



*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**Université ABDERRAHMANE MIRA BEJAÏA**

*Faculté des Sciences Exactes*

*Département Recherche Opérationnelle*

*Spécialité : Mathématiques Financières*

**Mémoire de fin de cycle**

**Thème**

*Simulations Imbriquées et Calculs de  
Risques*

En vue de l'obtention d'un Master

Soutenu le : 03/07/2018

Présenté par : AIT HELLAL Djaaffer et NADI Salim

Devant le jury composé de :

**D<sup>r</sup> KABYL Kamal**

**M<sup>elle</sup> BOUCHEBBAH Kahina**

**M<sup>r</sup> MAHIOU Hichem**

**M<sup>r</sup> MOUHOUS Fahem**

M.C.B

M.A.B

Doctorant

Doctorant

**Président**

**Promotrice**

**Examineur**

**Examineur**

*Promotion 2017/2018*

## *Remerciements*

Au terme de ce travail qui marque la fin du cycle de master de notre formation au sein de l'université ABDERRAHMANE MIRA, il nous est donné l'opportunité d'exprimer notre gratitude à tous ceux qui, de loin ou de près, ont matériellement ou moralement contribué à la réalisation de notre modeste travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre considération.

Au Seigneur Dieu, qui nous a donné la vie, l'intelligence et le courage de réaliser ce travail.

A nos chers parents par leur affection et amour de nous avoir donné la vie et l'éducation. voilà aujourd'hui nous sommes comptés parmi les hommes intellectuels du monde. Qu'ils se réjouissent du fruit de leur progéniture.

Nous exprimons nos vifs remerciements, notre profonde gratitude et notre reconnaissance à notre promotrice M<sup>elle</sup> BOUCHEBBAH Kahina, qui a dirigé ce travail dans la continuité de notre apprentissage.

Nous tenons également à remercier les membres de jury d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Enfin, Nous remercions, de tout coeur, tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## *Dédicaces*

A

NOS PARENTS

POUR LES SACRIFICES DEPLOYES A NOS  
EGARDS. POUR LEUR PATIENCE, LEUR AMOUR ET LEUR  
CONFIANCE EN NOUS. ILS ONT TOUT FAIT POUR  
NOTRE BONHEUR ET NOTRE REUSSITE. QU'ILS  
TROUVENT DANS CE TRAVAIL, LE TEMOIGNAGE DE  
NOTRE PROFONDE AFFECTION ET DE NOTRE  
ATTACHEMENT INDEFECTIBLE. NULLE DEDICACE NE  
PUISSE EXPRIMER CE QUE NOUS LEUR DEVONS QUE DIEU  
LEUR RESERVE LA BONNE SANTE ET UNE  
LONGUE VIE.

A

NOS CHERS FRERES ET SOEURS

A

TOUS NOS AMIS EN TEMOIGNAGE DE NOS SINCERES  
RECONNAISSANCES POUR LES EFFORTS QU'ILS ONT

CONSENTIS POUR NOUS SOUTENIR AU COURS DE NOS  
ETUDES.

QUE DIEU NOUS GARDE TOUJOURS UNIS.

A  
TOUTE PERSONNE QUI NOUS A APPORTE DE L'AIDE.

# Table des matières

<b>Table des Matières</b>	<b>3</b>
<b>Table des Figures</b>	<b>4</b>
<b>Liste Des Tableaux.</b>	<b>5</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Mesure de Risques Financiers</b>	<b>8</b>
1.1 Notions fondamentales . . . . .	9
1.2 Gestion de risques . . . . .	10
1.2.1 Aperçu sur la gestion de risques . . . . .	10
1.2.2 Types de gestion . . . . .	12
1.3 Mesure de risques de portefeuilles . . . . .	13
1.3.1 Mesure de risques cohérente . . . . .	13
1.3.2 Mesure de risques adaptée à l'allocation de portefeuilles . . . . .	14
1.3.3 Conséquences générales des axiomes . . . . .	15
1.4 Typologie des Risques . . . . .	16
1.4.1 Risques de marché . . . . .	16
1.4.2 Risques de crédit . . . . .	16
1.4.3 Risques opérationnels . . . . .	16
1.4.4 Risque de liquidité. . . . .	17
1.5 Mesures de risque courantes . . . . .	17

1.5.1	La volatilité . . . . .	17
1.5.2	La Value at Risk . . . . .	19
1.6	Probabilité d'une grande perte . . . . .	23
1.7	Les méthodes fréquentes pour la mesure de risque . . . . .	23
1.7.1	Méthode de Monte-Carlo . . . . .	23
1.7.2	Simulation Historique . . . . .	25
1.7.3	Méthode des simulations imbriquées . . . . .	26
1.8	Conclusion . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Estimation de la probabilité d'une grande perte via les simulations im-</b>	
	<b>briquées</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	28
2.2	Formulation du problème de simulations imbriquées . . . . .	28
2.3	Estimateur Uniform . . . . .	29
2.3.1	Estimateur Uniform optimal . . . . .	30
2.4	Estimateur Séquentiel . . . . .	33
2.5	Estimateur non uniforme Threshold . . . . .	39
2.5.1	Analyse asymptotique . . . . .	42
2.5.2	Estimateur Threshold optimal non uniforme . . . . .	43
2.6	Estimateur d'allocation Adaptative . . . . .	44
2.7	Conclusion . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Résultats numériques et discussions</b>	<b>50</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Résultats Numériques . . . . .	51
3.2.1	Paramètres expérimentaux . . . . .	51
3.2.2	Comparaison des biais . . . . .	53
3.2.3	Comparaison des MSE . . . . .	57
3.2.4	Interprétation des Résultats . . . . .	59
3.2.5	Estimation de la variance . . . . .	61
3.3	Nos résultats numériques et interprétations . . . . .	62
3.3.1	Justification des algorithmes choisis . . . . .	62

3.3.2	Interprétation des résultats obtenus . . . . .	62
3.4	Conclusion . . . . .	63
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>64</b>
A	<b>Annexes probabilités et statistiques</b>	<b>66</b>
B	<b>Annexes notions en finance</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie.</b>	<b>78</b>

# Table des figures

1.1	Plan de Markowitz . . . . .	11
1.2	Interprétation de la volatilité . . . . .	18
1.3	Graphique de La Value at Risk . . . . .	21
1.4	Loi normale . . . . .	22
2.1	Simulations Imbriquées . . . . .	29
2.2	Les bénéfices de l'échantillonnage non uniforme . . . . .	34
2.3	l'impact de l'échantillonnage additionnel . . . . .	36
3.1	la fonction du biais . . . . .	55
3.2	la distribution des échantillons de niveau intérieur . . . . .	56
A.1	Distribution normale . . . . .	69

# Liste des tableaux

1.1	Principales crises financières . . . . .	12
3.1	les résultats numériques de six tests pour les cinq algorithmes d'estimation.	59
3.2	les résultats numériques de deux tests pour les quatre algorithmes d'estimation.	62

# Introduction Générale

La multiplication des risques majeurs est l'une des caractéristiques des sociétés modernes, à tel point que, reprenant le titre d'un des plus célèbres ouvrages du sociologue allemand Ulrich Beck [5], on n'hésite plus à les qualifier de sociétés du risque. Il faut savoir mesurer les risques financiers afin d'en évaluer les conséquences. Jadis à nos jours, beaucoup de chercheurs scientifiques s'y intéressent à la quantification des risques et plusieurs approches se sont développées dans ce sens, toutes se basent sur des raisonnements mathématiques, de sorte que les événements catastrophiques ne semblent plus désormais perçus.

Le problème de l'estimation de la probabilité de grande perte via les simulations imbriquées a été abordé par Lee (1998) [12], Lee et Glynn (2003) [13], puis a été repris par Gordy et Juneja (2010) [10]. Initialement, ces auteurs ont considéré les estimateurs uniformes via les simulations imbriquées. Leurs algorithmes utilisent un nombre constant d'échantillons interne (inner samples) pour l'estimation d'un portefeuille financier. Ils ont montré qu'asymptotiquement le biais d'un estimateur uniforme est une fonction du nombre d'échantillon interne utilisé dans chaque estimation du portefeuille, tandis que sa variance est une fonction du nombre de scénarios externe. Dans le but de caractériser asymptotiquement un estimateur uniforme optimal, ce dernier nécessite un compromis entre un nombre élevé de scénarios externes (pour but de réduire sa variance) et aussi un nombre élevé de d'échantillons internes (pour but de réduire son biais). Ce compromis fait l'objet de minimiser l'erreur quadratique moyenne (MSE).

En revanche, nous marquons les travaux de Lee et Glynn (2003), Lesnevski et al

(2004,2007) [14][15], Lan et al (2008) [11], Gordy et Juneja (2008)[6], Broadie et al (2010) [6]. Dans ces derniers cités, des estimateurs non uniformes ont été proposés. En général, les algorithmes générant un tel type d'estimateurs basent sur l'idée d'attribution des échantillons supplémentaires dans la simulation interne basée sur des évolutions marginales prévues dans chaque scénario externe afin de quantifier le risque. Le principe de séquençement a été aussi considéré.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux risques de portefeuilles financiers dont nous estimons la probabilité de grande perte via les simulations imbriquées (estimating the probability of a large loss).

Ce mémoire comprend trois chapitres :

◆ **Le premier chapitre** s'intitule *Mesure de Risque Financier* où nous introduisons les concepts généraux de la gestion et la mesure de risque dans toutes ses formes. En premier lieu, nous introduisons quelques notions fondamentales sur les finances. Ensuite, nous donnons un aperçu global sur la gestion de risques. En troisième lieu, nous présentons les mesures de risques courantes en finissant par illustrer les différentes méthodes pour mesurer le risque financier.

◆ **Le deuxième chapitre** s'intitule *Estimation de la probabilité d'une grande perte via les Simulations imbriquées* où nous décrivons la méthodologie des simulations imbriquées. Nous nous concentrons sur ce qui est peut-être la mesure de risque la plus fondamentale ; la probabilité d'une grande perte. Enfin, nous présenterons les différents estimateurs développés pour le calcul de cette probabilité.

◆ **Le troisième chapitre** s'intitule *Résultats numériques et discussions* où nous présentons des résultats numériques qui illustrent les avantages des simulations imbriquées en utilisant le logiciel Matlab comme environnement de travail pour la réalisation des différentes simulations.

Le travail s'achève par une conclusion générale en mettant l'accent sur les perspectives de recherche induites par les résultats obtenus.

# 1

## Mesure de Risques Financiers

## Introduction

L'origine du concept de **risque** remonte aux civilisations les plus anciennes ; en ancienne langue italienne, *risicare* signifie **oser** [7]. Le concept de risque est souvent entendu de diverses façons et le recours aux ouvrages et dictionnaires illustre bien cette diversité de sens que nous pouvons lui donner. Il est nécessaire d'avoir une idée sur le risque au sens large et de s'intéresser, par la suite, à la définition précise du risque qui nous intéresse dans ce travail, et qui n'est autre que le risque financier dans toutes ses formes.

### 1.1 Notions fondamentales

Avant d'entrer dans le vif du sujet de ce chapitre, certaines définitions et notions doivent être présentées. Ceci afin de mieux comprendre le contexte dans lequel s'inscrit notre projet de fin d'études et qui relève du monde de la finance dont certaines notions devraient être expliquées préalablement pour la bonne compréhension de ce mémoire.[7][21]

**Définition 1.1.1.** *Un **portefeuille** désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu.*

**Définition 1.1.2.** *Les **produits/instruments financiers** sont des titres ou des contrats, dont certains sont négociables ; ils sont utilisés pour anticiper une rentabilité ou un risque monétaire. Ils se décomposent essentiellement en deux types : les actifs financiers et les produits dérivés financiers.*

**Définition 1.1.3.** *Un **actif financier** est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable sur les marchés financiers et qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus et/ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque.*

**Définition 1.1.4.** *Les **marchés financiers** sont des lieux fictifs, où se rencontrent les agents économiques ( personnes , sociétés privées et institutions publiques) ayant un excédent de capitaux (investisseurs) et ceux ayant besoin de financement, pour négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande .*

**Définition 1.1.5.** Les **placements financiers** sont des biens que l'on peut pas toucher (il est immatériel) et qui revêt une nature monétaire.

**Définition 1.1.6.** Une **action** est un titre de propriété sur une fraction du capital qu'une entreprise décide de vendre aux investisseurs. Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. L'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers.

**Définition 1.1.7.** Le **benchmark/indice de référence**, désigne tout élément servant de point de comparaison ou de référence pour évaluer la rentabilité d'un portefeuille et mesurer la performance du marché. Il peut être un indice ou une combinaison de plusieurs références. Pour un gestionnaire, un benchmark constitue un élément objectif d'appréciation de ses qualités qui lui permet de porter un jugement quantitatif et qualitatif sur les positions prises et les résultats obtenus.

**Définition 1.1.8. Option financière :** est un produit dérivé qui donne le droit, non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité d'un actif financier, appelé actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance par le vendeur de l'option, une date d'échéance donnée ou durant toute la période jusqu'à l'échéance.

Ce droit lui-même se négocie, sur un marché d'option spécialisé (géré par une bourse, au gré à gré) à un certain prix appelé Prime. Le vendeur a l'obligation d'honorer son contrat.

## 1.2 Gestion de risques

### 1.2.1 Aperçu sur la gestion de risques

Le fondement du risque se base sur un arbitrage entre la rentabilité et le risque ; c'est à dire plus le risque est élevé plus la rentabilité sera importante. Il est commun de dire que sans prendre de risque, on ne peut rien gagner. Cette image représente parfaitement le domaine de la finance. Sans prendre de risque nous ne pouvons pas obtenir une rentabilité. Tout investissement présente un risque, qui sera plus ou moins élevé selon les différents types d'actifs financiers. Chaque individu possède sa propre aversion aux risques. Si un

jeune cadre dynamique aura davantage tendance à investir dans des actifs dangereux comme des actions, un retraité investira peut-être dans des obligations d'états lesquelles présentent un risque nettement plus faible afin de garantir son capital retraite.

Prenons l'exemple d'aversion au risque suivant :

Un investisseur qui hésite de prendre un risque qui pourrait lui faire gagner plus mais qui pourrait également lui faire tout perdre.

Si on propose à quelqu'un 100000DA avec deux possibilités :

1. garder les 100000DA.
2. tirer au sort pour gagner 500000DA ou tout perdre.

Cet arbitrage entre le risque et le rendement a été parfaitement illustré par Harry Markowitz[16] détenteur d'un prix Nobel d'économie.

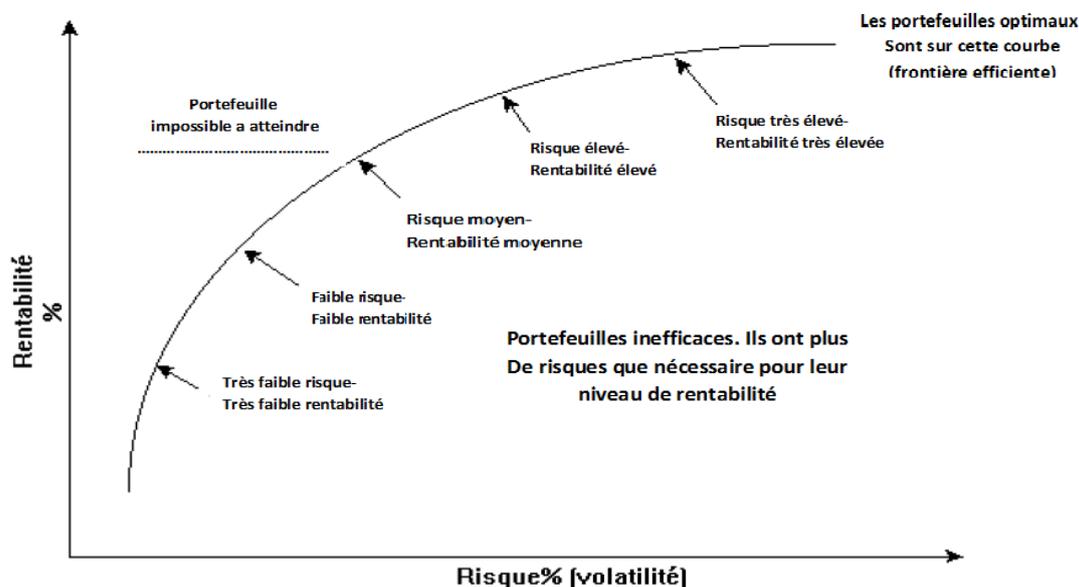


Figure 1.1 – Plan de Markowitz

On voit clairement le rapport entre le risque et le rendement. La courbe du graphique ci-dessus est appelée frontière efficiente. Au-delà de cette ligne, le rapport rendement risque n'est pas possible à atteindre. Une telle situation se traduirait par un investissement massif

et la loi de l'offre et de la demande stabiliserait cette dernière au niveau de la frontière efficiente. [17]

Durant les années 80, la gestion du risque ne préoccupait que peu les traders. Mais avec l'apparition toujours plus importante de produits financiers complexes et des crises économiques toujours plus fréquentes, tous les acteurs du monde de la finance se devaient de gérer les risques qu'ils prenaient. Au fil des années, cette gestion du risque s'est aussi complexifiée. Nous avons vu apparaître de nombreux organismes nationaux qui veillent à la solidité du secteur financier. Des accords internationaux comme ceux de Bâle<sup>1</sup> sont apparus afin de contrôler et de stabiliser les établissements bancaires.

Le tableau suivant illustre les principales crises financière qui ont bouleverser le monde des finances :

Noms	Dates
Jeudi Noir	Octobre 1929
Lundi Noir	octobre 1987
Faillite de la banque Barings	1995
Crise financière russe	1998
Quasi-faillite de LTCM	1998
Attentat du 11 sept. 2001	Septembre 2001
Crise des subprimes	2007-2008

**Table 1.1 – Principales crises financières**

La gestion de risque ne se traduit pas uniquement par la décision d'investir ou de vendre une position. Une majeure partie consiste à savoir couvrir ses avoirs. Les banques doivent assurer les positions qu'elles détiennent par des fonds propres.

