

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté Des Sciences Exactes
Département Recherche Opérationnelle : Aide à la décision



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire de fin de cycle Master
en mathématiques

Option

Mathématiques Financières

*Analyse de sensibilité dans
le modèle Black-Scholes-Merton*

Réalisé par :

Chafiâ HADJOUT

Devant le jury composé de

Présidente	<i>M^{me}</i> Louiza BOURAINÉ	M.C.A	U.A.M.B
Rapporteur	<i>M^r</i> Karim ABBAS	Professeur	U.A.M.B
Éxamineur	<i>M^r</i> Belkacem BRAHMI	M.C.A	U.A.M.B
Éxamineur	<i>M^r</i> Massinissa SOUFIT	Doctorant	U.A.M.B

Promotion : 2017-2018

DÉDICACES

- *À la mémoire de mon père et ma grand-mère ;*
- *À ma mère ;*
- *À mes frères : Tahar, Sofiane, Nassim, Khireddine et Rayan ;*
- *À mes sœurs : Hassiba et Sara ;*
- *À mon promoteur Pr Abbas Karim ;*
- *Et à toute personne me le désire.*

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie le Bon Dieu le Tout Puissant de m'avoir donnée la chance et le courage et de mettre sur mon chemin des gens qui m'ont aidée et soutenue pendant tout mon parcours.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon rapporteur *M^r Abbas*. Je le remercie infiniment d'avoir accepté de m'encadrer et qui ne cesse jamais de me conseiller, m'encourager et surtout de me donner la passion du savoir et de recherche. Mes remerciements sont aussi destinés à son équipe MAPMS.

Je tiens aussi à remercier les membres de jury de m'avoir fait l'honneur d'accepter de juger ce travail et d'en consacrer du temps à une lecture approfondie.

Mes vifs remerciements vont à *M^r K.A* qui s'est mis à ma disposition, mes camarades et ma famille universitaire.

Je rends hommage à ma mère et je lui présente tout mon respect, ma profonde reconnaissance pour toutes ses sacrifices et à mon père que Dieu lui fait miséricorde, sans oublier mes frères et sœurs qui me soutiennent souvent.

*Si tu penses que l'éducation coûte cher,
essaie l'ignorance.*

Andy McIntyre et Derek Bok

TABLE DES MATIÈRES

Liste des tableaux	iii
Table des figures	v
Introduction générale	1
1 Généralité sur les mathématiques financières	3
1.1 Notions élémentaires en mathématiques financières	3
1.2 Définitions et généralité sur les options	4
1.2.1 Valeur d'une option	5
1.2.2 Déterminants d'une option	7
1.3 Prix d'option d'achat européenne	9
1.4 Modèle de Black-Scholes-Merton	10
1.4.1 Hypothèses du modèle	10
1.4.2 Formule du modèle	10
1.5 Les grecques	11
1.5.1 Delta	11
1.5.2 Gamma	12
1.5.3 Thêta	13
1.5.4 Rho	14
1.5.5 Vega	15

2	Analyse de sensibilité pour les variables indépendantes	17
2.1	Les ambitions de l'analyse de sensibilité et historique	17
2.2	Indices de Sobol	19
2.3	Indices de sensibilité totale	20
2.4	Estimation des indices de sensibilité	21
2.4.1	Techniques de simulation Monte-Carlo	21
2.4.2	Estimation des indices de Sobol par la méthode Monte-Carlo	22
2.4.3	Intervalle de confiance pour les indices de Sobol	23
 3	 Analyse de sensibilité pour une option d'achat européenne	 24
3.1	Nouveau modèle	24
3.2	Analyse de sensibilité du modèle	26
3.2.1	Coefficient d'asymétrie	26
3.2.2	Coefficient d'aplatissement	27
3.2.3	Valeur à risque	28
3.2.4	Étapes de simulation	29
3.3	Analyse de sensibilité du modèle	30
3.3.1	Quantification du prix de l'option sous l'incertitude par simulation Monte-Carlo	30
3.3.2	Simulation des indices de Sobol	31
3.4	Analyse de sensibilité dans un p-boxe	33
3.4.1	Boite de probabilité	33
3.4.2	P-boxe du modèle	35
 Conclusion générale		 42
 Bibliographie		 44

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Quantificateurs de l'option.	31
3.2	Les indices de Sobol normaux et totaux	32
3.3	Quantification du prix l'option cas de p-boxe.	37
3.4	Min et max des indices de Sobol et les indices totaux.	39

TABLE DES FIGURES

1.1	Valeur intrinsèque d'un Call.	5
1.2	Valeur intrinsèque d'un Put.	6
1.3	Valeur temps d'un Call.	6
1.4	Flux de trésorerie selon le cours sous-jacent.	8
1.5	Valeur d'un Call européen avec $S_0 = 0, \dots, 100$; $K = 50$; $T = 0.5$; $r = 0.1$; $\sigma = 0.5$	9
1.6	Evolution du Delta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$	12
1.7	Evolution du Gamma par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$	13
1.8	Evolution du Thêta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$	14
1.9	Evolution de Rho par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$	15
1.10	Evolution du Vega par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$	16
3.1	Graphe du modèle (3.1) pour $\bar{r} = 0.05$ et $\sigma_r = 0.01$	25
3.2	Graphe du modèle (3.2) pour $\bar{\sigma} = 0.25$ et $\sigma_\sigma = 0.05$	26
3.3	Distribution d'une loi de probabilité selon le <i>Skewness</i>	27
3.4	Représentation graphique d'une distribution de probabilité selon le coefficient d'aplatissement.	28

3.5	Value at Risk.	28
3.6	Valeur d'une option simulée.	31
3.7	Les indices de sensibilité totaux du prix de l'option.	32
3.8	Les indices de sensibilité le long de la durée de vie de l'option pour $T = 0.4, \dots, 0$.	33
3.9	P-boxe d'une loi de densité Gaussienne $\mathcal{N}([0.24, 0.26], [0.04, 0.06])$.	34
3.10	Loi de densité des prix de l'option	37
3.11	Variation de la moyenne au cours des 5000 itérations	38
3.12	Variation de la variance au cours des 5000 réplifications	38
3.13	Quantification du prix de l'option	39
3.14	Les paramètres influant les valeurs de l'option	40
3.15	Les indices de sensibilité pour N=5000.	40

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'observation des marchés financiers montre que les prix ne sont pas déterminés d'une manière certaine. La variabilité des prix des actifs financiers a conduit à une demande de transfert du risque à ce qu'on appelle les *produits dérivés*. On en détermine les options. Une *option* est un contrat donnant à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter (*Call*) ou vendre (*Put*) un *actif sous-jacent* à un prix prédéterminé jusqu'à une certaine date. Afin de pouvoir évaluer le prix d'une option, en 1973, *Black & Scholes* ont introduit un modèle pour lequel ils ont obtenu le prix *Nobel* en économie en 1997.

