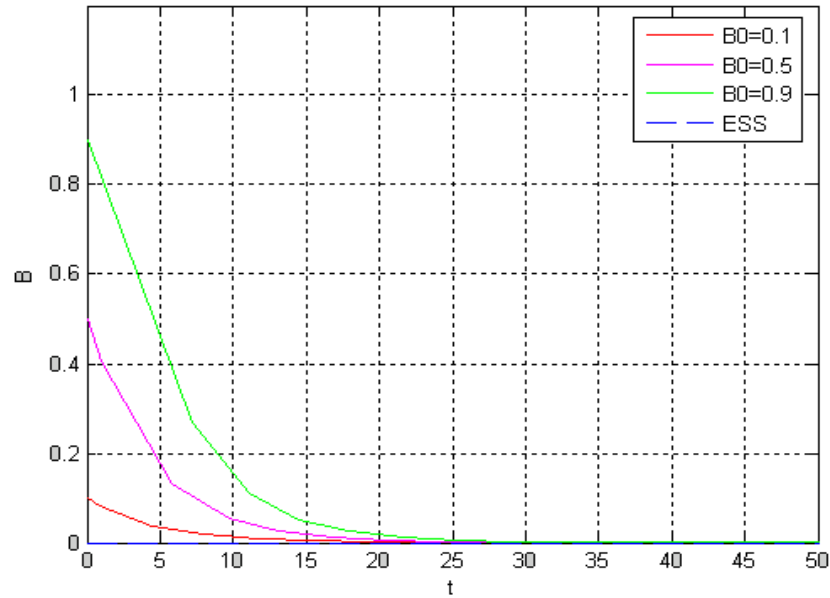


FIG. 5.4 – Convergence du réplicateur de  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  avec  $p = 0.4$  et  $K = 0.3$

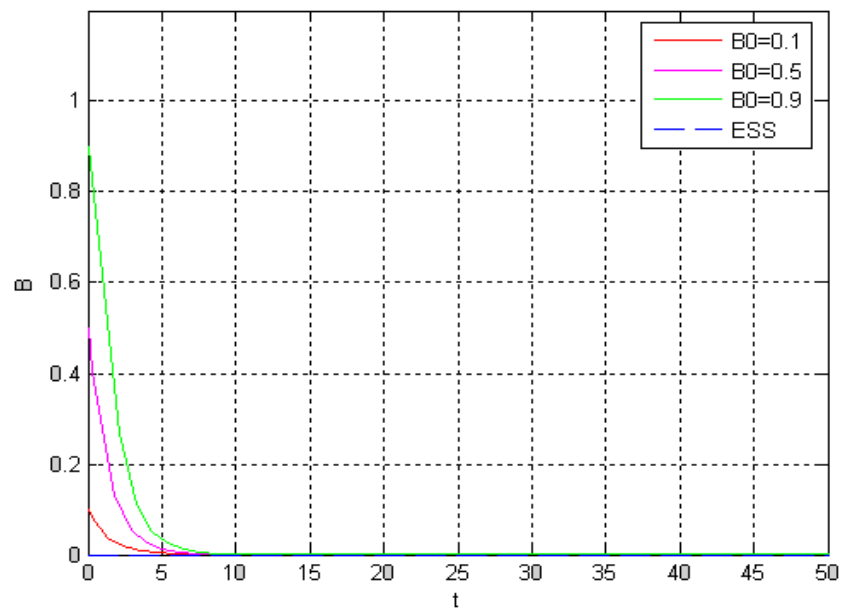


FIG. 5.5 – Convergence du réplicateur de  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  avec  $p = 0.4$  et  $K = 1$

Les graphes présentés dans les figures 5.4 et 5.5 montrent que, quelque soit la solution initiale  $\beta_0$ , la stratégie évolutionnairement stable est atteinte.

Nous remarquons que la vitesse de convergence du réplicateur est une fonction croissantes de  $K$ , et que, plus que la solution initiale est proche de l'ESS plus la vitesse de convergence est importante.



Cas de  $p = 0.25$

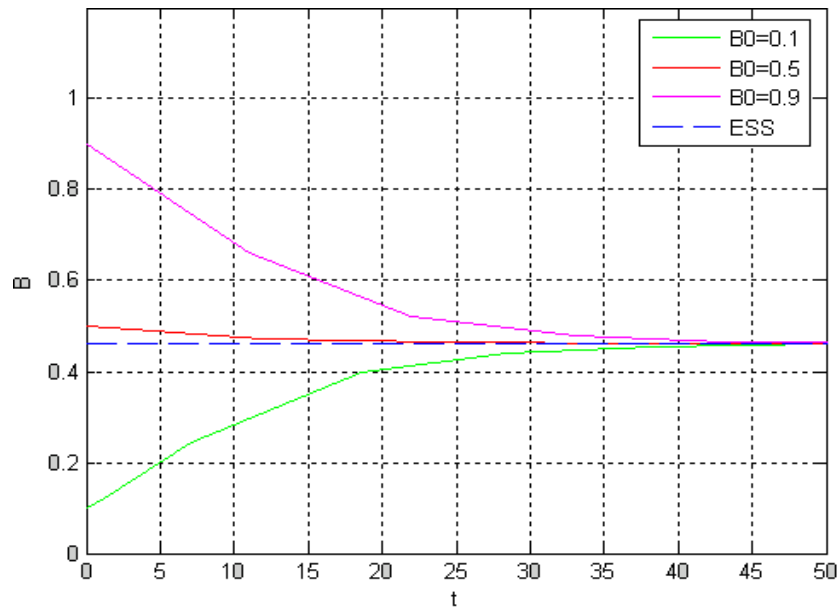


FIG. 5.6 – Convergence du réplicateur de  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  avec  $p = 0.25$  et  $K = 0.3$