## 1.2.2 Types de gestion

### Gestion active

La gestion active a pour but d'obtenir des rendements plus élevés que ceux du marché. L'investisseur adoptant cette stratégie de gestion active sélectionnera les actifs susceptibles, selon lui, de réaliser des performances au-dessus de la moyenne sur un marché et doit

---

1. Les Accords de Bâle sont des accords de réglementation bancaire signés dans la ville de Bâle (Suisse), et élaborés par le Comité de Bâle. Ils visent à garantir un niveau minimum de capitaux propres, afin d'assurer la solidité financière des banques. Voir Annexe B.4

utiliser les outils nécessaires pour battre le marché en fonction du type d'actifs, du risque du portefeuille et de l'horizon de temps.[1]

Le gestionnaire cherche donc à distinguer les tendances, les secteurs, les valeurs qui lui paraissent sous-évaluées et dont il espère une progression plus vite que le marché. Il investit et fait évoluer son portefeuille en conséquence, dans l'espoir de voir ses analyses se confirmer et ainsi son portefeuille réaliser une performance supérieure à celle de l'indice.

### Gestion passive (Indicielle)

Cette gestion fonctionne selon une méthode de réplcation de l'indice de référence. Elle consiste à investir en reproduisant de manière totalement fidèle la composition du benchmark.

L'objectif premier de ce type de gestion est de permettre à l'investisseur de recevoir la performance d'un marché sans prendre le risque de sous-performance en abandonnant du même coup tout espoir de sur-performance.[1] Avec la gestion passive, l'investisseur peut donc suivre assez facilement l'évolution de son portefeuille, dans la mesure où il subit exactement les mêmes variations de la valeur de l'indice de référence, à la hausse comme à la baisse. Toutefois, de nombreuses études ont montré que, le plus souvent, les gérants d'actifs ne sont pas en mesure de battre leur benchmark avec régularité. Certains investisseurs préfèrent la gestion indicielle qui leur garantissant la performance du marché au lieu d'une performance plus aléatoire.

## 1.3 Mesure de risques de portefeuilles

### 1.3.1 Mesure de risques cohérente

**Définition 1.3.1.** [18] Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé représentant le risque. Considérons  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. Soit  $R_f$  le rendement financier d'un placement sans risque. Une fonction  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite une mesure de risque cohérente si elle vérifie les quatre axiomes suivants :

1. La monotonie : si  $X \geq Y$ , alors  $\rho(X) \leq \rho(Y)$
2. L'homogénéité :  $\rho(\beta X) = \beta \rho(X) \forall \beta \geq 0$

3. L'invariance par translation :  $\rho(X + \beta R_f) = \rho(X) - \beta$
4. La sous-additivité :  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

### Interprétation des axiomes

1. La monotonie traduit le fait que si le risque associé à un actif est plus grand qu'un autre, alors le capital nécessaire à couvrir ce dernier est inférieur à l'autre.
2. L'homogénéité traduit le fait que le risque associé à un actif est proportionnel à son poids.
3. L'invariance par translation traduit le fait que si on ajoute un montant  $a$  au risque associé au portefeuille, sa mesure de risque diminue du même montant  $a$ . Autrement dit,  $\rho(X + \rho(R_f)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$ . On en déduit donc le fait que la mesure de risque représente le capital (la quantité d'investissement sans risque) que l'on doit ajouter à son portefeuille afin de le rendre globalement sans risque.
4. La sous-additivité traduit la diversification dans un portefeuille : la mesure de risque d'un ensemble d'actifs est inférieure à la somme des mesures de risque de ces derniers séparément.

### 1.3.2 Mesure de risques adaptée à l'allocation de portefeuilles

**Définition 1.3.2.** [2] Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé représentant le risque. Considérons  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. Soit  $R_f$  le rendement financier d'un placement sans risque. Une fonction  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite une mesure de risque cohérente si elle vérifie les quatre axiomes suivants :

1. Dominance Stochastique au second ordre :  $X \succeq_2 Y \implies \rho(X) \leq \rho(Y)$
2. Convexité :  $\rho(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta\rho(X) + (1 - \beta)\rho(Y)$  avec  $\beta \in [0, 1]$
3. Compensation des risques :  $\rho(X + \beta R_f) = \rho(X)$
4. Non-investissement :  $\rho(0) = 0$

### Interprétation des axiomes

1. La Dominance Stochastique au second ordre signifie que la mesure rend compte de la préférence des acteurs rationnels. Dans ce contexte, cette relation d'ordre signifie que ,si le revenu d'un portefeuille est préféré à celui d'un autre par tous les acteurs de marché alors il doit présenter moins de risque que le second. Cette condition est plus forte que la monotonie imposée pour les mesures cohérents puisque  $X > Y \implies X \succ_2 Y$  et que l'inverse n'est pas vrai.
2. La Convexité traduit l'intérêt pour la diversification. Si cette propriété n'est pas vérifiée, on pourrait diviser un portefeuille en deux pour diminuer le risque selon qu'il est mesuré sur le portefeuille complet ou sur la somme des deux sous-portefeuilles. On remarque aussi que la sous-additivité et l'homogénéité positive des mesure de risque cohérents entraîne la convexité, mais que l'inverse n'est pas vrai. l'homogénéité positive n'est donc pas une conséquence des axiomes développés ici.
3. La Compensation des risques signifie que l'ajout d'une position sans risque sous la forme d'une somme d'argent ne modifie pas le risque du portefeuille. On appelle aussi cette propriété l'invariance par translation ou la condition de position sans risque, mais elle n'a pas le même sens que pour les mesures de risque cohérents. La différence est que l'ajout d'une position sans risque est traduit dans ce contexte par la mesure de rentabilité plutôt que la mesure de risque.
4. Le Non-investissement est une hypothèse exprimant qu'une absence d'investissement conduit à une absence de risque. Elle est nécessaire, car elle n'est pas impliquée par les autres propriétés

### 1.3.3 Conséquences générales des axiomes

On peut ici préciser les conséquences générales qu'impliquent les axiomes posés dans les deux sections précédentes (1.3.1) (1.3.2). Les deux axiomatisations ont été élaborées avec des objectifs différents, la première pour la régulation bancaire, la seconde pour la sélection de portefeuille. Il serait donc possible de développer d'autres constructions axiomatiques traduisant des choix a priori différents. Mais il est judicieux, à ce niveau, de les relier à la réalité opérationnelle.

En pratique, il existe un certain nombre de mesure de risque courantes, plutôt d'origine statistique. C'est donc la vérification des propriété précédentes par ces mesure courantes qui sera mentionnée, et qui peut conduire à l'appréciation utile des qualités et inconvénients de chaque mesure.

## **1.4 Typologie des Risques**

Les institutions financières sont soumises à quatre types de risques : les risques de marché, les risques de crédit, les risques opérationnels et les risques de liquidité. [7][3]

### **1.4.1 Risques de marché**

Les risques de marché sont les pertes éventuelles liées aux variations du prix d'une position suite au changement des facteurs déterminant son prix. Par exemple, la volatilité, le cours des actifs financiers à proprement parler, les cours de change ou encore les taux d'intérêts.

### **1.4.2 Risques de crédit**

Les risques de crédit proviennent principalement de deux sources. Premièrement, ils traduisent les risques qu'une contrepartie ne respecte pas ses engagements contractuels (par exemple, une faillite). Deuxièmement, les risques de crédit comprennent les réductions de valeurs d'instruments financiers émis par des tiers.

### **1.4.3 Risques opérationnels**

Les risques opérationnels comportent l'ensemble des pertes liés à une erreur interne aux institutions financières. Prenons l'exemple d'une erreur humaine qui entraînerait des pertes de valeurs.

### 1.4.4 Risque de liquidité.

Le terme de *liquidité* peut être utilisé sous différents aspects, mais celui qui nous intéresse est lié aux caractéristiques du marché. Un marché parfaitement liquide se caractériserait par une facilité et une rapidité d'y réaliser des transactions et garantirait donc à tout instant un prix unique à l'achat et à la vente de manière certaine, quelles que soient les quantités en jeu. Ainsi, un actif est aussi dit liquide quand il est très rapidement négociable et échangeable à court terme, à faible coût et avec peu d'impact sur son prix.

Le risque de liquidité, est en fait le risque d'illiquidité et il représente l'incapacité de liquider immédiatement des titres et d'effectuer ainsi une transaction aux conditions du marché courant. On peut ainsi dire que les propriétés d'un actif liquide sont *l'immédiateté, la largeur, la profondeur et la résilience.*

## 1.5 Mesures de risque courantes

### 1.5.1 La volatilité

La volatilité est une quantité qu'on peut la trouver comme une grandeur statistique, qui permet d'observer des séries. [18] C'est aussi un paramètre de modélisation, comme introduit dans Black and Scholes (voir annexe B.6). Un troisième usage de la volatilité est d'être un indicateur de risque, directement ou par intégration dans des indicateurs plus complexes.

Il s'agit sûrement de l'indicateur de risque le plus couramment utilisé dans le monde financier. Il traduit le risque d'un actif financier. Concrètement, cette volatilité mesure les écarts de performance d'un actif autour de sa moyenne. Il s'agit de l'écart-type des rendements.

Toutefois, la volatilité n'est pas directement observable sur le marché, il est donc nécessaire de l'estimer et de l'évaluer avec précision en prenant en compte toutes les informations nécessaires à savoir les indices de performances de l'actif.

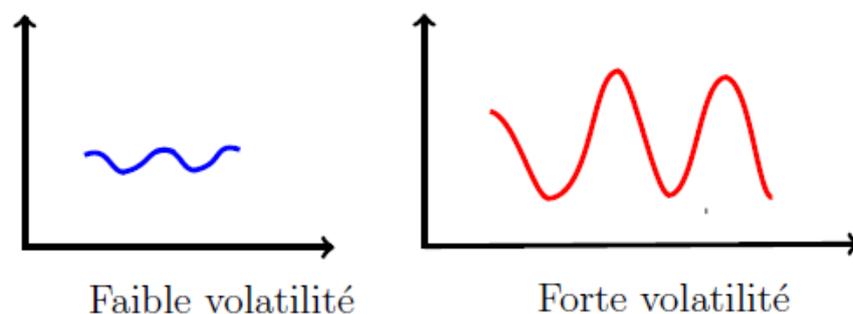


Figure 1.2 – Interprétation de la volatilité

On distingue deux types de volatilité :

- **La volatilité implicite** : Elle représente les anticipations du marché sur les variations futures des cours de l'actif : C'est la volatilité que le marché pense voir se réaliser dans le futur. Elle est décrite sous l'hypothèse que les marchés financiers sont efficients, c'est-à-dire des marchés où les prix reflètent parfaitement toute l'information disponible. Toutefois, son calcul nécessite le recours à des formules d'évaluation des options, et généralement nous retrouvons le modèle de Black and Scholes et/ou l'algorithme de Newton Raphson.
- **La volatilité historique** : Elle est fondée sur le comportement passé de l'actif, par l'utilisation de données historiques sur les cours (le plus haut, le plus bas, d'ouverture, de fermeture ...). Cette volatilité est très simple à calculer et nécessite peu d'outils mathématiques, il suffit de calculer l'écart type, que nous définiront par la suite, de la courbe historique du titre à l'échelle du temps désirée. Toutefois, la volatilité historique reste très limitée et incertaine, dans la mesure où nous utilisons des données du passé pour prédire le futur.

En ayant à la fois la volatilité implicite et la volatilité historique de l'actif, le gestionnaire/ investisseur peut comparer les deux et se forger une opinion de la volatilité à venir et ainsi implémenter les stratégies qu'il juge optimales.

Mathématiquement, la volatilité est définie comme l'écart type estimé et annualisé des performances logarithmiques [2] (indices de performance) sur une période donnée. Elle est

nécessairement positive ou nulle et s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma(t, \Delta t) = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} - \Delta t m(X) \right)^2 \right)} \quad (1.1)$$

Où :

- $N$  est le nombre de périodes élémentaires sur la période d'analyse.
- $S_i$  Le prix par jour calendaire connu sous forme discrète ( $S_i, i = 0, \dots, N$ )
- $\Delta t$  est le pas où le facteur d'annualisation, il est égal à 12 si la volatilité est mensuelle, 52 si elle est hebdomadaire ou 365 si elle est annuelle.
- $m(X)$  est la moyenne empirique où  $m(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \right)$

Il est à noter que la volatilité n'est qu'une mesure de risque parmi d'autres et qu'elle est loin d'être une mesure parfaite. En particulier, la volatilité ne considère que la dispersion moyenne des performances, propices à des horizons de placements longs. Elle est, de ce fait, inadaptée pour prendre en considération les événements rares ou extrêmes.

## 1.5.2 La Value at Risk

### L'historique de la Value at Risk

Les origines de la VaR permettent de comprendre pourquoi cet outil a fait son apparition et quels sont ses objectifs. Durant les années 80, les outils de gestion de risques n'étaient pas efficaces et ne répondaient plus aux attentes des différents acteurs de la scène financière. Les outils de l'époque ne permettaient aucune comparaison entre les actifs. De plus l'apparition des produits dérivés, l'augmentation de la volatilité sur les marchés ainsi que plusieurs crises financières comme le cas de la banque Barings ont poussés le développement d'un indicateur qui permettrait de regrouper un risque financier en un seul montant.

La notion de Value-at-Risk (VaR) est apparue pour la première fois dans le secteur de l'assurance. A la fin des années 1980, la banque Bankers Trust fut l'une des premières institutions à utiliser cette notion sur les marchés financiers aux Etats-Unis, mais c'est principalement la banque JP Morgan qui dans les années 90 a popularisée ce concept no-

tamment grâce à son système RiskMetrics<sup>2</sup>[19]

La Value-at-Risk est ensuite devenue, en moins d'une dizaine d'années, une mesure de référence du risque sur les marchés financiers, consacrée notamment par la réglementation prudentielle définie dans le cadre des accords de Bâle II.

Aujourd'hui, la VaR continue à évoluer, de nombreux scientifiques développent de nouveaux modèles plus ou moins complexes, pour améliorer la précision et la robustesse de cet indicateur de risque.

En résumé, la Value at Risk est utilisée dans trois situations spécifiques : pour mesurer un risque de marché sur une position, un portefeuille ou pour déterminer les fonds propres que la banque nécessitent afin de se couvrir.

**Définition 1.5.1.** [19] *La VaR permet de traduire un risque de perte d'une position (devises, actions, obligations, options) ou d'un portefeuille en un montant unique. Ce montant va dépendre de plusieurs paramètres comme un intervalle de confiance et un horizon temporel. La VaR est autant plus utile, car elle permet de synthétiser un risque présent sur plusieurs actifs financiers différents, en un seul montant facilement interprétable.*

---

2. Dans le contexte de la mesure des risques, un risk metric est le concept quantifié par une mesure de risque. Lors du choix d'une mesure de risque, un agent choisit un aspect du risque perçu à étudier, tel que la volatilité ou la probabilité de défaut.

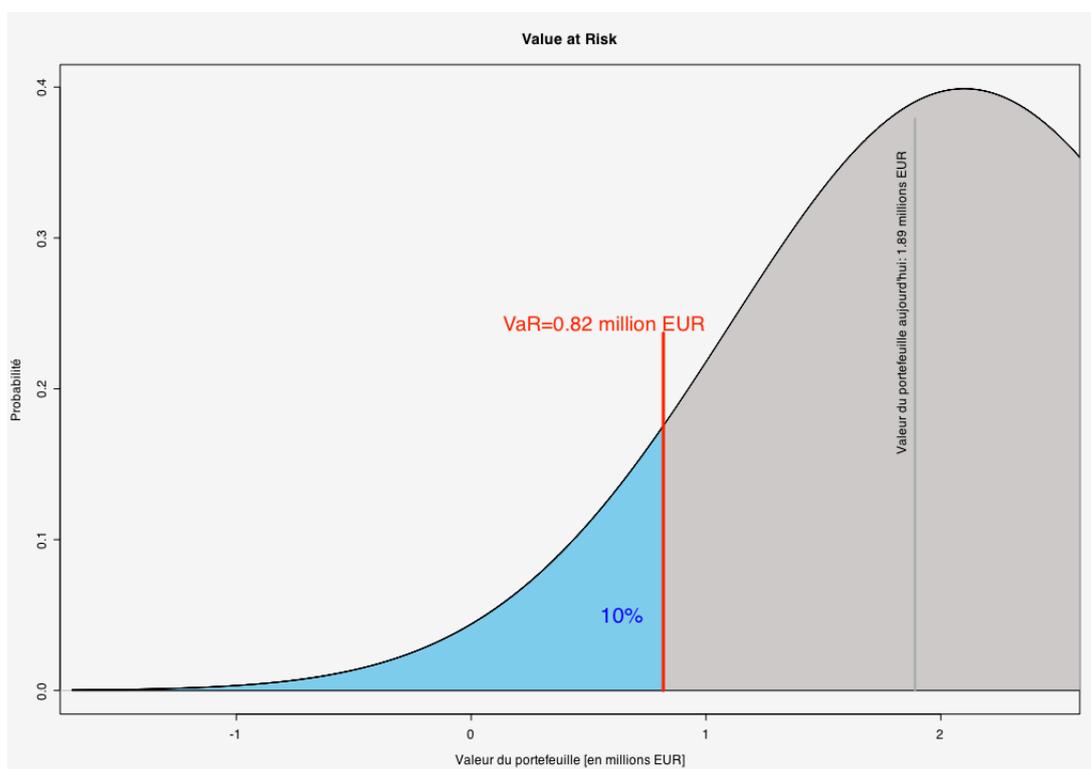


Figure 1.3 – Graphique de La Value at Risk

Avant de savoir comment une VaR se calcule, il est fondamentale de comprendre quel risque la VaR a pour but de traduire. La Value at Risk représente le risque lié aux fluctuations de prix des actifs. Les facteurs qui impactent ces variations des prix sont généralement des taux de change, des taux d'intérêt, des informations macro-économiques, etc.

La Value at Risk ne doit pas être interpréter seule. Afin d'obtenir une bonne représentation globale du risque, qu'il s'agit d'un portefeuille, d'une position ou encore de l'ensemble des actifs et passifs d'une banque, la combinaison de plusieurs indicateurs de risques est essentielle.

### Méthodes de calcul de la Value-at-Risk

La Value at Risk est à l'origine un calcul de probabilité [3]. Ces modèles de probabilités sont des lois mathématiques qui permettent d'attacher des probabilités à des variables

aléatoires. Ces modèles sont compliqués et n'ont pas besoin d'être maîtrisés pour comprendre et calculer une VaR, c'est la raison pour laquelle nous n'allons pas les détailler de manière approfondie. L'unique chose à retenir est que le modèle usuellement utilisé est la loi normale (de Gauss) qui possède des distributions se prêtant bien au calcul de la VaR.