Le modèle suppose des paramètres constants ce qui contredit l'instabilité des paramètres du marchés financiers à savoir le taux d'intérêt et la volatilité. Ceci explique l'indispensabilité de l'étude de la façon dont l'incertitude de la valeur de l'option peut être attribuée à l'incertitude dans ses paramètres d'entrée. Il s'agit donc d'estimer les *indices de sensibilité* qui quantifient l'influence du taux d'intérêt sans risque et la volatilité ou les deux sur la valeur de l'option. La méthode la plus célèbre est celle introduite par *Sobol* qui est basée sur la décomposition de la variance du modèle. Ce type d'indices ne prend pas en considération l'incertitude causée par les interactions du paramètre étudié avec les autres variables. Pour inclure toutes les interactions dans lesquelles il est impliquée, on utilise *l'indice de Sobol total*.

Afin de présenter l'incertitude infligée à la volatilité et au taux d'intérêt sans risque, un nouveau modèle basé sur la formule de Black-Scholes-Merton pour les options d'achat européenne est considéré. Ce mémoire a pour objectif d'étudier la part de l'influence

de l'incertitude de ces deux paramètres sur la variation du prix de l'option. Sous l'hypothèse que le taux d'intérêt sans risque et la volatilité sont des variables aléatoires de loi normale, nous effectuons une analyse de sensibilité du nouveau modèle. Cependant, le problème d'incertitude aléatoire est posé comme les paramètres de la loi ne peuvent pas être déterminés d'une manière certaine. Donc, nous suivons une nouvelle démarche dans notre analyse en combinant l'incertitude aléatoire avec l'incertitude épistémique. L'analyse de sensibilité du modèle consiste à calculer les indices de Sobol par la technique de simulation Monte-Carlo puisque le calcul de ces indices analytiquement semble difficile.

Ce travail est constitué principalement de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous définissons quelques notions élémentaires en mathématiques financières. Puis, nous introduisons quelques généralités sur les options en incluant ses déterminants principaux. Et finalement, nous présentons le modèle de Black-Scholes-Merton concernant ses hypothèse et sa formule avec les indices de sensibilité du prix d'une option (les grecques).

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse de sensibilité à variables d'entrée indépendantes basées sur la décomposition de la variance. Nous présentons les indices de Sobol avec leurs estimateurs par la méthode Monte-Carlo.

Et finalement, dans le dernier chapitre, nous présentons un nouveau modèle basé sur la formule de Black-Scholes-Merton. Ce modèle prend en considération l'incertitude lié au taux d'intérêt sans risque et à la volatilité. Les indices de sensibilité de Sobol sont calculés via la simulation Monte-Carlo suivant deux démarches. La première démarche comporte juste l'incertitude épistémique, et la deuxième combine entre l'incertitude aléatoire et épistémique.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉ SUR LES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Les premières formes de produits dérivés remontent aux origines de l'Antiquité : ils portaient essentiellement sur les produits agricoles. Un contrat optionnel ou option est l'une de ses catégories. Suite à la crise produite en 1973, Black, Scholes et Merton ont introduit un modèle révolutionnaire permettant de valoriser le prix d'une option. Le but de ce chapitre est de présenter ce modèle avec une définition et des généralités sur les options.

1.1 Notions élémentaires en mathématiques financières

Marché financier

Un marché financier appelé aussi « Bourse des valeurs », est le lieu où se rencontrent les agents à capacité de financement et les agents à besoins de financement. C'est un marché de capitaux à long terme sur lequel s'échangent des produits financiers, telles que les valeurs mobilières, actions et obligations [10].

Portefeuille

Toute collection d'actifs financiers tels que des stocks, des liens et des équivalents d'argent comptant tenus par un établissement ou une compagnie d'investissement est appelée un portefeuille [10].

Produit dérivé

C'est un contrat entre un acheteur et un vendeur dont la valeur est « dérivée » des flux financiers futurs d'un actif sous-jacent, tels que des actions, des obligations, des indices boursiers, des instruments monétaires [11].

Actif sous-jacent financier

Un actif sous-jacent financier est un actif sur lequel porte un produit dérivé. Il peut être une action, obligation, devise ou même matière première, ... ect [17].

1.2 Définitions et généralité sur les options

Une option est un contrat conférant à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix convenu à l'avance pendant une période de temps donnée. En contre partie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur une prime qui est le prix de l'option [14].

On distingue deux types d'options : options d'achat (**Call**) et options de vente (**Put**).

Un Call est un contrat qui donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.

Un Put est un contrat qui donne à son détenteur le droit de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.

Il existe deux types d'option selon le style de son exercice :

Une option est dite **américaine** si elle est exerçable à tout moment jusqu'à son échéance, et **européenne** si elle ne peut être exercée qu'à son échéance.

Un détenteur d'un Call a le choix d'exercer son option ou abandonner. Par contre, le vendeur est obligé de transmettre à l'acheteur le produit s'il exige son option. Et de même raisonnement dans le cas d'un Put.

A la signature du contrat, le vendeur de l'option reçoit le prix de l'option. Le détenteur de cette dernière paie une prime qu'il exerce son option ou non.