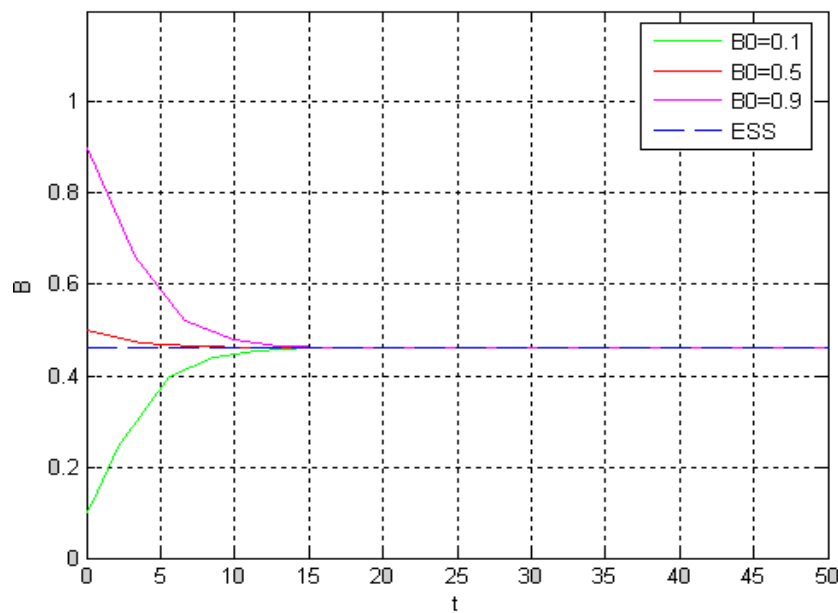


FIG. 5.7 – Convergence du réplicateur de  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  avec  $p = 0.25$  et  $K = 1$

Nous avons vu (figure 5.1) que lorsque  $p = 0.25$ , la stratégie évolutionnairement stable est mixte.

Les graphes dans les figures 5.6 et 5.7 montrent que quelque soit la solution initiale, la stratégie évolutionnairement stable est atteinte.

Nous remarquons que la vitesse de convergence est une fonction croissante de  $K$ , et que plus que la solution initiale est proche de l'ESS, plus que la vitesse de convergence est importante.

## 5.2 Étude de la fonction $T_\beta(F)$

Nous allons reprendre, le système considéré avant :

- une large population de terminaux mobiles ;
- la probabilité qu'un mobile à l'état  $A$ , garde son niveau d'énergie après la transmission avec un niveau bas de puissance  $l$  est  $Q_A = 0.5$  ;
- la probabilité qu'un mobile reste à l'état  $F$  après la transmission avec un niveau haut de puissance  $h$  est  $Q_F(h) = 0.7$  ;
- la probabilité qu'un mobile reste à l'état  $F$  après la transmission avec un niveau bas de puissance  $l$  est  $Q_F(l) = 0.9$ .

Dans cette partie, nous allons étudier la variation de la stratégie évolutionnairement stable pour le critère  $T_\beta(F)$ , et voir la convergence du réplicateur vers l'ESS.

### 5.2.1 ESS en fonction de $p$

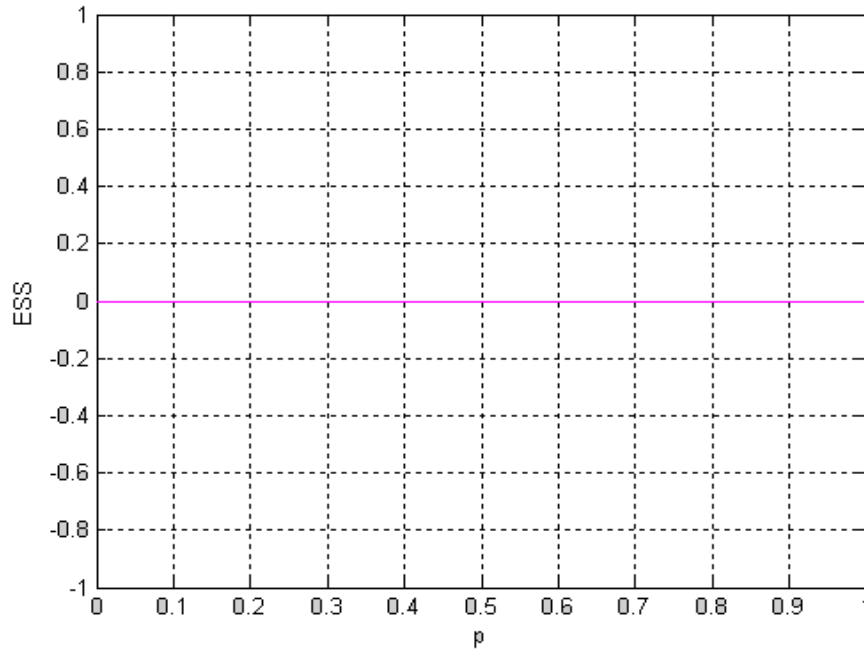


FIG. 5.8 – Variation de l'ESS de la fonction  $T_\beta(F)$  en fonction de  $p$

La figure 5.8, montre que la stratégie évolutionnairement stable pour ce second critère est toujours  $l$ , quelque soit la valeur de  $p$ .

**Interprétation.** *Les mobiles cherchent à maximiser leurs durées de vie. Comme les niveaux de transmission sont liés à la quantité d'énergie dont les mobiles disposent, alors, lorsqu'ils transmettent avec un niveau haut  $h$ , les mobiles consomment beaucoup d'énergie, et donc ils minimisent leurs durées de vie. Et lorsqu'ils transmettent avec un niveau bas  $l$ , ils consomment moins d'énergie, et donc ils maximisent leurs durées de vie.*

*Alors pour maximiser sa durée de vie, le mobile doit transmettre toujours avec  $l$ .*

### 5.2.2 Convergence du réplicateur

Dans cette section, nous allons voir la convergence du réplicateur dynamique de la stratégie  $h$ , vers l'ESS.

La figure 5.9, montre que, quelque soit la solution initiale  $\beta_0$ , le réplicateur dynamique converge vers l'ESS, et plus que la solution initiale est proche de l'ESS, plus que la vitesse de convergence est importante.

Dans les mêmes conditions, nous allons refaire la simulation mais cette fois ci avec  $K = 1$ .