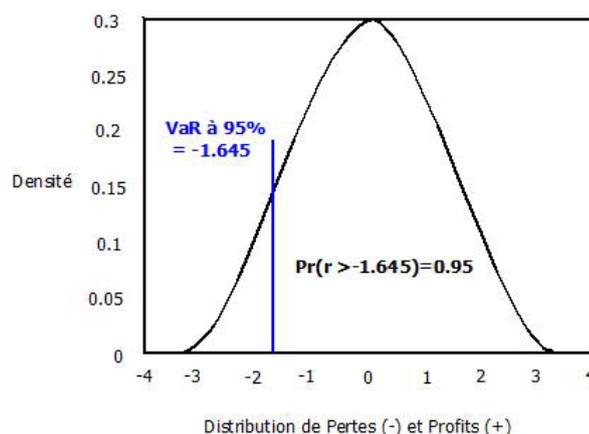


Figure 1.4 – Loi normale

Dans le contexte de la Value at Risk, cette courbe modélise la distribution des rendements. En d'autres termes plus nous sommes vers les extrêmes, plus la fréquence des rendements est faible. Au contraire, plus nous nous trouvons vers le milieu (moyenne), plus la fréquence des rendements est élevée.

Il est important de noter que ce modèle dépend de deux paramètres, la volatilité et la moyenne.

On dénombre trois grandes classes de méthodes de calcul de la VaR :

1. Méthodes **Non-paramétriques** (Historical Simulation, Weighted Historical Simulation, Monte Carlo Simulation, Filtered Historical Simulation...).
2. Méthodes **Semi-paramétriques** (CAViaR, théorie des extrêmes).
3. Méthodes **Paramétriques** (ARCH, GARCH univarié, GARCH multivarié, RiskMetrics).

Finalement nous pouvons douter de la pertinence d'une telle loi dans le calcul de la Value at Risk. En effet, ces méthodes sont basées sur des probabilités et ne peuvent pas prédire

l'avenir de manière précise. Il est vrai que les résultats de ces modèles ne se vérifient pas toujours empiriquement. Nous pouvons attribuer ces biais aux événements défavorables, comme les crashes boursiers qui selon la loi des probabilités n'ont qu'une chance sur plusieurs centaines de millions de se produire. Pourtant la réalité nous prouve souvent le contraire.

## 1.6 Probabilité d'une grande perte

Considérons le problème de la mesure du risque d'un portefeuille de titres à un moment futur  $t = \tau$  (l'horizon de risque), du point de vue d'un observateur à l'instant  $t = 0$ . Notons la valeur actuelle du portefeuille par  $X_0$  la valeur du portefeuille à l'instant  $\tau$ ,  $X_\tau$ , est en général une variable aléatoire et n'est donc pas connue à l'instant 0. Nous supposons, cependant, qu'il existe un modèle probabiliste de l'incertitude entre les instants 0 et  $\tau$ . En particulier, Supposons que  $\Omega$  est un ensemble de "scénarios" futurs ou "facteurs de risque" possibles . Chaque scénario incorpore suffisamment d'informations pour déterminer tous les prix des actifs à l'instant  $\tau$ . Ainsi, dans chaque scénario  $\omega \in \Omega$  le portefeuille a la valeur  $X_\tau(\omega)$ . La perte de valeur du portefeuille à l'instant  $\tau$  dans le scénario  $\omega$  est donné par :

$$L(\omega) \triangleq X_0 - X_\tau(\omega) \quad (1.2)$$

Une mesure de risque est une fonction  $\rho$  qui quantifie le risque de la variable aléatoire  $L$  par un scalaire  $\rho(L) \in \mathbb{R}$ . Dans notre travail, nous nous concentrerons sur ce qui est peut-être la mesure de risque la plus fondamentale, la probabilité d'une grande perte ; c'est-à-dire, étant donné un seuil  $c \in \mathbb{R}$ , nous nous sommes intéressés à estimer la probabilité de la perte  $L$  dépassant  $c$  étant définie par  $\alpha = P(L \geq c)$ .

## 1.7 Les méthodes fréquentes pour la mesure de risque

### 1.7.1 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte Carlo consiste à simuler un grand nombre de fois les comportements futurs possibles des facteurs de risque selon un certain nombre d'hypothèses, et d'en déduire une distribution des pertes et profits à partir de laquelle on estime finalement

un fractile [4]. Si cette approche peut s'appliquer, en théorie, quelles que soient les lois de probabilité suivies par les facteurs de risque, elle est couramment utilisée en pratique, pour des raisons techniques, en supposant que les variations relatives des paramètres de marché suivent des lois normales. Cette méthode convient également à tous les types d'instruments, y compris optionnels, et permet de tester de nombreux scénarios et d'y inclure explicitement des queues de distribution épaisses (événements extrêmes pris en compte dans une certaine mesure).

Cette méthode repose sur les étapes suivantes :

1. **Choix du modèle** : choisir le modèle adéquat qui va décrire de manière fiable l'évolution de notre actif financier. Dans le cas d'actions, par exemple, le modèle le plus utilisé est celui qui repose sur l'évolution d'un mouvement Brownien géométrique.
2. **Définition des paramètres du modèle choisi** : Dans le cadre du même exemple, l'évolution du cours de l'actif sera décrit par le mouvement brownien géométrique suivant :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right] \quad (1.3)$$

Où :

- $\mu$  représentera le taux sans risque de l'actif.
- $\sigma$  représentera la volatilité annuelle de l'actif.
- $\varepsilon$  est une variable aléatoire qui suit la loi normale  $N(0, 1)$ .

3. **Choix de l'horizon de temps  $T$**  : Nous allons calculer le cours de l'actif en plusieurs moments  $t$  tel que  $t \in [0, T]$ .
4. **Simulation de différentes trajectoires** : Une fois que nous avons initialisé les paramètres du modèles et que nous avons fixé l'horizon de temps  $T$ , nous allons pouvoir générer  $N$  scénarios grâce à la variable aléatoire  $\varepsilon$ . Pour chaque scénario nous aurons les valeurs du cours de l'actif de l'instant 0 à l'instant  $T$ . De cette manière  $\Delta S = S(T) - S(0)$  représentera la perte/gain génér(e) dans chaque simulation. Nous obtiendrons alors  $N$  pertes/gains potentiels que nous allons classer par ordre croissant.

### Avantages et limites de la méthode

Cette méthode présente des avantages indéniables

- **Premièrement**, son caractère très générale lui permet de s’accommoder de tous les portefeuilles possibles et de pouvoir tenir compte théoriquement de n’importe quelle distribution simulable.
- **Deuxièmement**, sa généralité même lui permet de représenter des actifs dont les distributions de rendements sont quelconques, et en particulier à queues épaisses.
- **Troisièmement**, la méthode est numériquement très simple et permet par nature d’utiliser la puissance du calcul parallèle moderne .

Néanmoins, des difficultés notables limitent l’application du Monte-Carlo

- **Premièrement**, son inconvénient majeur est l’importance des ressources de calcul nécessaires.
- **Deuxièmement**, la nécessité d’estimer les paramètres des modèles utilisés pour la génération des trajectoires aléatoires induisant un risque modèle non négligeable.
- **Troisièmement**, la communicabilité de modèles complexes que l’on peut utiliser en Monte-Carlo est en général problématique

Malgré ces réserves, la méthode de Monte-Carlo reste la référence dans les comparaisons numériques.

### 1.7.2 Simulation Historique

Cette méthode de calcul est conceptuellement très similaire aux méthodes de Monte-Carlo, car elle se base sur une valorisation complète du portefeuille. Mais elle en diffère, car elle utilise les séries historiques de valeurs de chaque actif du portefeuille pour le valoriser [4].

Dans le cas où la composition du portefeuille est très stable, on peut étudier la distribution des rentabilités journalières sur le portefeuille et calculer directement par exemple la VaR à partir de la distribution historique de ce portefeuille ; c’est à dire qu’on établit la distributions des variations de valeur du portefeuille dans le passé et qu’on calcule le point qui correspond aux plus mauvaises variations. Cette approche n’est intéressante que dans le cas où la composition du portefeuille ne change pas au cours de temps. Ceci est extrêmement

rare, la méthode historique est donc très peu utilisée. Dans la pratique, une institution ou un gérant de portefeuille modifie fréquemment ses positions et le calcul de la VaR ou autre mesure de risque doit refléter la composition actuelle d'un portefeuille.

### **1.7.3 Méthode des simulations imbriquées**

La méthode SdS consiste à effectuer deux séries de simulations imbriquées, d'où son nom de "Simulations dans les Simulations" [9]. Le premier type de simulations, appelées simulations primaires. Ces dernières sont effectuées en univers Monde Réel : elles sont construites à partir des observations historiques afin de donner une évolution réaliste des différentes variables. Dans un second temps, un certain nombre de simulations secondaires est généré conditionnellement à l'information de la première période de simulations. Ces simulations secondaires permettent de valoriser des grandeurs économiques et ainsi obtenir une distribution des valeurs de fonds propres. Elles sont effectuées en univers Risque Neutre, c'est-à-dire de manière cohérente avec les prix observés sur le marché à une date donnée afin de calculer les prix de manière " Market-to-Market " <sup>3</sup>.

## **1.8 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons donné un aperçu sur la gestion des risques, ensuite, nous avons illustré quelques mesures des risques financiers. Dans ce qui suit, nous considérons ce qui est peut-être la mesure de risque la plus fondamentale, la probabilité que la valeur future du portefeuille tombe au-dessous d'un seuil prédéfini, en d'autres termes, la probabilité d'une grande perte. Pour ce remédier, quatre algorithmes basés sur le principe de simulations imbriquées seront illustrés.

---

3. Méthode de réévaluation d'un contrat financier en fonction des prix de marché, en comparant quotidiennement le cours de compensation du jour avec le cours auquel il a été négocié.

# 2

Estimation de la probabilité d'une grande  
perte via les simulations imbriquées

## 2.1 Introduction

Dans l'approche de simulations imbriquées, une simulation externe est utilisée pour générer des scénarios financiers, et une simulation interne est utilisée pour estimer les valeurs de portefeuilles futures dans chaque scénario. Nous nous concentrons sur une mesure de risque : la probabilité d'une grande perte, et nous illustrons un ensemble d'algorithmes pour estimer ce risque. Des résultats théoriques sont présentés afin de justifier le principe et la philosophie de chaque algorithme.

## 2.2 Formulation du problème de simulations imbriquées

Pour estimer la probabilité de perte  $\alpha$  définie dans le chapitre précédant, nous faisons face à deux défis.

- D'abord, supposons  $\Omega$  l'espace des scénarios possibles est assez grand, si ce n'est pas infini. Ainsi, une approche consiste à approximer la distribution de la variable aléatoire de perte  $L$  par une distribution empirique obtenue à partir d'un échantillonnage Monte Carlo. Ceci est appelé l'étape *Externe* (où première étape) de la simulation. En particulier, si  $\omega_1 \dots \omega_n$  un  $n$ -échantillon indépendant et identiquement distribués (*i.i.d.*) généré suivant la distribution physique (ou réelle) de  $\omega$ . Alors nous pouvons approximer la probabilité de perte par

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{L(\omega_i) \geq c\}}. \quad (2.1)$$

- Cependant, dans un même scénario  $\omega_i$ , il apparaît difficile de calculer la perte  $L(\omega_i)$ . Le portefeuille peut contenir des *flux de trésorerie* aléatoires et indépendants entre un horizon  $\tau$  et l'échéance  $T$ . Ensuite, la perte  $L(\omega_i)$  doit être estimée pendant une étape *Interne* (où deuxième étape) de simulation de Monte Carlo des flux de trésorerie attendus du portefeuille sur l'intervalle  $[\tau, T]$ . La simulation interne se réalise suivant la distribution de risque neutre par rapport au scénario  $\omega_i$ . Si

$\hat{Z}_{i,1}, \dots, \hat{Z}_{i,m}$  sont  $m$  échantillons *i.i.d.* de pertes générées selon cette deuxième étape de simulation, chacune avec une moyenne,  $L(\omega_i)$ , alors on peut approximer la perte  $L(\omega_i)$  dans le scénario  $\omega_i$  par :

$$\hat{L}_i \triangleq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{Z}_{i,j}. \quad (2.2)$$

### 2.3 Estimateur Uniform

L'estimateur **Uniform** de l'Algorithme 1 décrit une procédure de *simulations imbriquées* qui combine les estimations des étapes de simulation externe et interne de façon évidente pour produire une estimation globale de la probabilité de perte. L'estimateur est en fonction de deux paramètres :  $n$  (le nombre d'échantillons de l'étape externe) et  $m$  (le nombre d'échantillons de l'étape interne). On dit que cet estimateur échantillonne uniformément dans le sens où un nombre constant d'échantillons de l'étape interne est utilisé dans chaque scénario de l'étape externe. Cette procédure est illustrée sur la figure 2.1.

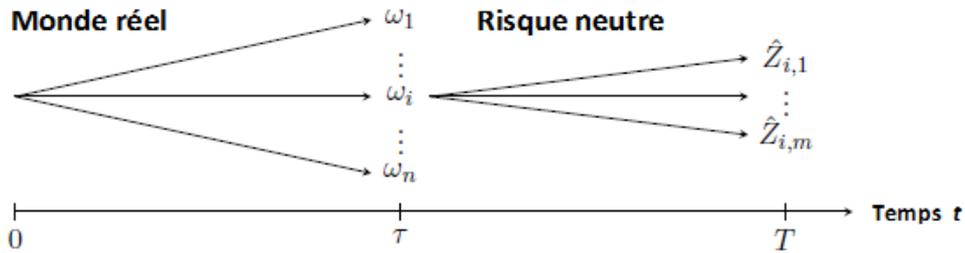


Figure 2.1 – Simulations Imbriquées

- 
- 1: **procedure**  $\text{Uniform}(m, n)$
  - 2:     **pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n$  **faire**
  - 3:         générer les scénarios  $\omega_i$
  - 4:         conditionner dans le scénario  $\omega_i$ , générer des échantillons  $\hat{Z}_{i,1}, \dots, \hat{Z}_{i,m}$  *i.i.d.* la perte du portefeuille
  - 5:         calculer l'estimation d'une perte dans le scénario  $\omega_i$ ,  $\hat{L}_i \leftarrow \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{Z}_{i,j}$
  - 6:     **fin pour**
  - 7:     calculer l'estimation d'une grande perte,  $\hat{\alpha} \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{L}_i \geq c\}}$
  - 8:     **afficher**  $\hat{\alpha}$
  - 9: **fin procedure**
- 

**Algorithm 1:** Estimer la probabilité d'une grande perte en utilisant des simulations imbriquées uniforme. Le paramètre  $m$  est le nombre d'échantillons internes par scénario. Le paramètre  $n$  est le nombre de scénarios externes.)

---

### 2.3.1 Estimateur Uniform optimal

L'estimateur Uniform est en fonction de deux paramètres :  $n$  et  $m$ . Une question évidente se pose : comment choisir au mieux les deux paramètres  $m$  et  $n$  ? Cette question a été abordée par Lee (1998) et de Gordy et Juneja (2010)[10]. D'après ces derniers, on note l'estimateur Uniform de la probabilité d'une grande perte par

$$\hat{\alpha}_{m,n} \triangleq \text{Uniform}(m, n)$$

L'objectif évident est de choisir les paramètres  $(m, n)$  afin de minimiser la MSE de l'estimateur  $\hat{\alpha}_{m,n}$  en tenant compte de la contrainte d'un temps de calculs. L'estimateur Uniform implique la génération de scénarios externes et l'échantillonnage interne. On suppose que le temps de calculs de cette estimateur est dominé par ce dernier.

Étant donné les paramètres  $(m, n)$ , un total de  $mn$  échantillons internes sont générés pour calculer l'estimateur  $\hat{\alpha}_{m,n}$ . Ainsi, compte tenu d'un taux maximum de calculs  $k$  sur le nombre total d'échantillons internes, on a le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser}_{m,n} \quad E [(\hat{\alpha}_{m,n} - \alpha)^2] \\ S.C \quad mn \leq k, \\ \quad \quad m, n \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

L'objectif de l'erreur quadratique moyenne peut être décomposé en termes de variance et de biais selon

$$E [(\hat{\alpha}_{m,n} - \alpha)^2] = \underbrace{E [(\hat{\alpha}_{m,n} - E [\hat{\alpha}_{m,n}])^2]}_{\text{variance}} + \underbrace{(E [\hat{\alpha}_{m,n} - \alpha])^2}_{\text{bais}^2}. \quad (2.4)$$

Pour analyser le comportement asymptotique de la MSE, considérons d'abord l'hypothèse suivante :

► **Hypothèse 1.** Notons par  $L(\omega)$  la perte de portefeuille dans le scénario  $\omega$  à l'instant  $\tau$ , et notons par  $\hat{L}$  un estimateur de  $L(\omega)$ , basé sur la moyenne des échantillons  $m$  i.i.d. de l'étape interne. Supposons ce qui suit :

1. La fonction de densité de probabilité conjointe  $p_m(l, \hat{l})$  de  $(L, \hat{L})$  et ses dérivées partielles  $\frac{\partial^2 p_m(l, \hat{l})}{\partial l^2}$  de  $(L, \hat{L})$  existent pour chaque  $m$  et  $(l, \hat{l})$ .
2. Pour chaque  $m \geq 1$ , , il existe des fonctions  $f_{0,m}(\cdot), f_{1,m}(\cdot), f_{2,m}(\cdot)$  tel que

$$p_m(l, \hat{l}) \leq f_{0,m}(\hat{l}), \quad \left| \frac{\partial}{\partial l} p_m(l, \hat{l}) \right| \leq f_{1,m}(\hat{l}), \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial l^2} p_m(l, \hat{l}) \right| \leq f_{2,m}(\hat{l}),$$

$\forall (l, \hat{l})$ . alors :

$$\sup_m \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{l}|^r f_{i,m}(\hat{l}) d\hat{l} < \infty, \quad \forall i = 0, 1, 2, \text{ et } 0 \leq r \leq 4.$$

**Théorème 1** [6] : *Supposons que l'hypothèse 1 est vraie, et Notons par  $f(\cdot)$  la densité de la variable de perte  $L$ . comme  $m \rightarrow \infty$ , Le biais de l'estimateur Uniform satisfait asymptotiquement*

$$E[\hat{\alpha}_{m,n} - \alpha] = \frac{\theta_c}{m} + O(m^{-3/2})$$

où :

$$\theta_c \triangleq -\Upsilon'(c), \quad \Upsilon(c) \triangleq \frac{1}{2}f(c)E[\sigma^2(\omega) | L(\omega) = c], \quad (2.5)$$

et  $\sigma^2(\omega)$  est la variance de l'échantillon de l'étape interne du scénario  $\omega$

Le Théorème 1 fournit directement une analyse asymptotique du terme de biais de la MSE. Il est peut être immédiatement utilisé pour analyser le terme de variance, comme dans le corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.1.** *Sous la condition du Théorème 1  $m \rightarrow \infty$  la variance de l'estimateur Uniform satisfait :*

$$Var(\hat{\alpha}_{m,n}) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + O(m^{-1}n^{-1}).$$

Le théorème 1 et le corollaire 2.3.1 fournissent une caractérisation asymptotique complète de la MSE de l'estimateur Uniform. La variance asymptotique de l'estimateur est déterminée par le nombre de scénarios  $n$  et décroît en tant que  $n^{-1}$ , alors que le biais asymptotique de l'estimateur est déterminé par le nombre d'échantillons de étape interne par scénario  $m$  et décroît en  $m^{-1}$ .