1.2.1 Valeur d'une option

Le prix d'une option n'est pas déterminé seulement par l'offre et la demande sur le marché mais il dépend aussi des anticipations de résultats de la valeur à l'échéance. Le prix de l'option évolue tout au long de sa durée de vie. La valeur d'une option est donc la somme des deux valeurs intrinsèque et temps.

$$\text{Prime} = \text{Valeur intrinsèque} + \text{Valeur temps} .$$

✓ Valeur intrinsèque

La valeur intrinsèque représente le profit qui serait obtenu immédiatement si l'on décidait d'exercer l'option.

Elle est donc la différence positive ou nulle entre le cours de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice dans le cas d'un Call.

$$\text{Valeur intrinsèque d'un Call} = \max\{S_t - K, 0\} = (S_t - K, 0)^+.$$

où S_t désigne le prix du sous-jacent au cours du temps et K le prix d'exercice.

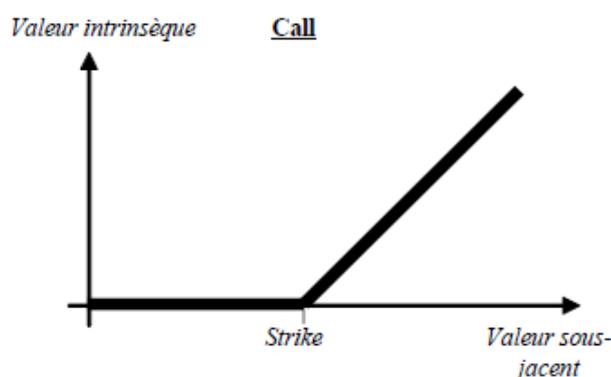


FIGURE 1.1 – Valeur intrinsèque d'un Call.

Et dans le cas d'un Put, elle est la différence positive ou nulle entre le prix d'exercice et le cours de l'actif sous-jacent.

$$\text{Valeur intrinsèque d'un Put} = \max\{K - S_t, 0\} = (K - S_t, 0)^+.$$

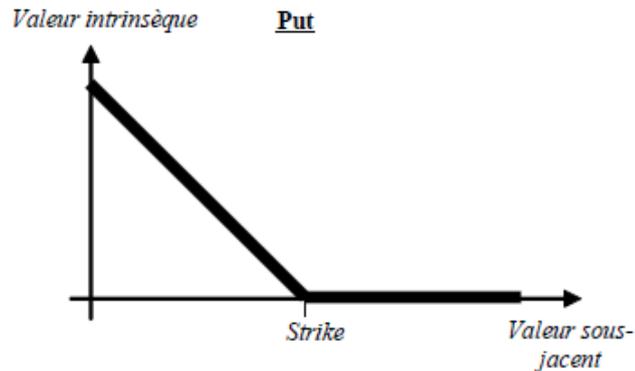


FIGURE 1.2 – Valeur intrinsèque d'un Put.

✓ Valeur Temps

La valeur temps représente le surplus de la valeur de l'option par rapport à sa valeur intrinsèque. D'une autre façon elle représente la probabilité que l'option soit exercée avant sa date d'échéance.

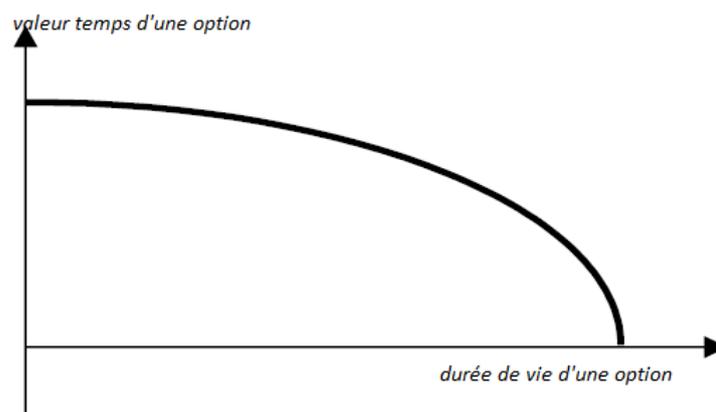


FIGURE 1.3 – Valeur temps d'un Call.

La figure (1.3) est expliquée, de fait que, par exemple, si le prix d'exercice est inférieur au cours de l'actif sou-jacent, le détenteur de l'option a toujours une possibilité (probabilité) d'exercer son option. De plus la durée de vie de l'option est

proche de son échéance, cette probabilité diminue et elle est nulle à sa maturité pour une option européenne.

1.2.2 Déterminants d'une option

D'après la définition d'une option, on constate que sa valeur dépend de : cours de l'actif sous-jacent, prix d'exercice et sa maturité. En plus de ça, elle dépend aussi du taux d'intérêt sans risque et la volatilité du cours de l'actif sous-jacent [17].

Le cours de l'actif sous-jacent

Une augmentation dans le cours de l'actif sous-jacent amène à une augmentation de la valeur du Call et une diminution de la valeur du Put puisque le prix d'exercice est fixé. Et en cas de diminution du prix du sous-jacent, le Call diminue et le Put augmente.

Prix d'exercice

Le prix d'exercice de l'option (**STRIKE**) est le prix pour lequel le vendeur de l'option devrait livrer (pour un Call) ou acheter (pour un Put) l'actif sous-jacent si l'acheteur exerce son droit. Il est déterminé lors de la négociation de l'option et constant jusqu'à son échéance.

L'exercice de l'option dépend du positionnement du strike par rapport au prix du sous-jacent qui varie, ainsi l'option d'achat est dite :

- **à la monnaie** (At The Money (ATM)) si le prix d'exercice est égal au prix actuel du sous-jacent. On fait ce que l'on veut, le bénéfice est nul ;
- **en dehors de la monnaie** (Out The Money (OTM)) si le prix du sous-jacent est supérieur au strike. Le détenteur de l'option a intérêt à ne pas exercer son option et le bénéfice est nul.
- **dans la monnaie** (In the Money (ITM)) si le cours sous-jacent est inférieur au strike, le détenteur de l'option a intérêt à l'exercer. En effet le bénéfice est la différence entre les deux prix.