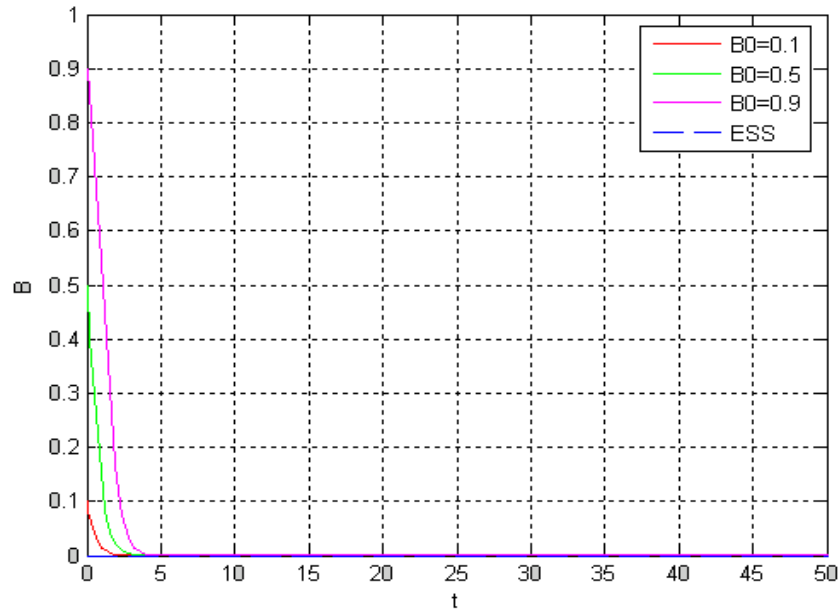


FIG. 5.9 – Convergence du réplicateur de  $T_\beta(F)$  avec  $K = 0.3$

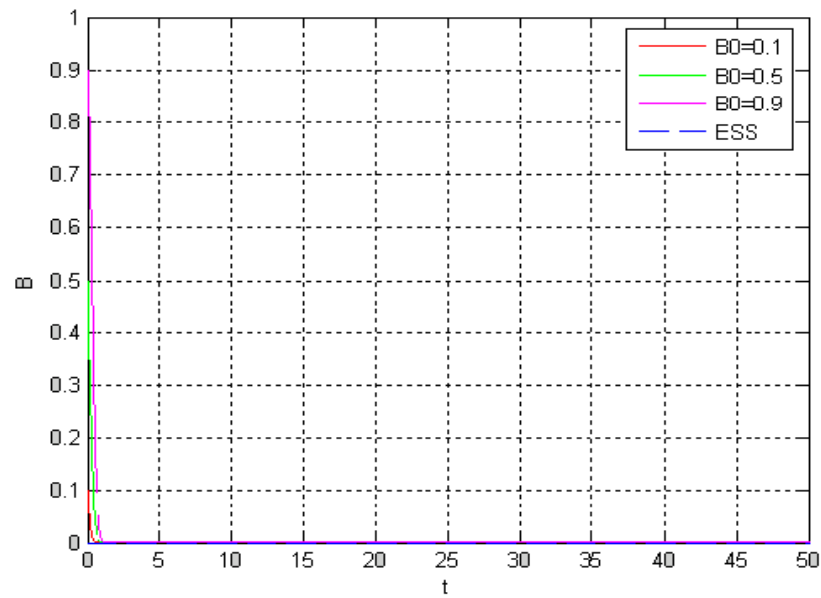


FIG. 5.10 – Convergence de réplicateur du  $T_\beta(F)$  avec  $K = 1$

Ici aussi, nous avons la convergence du réplicateur de la fonction  $T(F)$  vers l'ESS quelque soit la solution initiale et la vitesse de convergence est une fonction croissante de  $K$ .

### 5.3 Étude du jeu bi-critère

Nous allons chercher les stratégies évolutionnairement stables en fonction de  $p$  et de l'état du système qu'on puisse le représenter par la différence  $Q_F(l) - Q_F(h)$ .

Les résultats de la simulation sont illustrés dans les figures qui suivent.

Notons que les graphes en rouge représentent l'ESS de la fonction  $V_\beta(F, \hat{\alpha}(\beta'))$  et ceux en bleu représentent l'ESS de la fonction  $T_\beta(F)$ , et enfin l'intersection représente l'ESS du jeu bi-critère.

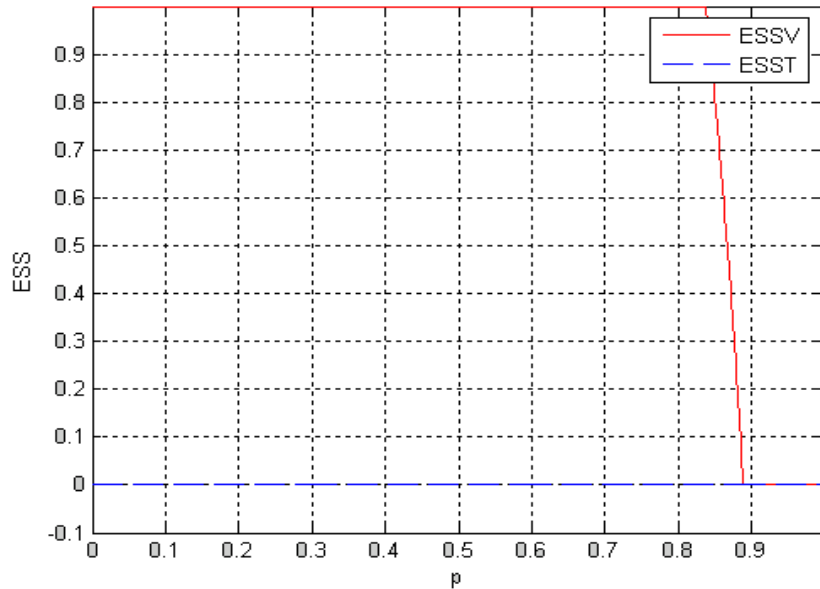


FIG. 5.11 – L'ESS du jeu bi-critère pour  $Q_F(l) - Q_F(h) = 0.1$

Lorsque  $Q_F(l) - Q_F(h)$  est proche de 0 (C'est-à-dire,  $Q_F(h)$  est proche de  $Q_F(l)$ ), la stratégie évolutionnairement stable du jeu bicritère existe lorsque  $p$  est proche de 1 ( $p \in ]0.88, 1]$  figure 5.11).