Compte tenu d'un taux de calcul d'un total de  $k$  échantillons d'étapes internes, un choix des paramètres  $(m, n)$  pourrait consister à échantillonner de manière égale aux étape externe et interne, c'est-à-dire définir  $m = n = k^{1/2}$ . Ceci donnerait un biais asymptotique au carré de l'ordre  $k^{-1}$ , une variance asymptotique d'ordre  $k^{-1/2}$ , et une MSE asymptotique globale d'ordre  $k^{-1/2}$ .

On peut approcher le problème de minimisation de la MSE (2.3) par le problème d'opti-

minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{m,n}{\text{minimiser}} \quad \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + \frac{\theta_c^2}{m^2} \\ S.C \quad mn \leq k, \\ m, n \geq 0. \end{array} \right.$$

Les choix optimaux sont :

$$m^* = k^{1/3}/\beta^*, n^* = \beta^* k^{2/3},$$

où :

$$\beta^* \triangleq \left( \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\theta_c^2} \right)^{1/3}, \quad (2.6)$$

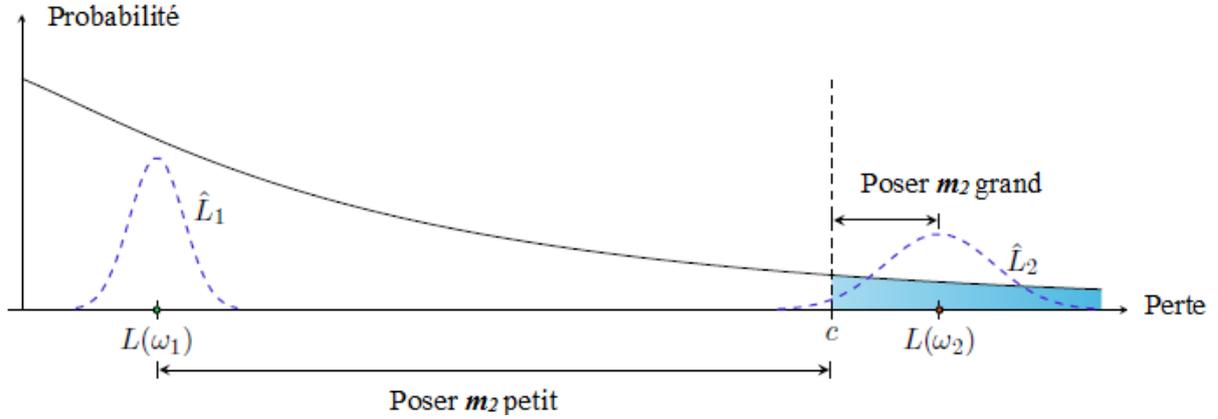
et la MSE asymptotique optimale

$$E [(\hat{\alpha}_{m,n} - \alpha)^2] = 3(\beta^*)^2 k^{-2/3} + o(k^{-2/3}). \quad (2.7)$$

Les facteurs constants optimaux dépendent de la constante  $\theta_c$ , et il n'est pas clair comment estimer efficacement  $\theta_c$  a priori. Le choix de ces facteurs constants est critique pour la performance pratique d'un estimateur Uniform.

## 2.4 Estimateur Séquentiel

L'estimateur Uniform décrit, précédemment, utilise un nombre constant d'échantillons d'étape interne pour chaque échantillon de l'étape externe.[6] Il est intuitivement clair de voir que cela peut ne pas être une stratégie efficace. Par exemple, considérons la situation illustrée à la figure (2.2). Ici, On souhaite estimer la probabilité de perte associée à la région ombrée. Il y a deux scénarios d'étape externe,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , associés aux pertes de portefeuille  $L(\omega_1)$  et  $L(\omega_2)$ , respectivement. Dans chaque scénario, ces pertes réelles sont approchées par les pertes estimées  $\hat{L}_1$  et  $\hat{L}_2$ .



**Figure 2.2 – Les bénéfices de l'échantillonnage non uniforme**

Supposons que, dans le cadre d'une simulation imbriquée Uniform, les pertes de portefeuille estimées dans chaque scénario soient réparties selon les distributions de probabilité marquée en pointillé. Ensuite, il est clair qu'il serait avantageux d'utiliser moins d'échantillons d'étape interne au scénario  $\omega_1$ , et plus d'échantillons d'étape interne au scénario  $\omega_2$ . C'est parce que l'estimation de probabilité de perte  $\hat{\alpha}$  est calculée selon.

$$\hat{\alpha} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{L}_i \geq c\}}. \tag{2.8}$$

Ainsi, seule la position ordinale des estimations  $\hat{L}_1$  et  $\hat{L}_2$  par rapport au seuil de perte  $c$  est pertinente. Étant donné l'incertitude de l'estimation  $\hat{L}_1$ , il est à peu-près certain que  $L(\omega_1) < c$  et en fait, cela pourrait vraisemblablement être déduit en utilisant moins d'échantillons internes dans le scénario  $\omega_1$ . Compte tenu de l'incertitude de l'estimation  $\hat{L}_2$ , le fait que  $L(\omega_2) \geq c$ , en revanche, est beaucoup moins certain. Sans plus d'échantillons internes dans ce scénario, il peut y avoir un risque important de classification erronée de  $L(\omega_2)$ . Ces observations suggèrent qu'une stratégie d'échantillonnage non uniforme peut être supérieure : le nombre d'échantillons internes  $m_1$  employés au scénario  $\omega_1$  devrait être inférieur au nombre d'échantillons internes  $m_2$  employés dans le scénario  $\omega_2$ .

La discussion ci-dessus suggère que dans un scénario avec une perte  $L(\omega)$  bien supérieure à  $c$  ou bien inférieure à  $c$ , peu d'échantillons internes sont nécessaires. Si la perte  $L(\omega)$  est proche de  $c$ , de nombreux échantillons internes sont nécessaires.

Malheureusement, a priori, on ne sait pas comment le faire. Il est impossible de connaître la valeur de  $L(\omega)$ , c'est exactement ce qu'on cherche à estimer via la simulation interne de Monte-Carlo.

On propose une procédure qui maintient simultanément des estimations de la perte dans chaque scénario tout en essayant séquentiellement d'allouer des échantillons internes supplémentaires à travers les scénarios externes. D'abord l'algorithme sera motivé par une justification informelle, puis il sera décrit précisément. En particulier, supposons qu'il existe  $n$  scénarios  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Pour chaque scénario  $\omega_i$ , supposons que  $m_i$  échantillons internes  $\hat{Z}_{i,1}, \dots, \hat{Z}_{i,m_i}$  ont été créés, ce qui donne l'estimation de perte  $\hat{L}_i \triangleq \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \hat{Z}_{i,j}$ . Il en résulte une probabilité globale d'une estimation d'une grande perte  $\hat{\alpha}$  donnée par (2.8).

Sans perte de généralité, supposons que  $\hat{L}_i \geq c$ . Supposons qu'on souhaite rajouter un échantillon supplémentaire dans l'étape interne. Si on doit rajouter l'échantillon supplémentaire dans le scénario  $\omega_i$ , cela entraînerait une nouvelle estimation de perte donnée par :

$$\hat{L}'_i \triangleq \frac{1}{m_i + 1} \sum_{j=1}^{m_i+1} \hat{Z}_{i,j} = \frac{1}{m_i + 1} \hat{Z}_{i,m_i+1} + \frac{m_i}{m_i + 1} \hat{L}_i.$$

L'échantillon supplémentaire n'aura d'impact sur l'estimation  $\hat{\alpha}$  que si  $\hat{L}'_i$  se trouve du côté opposé du niveau de seuil  $c$  par rapport à  $\hat{L}_i$ ; c'est-à-dire si  $\hat{L}'_i < c$ . Ceci est illustré dans la figure 3. Pour maximiser évidemment l'impact de l'échantillon supplémentaire unique, on cherche à choisir le scénario  $\omega_i$  qui maximise la probabilité d'un tel changement de signe. Supposons que l'échantillon additionnel  $\hat{Z}_{i,m_i+1}$  présente une variance  $\sigma_i^2 \triangleq \sigma^2(\omega_i)$

$$\begin{aligned} P\left(\hat{L}'_i < c\right) &= P\left(\hat{Z}_{i,m_i+1} - L(\omega_i) < -m_i\left(\hat{L}_i - c\right) - (L(\omega_i) - c)\right) \\ &\approx P\left(\hat{Z}_{i,m_i+1} - L(\omega_i) < -m_i\left|\hat{L}_i - c\right|\right) \leq \left(1 + \frac{m_i^2}{\sigma_i^2}\left|\hat{L}_i - c\right|^2\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

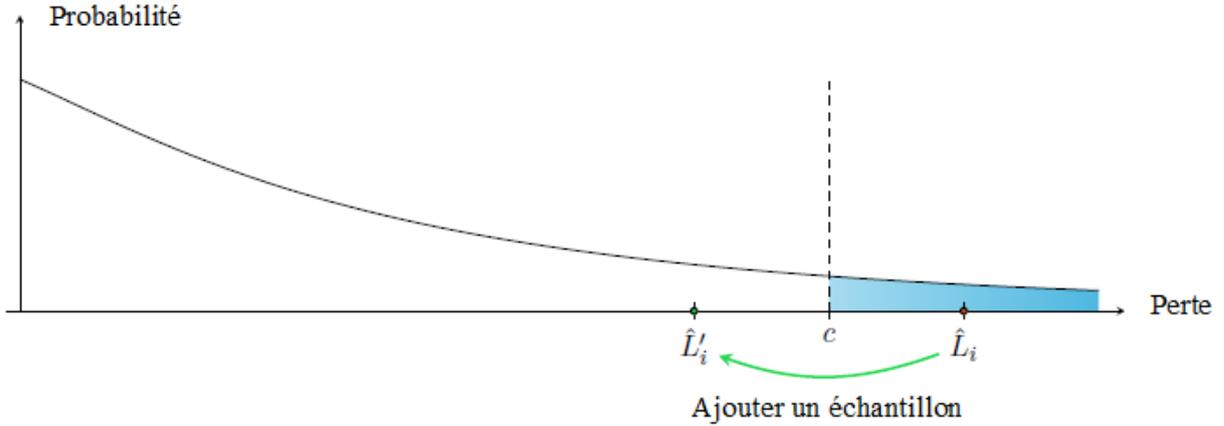


Figure 2.3 – l'impact de l'échantillonnage additionnel

Ici, l'approximation découle de l'hypothèse que  $m_i \gg 1$  de sorte que,  $-m_i \left( \hat{L}_i - c \right) - (L(\omega_i) - c) \approx -m_i \left| \hat{L}_i - c \right|$

L'inégalité découle de l'inégalité de Chebyshev unilatérale<sup>1</sup>. Par analogie au cas symétrique (où  $\hat{L}_i < c$ ), une règle d'affectation évidente qui cherche à maximiser la probabilité d'un changement de signe estimé via la borne de Chebyshev (2.9) choisira d'ajouter l'échantillon supplémentaire interne dans le scénario  $\omega_{i^*}$ , où

$$i^* \in \arg \min_i \frac{m_i}{\sigma_i} \left| \hat{L}_i - c \right|. \quad (2.10)$$

Si  $\hat{Z}_{i,m_i+1}$  est normalement distribué, une telle distribution est spécifiée par la moyenne  $L(\omega_i)$  et une variance  $\sigma_i^2$  de sorte que

$$P \left( \hat{Z}_{i,m_i+1} < z \right) = G \left( \frac{z - L(\omega_i)}{\sigma_i} \right),$$

où  $G$  est une fonction croissante. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} P \left( \hat{L}'_i < c \right) &\approx P \left( \hat{Z}_{i,m_i+1} - L(\omega_i) < -m_i \left| \hat{L}_i - c \right| \right) \\ &= G \left( -\frac{m_i}{\sigma_i} \left| \hat{L}_i - c \right| \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Maximiser la probabilité d'un changement de signe selon (2.11) entraîne également la règle

1. Pour cette inégalité voir [6]

(2.10).

On appelle la quantité minimisée en (2.10),  $(\frac{m_i}{\sigma_i})|\hat{L}_i - c|$ , la marge d'erreur associée au scénario  $\omega_i$ . L'estimateur Séquentiel de l'algorithme 2 utilise la règle d'allocation (2.10). Cet estimateur prend un triplet  $(m^0, \bar{m}, n)$  des paramètres d'entrée. Ici,  $n$  est le nombre souhaité de scénarios d'étape externe,  $m^0$  est le nombre initial d'échantillons d'étape interne par scénario, et  $\bar{m}$  est le nombre moyen souhaité d'échantillons d'étapes internes par scénario à la fin de l'algorithme. L'algorithme se déroule comme suit : d'abord,  $n$  scénarios sont générés et, pour chaque scénario,  $m^0$  échantillons d'étape interne sont exécutés. Le reste  $\bar{m}n - m^0n$  échantillons d'étape interne sont attribués un à la fois d'une manière évidemment séquentielle comme dans (2.10).

- 
- 1: **procedure** Séquentiel( $m^0, \bar{m}, n$ )
  - 2:     **pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n$  **faire**
  - 3:         générer les scénarios  $\omega_i$
  - 4:         conditionner dans le scénario  $\omega_i$ , générer des échantillons  $\hat{Z}_{i,1}, \dots, \hat{Z}_{i,m^0}$  *i.i.d.* la perte du portefeuille
  - 5:          $m_i \leftarrow m^0$
  - 6:     **fin pour**
  - 7:     **tant que**  $\sum_{i=1}^n m_i < \bar{m}n$  **faire**
  - 8:          $i^* \in \arg \min_i m_i \frac{|\hat{L}_i - c|}{\sigma_i}$ , où, pour chaque  $1 \leq i \leq n$       $\hat{L}_i$  est  
           l'estimation courante d'une perte dans le scénario  $\omega_i, \hat{L}_i \leftarrow \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \hat{Z}_{i,j}$   
           et  $\sigma_i$  est l'écart-type de la distribution de perte dans le scénario  $\omega_i$
  - 9:         générer un échantillon  $\hat{Z}_{i^*, m_{i^*} + 1}$  dans le scénario  $\omega_{i^*}$
  - 10:          $m_{i^*} \leftarrow m_{i^*} + 1$
  - 11:     **fin tant que**
  - 12:     calculer l'estimation d'une grande perte,  $\hat{\alpha} \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{L}_i \geq c\}}$
  - 13:     **afficher**  $\hat{\alpha}$
  - 14: **fin procedure**
- 

**Algorithm 2:** Estimer la probabilité d'une perte importante en utilisant une simulation imbriquée séquentielle non uniforme. Le paramètre  $m^0$  est le nombre initial d'échantillons internes par scénario. Le paramètre  $\bar{m}$  est le nombre moyen d'échantillons internes par scénario à la fin de la simulation. Le paramètre  $n$  est le nombre de scénarios.

---

Notons que l'estimateur Séquentiel nécessite le calcul de l'écart-type conditionnel  $\sigma_i^2$  des pertes dans chaque scénario  $\omega_i$ , pour calculer la marge d'erreur. Ces écarts-types conditionnels peuvent être estimés au cours de déroulement de l'algorithme d'estimation. De plus, l'estimateur Séquentiel nécessite un sur-débit de calcul supplémentaire au-delà de celui de l'estimateur Uniform.

L'estimateur Séquentiel nécessite également plus de mémoire que l'estimateur Uniform. En particulier, l'estimateur Uniform peut être mis en oeuvre de telle sorte que les scénarios sont traités un à la fois et n'ont jamais besoin d'être stockés simultanément en mémoire. Une telle mise en oeuvre aurait une exigence de mémoire constante (c'est-à-dire indépendante de  $m$  et  $n$ ). Pour l'estimateur Séquentiel, chacun des  $n$  scénarios externes doit être stocké en mémoire au cours de l'algorithme, d'où l'exigence de mémoire d'ordre  $n$ . L'estimateur Séquentiel présente certaines similitudes avec les estimateurs non uniformes qui ont été proposés dans la littérature. Lee et Glynn (2003)[13] proposent un estimateur imbriqué non uniforme dans le cas où l'espace du scénario est discret. Ils choisissent le nombre d'échantillons internes  $m_i$  dans chaque scénario  $\omega_i$  afin d'optimiser certaines asymptotiques de grande déviation. En utilisant une approximation gaussienne comme heuristique, il en résulte :

$$m_i \propto \frac{\sigma_i^2}{(L(\omega_i) - c)^2}. \quad (2.12)$$

Parce que la perte  $L(\omega_i)$  dans le scénario  $\omega_i$  est inconnue. Lee et Glynn (2003) proposent un algorithme à deux passages : dans le premier passage, un petit nombre d'échantillons internes sont générés dans chaque scénario et sont utilisés pour calculer les allocations d'échantillons internes dans un deuxième "cycle de production".

## 2.5 Estimateur non uniforme Threshold

L'analyse de l'estimateur Séquentiel déjà décrit présente un certain nombre de défis. Le plus important d'entre eux est le fait que, au cours de la simulation imbriquée de l'estimateur Séquentiel, les estimations de pertes  $\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n$  sont des variables aléatoires dépendantes. Cette dépendance est induite par la règle de sélection (2.10) qui, à chaque instant, dépend simultanément de toutes les estimations de pertes. Pour rendre l'analyse traitable, on considère une modification de l'estimateur Séquentiel qui aboutit à des estimations de perte *indépendantes* tout en conservant le principe d'échantillonnage non uniforme[6] .