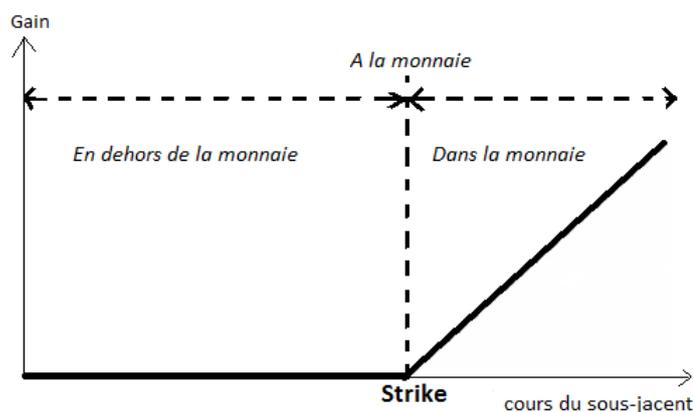


FIGURE 1.4 – Flux de trésorerie selon le cours sous-jacent.

Plus le prix d'exercice d'une option est élevé, plus le Call est bon marché, plus le Put est cher et vice versa, puisque, le détenteur du Call le paye et celui du Put encaisse la somme.

Date d'échéance

Plus la maturité de l'option est lointaine, plus la chance d'anticipation augmente et plus la prime est chère en Call plus qu'en Put.

Taux d'intérêt sans risque

Acheter un Call revient à acheter un actif et le payer plus tard en cas d'exercice avec un taux d'intérêt sans risque. Ainsi, plus les taux d'intérêt sont élevés plus les Call sont plus chers mais les Put sont moins chers.

Volatilité du cours du sous-jacent

Elle est mesurée par l'écart-type de la distribution du taux de rentabilité de l'actif. Plus le cours de l'actif est volatil, il a de la chance de s'élever au-dessus du prix d'exercice (ce qui est favorable au Call) ou en descendre au-dessous (ce qui est favorable au Put). Donc, plus la volatilité est forte plus l'option est chère.

1.3 Prix d'option d'achat européenne

Dans tout ce qui suit, nous considérons les notations suivantes :

- S_0 : cours actuel de l'actif sous-jacent ;
- K : prix d'exercice de l'option ;
- T : date d'échéance de l'option ;
- r : taux d'intérêt sans risque ;
- σ : volatilité de prix de l'actif.

La valeur théorique d'une option d'achat de prix d'exercice K , jusqu'à une date d'échéance T , est donnée par son flux de trésorerie (*Payoff*)

$$\max(S_t - K, 0) = (S_t - K, 0)^+. \quad (1.1)$$

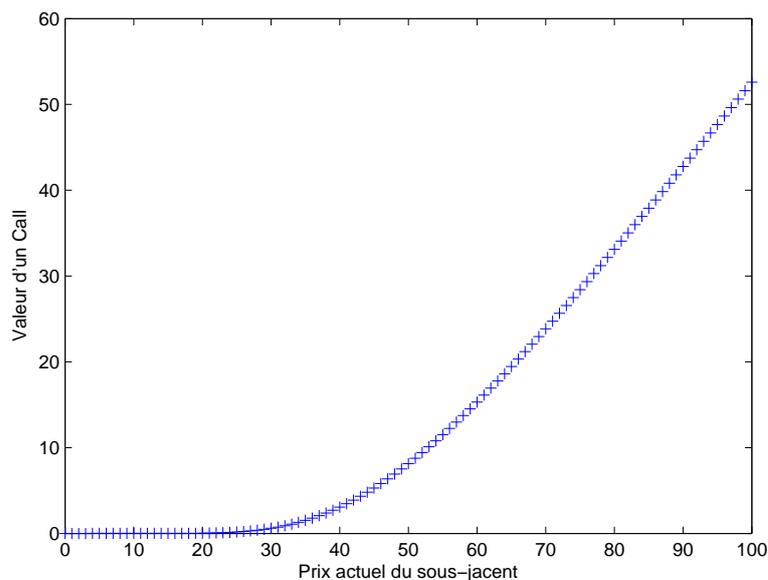


FIGURE 1.5 – Valeur d'un Call européen avec $S_0 = 0, \dots, 100$; $K = 50$; $T = 0.5$; $r = 0.1$; $\sigma = 0.5$.

1.4 Modèle de Black-Scholes-Merton

1.4.1 Hypothèses du modèle

Le modèle de Black-Scholes-Merton pour une option d'achat européenne se repose sur les hypothèses suivantes [14, 22] :

Le marché est considéré :

- fonctionne en continu ;
- liquide ;
- viable (absence d'opportunité d'arbitrage) ;
- ne possède pas de coûts de transaction ni d'impôts ou taxes.

On suppose qu'il existe un actif sans risque tel que :

- on peut prêter et emprunter à un même taux d'intérêt r ;
- le taux d'intérêt sans risque r est constant.

L'actif sous-jacent est supposé :

- indéfiniment fractionnable ;
- ne verse pas de dividendes ;
- son cours suit la dynamique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.2)$$

où les constantes μ et σ désignent respectivement le rendement et la volatilité instantanés de l'actif, et W_t est un mouvement brownien modélisant les accroissements relatifs au prix de l'actif.

1.4.2 Formule du modèle

Sous les hypothèses précédentes, le prix théorique d'une option d'achat européenne est établi par une espérance [3] :

$$C_T = \mathbb{E}[(\max(S_t - K, 0)^+) e^{-rT}] \quad (1.3)$$

la formule de Black-Scholes-Merton est

$$C_T = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2), \quad (1.4)$$

où

$$\mathcal{N}(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (1.5)$$

est une fonction de répartition de loi normale centrée et réduite en point d_1 ,

et

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (1.6)$$

et

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (1.7)$$

1.5 Les grecques

Pour utiliser de manière optimale les options, il est nécessaire de quantifier l'impact d'une modification des variables qui les influencent sur leurs valeurs et ici intervient l'importance des grecques. Les grecques sont des indicateurs qui mesurent la sensibilité du prix d'une option par rapport à un paramètre donné [12].