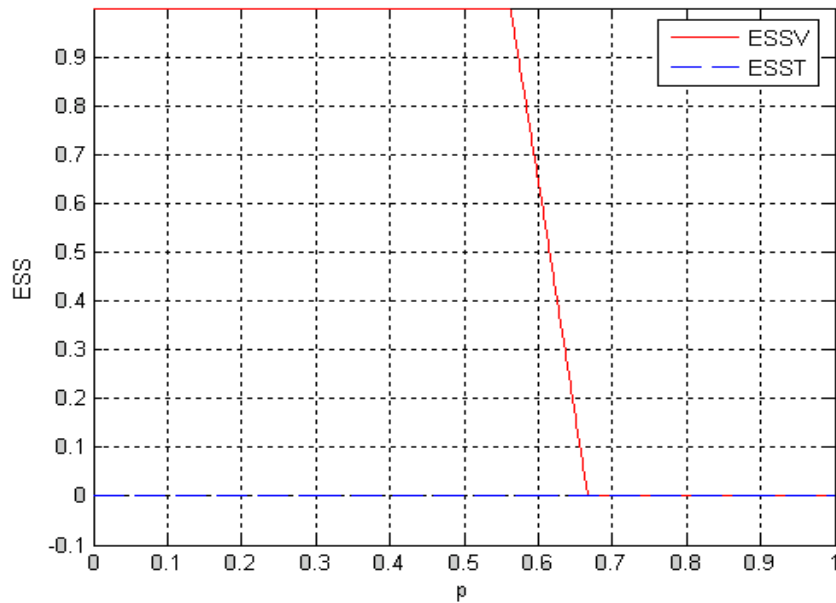


FIG. 5.12 – L’ESS du jeu bi-critère pour  $Q_F(l) - Q_F(h) = 0.3$

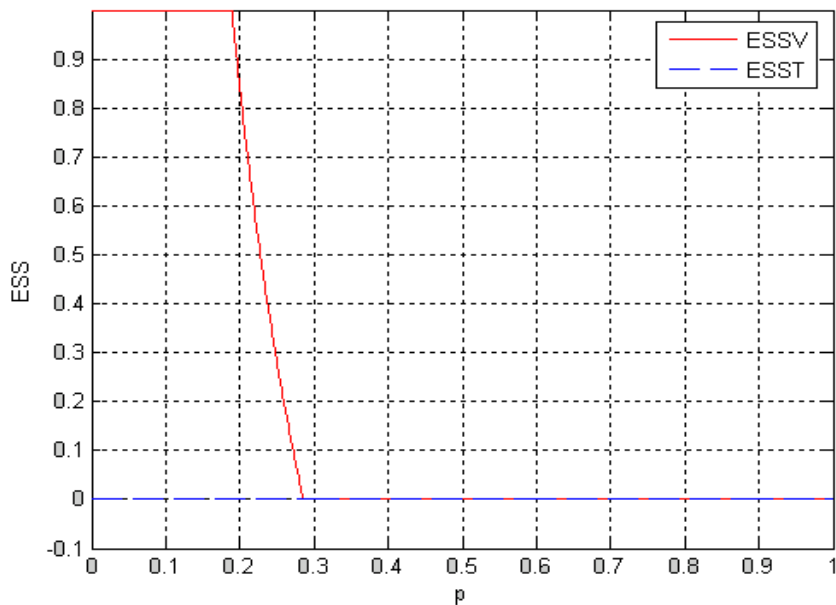


FIG. 5.13 – L’ESS du jeu bi-critère pour  $Q_F(l) - Q_F(h) = 0.5$

Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 montrent que plus que la différence  $Q_F(h) - Q_F(l)$  est importante plus que l’intervalle de  $p$  pour lequel il existe une stratégie évolutionnairement stable du jeu bicritère est grand ( $p \in ]0.67, 1]$ ,  $p \in ]0.29, 1]$ ,  $p \in ]0.22, 1]$  respectivement).

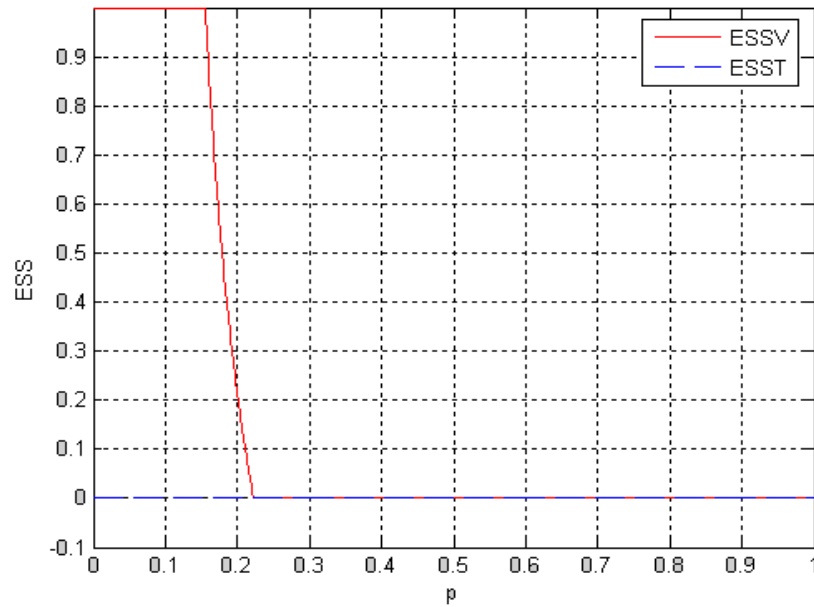


FIG. 5.14 – L’ESS du jeu bi-critère pour  $Q_F(l) - Q_F(h) = 0.7$

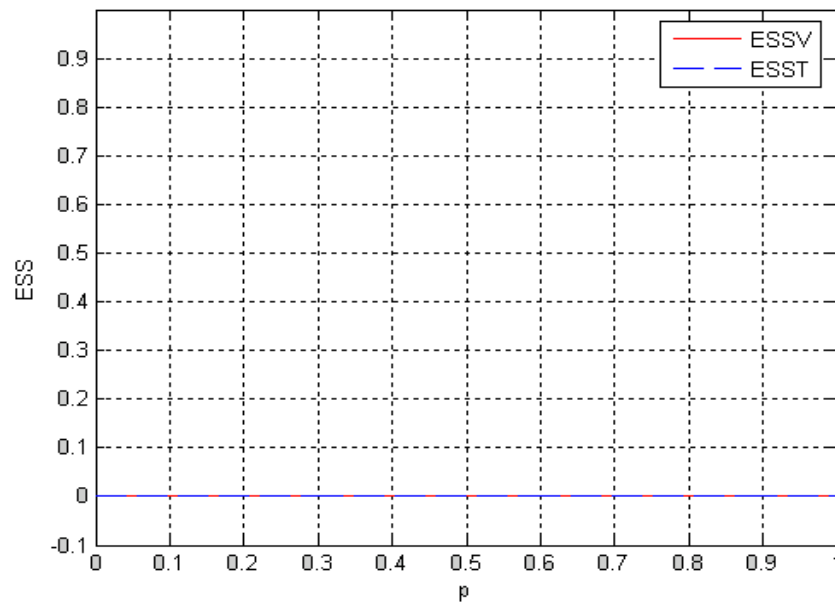


FIG. 5.15 – L’ESS du jeu bi-critère pour  $Q_F(l) - Q_F(h) = 1$

Lorsque  $Q_F(l) - Q_F(h) = 1$ ,  $Q_F(h)$  est négligeable devant  $Q_F(l)$ , la figure 5.15 montre que  $\forall p \in [0, 1]$ , la stratégie évolutionnairement stable du jeu bicritère existe.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