En particulier, rappelons que l'estimateur Séquentiel prend en entrée un paramètre  $\bar{m}$ , en spécifiant le nombre moyen souhaité d'échantillons internes dans chaque scénario, et

un paramètre  $n$ , spécifiant le nombre de scénarios souhaité. Au cours de l'algorithme,  $\bar{m}n$  d'échantillons d'étape interne seront générés. Ces échantillons sont alloués de façon séquentielle afin de minimiser évidemment la marge d'erreur,  $\frac{m_i}{\sigma_i} |\hat{L}_i - c|$ , uniformément sur  $1 \leq i \leq n$ .

Si on suppose que l'algorithme se trouve dans un état où un nombre significatif d'échantillons internes a été généré, c'est-à-dire,  $m_i \gg 1$  pour chaque  $i$ , alors les marges d'erreur pourraient être approximativement constantes ; sinon, plus d'échantillons internes auraient été générés pour les scénarios avec des marges d'erreur plus faibles. On pourrait obtenir un effet similaire en fixant un seuil  $\gamma > 0$  et en continuant à ajouter des échantillons de l'étape interne à chaque scénario  $\omega_i$  jusqu'à ce que la marge d'erreur dépasse  $\gamma$ , c'est-à-dire,

$$\frac{m_i}{\sigma_i} |\hat{L}_i - c| \geq \gamma. \quad (2.13)$$

C'est précisément ce qui est fait par l'estimateur de Threshold de l'algorithme 3.

---

```

1: procedure Threshold( $\gamma, n$ )
2:   pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
3:     générer les scénarios  $\omega_i$ 
4:     poser  $\sigma_i$  pour être l'écart-type de la distribution de perte dans le scénario  $n$ 
        $\omega_i$ 
5:      $m_i \leftarrow 0$ 
6:     répéter
7:       générer un échantillon  $\hat{Z}_{i, m_i+1}$  dans le scénario  $n$   $\omega_i$ 
8:        $m_i \leftarrow m_i + 1$ 
9:       calculer l'estimation d'une perte dans le scénario  $\omega_i, \hat{L}_i \leftarrow \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \hat{Z}_{i,j}$ 
10:      jusqu'à  $\frac{m_i}{\sigma_i} |\hat{L}_i - c| \geq \gamma$ 
11:     fin pour
12:     calculer l'estimation d'une grande perte,  $\hat{\alpha} \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{L}_i \geq c\}}$ 
13:     afficher  $\hat{\alpha}$ 
14: fin procedure

```

---

**Algorithm 3:** Estimer la probabilité d'une perte importante en utilisant une simulation imbriquée non uniforme basée sur un seuil. Le paramètre  $\gamma$  est le seuil de marge d'erreur. Le paramètre  $n$  est le nombre de scénarios.

---

À un niveau élevé, les estimateurs Séquentiel et Threshold sont assez similaires. Les deux cherchent à allouer de façon non uniforme des échantillons d'étape interne en fonction de la minimisation de la marge d'erreur. Cependant, ils sont paramétrés différemment. L'estimateur Séquentiel prend comme entrée le paramètre  $\bar{m}$ , qui est le nombre moyen d'échantillons de l'étape interne. D'autre part, l'estimateur de Threshold prend en entrée le paramètre  $\gamma$ , le seuil de la marge d'erreur. Comme on l'a déjà vu, pour les grandes valeurs de  $\bar{m}$  et  $\gamma$ , ces deux algorithmes donnent des résultats similaires.

D'un point de vue pratique, l'estimateur Séquentiel est plus naturel. En particulier, si tous les autres paramètres sont fixes, il est facile de choisir une valeur pour  $\bar{m}$ . Ce paramètre spécifie explicitement le nombre total d'échantillons d'étape interne à générer par  $\bar{m}n$ , et détermine donc le temps d'exécution de l'algorithme. Ainsi, on peut choisir  $\bar{m}$  en fonction de la durée de fonctionnement disponible. Dans l'estimateur Threshold, le paramètre  $\gamma$  spécifie le nombre total d'échantillons d'étape interne à générer, et détermine donc indirectement le temps d'exécution. Il n'est pas clair, cependant, comment choisir  $\gamma$  a priori qui assure un certain temps de fonctionnement.

D'un point de vue théorique, cependant, l'estimateur Threshold s'avère beaucoup plus facile à analyser. La raison principale est que, à tout moment de l'exécution de l'algorithme, les estimations de pertes  $\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n$  sont des variables aléatoires *i.i.d.*. Cette structure *i.i.d.* permet l'analyse de l'algorithme global via l'analyse d'un scénario d'étape externe unique.

De plus, l'estimateur de Threshold a une autre interprétation intéressante. Si l'on considère un seuil  $\gamma$ , considérons un scénario  $\omega_i$  avec des échantillons de pertes internes  $\hat{Z}_{i,1}, \hat{Z}_{i,2}, \dots$ . En examinant (2.13), l'algorithme générera des échantillons  $m_i$  de niveau interne dans ce scénario, avec

$$m_i = \inf \{ m > 0 : |S_m^{(i)}| \geq \gamma \}, \quad (2.14)$$

où, pour  $m \geq 0$ , la somme partielle est définie par

$$S_m^{(i)} \triangleq \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_i} (\hat{Z}_{i,j} - c). \quad (2.15)$$

### 2.5.1 Analyse asymptotique

Définissons  $\tilde{\alpha}_{\gamma,n}$  comme étant l'estimation Threshold, c'est-à-dire

$$\tilde{\alpha}_{\gamma,n} \triangleq \text{Threshold}(\gamma, n)$$

L'erreur quadratique moyenne est décomposée en termes de biais et de variance.

► **Hypothèse 2.** *Supposons ce qui suit :*

1. *Sous réserve d'un scénario d'étape externe  $\omega \in \Omega$ , les échantillons de niveau interne  $\hat{Z}_{i,1}, \hat{Z}_{i,2}, \dots$  sont des variables aléatoires normales i.i.d.. Indiquons l'écart-type de ces échantillons par  $\sigma(\omega_i)$ .*
2. *Dans un scénario  $\omega \in \Omega$ , définissons la perte normalisée  $\mu(\omega) \triangleq \frac{L(\omega) - c}{\sigma(\omega)}$ . Ensuite, la fonction de densité de probabilité  $p$  de  $\mu$ ,*

$$p(u) \triangleq \frac{d}{du} P(\mu \leq u),$$

*existe et est continuellement différentiable au voisinage de 0.*

on s'intéresse à la précision asymptotique de l'estimateur Threshold où l'estimation résultante converge vers la vraie valeur, c'est-à-dire comme  $n \rightarrow \infty$  et  $\gamma \rightarrow \infty$  (plusieurs scénarios de l'étape externe) et  $\gamma \rightarrow \infty$  (plusieurs échantillons de l'étape interne). Un premier résultat est le théorème suivant, qui caractérise le biais asymptotique de cet estimateur.

**Théorème 2** [6] : *Sous l'hypothèse 2, comme  $\gamma \rightarrow \infty$ , le biais asymptotique de l'estimateur Threshold satisfait*

$$E[\tilde{\alpha}_{\gamma,n} - \alpha] = O(\gamma^{-2}).$$

Ce qui suit est un corollaire immédiat du théorème 2 et fournit une expression asymptotique de la variance de l'estimateur Séquentiel Threshold.

**Corollaire 2.5.1.** *Sous les conditions du théorème 2, comme  $\gamma \rightarrow \infty$ , La variance de l'estimateur de Threshold satisfait*

$$\text{Var}(\tilde{\alpha}_{\gamma,n}) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + O(\gamma^{-2}n^{-1}).$$

Soit  $\bar{m}(\gamma)$  le nombre attendu d'échantillons de l'étape interne dans un seul scénario de l'étape externe pour un paramètre  $\gamma$  donné :

$$\bar{m}(\gamma) \triangleq E \left[ \inf \left\{ m > 0 : \frac{m}{\sigma(\omega)} \left| \hat{L}(\omega) - c \right| \geq \gamma \right\} \right]. \quad (2.16)$$

Le théorème suivants, caractérise le taux de croissance du temps d'exécution en fonction de  $\gamma$ .

**Théorème 3** [6] : *Sous l'hypothèse 2, comme  $\gamma \rightarrow \infty$ , le nombre d'échantillons prévus d'étapes internes dans chaque scénario pour l'estimateur Threshold satisfait  $\bar{m}(\gamma) = O(\gamma \log \gamma)$ .*

## 2.5.2 Estimateur Threshold optimal non uniforme

Les théorèmes 2 et 3 et le corollaire 2 permettent une comparaison entre l'estimateur Uniform et l'estimateur Threshold non uniforme. En particulier, supposons que  $\hat{\alpha}_{m,n}$  est l'estimation uniforme avec  $n$  scénarios et  $m$  échantillons d'étapes internes. Comme déjà discuté, quand  $m, n \rightarrow \infty$ , Ceci a un biais et une variance asymptotiques.

$$\begin{aligned} E[\hat{\alpha}_{m,n} - \alpha] &= \frac{\theta_c}{m} + O(m^{-3/2}), \\ \text{Var}(\hat{\alpha}_{m,n}) &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + O(m^{-1}n^{-1}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'autre part, supposons que  $\tilde{\alpha}_{\gamma,n}$  soit l'estimateur de Threshold non uniforme avec  $n$  scénarios et un seuil  $\gamma$ . D'après le théorème 3, cet estimateur utilisera, en moyenne,  $\bar{m} \triangleq \bar{m}(\gamma) = O(\gamma^{1+\epsilon})$  échantillon dans l'étape interne par scénario, pour un certain  $\epsilon > 0$ . On peut exprimer les résultats asymptotiques du biais et de la variance du Théorème 2 et

du Corollaire 2 en fonction de  $n$  et  $\bar{m}$  par :

$$\begin{aligned} E[\tilde{\alpha}_{\gamma,n} - \alpha] &= \frac{\theta_c}{\bar{m}} + O(\bar{m}^{-2+\epsilon}), \\ \text{Var}(\tilde{\alpha}_{\gamma,n}) &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + O(\bar{m}^{-2}n^{-1}). \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

en appuyant toujours sur les résultats de théorème 2 et le corolaire 2.5.1 la MSE de l'estimateur de Threshold non uniforme, est donnée par

$$E[(\tilde{\alpha}_{\gamma,n} - \alpha)^2] \leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + \frac{C}{\gamma^4},$$

pour  $n$  et  $\gamma$  suffisamment grands et un choix approprié de la constante  $C$ . On peut trouver un estimateur Threshold non uniforme avec une MSE faible en considérant le problème d'optimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\gamma,n}{\text{minimiser}} \quad \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + \frac{C}{\gamma^4} \\ \text{S.C} \quad \bar{m}(\gamma)n \leq k, \\ \quad \quad \gamma, n \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Pour tout  $\epsilon$  positif et étant donné un taux de calcul  $k$ , supposons qu'on choisit  $\gamma^* \propto k^{4/5-\epsilon}$ . Ensuite, on a  $\bar{m}(\gamma^*)n^* = O(k^{1-\epsilon} \log k) = o(k)$ .

## 2.6 Estimateur d'allocation Adaptive

Dans cette section, on considère une approche d'allocation adaptative. Cet algorithme est une heuristique qui estime le choix optimal de  $\bar{m}$  et  $n$  à chaque instant. Il affine ces estimations au cours de la simulation. La variance est déterminée par le nombre de scénarios ( $n$ ), et le biais au carré est déterminé par le nombre d'échantillons internes ( $\bar{m}$ ). L'algorithme Adaptatif estime ces quantités et augmente ensuite le nombre de scénarios ou augmente le nombre d'échantillons internes selon que l'MSE est dominée par la variance ou le carré biaisé. Plus précisément, l'estimateur Adaptatif de l'algorithme 4 se déroule comme suit :

1. La simulation est initialisée (lignes 2-7) en générant  $n^0$  scénarios avec  $m^0$  échantillons

internes pour chaque scénario.

2. Le taux de calculs de la simulation  $k$  est divisé en  $K \triangleq \frac{k}{\tau_e}$  intervalles (ou époques) de longueur  $\tau_e$  (sauf la première époque qui est de longueur  $\tau_e - n^0 m^0$  à cause de l'initialisation).
3. Au début de la  $\ell^{me}$  époque (ligne 9), des estimations sont faites pour le biais au carré et la variance de l'estimation de la probabilité de perte, étant donné les scénarios et les échantillons qui ont été générés jusqu'ici. Plus précisément, compte tenu de l'estimation de la probabilité de perte

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{L}_i \geq c\}},$$

le biais est approximé selon

$$E[\hat{\alpha} - \alpha] \approx \hat{B} \triangleq \hat{\alpha} - \bar{\alpha}, \quad (2.20)$$

où :

$$\bar{\alpha} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi \left( \frac{\sqrt{m_i} (\hat{L}_i - c)}{\sigma_i} \right).$$

Cette approximation est basée sur le Théorème Central Limite : dans chaque scénario  $\omega_i$ , lorsque le nombre d'échantillons  $m_i$ , est grand, chaque estimation de perte  $\hat{L}_i$ , peut être approchée par une distribution normale de moyenne  $L(\omega_i)$  et une variance  $\sigma_i^2/m_i$ . Par conséquent, étant donné un ensemble fixe de scénarios  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , on pourrait estimer le biais par

$$E[\hat{\alpha} - \alpha] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ P(\hat{L}_i \geq c) - \mathbb{1}_{\{L(\omega_i) \geq c\}} \right\} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \Phi \left( \frac{\sqrt{m_i} (L(\omega_i) - c)}{\sigma_i} \right) - \mathbb{1}_{\{L(\omega_i) \geq c\}} \right\}.$$

Puisque la valeur

$$L(\omega_i)$$

est inconnue en pratique, on peut l'approximer par son estimateur  $\hat{L}_i$ . Cela résulte

en (20). On approche la variance par

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) \approx \hat{V} \triangleq \frac{\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})}{n}. \quad (2.21)$$

4. Supposons qu'il existe  $n$  scénarios externes et une moyenne de  $\bar{m} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$  échantillons internes par scénario au début de la  $\ell^{me}$  époque. On s'attend à ce que le biais au carré diminue en fonction de  $\bar{m}^{-4+\epsilon}$  et que la variance diminue en proportion à  $n^{-1}$ . Supposons ensuite que le nombre de scénarios et d'échantillons à la fin de la  $\ell^{me}$  époque est donné par  $n'$  et  $\bar{m}'$ . On peut estimer le biais au carré à la fin de la  $\ell^{me}$  époque, en fonction de l'estimation du biais  $\hat{B}$  au début, par  $\hat{B}^2 \left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}'}\right)^4$ . De même, la variance à la fin de la  $\ell^{me}$  époque peut être estimée par  $\hat{V}^2 \left(\frac{n}{n'}\right)$ . Ainsi, au début de la  $\ell^{me}$  époque, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\bar{m}', n'}{\text{minimiser}} \quad \hat{B}^2 \left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}'}\right)^4 + \hat{V} \left(\frac{n}{n'}\right) \\ S.C \quad \bar{m}' n' = \bar{m} n + \tau_e, \\ \quad \quad \quad n \leq n' \leq n + \tau_e, \\ \quad \quad \quad \bar{m}' \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Ce problème cherche à faire un choix de  $\bar{m}', n'$  qui aboutit à une erreur quadratique moyenne minimale à la fin de la  $\ell^{me}$  époque.

La première contrainte garantit que le nombre total d'échantillons internes de la  $\ell^{me}$  époque sera égal à la longueur de l'époque  $\tau_e$ .

La deuxième contrainte fait en sorte que le nombre de scénarios à la fin de la  $\ell^{me}$  époque est au moins le nombre de scénarios au début, et augmente au maximum jusqu'à la durée de l'époque. La solution de (2.22) est donnée par :

$$n' = \min \left\{ \max \left\{ \left( \frac{\hat{V} n}{4 \hat{B}^2 \bar{m}^4} (\bar{m} n + \tau_e)^4 \right)^{1/5}, n \right\}, n + \tau_e \right\}, \quad (2.23)$$

$$\bar{m}' = \frac{\bar{m} n + \tau_e}{n'}.$$

Après l'obtention du nombre cibler de scénarios  $n'$  (ligne 10),  $(n' - n)$  scénarios supplémentaires sont générés.

5. Au cours de la  $\ell^{me}$  époque (lignes 13-21),  $\tau_\epsilon$  échantillons internes sont générés. Ceux-ci sont distribués pour s'assurer que chaque scénario à au moins  $m^0$  échantillons internes au total (non pas par itération). Une fois que c'est le cas, les échantillons internes sont alloués évidemment selon la marge d'erreur minimale comme dans l'estimateur Séquentiel.

---

```

1: procedure Adaptive( $m^0, n^0, \tau_e, k$ )
2:   générer les scénarios  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n^0}$ 
3:    $n \leftarrow n^0$ 
4:   pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:     conditionner dans le scénario  $\omega_i$ , générer des échantillons
        $\hat{Z}_{i,1}, \dots, \hat{Z}_{i,m^0}$  i.i.d. la perte du portefeuille
6:      $m_i \leftarrow m^0$ 
7:   fin pour
8:   pour  $\ell \leftarrow 1$  à  $\lceil k/\tau_e \rceil$  faire
9:     estimer le biais curant  $\hat{B}$  et la variance  $\hat{V}$  par (20) – (21)
10:    déterminer le nombre ciblé de scénarios par
11:     $n' \leftarrow \left[ \min \left\{ \max \left\{ \left( \frac{\hat{V}_n}{4\hat{B}^2\bar{m}^4} (\bar{m}n + \tau_e)^4 \right)^{1/5}, n \right\}, n + \tau_e \right\} \right]$ 
12:    générer les scénarios  $\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n'}$ , poser  $m_i \leftarrow 0$  pour  $i = n + 1, \dots, n'$ 
13:     $n \leftarrow n'$ 
14:    tant que  $\sum_{i=1}^n m_i < \ell\tau_e$  faire
15:      si  $\min_i m_i < m^0$  alors
16:         $i^* \in \arg \min_i m_i$ 
17:      sinon
18:         $i^* \in \arg \min_i m_i \left| \hat{L}_i - c \right| / \sigma_i$ 
19:      fin si
20:      générer un échantillon  $\hat{Z}_{i^*, m_{i^*}+1}$  dans le scénario  $n \omega_{i^*}$ 
21:       $m_{i^*} \leftarrow m_{i^*} + 1$ 
22:    fin tant que
23:  fin pour
24:  calculer l'estimation d'une grande perte,  $\hat{\alpha} \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{L}_i \geq c\}}$ 
25:  afficher  $\hat{\alpha}$ 
26: fin procedure

```

---

**Algorithm 4:** Algorithm 1 : Estimer la probabilité d'une perte importante en utilisant une simulation imbriquée non uniforme Adaptive. Cet estimateur utilise un algorithme Séquentiel pour déterminer le placement des échantillons de l'étage interne entre les scénarios et décide de façon adaptative du nombre de scénarios et d'échantillons internes à ajouter en estimant le biais et la variance. Les paramètres  $n^0$  et  $m^0$  sont le nombre initial de scénarios et d'échantillons internes par scénario, respectivement. Le paramètre  $\tau_e$  est la longueur de l'époque. Le paramètre  $k$  est le nombre total d'échantillons internes. Notez que chaque déviation standard  $\sigma_i$  peut être estimée en ligne au cours de la simulation.