1.5.1 Delta

Le Delta mesure la sensibilité du prix d'une option par rapport à une variation du cours du sous-jacent. Pour un Call il représente la probabilité que le prix d'exercice soit au-dessus du cours du sous-jacent :

$$\Delta = \frac{\partial C_T}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) > 0.$$

À l'achat, le Delta d'un Call est positif, et est compris entre 0 et 1. Une option d'achat très fortement dans la monnaie aura un Delta proche de 1 et est très fortement hors de la monnaie aura un Delta proche de 0.

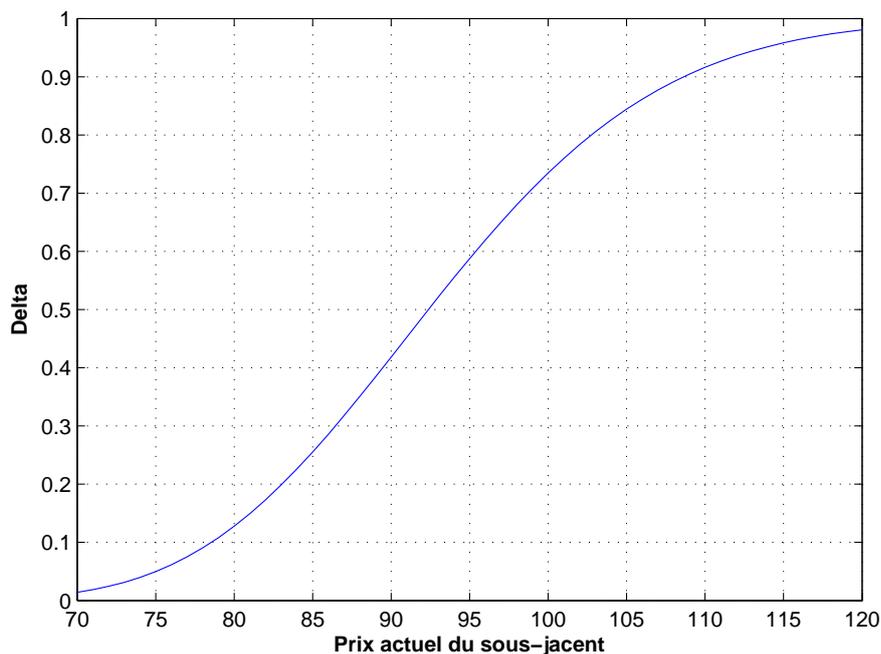


FIGURE 1.6 – Evolution du Delta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$.

1.5.2 Gamma

Le Gamma a pour objet de mesurer l'évolution du Delta aux variations de la valeur de l'actif sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent :

$$\Gamma = \frac{\partial C_T}{\partial \Delta} = \frac{1}{S \sigma \sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_1) > 0.$$

Le Gamma est maximal à la monnaie et minimal dans et en dehors de la monnaie. Choisir un prix d'exercice élevé diminue le prix du Call et vice versa.

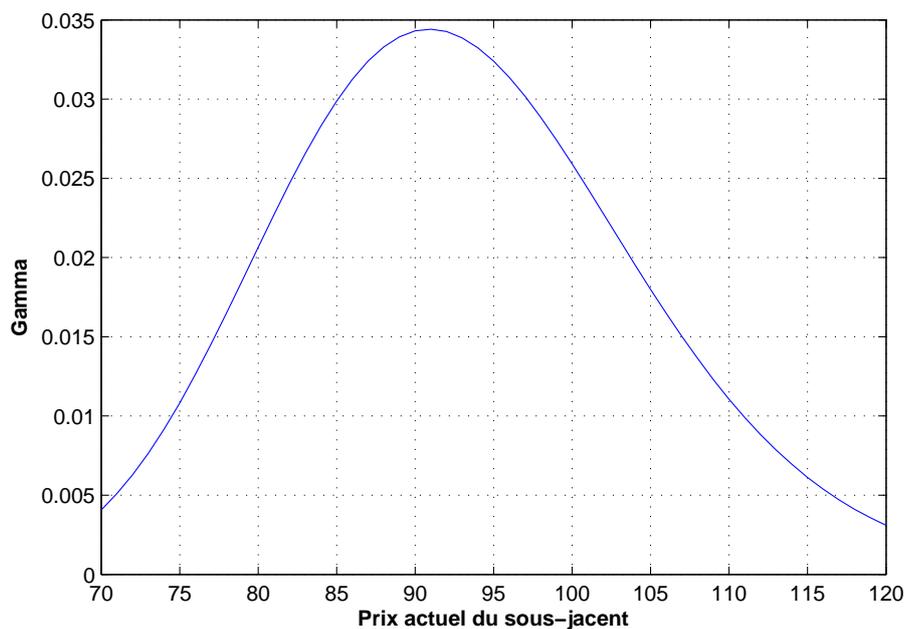


FIGURE 1.7 – Evolution du Gamma par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$.

1.5.3 Thêta

Le Thêta est l'indicateur qui mesure la sensibilité de la prime à la maturité restante :

$$\Theta = \frac{\partial C_T}{\partial T} = -\frac{S \sigma}{2\sqrt{T}} \mathcal{N}(d_1) - r K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2) < 0.$$

La valeur des options est d'autant plus élevée que la maturité est éloignée. De ce fait, le passage de temps influence négativement la valeur d'une option [17].

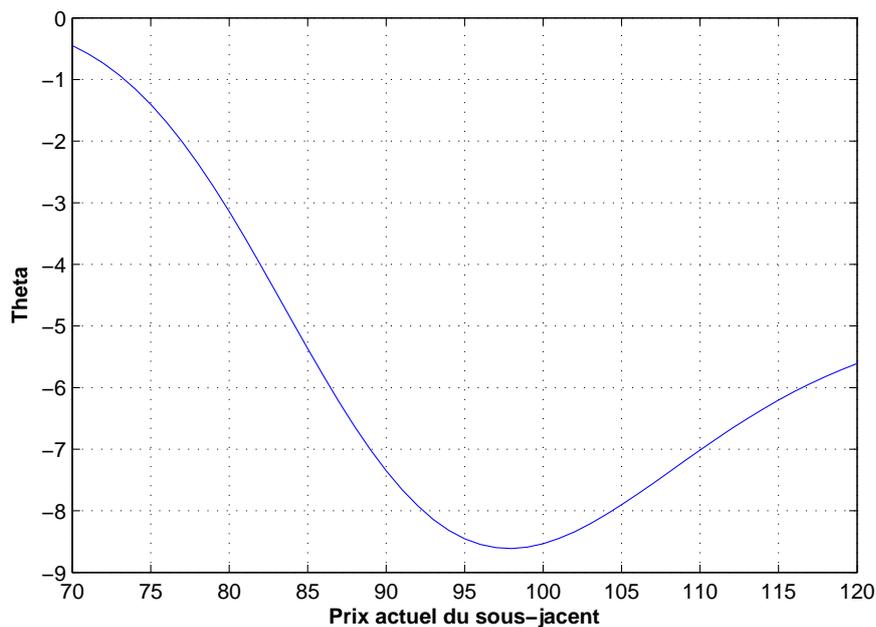


FIGURE 1.8 – Evolution du Thêta par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$.