La différence $Q_F(h) - Q_F(l)$	Intervalle de $p$ pour lequel l'ESS du jeu bicritère existe
0.1	$p \in ]0.88, 1]$
0.2	$p \in ]0.77, 1]$
0.3	$p \in ]0.67, 1]$
0.4	$p \in ]0.55, 1]$
0.5	$p \in ]0.29, 1]$
0.6	$p \in ]0.25, 1]$
0.7	$p \in ]0.22, 1]$
1	$p \in [0, 1]$

TAB. 5.1 – L'existence de l'ESS dans le jeu bicritère en fonction de  $(Q_F(h) - Q_F(l))$  et  $p$ .

**Interprétation.** Lorsque  $Q_F(h)$  est proche de  $Q_F(l)$ , chaque mobile a la même chance de garder son état  $F$ , soit en transmettant avec  $h$  ou  $l$ . Alors, chaque mobile préfère de transmettre avec  $h$  pour réussir sa transmission, mais lorsqu'il se trouve seul à transmettre ( $p$  proche ou égale à 1), le mobile transmet avec  $l$  et dans ce cas les deux critères du jeu sont satisfaits.

Plus que la différence  $Q_F(h) - Q_F(l)$  est importante, le niveau d'énergie du mobile décroît, et donc le comportement des mobiles devient moins agressif. Ainsi pour les deux critères, le mobile préfère de transmettre avec  $l$  qui est la stratégie évolutionnairement stable du jeu bicritère considéré.

Les résultats de la simulation, montrent que si la stratégie évolutionnairement stable existe, alors cette stratégie est forcément  $l$ , c'est-à-dire transmettre avec une puissance faible.

Dans la pratique, lorsque deux mobiles transmettent en même temps avec  $h$ , les deux paquets seront perdus et l'énergie perdue est importante. Par contre, dans le cas de collision de deux paquets envoyés avec  $l$ , les deux paquets seront perdus, mais l'énergie perdue est inférieure à celle de collision de deux paquets envoyés avec  $h$ . Alors, les pertes engendrées par la transmission avec  $h$ , sont plus grande que les pertes engendrées par la transmission avec  $l$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'existence de la stratégie évolutionnairement stable pour les fonctions débit et durée de vie. Nous avons mis en évidence la convergence du réplicateur dynamique qui décrit l'évolution de la proportion des mobiles jouant la stratégie  $h$  vers l'ESS, et enfin l'existence de l'ESS pour le jeu bicritère en fonction de  $p$  et de la différence  $Q_F(l) - Q_F(h)$ .



# Conclusion générale

Les réseaux Ad-hoc sont un nouveau type de réseaux qui suscite l'intérêt des praticiens des réseaux de télécommunication et des chercheurs. Ils rencontrent cependant deux contraintes majeures qui peuvent entraver leur développement : le problème d'interférence et la contrainte d'énergie.

Dans ce mémoire, nous avons tenté d'analyser le fonctionnement d'un réseau Ad-hoc, en prenant en considération les deux contraintes précédentes, moyennant la théorie des jeux évolutionnaire. Notre modèle considère une large population de terminaux mobiles. Chacun des mobiles peut être dans trois états selon l'énergie contenue dans sa batterie : plein, presque déchargé et déchargé. Lorsque sa batterie est pleine, le mobile peut émettre un signal avec deux niveaux d'énergie : haut et bas. L'interférence se produit lorsque deux mobiles émettent en même temps avec un haut niveau d'énergie.

Lorsque les deux critères sont considérés séparément, nous avons aboutit à l'existence d'un équilibre évolutionnairement stable dépendant de l'état initial des mobiles en terme d'énergie. Lorsque les mobiles essaient d'optimiser les deux critères en même temps, nous avons établi que sous certaines conditions, il existe un équilibre évolutionnairement stable où tous les mobiles émettent avec un niveau d'énergie bas.

Comme perspective, nous pouvons proposer quelques directions de recherche :

- Considérer un réseau dense, et dans ce cas on aura des combats multiples au lieu des combats par paires.
- Appliquer les jeux évolutionnaires multicritères pour d'autres problèmes (routage, sécurité, ...) dans le cadre des réseaux Ad-Hoc.
- Appliquer les jeux évolutionnaires multicritères pour d'autres types de réseaux (cellulaires, filaire, et les réseaux de la quatrième génération qui sont des combinaisons des réseaux Ad-Hoc et des réseaux cellulaires).

# Bibliographie

- [1] ABRAMSON.N. The aloha system-another alternative for computer communication. *AFIPS, Fall Joint Computer Conference vol. 37*, no. 2 (1970), pp. 295–298.
- [2] ACHIR. M. *Technologie basse consommation pour les réseaux ad hoc*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Juillet 2006.
- [3] AGARWAL. S, KRISHNAMURTHY. S, K. R. D. S. Distributed power control in ad-hoc wireless networks. *Intl. Symposium Personal, Indoor and Mobile Radio Communications* (2001), pp. 59–66.
- [4] AKELLA. A ET AL. Selfish behavior and stability of internet : A game theoretic analysis of tcp. *Proc of ACM SIGCOMM Conf. on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communications* (August 2002), pp. 117–130.
- [5] ALBOSZTA. J ; MIE-KISZ. J. Stability of evolutionarily stable strategies in discrete replicator dynamics with time delay. *Journal of Theoretical Biology vol. 231* (2004), pp. 175–179.
- [6] ALLEN. B ; MACKENZIE. A ; MTEPHEN. B ; WICKER. Game theory in communications : motivation, explanation and application to power control. *IEEE Global Telecommunications Conference vol. 2* (2001), pp. 821–826.
- [7] ALTMAN. E ; AL. The evolution of transport protocols : An evolutionary game perspective. *Elsevier Computer Networks vol.53*, no. 10 (2009), pp. 1751–1759.
- [8] ALTMAN. E ; BOULOGNE. T ; EL AZOUZI. R ; JIMENEZ. T ; WYNTER. L. A survey on networking games. *Computers and Operations Research vol. 33*, no. 2 (February 2006), pp. 286–311.
- [9] ALTMAN. E ; EL-AZOUZI. E ; HAYEL. H ; TEMBINE. H. An evolutionary game approach for the design of congestion control protocols in wireless networks. *Physicomnet Workshop* (April 4 2008). Berlin, Germany.
- [10] ALTMAN. E ; EL-AZOUZI. R ; HAYEL. Y ; TEMBINE. H. An evolutionary game approach for the design of congestion control protocols in wireless networks. *Physicomnet Workshop* (April 2008). Berlin.