---

## **2.7 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons expliqué la méthodologie dite simulations imbriquées où nous avons présenté les différents estimateurs utilisé pour estimer la probabilité d'une grande perte et nous avons illustré le passage d'un estimateur a un autre en montrant la différence entre chaque estimateur et donner les avantages et les inconvénients de ces derniers.

# 3

## Résultats numériques et discussions

## 3.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques qui illustrent les avantages de l'estimation imbriquée non uniforme. Nous commençons par la description deux exemples d'application pour les expériences numériques. D'abord, nous comparons le biais de l'estimateur Uniform et celui des estimateurs Threshold et Séquentiel non uniformes. Ensuite, nous donnons une comparaison globale de la MSE obtenue par les estimateurs uniformes et non uniformes. Enfin, nous considérons les problèmes découlant de l'estimation de la variance des échantillons de perte de l'étape interne.

## 3.2 Résultats Numériques

### 3.2.1 Paramètres expérimentaux

Les expériences numériques sont placées dans le contexte des deux exemples suivants : un portefeuille avec des flux de trésorerie gaussiens, où les scénarios de étape externe et interne sont générés à partir des distributions normales, et un exemple d'option put, où le portefeuille consiste en une seule option sur un actif sous-jacent dont le prix suit un mouvement brownien géométrique. Dans les deux exemples, on s'intéresse au calcul de la probabilité d'une grande perte. On considère les seuils de pertes correspondant aux probabilités de perte en 10%, 1% et 0.1%.

Dans l'exemple gaussien, on considère un portefeuille avec des facteurs de risque et des flux de trésorerie normalement distribués. C'est le cas le plus simple pour tester une procédure de simulation imbriquée. Plus précisément, on considère un portefeuille avec la valeur  $X_0 = 0$  à l'instant  $t = 0$  et la valeur  $X_\tau(\omega) = \omega$  à l'horizon de risque  $\tau$ . On suppose que le facteur de risque la valeur réel  $\omega \in \mathbb{R}$  est distribuée suivant la loi normale centrée et d'écart type  $\sigma_{externe}^2 = 1$ . Ensuite, la perte  $L(\omega) = X_0 - X_\tau(\omega) = -\omega$  est une variable aléatoire normale standard. Dans un scénario  $\omega_i$ , chaque échantillon de perte interne prend la forme  $\hat{Z}_{i,j} = -\omega_i + \sigma_{interne} W_{i,j}$ , où  $W_{i,j}$  est une variable aléatoire normale standard et  $\sigma_{interne} = 5$  est l'écart type des échantillons de l'étape interne. Dans ce cas, étant donné un seuil de perte  $c$ . La probabilité d'une perte excédant  $c$  est donnée par  $\alpha = \Phi(-c)$ .

On choisit les valeurs 1.282, 2.326 et 3.090 pour le seuil de perte  $c$ , correspondant à des probabilités de perte de 10%, 1% et 0.1%, respectivement.

Dans l'exemple de l'option put, on suppose que le portefeuille en une grande échéance pour une seule option put.

Cet exemple est plus complexe parce que les flux de trésorerie du portefeuille sont non linéaires et suivent des distributions asymétriques, qui varient considérablement d'un scénario à l'autre. Ici, l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique avec un prix initial  $S_0 = 100$ . La dérive de ce processus sous la distribution du monde réel utilisée dans la étape externe de la simulation est  $\mu = 8\%$ . La volatilité annuel est  $\sigma = 20\%$ . Le taux sans risque est  $r = 3\%$ . Le strike de l'option put est  $K = 95$ , et l'échéance est  $T = 0.25$  ans (c'est à dire trois mois). L'horizon de risque est  $\tau = 1/52$  ans (c'est à dire une semaine). Avec ces paramètres, la valeur initiale du put est  $X_0 = 1.669$  donnée par la formule de Black and Scholes.

Notons  $S_\tau(\omega)$  le prix de l'actif sous-jacent à l'horizon de risque  $\tau$ . Cette variable aléatoire est générée selon  $S_\tau(\omega) \triangleq S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\omega}$ , où le facteur la valeur de risque réel  $\omega$  est une variable aléatoire normale standard. La perte de portefeuille à l'horizon de risque  $\tau$  est donné par

$$L(\omega) = X_0 - E \left[ e^{-r(T-\tau)} \max(K - S_T(\omega, W), 0) | \omega \right],$$

où  $W$  est une variable aléatoire normale standard distribuée indépendamment, et  $S_T(\omega, W)$  est donnée par

$$S_T(\omega, W) \triangleq S_\tau(\omega) e^{(r - \sigma^2/2)(T-\tau) + \sigma\sqrt{T-\tau}W}.$$

Notons que, étant donné une valeur fixe de  $\omega$  et une valeur générée selon la loi normale standard  $W$ , la variable aléatoire  $S_T(\omega, W)$  est distribuée selon la répartition du risque neutre du prix de l'actif sous-jacent à l'échéance  $T$  de l'option, conditionnelle au prix de l'actif  $S_\tau(\omega)$  à l'horizon de risque  $\tau$ , chaque échantillon de perte interne prend la forme

$$\hat{Z}_{i,j} = X_0 - e^{-r(T-\tau)} \max(K - S_T(\omega_i, W_{i,j}), 0),$$

où  $W_{i,j}$  est une variable aléatoire normale standard indépendante. Notons que les scénarios de étape externe sont générés en utilisant la distribution du monde-réel régie par la dérive  $\mu$ . Tandis que les scénarios de étape interne, utilisés pour générer les prix des options put futures, sont générés en utilisant la distribution neutre au risque régie par la dérive  $\mu$ .

Il n'est pas difficile de voir que la perte  $L(\omega)$  augmente strictement dans le facteur de risque  $\omega$ . Par conséquent, la probabilité d'une perte dépassant un seuil  $c$  peut être calculée selon  $\alpha = P(L \geq c) = P(\omega \geq \omega^*) = \Phi(-\omega^*)$ , où  $\omega^*$  est la solution unique à  $L(\omega^*) = c$ . On choisit les valeurs 0.859, 1.221 et 1.390 pour le seuil de perte  $c$ , correspondant respectivement aux probabilités de perte de 10%, 1% et 0.1%.

### 3.2.2 Comparaison des biais

L'avantage de l'échantillonnage de l'étape interne non uniforme par rapport à l'échantillonnage uniforme et que pour le même nombre total d'échantillons internes, un estimateur avec un biais faible est obtenu. Dans cette section, on compare numériquement l'estimateur Uniform et les estimateurs non uniformes Threshold et Séquentiel en terme de biais.

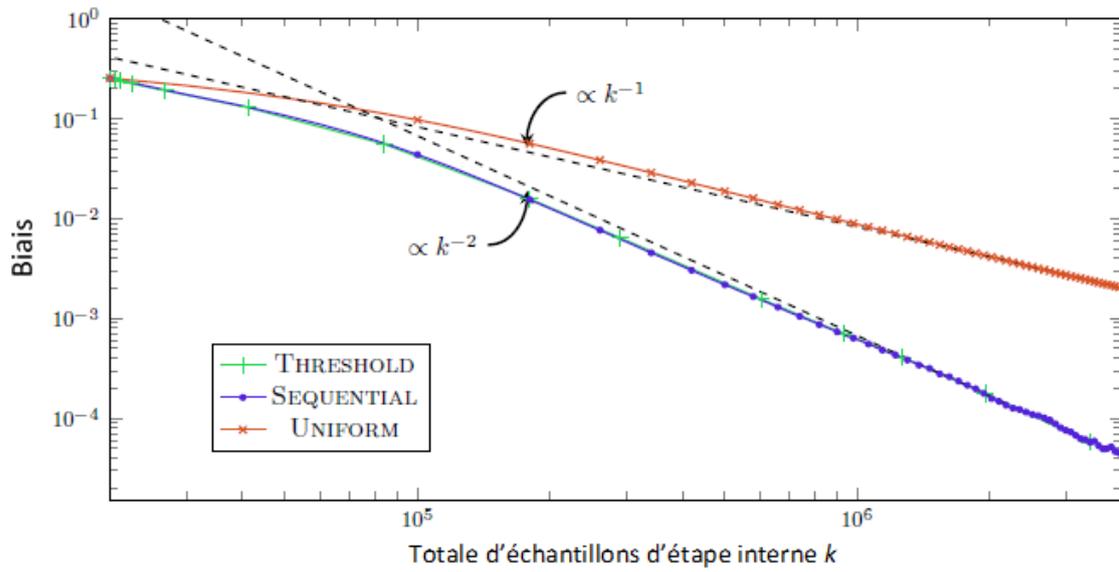
Pour ce faire :

- On génère une séquence fixe  $\omega_1, \dots, \omega_n$  de  $n = 10,000$  scénarios de étape externe.
- Pour éliminer tout bruit dans notre comparaison en raison de l'aléa dans la génération de scénarios, on choisit les scénarios de façon déterministe et stratifiée afin que  $P(\omega \leq \omega_i) = i/(n+1)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- Compte tenu des scénarios stratifiés, on calcule numériquement le biais de chaque estimateur mesuré sur 1,000 essais indépendants, puisque le nombre total d'échantillons à l'étape interne varie de  $k = 20,000$  à  $k = 4,000,000$ .
- Dans le cas de l'estimateur Uniform, le nombre d'échantillons d'étape interne par scénario est varié de  $m = 2$  à  $m = 400$ .
- Pour l'estimateur Séquentiel non uniforme, on utilise  $m^0 = 2$  échantillons intérieurs

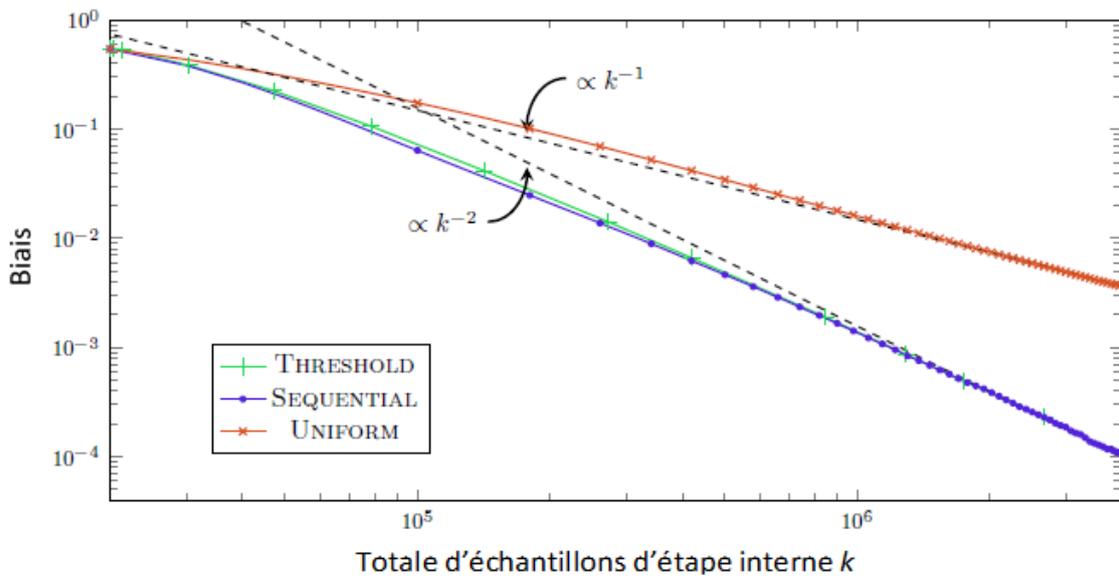
initiaux par scénario, puis on fait varier le nombre moyen de échantillons d'étape interne par scénario de  $\bar{m} = 2$  à  $\bar{m} = 400$ .

- Dans le cas de l'estimateur de Threshold non uniforme, le paramètre de seuil  $\gamma$  varie sur l'intervalle  $[5 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-1}]$ , et le nombre total attendu d'échantillons à l'étape interne est tracé. Ces valeurs de  $\gamma$  sont choisies expérimentalement pour que le nombre d'échantillons internes total attendu pour l'algorithme de Threshold coïncide avec le nombre d'échantillons internes total pour les autres algorithmes.

Les résultats de l'exemple gaussien et de l'exemple de l'option put pour  $\alpha = 1\%$  sont illustrés sur la figure (3.1). Dans les deux cas, les estimateurs non uniformes Threshold et Séquentiel présentent un biais inférieur à celui de l'estimateur Uniform. De plus, pour l'estimateur Uniform, les résultats sont cohérents avec le biais décroissant à l'ordre  $k^{-1}$ , comme le suggère le théorème 1. Pour l'estimateur Threshold non uniforme, les résultats sont cohérents, le biais diminue selon  $k^{-2+\epsilon}$  pour tout  $\epsilon$  positif, comme il est suggéré par les résultats théoriques présentés. Notons que la performance des estimateurs Threshold et Séquentiel est, en grande partie, indiscernable. Ceci suggère fortement que l'analyse théorique du taux de convergence de l'estimateur de Threshold fournit une bonne approximation du taux de convergence de l'estimateur Séquentiel.



(a) Gaussien,  $\alpha = 1\%$



(b) Put option,  $\alpha = 1\%$

Figure 3.1 – la fonction du biais

La figure (3.2) donne un aperçu qualitatif du comportement d'échantillonnage interne de l'estimateur Séquentiel non uniforme. Ici, le nombre d'échantillons internes utilisés par le Séquentiel varie de deux ordres de grandeur selon les scénarios, avec beaucoup plus d'échantillonnage se déroulant près du seuil de perte  $c$  que loin de celui-ci.

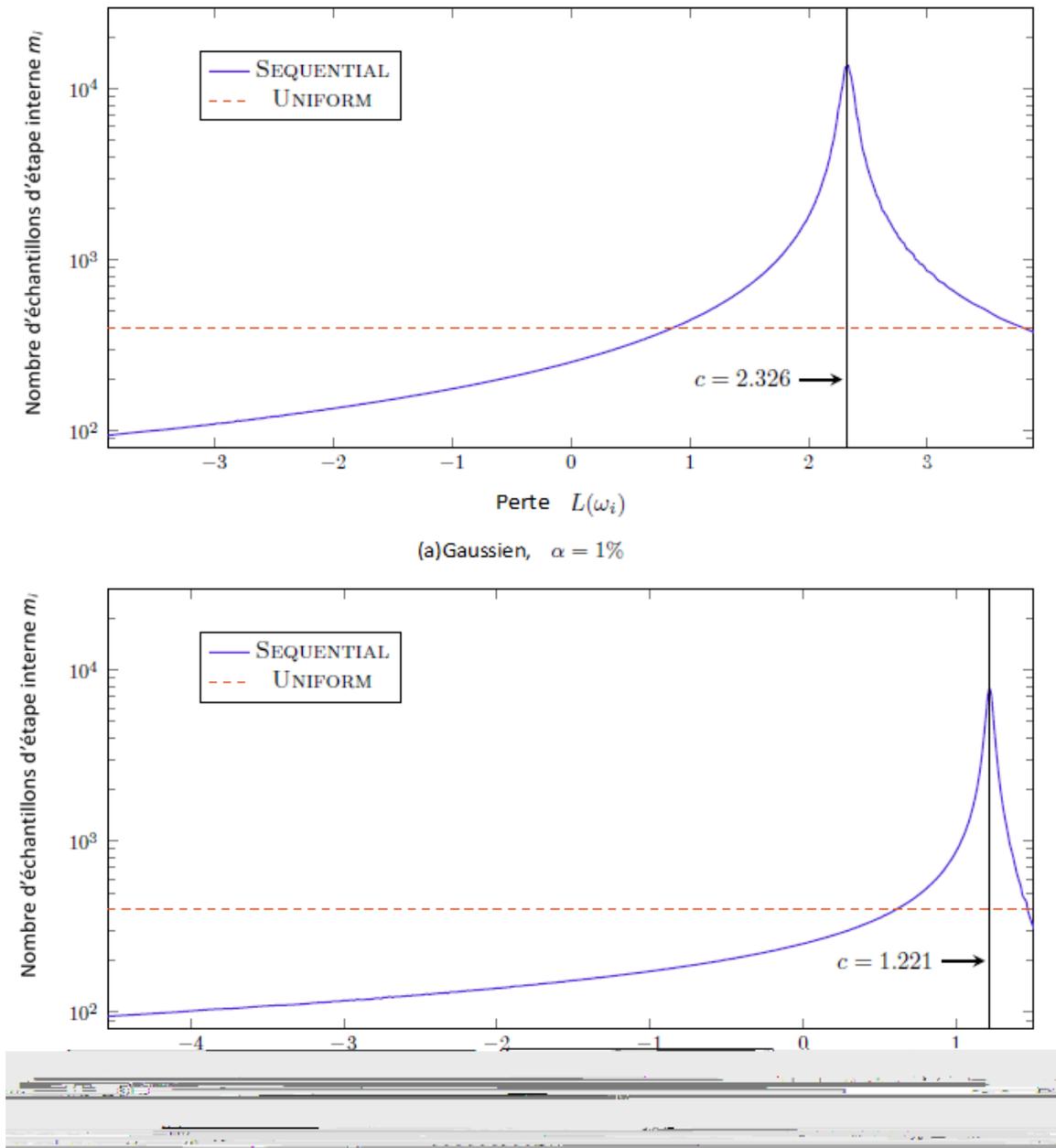


Figure 3.2 – la distribution des échantillons de niveau intérieur

### 3.2.3 Comparaison des MSE

Dans cette section, on donne une comparaison globale de la MSE obtenue par les estimateurs uniformes et non uniformes, pour un nombre  $k$  d'échantillons générés à l'étape interne. On considère chacun des estimateurs suivants.