1.5.4 Rho

Le Rho mesure l'influence d'une variation du taux d'intérêt sans risque sur la valeur des options :

$$\rho = \frac{\partial C_T}{\partial r} = T k e^{-rT} \mathcal{N}(d_2) > 0.$$

L'achat d'un call revient donc implicitement à acheter à crédit le titre sous-jacent pour une durée correspondant à la maturité de l'option. En conséquence, plus les taux d'intérêt montent, plus le coût du crédit s'accroît et la prime du Call aussi.

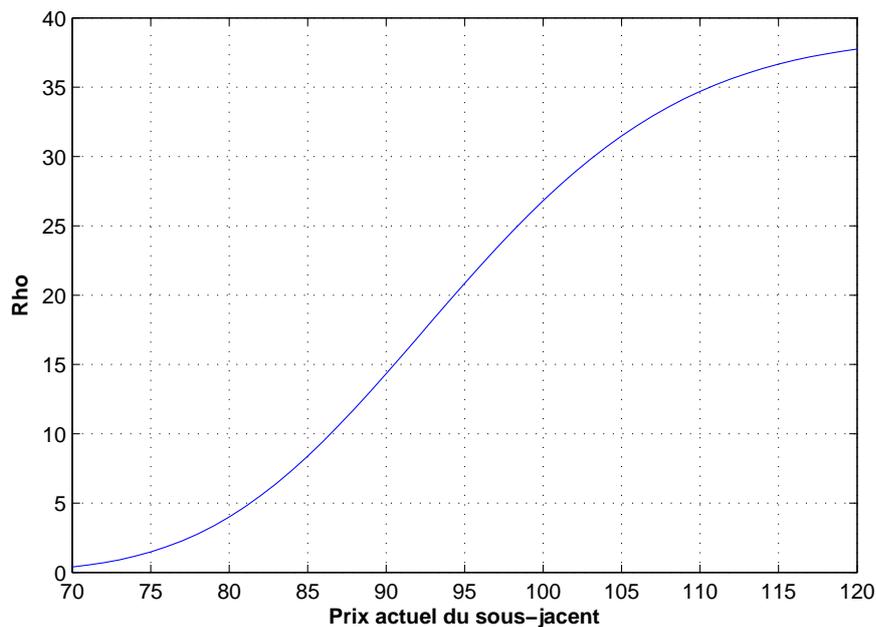


FIGURE 1.9 – Evolution de Rho par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$.

1.5.5 Vega

Le *Vega* mesure la sensibilité du prix d'une option par rapport à la variation de la volatilité.

$$\mathcal{V} = \frac{\partial C_T}{\partial \sigma} = S \sqrt{T} \mathcal{N}'(d_1).$$

Bien que la volatilité soit supposée constante dans la formule de Black-Scholes-Merton, elle est très souvent variable dans la réalité. La valeur de l'option est de fait affectée par la variation de la volatilité de l'actif sous-jacent. Le *Vega* d'un Call est positif. Plus les prix sont volatils, la valeur d'une option augmente.

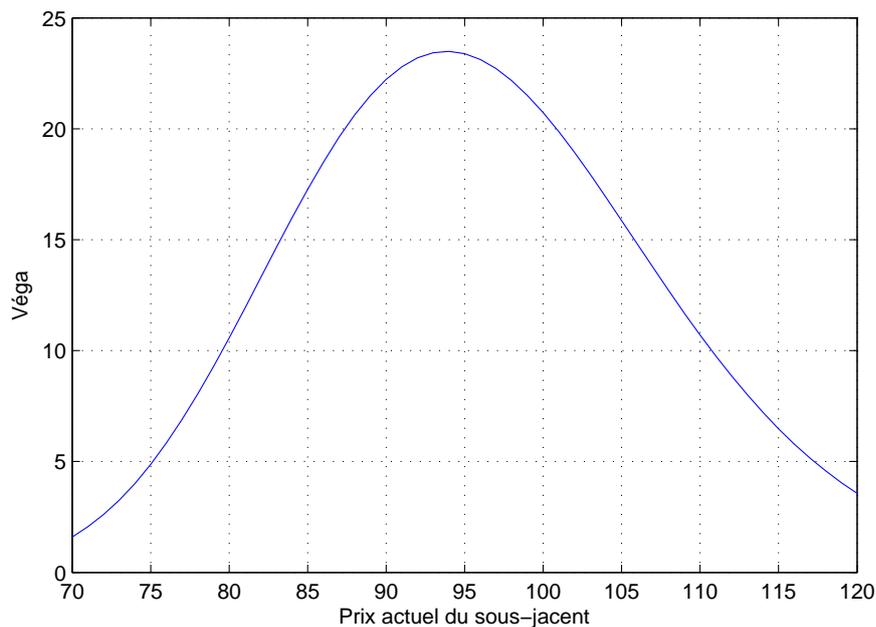


FIGURE 1.10 – Evolution du \mathcal{V} ega par rapport au sous-jacent $S_0 = 70, \dots, 120$; $K = 95$; $T = 0.4$; $r = 0.05$; $\sigma = 0.2$.

Coclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle de Black-Sholes-Merton permettant d'évaluer la valeur d'une option. Ce modèle comporte un inconvénient lié aux hypothèses surtout la constance des paramètres à savoir le taux d'intérêt sans risque et la volatilité.