- [11] ALTMAN. E ; EL AZOUZI. R ; JIMENEZ. T. Slotted aloha as a stochastic game with partial information. *Proceedings of WiOpt'03, Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks, INRIA Sophia Antipolis* (March 2003). France.
- [12] ALTMAN. E ; EL EZOUZI. R. La théorie des jeux non coopératifs appliquée aux réseaux de télécommunication. *Annales des Telecommunications vol. 62* (July-August 2007), pp. 7–8.
- [13] ALTMAN. E ; HAYEL. Y. A stochastic evolutionary game approach to energy management in a distributed aloha network. technical report, Université d'Avignon, 2009.
- [14] ALTMAN. E ; KHERANI. A.A ; MICHIARDI. P ; MOLVA. R. Non-cooperative forwarding in ad hoc networks. *Lecture Notes in Computer Science Vol. 3462* (2005), pp. 100–128.
- [15] BADACHE. N. La mobilité dans les systèmes répartis. *Techniques et Sciences Informatique vol. 17*, no. 8 (1998), pp. 969–997.
- [16] BADIS. H. *Etude et conception d'algorithmes pour les réseaux mobiles et ad hoc*. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, mars 2007.
- [17] BARACHE. F. La théorie des jeux évolutionnaires et ses applications en économie. Thèse de magistère, Université A. Mira de Bejaia, 2007.
- [18] BURGOD. C. *Contribution à la sécurisation du routage dans les réseaux ad hoc*. Thèse de doctorat, Université de Limoges, Octobre 2009.
- [19] CABRALES. A. *Evolutionary games*. Winter, 2005.
- [20] CARTIGNY. J. *Contributions à la diffusion dans les réseaux ad hoc*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie de Lille, Décembre 2003.
- [21] CHARILAS. D.E ; PANAGOPOULOS. A. D ; VLACHEAS. P ; MARKAKI. O. I ; CONSTANTINOU. P. Congestion avoidance control through non-cooperative games between customers and service providers. *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering vol. 13*, no. 1 (2009), pp. 53–62.
- [22] CHARILAS. D.E ; PANAGOPOULOS. A.D. A survey on game theory applications in wireless networks. *Computer Networks vol. 54*, no. 18 (2010), pp. 3421–3430.
- [23] CHARILAS. E ; OURANIA. I ; OURANIA. M ; PANAGIOTIS. V. Admission control as a non-cooperative multi-stage game between wireless networks. pp. 1–5.
- [24] CHEN. L ; LENEUTRE. J. A game theoretical framework on intrusion detection in heterogeneous networks. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security vol.4*, no. 2 (June 2009), pp. 165–178.
- [25] DASILVA. L ; SRIVASTAVA. V. Node participation in ad-hoc and peer-to-peer networks : A game-theoretic formulation. In *Workshop on Games and Emergent Behavior in Distributed Computing environments* (18 September 2004), Birmingham.

- [26] DHOUTAUT. D. *Etude de standard IEEE802 dans le cadre des réseaux ad hoc : de la simulation à l'expérimentation*. Thèse de doctorat, Institut National des Science Appliquées de Lyon, décembre 2003.
- [27] FELEGYHAZI. M ; BUTTYAN. L ; HUBAUX. J.P. Equilibrium analysis of packet forwarding strategies in wireless ad hoc networks – the dynamic case. In *PWC 2003 Personal Wireless Communications* (2003), pp. 23–25.
- [28] FELEGYHAZI. M ; BUTTYAN. L ; HUBAUX. J.P. Nash equilibria of packet forwarding strategies in wireless ad hoc networks. *IEEE Transactions on Mobile Computing vol. 5*, no. 5 (May 2006), pp. 463–476.
- [29] FELEGYHAZI. M ; HUBAUX. J. P. Game theory in wireless networks : A tutorial. Technical report, Ecole Polytechnique Fédérale de Laussane, Jun 2006.
- [30] FOURNIE. D. A ; GOMES. C. C. ; GOUZENES. T, AND LI. Y. Introduction à l'interprétation stratégique de l'Évolution des populations. Rapport final du projet scientifique collectif, Ecole polytechnique, 2005.
- [31] FRATTASI. S ; FATHI. H ; FITZEK. F.H.P. 4g : A user-centric system. *Kluwer - Wireless Personal Communications Journal (WPC) - Special Issue on Advances in Wireless Communications : Enabling Technologies for 4G* (2006).
- [32] FUDENBERG. D ; TIROLE. J. *Game theory*. M.I.T Press Cambridge, 1991.
- [33] GARG. R ; KAMRA. A ; KHURANA. V. A game theoretic approach towards congestion control in communication networks. *ACM SIGCOMM Computer Communications Review vol. 32*, no. 3 (July 2002), pp. 47–61.
- [34] GIBBONS.R. *Game theory for applied economists*. Princeton University Press, 1992.
- [35] GUNTURI. S ; PAGANINI. F ; INSTRUMENTS. T ; BANGALORE. I. Game theoretic approach to power control in cellular cdma. *in : Vehicular Technology Conference. VTC 2003-Fall vol.4* (2003), pp. 2362–2366.
- [36] HAN. Z ; JI. Z ; RAY. L. Non-cooperative resource competition game by virtual referee in multi-cell ofdma networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications vol. 6*, no. 25 (2007), pp. 1079–1090.
- [37] HOFBAUER. J ; SIGMUND. K. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [38] HOUSTON. A.I ; MCNAMARA. J.M. evolutionarily stable strategies in the repeated hawk-dove game. *Behavioral Ecology vol. 2*, no. 3 (1991), pp. 219–227.