#### Uniforme Optimal.

C'est l'estimateur Uniform avec des paramètres choisis de manière optimale. Le nombre de simulations est initié à  $m = k^{1/3}/\beta^*$  et  $n = k^{2/3}\beta^*$ . Notons qu'en général, il n'est pas clair comment déterminer la valeur  $\beta^*$  étant donné les paramètres du problème. Pour les exemples gaussienne et de l'option put, nous pouvons utiliser des expressions de forme fermée pour la distribution de probabilité des pertes afin de calculer exactement cette constante.

#### 1/3 : 2/3 Uniforme.

C'est l'estimateur uniforme avec  $m = k^{1/3}$  et  $n = k^{2/3}$ , cet estimateur a un MSE qui se désintègre avec le même ordre ( $k^{2/3}$ ) que l'estimateur Uniform optimal, mais avec une constante sous-optimale. Ceci est destiné à illustrer le cas où la constante  $\beta^*$  de l'estimateur Uniform Optimal est inconnue, et un choix arbitraire de constante ( $\beta^* = 1$ ) est effectué.

#### Séquentiel Optimal

C'est l'estimateur d'échantillonnage Séquentiel non uniforme où  $n$  est choisi de façon optimale pour minimiser le MSE. Ici,  $m^0 = 2$  échantillons initiaux ont été utilisés. Les paramètres  $(\bar{m}, n)$  contrôlant le nombre moyen d'échantillons internes et le nombre de scénarios ont varié en fonction des choix satisfaisant le nombre de simulations, c'est à dire ;  $\bar{m}n = k$ . L'estimateur Séquentiel optimal est un algorithme idéalisé destiné à capturer la meilleure performance possible qui peut être atteinte en utilisant l'estimateur Séquentiel.

**Adaptative.**

Il s'agit de l'estimateur adaptatif il utilise un échantillonnage non uniforme séquentiel et alloue de manière adaptative le nombre de calcul entre les scénarios d'étape externe et les échantillons d'étape interne. Ici,  $n^0 = 500$  scénarios initial ont été utilisés, avec des échantillons internes initiaux  $m^0 = 2$  par scénario et avec  $\tau = 100,000$ .

**Adaptative  $\hat{\sigma}_i$** 

C'est une variation de l'estimateur Adaptatif dans lequel la variance des échantillons internes est estimée. Les résultats numériques, pour les six cas de test (les exemples gaussiens et put, chacun avec des seuils correspondant à trois probabilités de perte différentes) utilisant les cinq estimateurs, sont résumés dans le tableau 1. Dans tous les cas, un nombre de calculs de 4,000,000 échantillons internes a été utilisé. Les résultats de chaque cas sont calculés sur 1,000 essais indépendants[6]

		n	$\bar{m}$	Variance	Biais <sup>2</sup>	MSE	MSE <sub>cart-type</sub>	MSE <sub>norm</sub>
Gaussien								
$\alpha = 10\%$	1/3 :2/3 Uniform	25,199	159	4.0*10 <sup>-6</sup>	2.8*10 <sup>-4</sup>	2.9*10 <sup>-4</sup>	2.1*10 <sup>-6</sup>	35.4
	Uniform optimal	4,499	889	2.1*10 <sup>-5</sup>	8.6*10 <sup>-6</sup>	3.0*10 <sup>-5</sup>	1.2*10 <sup>-6</sup>	3.7
	Adaptive( $\hat{\sigma}_i$ )	14,968	281	7.0*10 <sup>-6</sup>	2.7*10 <sup>-6</sup>	9.7*10 <sup>-6</sup>	4.7*10 <sup>-7</sup>	1.2
	Adaptive	12,802	321	7.2*10 <sup>-6</sup>	1.5*10 <sup>-6</sup>	8.6*10 <sup>-6</sup>	3.9*10 <sup>-7</sup>	1.0
	Séquentiel optimal	12,395	323	6.8*10 <sup>-6</sup>	1.4*10 <sup>-6</sup>	8.2*10 <sup>-6</sup>	3.7*10 <sup>-7</sup>	1.0
$\alpha = 1\%$	1/3 :2/3 Uniform	25,199	159	6.1*10 <sup>-7</sup>	2.8*10 <sup>-5</sup>	2.8*10 <sup>-5</sup>	2.6*10 <sup>-7</sup>	60.9
	Uniform optimal	5,089	786	2.3*10 <sup>-6</sup>	1.0*10 <sup>-6</sup>	3.3*10 <sup>-6</sup>	1.5*10 <sup>-7</sup>	7.2
	Adaptive( $\hat{\sigma}_i$ )	16,177	250	7.0*10 <sup>-7</sup>	3.7*10 <sup>-9</sup>	7.0*10 <sup>-7</sup>	3.1*10 <sup>-8</sup>	1.5
	Adaptive	16,118	251	7.1*10 <sup>-7</sup>	4.1*10 <sup>-9</sup>	7.2*10 <sup>-7</sup>	3.1*10 <sup>-8</sup>	1.6
	Séquentiel optimal	30,860	130	3.5*10 <sup>-7</sup>	1.1*10 <sup>-7</sup>	4.6*10 <sup>-7</sup>	1.8*10 <sup>-8</sup>	1.0
$\alpha = 0.1\%$	1/3 :2/3 Uniform	25,199	159	8.2*10 <sup>-8</sup>	1.1*10 <sup>-6</sup>	1.2*10 <sup>-6</sup>	1.9*10 <sup>-8</sup>	48.0
	Uniform optimal	7,788	514	1.7*10 <sup>-7</sup>	7.9*10 <sup>-8</sup>	2.5*10 <sup>-7</sup>	1.3*10 <sup>-8</sup>	10.0
	Aadaptive( $\hat{\sigma}_i$ )	30,798	132	3.5*10 <sup>-8</sup>	4.7*10 <sup>-10</sup>	3.5*10 <sup>-8</sup>	1.6*10 <sup>-9</sup>	1.4
	Adaptive	30,628	132	3.8*10 <sup>-8</sup>	5.0*10 <sup>-10</sup>	3.8*10 <sup>-8</sup>	3.2*10 <sup>-9</sup>	1.5
	Séquentiel optimal	56,686	71	1.8*10 <sup>-8</sup>	6.5*10 <sup>-9</sup>	2.5*10 <sup>-8</sup>	1.1*10 <sup>-9</sup>	1.0
Option put								
$\alpha = 10\%$	1/3 :2/3 Uniform	25,199	159	4.1*10 <sup>-6</sup>	5.1*10 <sup>-4</sup>	5.1*10 <sup>-4</sup>	2.9*10 <sup>-6</sup>	58.6
	Uniform optimal	5,095	785	1.9*10 <sup>-5</sup>	2.4*10 <sup>-5</sup>	4.2*10 <sup>-5</sup>	1.6*10 <sup>-6</sup>	4.8
	Adaptive( $\hat{\sigma}_i$ )	6,671	601	1.5*10 <sup>-5</sup>	4.8*10 <sup>-6</sup>	2.0*10 <sup>-5</sup>	9.2*10 <sup>-7</sup>	2.3
	Adaptive	7,325	547	1.3*10 <sup>-5</sup>	2.1*10 <sup>-7</sup>	1.4*10 <sup>-5</sup>	6.2*10 <sup>-7</sup>	1.6
	Séquentiel optimal	12,395	323	7.3*10 <sup>-6</sup>	1.5*10 <sup>-6</sup>	8.7*10 <sup>-6</sup>	3.8*10 <sup>-7</sup>	1.0
$\alpha = 1\%$	1/3 :2/3 Uniform	25,199	159	7.8*10 <sup>-7</sup>	9.4*10 <sup>-5</sup>	9.5*10 <sup>-5</sup>	5.4*10 <sup>-7</sup>	141.8
	Uniform optimal	3,143	1,273	3.8*10 <sup>-6</sup>	1.2*10 <sup>-6</sup>	5.0*10 <sup>-6</sup>	2.1*10 <sup>-7</sup>	7.5
	Adaptive( $\hat{\sigma}_i$ )	10,085	401	1.2*10 <sup>-6</sup>	2.0*10 <sup>-7</sup>	1.4*10 <sup>-6</sup>	6.2*10 <sup>-8</sup>	2.1
	Adaptive	9,992	405	1.1*10 <sup>-6</sup>	1.7*10 <sup>-8</sup>	1.1*10 <sup>-6</sup>	4.8*10 <sup>-8</sup>	1.6
	Séquentiel optimal	19,558	205	5.4*10 <sup>-7</sup>	1.5*10 <sup>-7</sup>	6.9*10 <sup>-7</sup>	3.0*10 <sup>-8</sup>	1.0
$\alpha = 0.1\%$	1/3 :2/3 Uniform	25,199	159	1.5*10 <sup>-7</sup>	8.1*10 <sup>-6</sup>	8.2*10 <sup>-6</sup>	7.2*10 <sup>-8</sup>	174.5
	Uniform optimal	2,570	1,556	4.4*10 <sup>-7</sup>	3.9*10 <sup>-8</sup>	4.8*10 <sup>-7</sup>	2.7*10 <sup>-8</sup>	10.2
	Adaptive( $\hat{\sigma}_i$ )	14,884	274	1.1*10 <sup>-7</sup>	1.8*10 <sup>-8</sup>	1.3*10 <sup>-7</sup>	9.0*10 <sup>-9</sup>	2.8
	Adaptive	14,384	284	9.2*10 <sup>-8</sup>	5.6*10 <sup>-10</sup>	9.2*10 <sup>-8</sup>	1.4*10 <sup>-8</sup>	2.0
	Séquentiel optimal	26,508	151	3.9*10 <sup>-8</sup>	8.0*10 <sup>-9</sup>	4.7*10 <sup>-8</sup>	2.3*10 <sup>-9</sup>	1.0

Table 3.1 – les résultats numériques de six tests pour les cinq algorithmes d'estimation.

**NB** :Ce tableau présente les résultats numériques de six tests pour les cinq algorithmes d'estimation (pour chacun des deux exemples gaussiens et option put, on fixe trois seuils correspondant à trois probabilités de perte différentes). Les résultats sont calculés sur 1,000 essais indépendants, chacun avec un nombre total de simulation  $k = 4,000,000$ . Les résultats générés comprennent le nombre de scénarios d'étape externe ( $n$ ) et le nombre moyen d'échantillons d'étape interne par scénario ( $\bar{m}$ ), ainsi que la variance, le biais au carré, la MSE et l'écart-type de la MSE pour chaque estimateur. La dernière colonne contient les résultats de la MSE normalisées par rapport à l'estimateur Séquentiel optimal.

### 3.2.4 Interprétation des Résultats

Les résultats numériques dans le tableau 1 peuvent être interprétés on comparant les estimateurs deux à deux, comme suit :

- **Uniforme Optimal vs (1/3):(2/3)Uniforme** : Ce sont des estimateurs uniformes asymptotiquement optimaux ; ils ne diffèrent que par le choix de la constante  $\beta^*$ . La performance pratique de ces deux estimateurs est toutefois radicalement différente. Cela met en évidence la sensibilité de l'estimateur Uniforme dans la pratique par rapport au choix de la constante  $\beta^*$ . Notons que le calcul de celle-ci, nécessite la connaissance de la constante  $\theta_c$ . Il n'est pas clair comment estimer cette constante dans la pratique, et elle peut varier considérablement entre différentes instances de problèmes.
- **Uniforme Optimal vs Séquentiel Optimal** : Ceux-ci représentent la meilleure performance possible qui peut être atteinte par les estimateurs Uniform et Séquentiel. Aucun de ces estimateurs n'est réalisable en pratique ; le premier parce qu'il dépend d'un paramètre qui ne peut être facilement déterminé à partir des données du problème, le second parce qu'il nécessite une exploration du choix des paramètres. Cependant, en les comparant entre l'échantillonnage Uniforme et non uniforme, c'est illustré clairement les avantages de l'échantillonnage non uniforme. Dans chaque cas de test, l'estimateur Séquentiel Optimal a la MSE la plus basse. L'amélioration du MSE par rapport à l'estimateur Uniforme Optimal est comprise entre un facteur 4 et 10. Cette amélioration est la plus grande lorsque l'on estime des probabilités de perte qui sont rares (par exemple, le cas  $\alpha = 0.1\%$ ).  
De plus, notons que l'estimateur Séquentiel optimal utilise beaucoup moins d'échantillons de l'étape interne et beaucoup plus de scénarios de l'étape externe. L'estimateur Séquentiel optimal est capable d'obtenir un biais faible avec moins d'échantillons de l'étape interne, il peut donc utiliser plus de scénarios avec le même nombre de simulations.
- **Séquentiel optimale vs Séquentiel Adaptative** : L'estimateur Séquentiel optimal repose sur le choix des paramètres : le nombre d'échantillons internes et le nombre de scénarios externes ; ce qui n'est pas faisable en pratique. D'autre part, l'estimateur Séquentiel Adaptatif effectue ce choix dynamiquement au cours de la simulation et ce qui est donc réalisable en pratique. La comparaison de ces deux méthodes montre combien l'avantage de la méthode Séquentielle optimale.

Dans toutes les expériences, l'estimateur Séquentiel Adaptatif atteint une MSE entre une et deux fois que celui de l'estimateur Séquentiel optimal. Dans certains cas, l'estimateur Adaptatif sur-estime le biais réel et utilise trop d'échantillons de l'étape interne par rapport à l'allocation optimale. Ceci suggère qu'il y a une légère amélioration dans la procédure Adaptative pour effectuer les calculs entre les étapes internes et externes.

### 3.2.5 Estimation de la variance

L'algorithme Adaptive requiert la valeur de  $\sigma_i$ , l'écart-type des échantillons de perte de l'étape interne  $\hat{Z}_{i,1}, \hat{Z}_{i,2}, \dots$  dans le scénario  $\omega_i$ . En pratique,  $\sigma_i$  ne sera pas connu. Cependant, on peut supposer de nombreuses variations de l'algorithme Adaptive où chaque  $\sigma_i$  est estimé au cours de l'algorithme d'estimation[6].

Une telle variation remplace chaque  $\sigma_i$  de l'algorithme Adaptative par l'estimation :

$$\hat{\sigma}_i \triangleq \frac{m_i}{m_i + b} \tilde{\sigma}_i + \frac{b}{m_i + b} \bar{\sigma}. \quad (3.1)$$

ici on définit :

$$\tilde{\sigma}_i \triangleq \left[ \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} \left( \hat{Z}_{i,j} - \hat{L}_i \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Comme l'écart-type d'échantillon des échantillons de perte d'étape interne générés dans le scénario  $\omega_i$ , et  $\bar{\sigma} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i$  pour qu'il soit la moyenne globale de tous ces écarts-types. Cette procédure équilibre une estimation d'ensemble avec une estimation locale afin que les écarts-types estimés puissent être générés de manière plus fiable ; en particulier, lorsqu'il y a un petit nombre d'échantillon de étape interne dans un scénario donné. Pour  $b = 0$ , la procédure correspond à l'estimateur d'écart-type de l'échantillon habituel. Pour les grandes valeurs de  $b$ , l'estimation de l'ensemble reçoit un poids plus important.

Les résultats numériques pour un estimateur Adaptatif utilisant cette procédure pour estimer  $\sigma_i$ , avec  $b = 5$ , sont donnés dans le tableau 1. Pour éviter une charge de calcul prohibitive, nous mettons seulement à jour la moyenne  $\bar{\sigma}$  à la fin de chaque itération. Les résultats montrent qu'il y a une perte de performance légère lorsque l'estimateur  $\hat{\sigma}_i$  est utilisé à la place du vrai  $\sigma_i$ .

### 3.3 Nos résultats numériques et interprétations

En suivant la même démarche adoptée dans le travail de Brodie et al [6], dont leurs résultats sont illustrés au début de ce chapitre, nous présentons également les notre obtenus sous l'environnement Matlab et qui sont résumés dans le tableau suivant :

		n	$\bar{m}$	Variance	Biais <sup>2</sup>	MSE	$\hat{\alpha}$
Gaussien							
$\alpha = 10\%$	1/3 :2/3 Uniform	1143	35	$1.4*10^{-4}$	$2.6*10^{-3}$	$2.8*10^{-3}$	0.141
	Uniform $m = n = \sqrt{k}$	200	200	$4.9*10^{-4}$	$4.2*10^{-4}$	$9.1*10^{-4}$	0.091
	Adaptive	300	133	$3.8*10^{-4}$	$1.4*10^{-4}$	$5.2*10^{-4}$	0.119
	Séquentiel	500	80	$1.5*10^{-4}$	$3.1*10^{-4}$	$4.7*10^{-4}$	0.106
Option put							
$\alpha = 10\%$	1/3 :2/3 Uniform	1143	135	$1.4*10^{-4}$	$3.3*10^{-3}$	$3.5*10^{-3}$	0.132
	Uniform $m = n = \sqrt{k}$	200	200	$4.5*10^{-4}$	$1.2*10^{-4}$	$5.7*10^{-4}$	0.090
	Adaptive	305	131	$4.7*10^{-4}$	$2.4*10^{-5}$	$4.9*10^{-4}$	0.113
	Séquentiel	500	80	$1.8*10^{-4}$	$2.9*10^{-4}$	$4.7*10^{-4}$	0.110

**Table 3.2** – les résultats numériques de deux tests pour les quatre algorithmes d'estimation.

#### 3.3.1 Justification des algorithmes choisis

Nous nous focalisons sur les algorithmes introduits dans le tableau ci-dessus. Ce choix a été fait en raison de manque de matériels informatiques performants. L'approche des simulations imbriquées requière une grande allocation d'espace mémoire et un temps de calcul énorme. C'est qu'est ce qu'il justifie aussi le choix des paramètres considérés ; d'abord, dans la pratique, le choix des paramètres  $\hat{\beta}$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_c$  et  $b$  s'avère difficile. Au delà, il n'est pas clair comment fixer des valeurs optimales pour ces paramètres.