CHAPITRE 2

ANALYSE DE SENSIBILITÉ POUR LES VARIABLES INDÉPENDANTES

Nous disposons d'un modèle mathématique $Y = f(X)$ où $X = (X_1, \dots, X_p)$ sera considéré un vecteur aléatoire à p composantes. L'incertitude infligée à l'entrée X_i entraîne une sortie Y de nature incertaine. Comment cette incertitude de X_i va-t-elle se propager sur Y ? Dans ce chapitre, nous allons aborder l'analyse de sensibilité par les indices de Sobol et donner une estimation de ces indices par l'approche numérique Monté-Carlo. Puis nous présentons la méthode de *Bootstrap* qui sert à déterminer l'intervalle de confiance de tels indices.

2.1 Les ambitions de l'analyse de sensibilité et historique

Au cours de l'élaboration, de la construction ou de l'utilisation d'un modèle mathématique, l'analyse de sensibilité peut s'avérer être un outil précieux. En effet, en étudiant comment la réponse du modèle réagit aux variations de ses variables d'entrée, l'analyse de sensibilité permet de [15] :

- évaluer la qualité du modèle en connaissant l'impact réel de ses entrées ;
- connaître les paramètres les plus et les moins influents afin de pouvoir gérer ses

efforts à propos du processus étudié ;

- identifier les variables ou groupe de variables interagissent avec quelles (ou quels) autres en éclairant ces relations.

Considérons le modèle suivant :

$$f : \Omega^p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \mapsto Y = f(X),$$

où Y est la sortie d'un modèle représenté par une fonction mathématique déterministe f avec une entrée vectorielle de variables aléatoires $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$. La première approche historique à l'analyse de sensibilité est connue comme approche locale. L'impact de petites perturbations d'entrée sur le rendement du modèle est étudié. Pour étudier la variation de la réponse d'un modèle, la technique la plus naturelle consiste à "choisir" un/des paramètre(s) d'entrée, et d'étudier l'effet de cette action sur la variabilité de la sortie. Suivant cette idée, Hora & Iman [4] introduisent la **mesure d'importance** d'une variable X_i comme

$$I_i = \sqrt{\text{Var}(Y) - \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X_i))} = \sqrt{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_i))}.$$

Pour des questions de robustesse, cette mesure sera plus tard modifiée par les mêmes auteurs au profit du nouvel indice

$$\frac{\text{Var}[\mathbb{E}(\log Y|X_i)]}{\text{Var}(\log Y)}.$$

Plus tard, McKay [9] exploite le modèle de régression classique et la décomposition de la variance totale pour introduire le rapport de corrélation, défini comme suit :

$$\eta^2 = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|X_i)]}{\text{Var}(Y)}.$$

Notons que cet indice permet une interprétation simple de la contribution de X_i dans le modèle. En effet, étant donné que $\mathbb{E}(Y|X_i)$, fonction de X_i , est la meilleure approximation de Y sur l'espace engendré par X_i , la variance de cette quantité mesure la dispersion de Y due à la variation de X_i . Le ratio de $\text{Var}[\mathbb{E}(Y|X_i)]$ avec $\text{Var}(Y)$ permet ainsi de comparer cette dispersion à celle de Y seul [18].

Cette mesure coïncide exactement avec l'indice de Sobol du premier ordre .

2.2 Indices de Sobol

Pour le modèle

$$\begin{aligned} f &: \Omega^p \rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto Y = f(X) \end{aligned}$$

avec X_i pour $i = 1, \dots, p$ est une variable aléatoire et $f(x) \in L^2$, en 1993, Sobol [6] proposa une décomposition de Y en une somme de $2^p - 1$ fonctions de dimension croissante (basée sur la décomposition de *Hoeffding* [1])

$$Y = f(X_1, \dots, X_p) \quad (2.1)$$

$$= f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1, \dots, p}(X_1, \dots, X_p) \quad (2.2)$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_{\Omega^p} f(X) dX = \mathbb{E}[Y] && \text{est une constante} \\ f_i(X_i) &= \int_{\Omega^p} \dots \int_{\Omega^p} f(X) dX_{\sim i} - f_0 = \mathbb{E}[Y|X_i] - \mathbb{E}[Y] \\ f_{ij}(X_i, X_j) &= \int_{\Omega^p} \dots \int_{\Omega^p} f(X) dX_{\sim ij} - f_i(X_i) - f_j(X_j) - f_0 \\ &= \mathbb{E}[Y|X_i, X_j] - \mathbb{E}[Y|X_i] - \mathbb{E}[Y|X_j] - \mathbb{E}[Y] \\ &\vdots \end{aligned}$$

où $X_{\sim i}$ est le vecteur contenant tous les paramètres sauf le paramètre X_i pour $i = 1, \dots, p$.

Théorème 2.2.1. [1] *Il existe une unique décomposition de l'équation (2.2) pour toute fonction $f(X)$ intégrable sur Ω^p si*

$$\int_{\Omega^p} f_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) dX_{ik} = 0 \quad 1 \leq k \leq s \text{ et } 1 \leq s \leq p,$$

ou

$$\int_{\Omega^p} f_{i_1, \dots, i_s} f_{j_1, \dots, j_l} dX = 0 \quad 1 \leq l \leq p. \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) traduit l'orthogonalité des fonctions définies dans l'équation (2.2). Une telle décomposition est dénommée **ANOVA** (acronyme de **AN**alysis **O**f **VA**riance) [20].

La variance $Var(Y)$ peut être décomposée selon le théorème suivant :

Théorème 2.2.2 (Décomposition de Sobol de la variance [6]). *La variance du modèle à entrées indépendantes (2.2) se décompose en :*

$$Var(Y) = \int_{\Omega^p} f^2(X) - f_0^2 = V = \sum_{i=1}^p V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} + \dots + V_{1,\dots,p}, \quad (2.4)$$

où

$$\begin{aligned} V_i &= V(\mathbb{E}[Y|X_i]) \\ V_{ij} &= V(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j \\ &\vdots \\ V_{1,\dots,p} &= V - \sum_{i=1}^p V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq p} V_{i_1,\dots,i_{p-1}} \end{aligned}$$

La décomposition de la variance nous permet de calculer les différents indices de Sobol jusqu'à l'ordre p .