- [39] INGELREST. F. *Protocoles localisés de diffusion et économie d'énergie dans les réseaux ad hoc et de capteurs*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie de Lille, Juin 2006.
- [40] JIN. Y ; KESIDIS. G. Equilibria of a noncooperative game for heterogeneous users of an aloha network. *IEEE Comm. Letters* vol. 6, no. 7 (2002), pp. 282–284.
- [41] KAHN. R. The organization of computer resources into a packet radio network. *AFIPS National Computer Conference* vol. 44 (1975), pp. 177–186.
- [42] KHELLADI.L ; BADACHE. N. Les réseaux de capteurs : état de l'art. rapport de recherche, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Février 2004.
- [43] KOMALI. R.S. *Game-Theoretic Analysis of Topology Control*. doctorate thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, July 2008.
- [44] LAN. W ; YISHENG. X ; EGON. S. Resource allocation in multi-cell ofdm systems based on non-cooperative game. *17th Annual IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications* (2006).
- [45] LE GRAND. G. *Qualité de service dans des environnements Internet mobile*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, Juillet 2001.
- [46] LEINO.J. *Applications of game theory in Ad Hoc networks*. Master's thesis, Helsinki University of Technology, October 2003.
- [47] LESHEM.A ; ZEHAVID.E. Cooperative game theory and the gaussian interference channel. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* vol. 26 (2008), pp. 1078–1088.
- [48] LEYTON-BROWN. K ; SHOHAM. Y. *Essentials of game theory*. Morgan and Claypool, 2008.
- [49] LIANG. C ; DANDEKAR. K.R. Power management in mimo ad hoc networks : a game-theoretic approach. *IEEE Transactions on Wireless Communications* vol. 6, no. 4 (2007), pp. 2839–2848.
- [50] LIN. H ET AL. An integrated admission and rate control framework for competitive wireless cdma data networks using noncooperative games. *IEEE Transactions on Mobile Computation* vol.3, no. 4 (2005), pp. 243–258.
- [51] MACKENZIE. A ; DASILVA. L. *Game Theory for Wireless Communications*. Morgan and Claypool Publishers, 2006.
- [52] MACKENZIE. A ; WICKER. S. Game theory and the design of self-configuring, adaptive wireless networks. *IEEE Communications Magazine* vol. 39, no. 11 (2001), pp. 126–131.
- [53] MCNAMARA. J.M ; MERAD. S ; COLLINS. A. J. The hawk-dove game as an average cost problem. *Advances of Applied Probability* vol. 23, no. 4 (1991), pp. 667–682.

- [54] MENON. R ; MACKENZIE. A ; HICKS. J ; BUEHRER. R ; REED. J. A game-theoretic framework for interference avoidance. *IEEE Transactions on Communications vol.4*, no. 57 (2009), pp. 1087 – 1098.
- [55] MENON. R ; MACKENZIE.A.B ; BUEHRER.M.R ; REED. J.H. A game-theoretic framework for interference avoidance in ad hoc networks. In *Global Telecommunications Conference. GLOBECOM '06. IEEE* (2006), pp. 1–6.
- [56] MICHIARDI. P ; MOLVA. R. Analysis of coalition formation and cooperation strategies in mobile ad hoc networks. *Journal of Ad Hoc Networks vol. 3*, no. 2 (March 2005), pp. 193–219.
- [57] MICHIARDI. P ; MOLVA. R. Game theoretic analysis of security in mobile ad hoc networks. technical report RR-02- 070, Institute Eurecom, 2005.
- [58] MOHAPATRA. P ; KRISHNAMURTHY. S. *Ad hoc networks technologies and protocols*, springer ed. 2005.
- [59] MUHLETHALER PAUL. *802.11 et les réseaux sans fil*. Eyrolles, 2002.
- [60] NASH. J.F. The bargaining problem. *Econometrica vol. 18* (1950), pp. 155 –162.
- [61] NASH. J.F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences vol. 36* (1950), pp. 48–49.
- [62] NASH. J.F. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics vol. 54* (1951), pp. 286–295.
- [63] NASH. J.F. Two-person cooperative games. *Econometrica vol. 21* (1953), pp. 128 –140.
- [64] NEUMANN. J.V ; MORGENSTERN. O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [65] NISAN. N ; ROUGHGARDEN. T ; TARDOS. E ; VAZIRANI. V. *Algorithmic game theory*. Cambridge, 2007.
- [66] NIYATO. D, AND HOSSAIN. E. Competitive pricing for spectrum sharing in cognitive radio networks : dynamic game, inefficiency of nash equilibrium, and collusion. *IEEE Journal on Selected Areas of Communications vol. 26*, no. 1 (2008), pp. 192–202.
- [67] NIYATO. D ; HOSSAIN. E. Competitive spectrum sharing in cognitive radio networks : a dynamic game approach. *IEEE Transactions on Wireless Communications vol. 7*, no. 7 (2008), pp. 2651 – 2660.
- [68] RADJEF. M. S. Théorie des jeux et optimisation multicritère. Cours en post-graduation, Université de A.Mira de Béjaia, 2009.
- [69] ROBERTS. L.G. Aloha packet system with and without slots and capture. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review vol. 5*, no. 2 (April 1975), pp. 28–42.