#### 3.3.2 Interprétation des résultats obtenus

Nous suggérons sur les résultats obtenus, pratiquement, les mêmes remarques faites à propos des résultats fournis dans le travail de Brodie et al [6]. Il s'avère que l'estimateur Séquentiel représente la meilleure performance possible pouvant être atteinte. Le choix des paramètres initiaux influence sur les quantités (Biais, variance) pour la réduction de la MSE.

### **3.4 Conclusion**

Ce chapitre est consacré aux calculs numériques, des résultats pour chaque estimateur ont été illustrés. Également, une comparaison du Biais et de l'erreur quadratique moyenne MSE ont été élaborés et cette dernière a été réduite par des facteurs allant de 4 à plus de 100. Les simulations imbriquées à deux niveaux peuvent fournir une évaluation plus réaliste du risque financier, mais avec un coût de calcul considérable. Une procédure des simulations Séquentielles Imbriquées a été proposée et qui réduit considérablement le nombre de calculs. Enfin, nous pouvons nous appuyer sur l'application de cette procédure raison quelle estime pratiquement de près la probabilité d'une grande perte.

# Conclusion Générale

Ce projet de mémoire a été principalement placé sous l'objectif de mesurer les risques financiers. La première est d'étudier le risque financier d'un portefeuille sous tous ces aspects où nous avons introduit certaines notions fondamentales pour mieux comprendre l'intérêt de ce mémoire. Ensuite, nous nous avons focalisé sur le calcul d'une probabilité de grande perte en utilisant l'approche dite "Simulations Imbriquées" (ou Simulations dans des simulation "SdS").

Après avoir illustré un ensemble d'algorithmes, tous sont conçus pour objectif de mesurer le risque : la probabilité d'une grande perte. Afin de programmer ces algorithmes, nous avons choisi l'environnement Matlab pour les avantages qu'il présente : la programmation facile, la continuité parmi les valeurs entières, réelles et complexes, la gamme étendue des nombres et leurs précisions, la bibliothèque mathématique très compréhensive, et bien d'autres.

La procédure d'estimation séquentielle peut être combinée avec des recherches antérieures sur la réduction de la variance pour la génération du scénario de l'étape externe afin de réaliser d'autres économies de calculs. Les algorithmes et les résultats ont été présentés dans le contexte de l'estimation de la probabilité d'une grande perte, mais il peut être possible d'appliquer des idées similaires pour développer des algorithmes non uniformes pour d'autres mesures de risque. Cela reste une zone ouverte pour la recherche future.

Nous tenons à souligner également que ce projet a été l'occasion d'acquérir une expérience très enrichissante en travaillant sur des aspects à la fois académiques et professionnels dans le secteur des mathématiques financières et du business intelligence. Il est également fondamental de préciser la difficulté que nous avons eu au début du projet. Nous avons travaillé sur de nouvelles notions en finance, en mathématiques et sur des nouvelles plateformes ce qui a enrichi nos connaissances mais aussi a constitué un défi pour réussir le projet.

Grâce au bon encadrement, le suivi, la bonne gestion de temps et à la méthodologie Agile, nous sommes arrivés à bien surmonter tous les problèmes que nous avons eu.

Après tout, la gestion de risques et la gestion de portefeuille ne cessent d'évoluer et d'acquérir de l'importance. Ce travail n'est qu'un volet parmi d'autres, il peut donc être exploité afin de toucher d'autres aspects de ces deux gestions.



## Annexes probabilités et statistiques

## A.1 La variance :

La variance est l'un des instruments les plus importants dans l'étude de risques financiers. Selon la définition classique, elle est la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne. Mathématiquement, elle peut être considérée comme une mesure servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon autour de sa moyenne.

La variance d'un actif est donnée par :

$$\sigma^2(X) = Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \bar{X}$$

Avec :

$X_i$  : le cours de l'actif  $X$  à l'instant  $i$ .

$n$  : le nombre de périodes .

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  : La moyenne du cours de l'actif  $X$ .

### Remarque :

Si la variance est nulle, cela signifie que la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne est nulle et donc que la variable aléatoire est une constante.

## A.2 Moyenne

Cet estimateur est très commun et davantage aisé à appréhender. Il s'agit de la somme des variables divisée par leurs nombres. Dans le domaine bancaire on utilise cette moyenne surtout pour déterminer un rendement moyen.

$$\text{Moyenne : } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{A.1})$$

## A.3 L'écart-type

L'écart-type est une mesure de risque utilisé pour calculer la volatilité d'un actif. Il s'obtient en calculant la racine carrée de la variance. Mathématiquement, l'écart type se

traduit par la formule suivante :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \bar{X}}$$

## A.4 La covariance

Selon la définition classique la covariance permet de étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives.

En finance, cette notion permet de mesurer le degré de liaison des fluctuations de deux titres entre eux, ou encore d'un titre avec un indice.

Mathématiquement, la formule de la covariance est la suivante :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}),$$

Avec

$x_i$  : le cours de l'actif  $x$  à l'instant  $i$ .

$y_i$  : le cours de l'actif  $y$  à l'instant  $i$ .

$n$  : le nombre de périodes .

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$  : La moyenne du cours de l'actif  $x$ .

$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$  : La moyenne du cours de l'actif  $y$ .

### Remarque :

Si la covariance est nulle cela signifie que les deux variables sont totalement indépendantes.

## A.5 Coefficient de corrélation

Le corrélation entre deux actifs financiers, ou plus généralement entre deux variables aléatoires, est l'intensité de la liaison qu'il existe entre ces deux variables.

Afin de déterminer cette liaison, il suffit de calculer le coefficient de corrélation par la formule suivante :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarques :

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$  .
- Si  $\rho(X, Y) = 1$  (respectivement  $-1$ ), alors il existe une relation linéaire positive (respectivement négative) entre  $x$  et  $y$  .
- Si  $\rho(X, Y) = 0$ , alors les deux variables  $x$  et  $y$  sont dé-corrélées, il n'existe pas une relation non linéaire entre ces deux variables.
- Le coefficient de corrélation est symétrique. C'est-à-dire  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$  .

## A.6 Distribution normale

Rappelons qu'une v.a normale de paramètre  $(\mu, \sigma)$  est définie par sa densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

dont le graphe est représenté sur la figure (A.1).

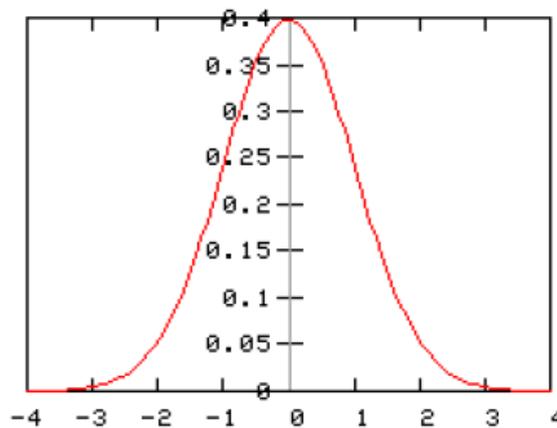


FIGURE A.1 – Distribution normale

le graphe de la densité normale est symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse  $\mu$  et il présente deux points d'inflexion, en  $(\mu - \sigma)$  et  $(\mu + \sigma)$  les valeurs typiques de cette distribution sont données par :

$$E(X) = \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

## A.7 Dominance stochastique

**Définition A.7.1.** [4] *Dominance stochastique à l'ordre 1 :*

*la variable aléatoire réelle  $X$  domine stochastiquement au premier ordre  $Y$  si :*

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq \eta) \leq \mathbb{P}(Y \leq \eta)$$

*On notera cette relation de dominance  $X \succeq_1 Y$ .*

**Définition A.7.2.** [4] *Dominance stochastique à l'ordre 2 :*

*la variable aléatoire réelle  $X$  domine stochastiquement au second ordre  $Y$  si :*

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\eta} \mathbb{P}(X \leq x) dx \leq \int_{-\infty}^{\eta} \mathbb{P}(Y \leq y) dy$$

*On notera cette relation de dominance  $X \succeq_2 Y$ .*

# B

Annexes notions en finance

## B.1 Le risque financier

Le risque financier est défini comme étant lié à l'incertitude et d'autre part, causé par les écarts non attendus des résultats par rapport à l'objectif attendu[1][2]. Autrement dit, la notion de risque en finance est reliée à la notion d'incertitude. En effet, le risque d'un actif financier pour un investisseur, peut être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future.

## B.2 Mesure de rentabilité

Le taux de rentabilité ou le rendement est une notion fondamentale en finance et apparaît dans l'expression de la plupart des modèles de gestion de portefeuille ; elle mesure l'appréciation (ou dépréciation) relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs financiers entre deux instants successifs .

## B.3 Rendement d'un actif financier

### B.3.1 Rendement arithmétique

Le rendement arithmétique périodique d'un actif  $R_{a,t}$  est donné par l'équation suivante :

$$R_t^a = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}}.$$

Avec :

$P_t$  : Prix du titre à la fin de la période  $t$ .

$P_{t-1}$  : Prix du titre au début de la période  $t - 1$ .

$D_t$  : Dividende(action) ou intérêt(obligation) reçu pendant la période  $t$ .

### B.3.2 Rendement géométrique

Le rendement géométrique(logarithmique) périodique d'un actif,noté  $R_{g,t}$ , est donné par la relation suivante :

$$R_t^g = \text{Ln}\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right).$$

**Remarque :**

Quand le pas de temps est faible le rendement géométrique égalise le rendement arithmétique.

$$R_{g,t} = \text{Ln}\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right) = \text{Ln}\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) = \text{Ln}(1 + R_{a,t}) \simeq R_{a,t},$$

lorsque le rendement arithmétique  $R_{a,t} \rightarrow 0$ .

**B.4 Les Accords de Bâle [8]**

Les Accords de Bâle sont des accords de réglementation bancaire signés dans la ville de Bâle (Suisse), et élaborés par le Comité de Bâle. Ils visent à garantir un niveau minimum de capitaux propres, afin d'assurer la solidité financière des banques. Bâle I est signé en 1988. Bâle II, qui renforce les premiers accords, est mis en place entre 2004 et 2008. Les accords de Bâle III ont été publiés fin 2010 et leur mise en place est prévue entre 2012 et 2019.

Bâle I fait référence à un ensemble de recommandations formulées en 1988 par le Comité de Bâle, un comité rassemblant les banquiers centraux des pays du G-10 sous l'égide de la Banque des règlements internationaux, à Bâle, pour garantir un niveau minimum de capitaux propres, afin d'assurer la solidité financière. Ces recommandations, également connues sous le nom d'accord de Bâle de 1988 (ou, plus précisément, Convergence internationale de la mesure et des normes de fonds propres - Juillet 1988, mise à jour en date d'avril 1991), visaient à assurer la stabilité du système bancaire international. En effet, comme indiqué dans le texte, l'accord ciblait en priorité les banques exerçant une activité internationale. Afin d'atteindre cet objectif, un ratio minimal de 8% de fonds propres par rapport à l'ensemble des crédits accordés par les banques a été fixé. Ce ratio, appelé ratio Cooke par référence au président du Comité au moment de la mise en place des recommandations, fut mis en place dans la plupart des pays de l'OCDE en 1992. Il fut aménagé au milieu des années 1990 afin d'y intégrer la gestion des risques hors-bilan, tel que les risques liés

aux dérivés, mais il devint rapidement évident qu'une refonte de l'accord était nécessaire, ce que le Comité a réalisé avec Bâle II qui a été mis en oeuvre à partir de 2006.

Les normes Bâle II (le second accord de Bâle) constituent un dispositif prudentiel destiné à mieux appréhender les risques bancaires et principalement le risque de crédit ou de contrepartie et les exigences, pour garantir un niveau minimum de capitaux propres, afin d'assurer la solidité financière. Ces directives ont été préparées depuis 1988 par le Comité de Bâle, sous l'égide de la Banque des règlements internationaux et ont abouti à la publication de la Directive CRD. Les normes de Bâle II devraient remplacer les normes mises en place par Bâle I en 1988 et visent notamment à la mise en place du ratio McDonough destiné à remplacer le ratio Cooke. En 2010, le minimum de fonds propres Tiers-I requis par les accords de Bâle est de 4% mais les investisseurs exigent plutôt des banques un ratio supérieur à 10 %. Face aux 500 milliards d'euros de produits dérivés et aux risques hors bilan qu'ils représentent, la révision des normes bancaires Bâle III est en cours.

## **B.5 Risk-Metric**

Suivant le même canevas, de nouvelles normes Solvabilité II sont, en 2008, en cours de discussion pour les sociétés d'assurances et de réassurance. Risk metric[21], dans le contexte de la mesure des risques, un risk metric est le concept quantifié par une mesure de risque. Lors du choix d'une mesure de risque, un agent choisit un aspect du risque perçu à étudier, tel que la volatilité ou la probabilité de défaut.[19]

Dans un sens général, une mesure est une procédure pour quantifier quelque chose. Une métrique est celle qui est quantifiée. [20] En d'autres termes, la méthode ou la formule pour calculer une mesure de risque est appelée une mesure de risque.

Par exemple, en finance, la volatilité d'un stock peut être calculée de l'une des trois façons suivantes :

- Calculez l'écart-type de l'échantillon des rendements de l'action au cours des 30 derniers jours de bourse.
- Calculez l'écart type de l'échantillon des rendements de l'action au cours des 100 derniers jours de bourse.

- Calculer la volatilité implicite du stock à partir d'une option d'achat spécifiée sur le stock.

Ce sont trois mesures de risque distinctes. Chacune pourrait être utilisée pour mesurer la volatilité du risque unique.

## B.6 Black-Sholes

### Modèle du marché financier

Fisher Black et Myron Scholes ont proposé en 1973 ce désormais célèbre modèle . Comme c'est un modèle ils sont partis des hypothèses

- le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique
- la volatilité est connue à l'avance et est constante
- il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais
- les ventes à découvert sont autorisées (on emprunte pour acheter une certaine quantité de sous-jacent pour la vendre)
- il n'y a pas de dividende
- le taux d'intérêt est connu à l'avance et est constant

**Définition B.6.1.** *Un processus de Black et Scholes [21] :*

*La variable aléatoire  $S_t$  est un processus de Black et Scholes si elle est solution de l'équation différentielle stochastique :*

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

*Où  $\mu$  la tendance (ou la dérive, ou le drift) qui est une constants réelle décrivant la partie déterministe de modèle, et  $\sigma$  la volatilité, qui est ici une constante positive contrôlant l'intensité du mouvement brownien  $W_t$ .*

## B.7 Mouvement brownien

Un mouvement brownien : est un processus stochastique à incréments stationnaires, indépendants et distribués selon une loi normale. Les trajectoires de ce processus sont

continues.[3]

Exemples :

- trajectoire du pollen dans l'eau.
- trajectoire de la pollution dans une rivière.
- prix des actifs dans un marché financier.

**Définition B.7.1.** [3] *Un processus aléatoire  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles est appelé mouvement brownien s'il est à accroissements indépendants et stationnaires. Plus précisément, pour tous  $\forall s, t \geq 0$ , la variable  $W_{t+s} - W_t$  est indépendante des variables  $\{W_r, r \leq t\}$ , et la loi de l'accroissement  $W_{t+s} - W_t$  est la loi normale  $N(0, s)$ .*

## B.8 Mouvement brownien géométrique [3]

**Définition B.8.1.** *Un processus stochastique  $(S_t)_{t \leq 0}$  est appelé mouvement brownien géométrique s'il est solution de l'EDS suivante :*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Où  $\mu$  et  $\sigma$  sont constants. Cette équation a une solution analytique obtenue facilement grâce à la formule d'Ito :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

# Bibliographie

- [1] ARGAUD, J. P., AND DUBOIS, O. Méthodes mathématiques pour la finance, 2006. p. 261-266.
- [2] ARGAUD, J. P., AND DUBOIS, O. Méthodes mathématiques pour la finance, 2006. p. 225.
- [3] ARGAUD, J. P., AND DUBOIS, O. Méthodes mathématiques pour la finance, 2006. p.106.
- [4] ARGAUD, J. P., AND DUBOIS, O. Méthodes mathématiques pour la finance, 2006. p. 213-219.
- [5] BECK, U. La société du risque. Aubie, 2001.
- [6] BROADIE, M., DU, Y., AND MOALLEMI, C. Efficient Risk Estimation via Nested Sequential Simulation 57(06), Décembre,13, 2010. p. 1172-1194.
- [7] CHABBAR, S., AND LALLOUCH, S. optimisation de portefeuille sous des contraintes de risque, juin,01, 2015.
- [8] ESCH, L., KIEFFER, R., AND LOPEZ, T. Asset & Risk Management, juin,01, 2003. p. 409-435.
- [9] GORDY, M. B., AND JUNEJA, S. Nested simulation in portfolio risk measurement. FEDS 2008-21, Federal Reserve Board,, April 2008. p. 409-435.
- [10] GORDY, M. B., AND JUNEJA, S. Nested simulation in portfolio risk management. Management Science, 56(10) : 1833-1848, October 2010.

- [11] LAN, H., NELSON, B. L., AND STAUM, J. A confidence interval procedure for expected shortfall risk measurement via two-level simulation. 2008.
- [12] LEE, S. H. Monte Carlo Computation of Conditional Expectation Quantiles. Stanford University, 1998. PhD thesis.
- [13] LEE, S. H., AND GLYNN, P. W. Computing the distribution function of a conditionnel expectation 2003.
- [14] LESNEVSKI, V., NELSON, B. L., AND STAUM, J. Simulation of coherent risk measures. In Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference, 2004. pages 1579-1585.
- [15] LESNEVSKI, V., NELSON, B. L., AND STAUM, J. Simulation of coherent risk measures based on generalized scenarios, Novembre 2007. Management Science,53(11) pages :1756-1769.
- [16] MARKOWITZ, H. Selected Works. Vol 1. University of California, San Diego, USA.
- [17] MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. The Journal of Finance 7 Vol 7.1, Mars 1952.
- [18] MAROUA, C. Gestion de risque de portefeuille : estimation de la VaR et CVaR, Septembre 2015.
- [19] MORGAN, J. P. RiskMetrics-Technical Document, 1996. 4th edition.
- [20] PEZET, A. La gestion du risque dans la dicision d'investissement, 2015.
- [21] RONCALLI, T. Introduction à la gestion des risques, 2001.