- [70] SANDHOLM. W. Evolutionary implementation and congestion pricing. *Review of Economic Studies* vol. 69, no. 3 (2002), pp. 667–689.
- [71] SHAKKOTTAI. S ; ALTMAN. E ; KUMAR. A. The case for non-cooperative multihoming of users to access points. pp. 1–12.
- [72] SHENKER.S. Making greed work in networks : a game-theoretic analysis of switch service disciplines. *IEEE/ACM Transactions on Networking* vol. 3, no. 6 (December 1995), pp. 819–831.
- [73] SIMEONE. O ; BAR NESS. Y. A game-theoretic view on the interference channel with random access. In *Second IEEE International Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks* (April 17-20 2007), pp. 13–21.
- [74] SMITH. J. M. The logic of animal conflict. *Nature* vol. 246 (1973), pp. 15–18.
- [75] SMITH. J. M. The theory of games and the evolution of animal conflicts. *Journal of Theoretical Biology* vol. 47, no. 1 (1974), pp. 209–21.
- [76] SMITH. J. M. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982.
- [77] SOMASUNDARAM. K. Evolutionary stability in multi-objective games. Technical report, The Institute for systems research, 2009.
- [78] SRINIVASAN. V ET AL. Cooperation in wireless ad hoc networks. *Proc. of IEEE INFOCOM* vol. 2 (April 2003), pp. 808–817.
- [79] SRIVASTAVA. V ; NEEL. J.A ; MACKENZIE. A.B ; HICKS. J.E ; DASILVA. L.A ; REED. J.H ; GILLES. R.P. Using game theory to analyze wireless ad hoc networks. *IEEE Communications Surveys and Tutorials* vol.7, no. 4 (2007), pp. 46–56.
- [80] SURIS. J.E ; DASILVA. L.A ; HAN. Z ; MACKENZIE. A.B. Cooperative game theory for distributed spectrum sharing. In *IEEE International Conference on Communications 07* (24-28 June 2007), p. 5282–5287.
- [81] TAO. Y ; WANG. Z. Effect of time delay and evolutionarily stable strategy. *Journal of Theoretical Biology* vol. 187 (1997), pp. 111–116.
- [82] TEMBINE. H ; ALTMAN. E ; EL-AZOUZI. R ; HAYEL. Y. Delayed evolutionary game dynamics applied to the medium access control. *IEEE Internatonal Conference on Mobile Adhoc and Sensor Systems* (2007).
- [83] TEMBINE. H ; ALTMAN. E ; EL-AZOUZI. R ; HAYEL. Y. Multiple access game in ad hoc network. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools, VALUETOOLS 2007* (October 22-27 2007), Nantes, France.

- [84] TEMBINE. H ; ALTMAN. E ; EL-AZOUZI. R ; HAYEL. Y. A symmetric delay in evolutionary games. *ValueTools '07 Proceedings of the 2nd international conference on Performance evaluation methodologies and tools* (2007).
- [85] TEMBINE. H ; ALTMAN. E ; ELAZOUZI. R ; HAYEL. Y. Evolutionary games in wireless networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics vol. 40*, no. 3 (2010.), pp. 634 – 646.
- [86] THEOLEYRE. F. *Une auto-organisation et ses applications pour les réseaux ad hoc et hybrides*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, septembre 2006.
- [87] URPI. A ; BONUCCELLI. M ; GIORDANO. S. Modeling cooperation in mobile ad hoc networks : a formal description of selfishness. In *In Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks* (2003), pp. 3–5.
- [88] VEGA-REDONDO. F. *Evolution, Games, and Economic Behavior*. Oxford University Press, 1996.
- [89] VINCENT.L.T ; VINCENT.T.L.S. Evolution and control system design. *IEEE Control Systems Magazine vol. 20*, no. 5 (October 2000), pp. 20–35.
- [90] VINCENT.THOMAS L ; BROWN JOEL S. *Evolutionary game theory, naturel selection and Darwinian dynamics*. Cambridge University Press, 2005.
- [91] VLACHEAS. P ; CHARILAS. D ; TRAGOS. E ; MARKAKI. O. Maximizing quality of service for customers and revenue for service providers through a noncooperative admission control game. *ICT Mobile Summit 2008* (June 2008).
- [92] WEBB. J.N. *Game theory decisions, interaction and evolution*. Springer, 2007.
- [93] WEIBULL. J.W. *Evolutionary Game Theory*. Cambridge, MA : The M.I.T. Press, 1995.
- [94] ZAIKIUDDIN. I ; HAWKINS. T ; MOFFAT. N. Towards a game-theoretic understanding of ad-hoc routing. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science vol. 119*, no. 1 (February 2005), pp. 67–92.
- [95] ZANDER. J. Jamming games in slotted aloha packet radio networks. *Proc. of IEEE Military Communications Conference vol. 2* (1990), pp. 830–834.
- [96] ZANDER. J. Jamming in slotted aloha multi hop packet radio networks. *IEEE Transactions on Communications vol. 39*, no. 10, (October 1991), pp. 1525–1531.
- [97] ZHU. J ; RAY. L. Dynamic spectrum sharing : a game theoretical overview. *IEEE Communications Magazine vol. 45*, no. 5 (2007), pp. 88–94.



# *Résumé*

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des réseaux de télécommunications avec les éléments de la théorie des jeux, et, plus profondément, l'application de la théorie des jeux évolutionnaires dans les réseaux Ad Hoc. L'objectif est de fournir une qualité optimale de service aux utilisateurs, sous des contraintes de consommation d'énergie, de limitation de la bande de fréquence et de la connaissance limitée de l'environnement.

Notre contribution est répartie en deux parties : Dans la première partie, nous avons analysé l'application de la théorie des jeux évolutionnaires pour la gestion de la consommation d'énergie et comment la stratégie évolutionnairement stable a été obtenue consistant en la transmission avec une puissance faible.

Dans la deuxième partie, nous avons généralisé le modèle par un jeu évolutionnaire multicritère en considérant deux critères qui prennent en charge "la gestion d'accès au support de communication" et "la gestion de la consommation d'énergie". Des conditions d'existence de la stratégie évolutionnairement stable ont été établies.

**Mots clés :** Jeux évolutionnaires multicritères, Stratégie évolutionnairement stable, Réplicateur dynamique, Réseaux Ad Hoc, Consommation d'énergie, Accès au support.

# *Abstract*

In this thesis, we are interested in the study of the telecommunication networks using game theory. Especially, the application of the evolutionary game theory in Ad Hoc networks. The purpose is to provide an optimum quality of service to the users, under constraints of energy consumption, limited frequency band and limited knowledge of the environment.

Our contribution is divided into two parts : In the first part, we analyzed the application of the evolutionary game theory for the management of the energy consumption, and how evolutionary stable strategy was obtained consisting of the transmission with low power.

In the second part, we have generalized the model by a multiobjective evolutionary game by considering two criteria that take over "the management of the access to the communication support" and "the management of the energy consumption". Conditions of existence of the evolutionary stable strategy are established.

**Key words :** Multiobjective Evolutionary games, Evolutionary stable strategies, Replicator dynamic, Ad Hoc networks, Energy consumption, Support access.