L'indice de Sobol du premier ordre est défini comme suit :

$$S_i = \frac{V(\mathbb{E}[Y|X_i])}{Var(Y)} = \frac{V_i}{V}, \quad (2.5)$$

qui quantifie l'influence du paramètre X_i sur la variance de Y [16].

L'indice de Sobol d'ordre p est donné par [6]

$$S_{1,\dots,p} = \frac{V_{1,\dots,p}}{V} \quad (2.6)$$

où $V_{1,\dots,p}$ est la variance de l'espérance conditionnant p variables.

Propriété 1. [6] *La somme des indices de Sobol du premier jusqu'à l'ordre p est égale à 1 :*

$$\sum_{i=1}^p S_i + \sum_{i < j}^p S_{ij} + \dots + S_{i_1,\dots,i_s} = 1 \quad (2.7)$$

avec

$$S_{i_1,\dots,i_s} \in [0, 1], \quad 1 \leq s \leq p \quad (2.8)$$

2.3 Indices de sensibilité totale

Le fait que $S_i = 0$, ne signifie forcément pas que le paramètre X_i n'a plus d'influence sur le modèle Y . Ce constat a conduit Homma et Saltelli [7] à définir l'indice de sensibilité totale :

$$S_i^{tot} = \frac{\mathbb{E}_{X_{\sim i}}(\text{Var}_{X_i}[Y|X_{\sim i}])}{\text{Var}(Y)} = \frac{\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} V_{i_1, \dots, i_s}}{V} = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} S_{i_1, \dots, i_s}, \quad (2.9)$$

où $X_{\sim i}$ désigne le vecteur (X_1, \dots, X_p) sauf la variable X_i [23].

Cet indice mesure toutes contributions relatives au paramètre X_i . C'est cet indice qui permet de conclure si cette variable influe ou pas sur le modèle par rapport aux autres variables [20].

Exemple 1. Supposons qu'un certain modèle de 03 paramètres indépendants X_1, X_2 et X_3 , l'indice de sensibilité totale associé à X_1 est $S_1^{tot} = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123}$

2.4 Estimation des indices de sensibilité

Le calcul exact des indices de sensibilité, en particulier celui des indices de Sobol, n'est pas toujours possible. En effet, les lois des paramètres d'entrée, ainsi que l'expression de la sortie du modèle Y peuvent être extrêmement complexes, et les intégrales exprimant les variances et les variances d'espérances conditionnelles qui interviennent dans la définition des indices peuvent s'avérer incalculables analytiquement. Il faut donc avoir recours à des méthodes d'approximation numérique [16]. Parmi les méthodes d'estimation des indices de Sobol les plus célèbres sont les méthodes Monte-Carlo.

2.4.1 Techniques de simulation Monte-Carlo

Supposons que l'on veuille calculer une quantité I . La première étape est de la mettre sous forme d'une espérance $I = \mathbb{E}(X)$ avec X une variable aléatoire. Si on sait simuler des variables X_1, X_2, \dots indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*), alors nous pouvons approcher I par

$$I \approx \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} \quad (2.10)$$

avec " N " grand, sous réserve d'application de la loi des grands nombres, représente la taille de l'échantillon [5]. La méthode Monte-Carlo permet d'estimer l'espérance de toute fonction d'une variable aléatoire de densité quelconque par :

$$\mathbb{E}[f(X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k) \quad (2.11)$$

2.4.2 Estimation des indices de Sobol par la méthode Monte-Carlo

Considérons un N -échantillon de $\bar{X} = (X_{k1}, \dots, X_{kp})_{1, \dots, N}$, pour $k = 1, \dots, N$, de réalisations de variables d'entrée indépendantes $X = (X_1, \dots, X_p)$. L'espérance de Y , $\mathbb{E}(Y) = f_0$ et sa variance $Var(Y) = V$ sont estimées par :

$$f_0 = \int_{\Omega^p} f(X) dX = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k) \quad (2.12)$$

$$V = \int_{\Omega^p} f^2(X) dX - f_0^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(X_k) - f_0^2. \quad (2.13)$$

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation de la variance de l'espérance conditionnelle :

$$V_i = Var(\mathbb{E}[Y|X_i]).$$

Pour une telle estimation, nous avons besoin de 02 N -échantillons $\bar{X}_{(N)}$ et $\bar{X}'_{(N)}$ indépendants de même loi de probabilité [19]. L'idée est de fixer le paramètre X_i dans le premier échantillon et prendre les autres paramètres du 2^{ème} échantillon. Ainsi, la variance de X_i est estimée par :

$$V_i = V - \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} [f(X) - f(X_i, X_{\sim i})]^2 dX dX_{\sim i} \approx V - \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [f(X_k) - f(X_{ik}, X'_{\sim ik})]^2, \quad (2.14)$$

et l'indice de Sobol du premier ordre est estimé par :

$$S_i = \frac{V_i}{V} \quad (2.15)$$

Dans le cas de sensibilité totale, nous fixons le paramètre X_i du deuxième échantillon et les autres paramètres du premier échantillon.

$$V_i^{tot} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} [f(X) - f(X'_i, X_{\sim i})]^2 dX dX_{\sim i} \approx \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [f(X_k) - f(X'_{ik}, X_{\sim ik})]^2 \quad (2.16)$$

Ainsi, l'indice de sensibilité totale est estimé par :

$$S_i^{tot} = \frac{V_i^{tot}}{V} \quad (2.17)$$

2.4.3 Intervalle de confiance pour les indices de Sobol

L'utilisation d'une approximation numérique pose naturellement la question de la précision de cette approximation. Il est traditionnel de chercher un intervalle de confiance pour la quantité estimée. Nous présentons ici le principe de la méthode de *bootstrap* pour les indices de Sobol.

La méthode de *bootstrap* consiste à estimer N fois chaque indice de Sobol S_i . Puis fixer R nombre de répliquions et tirer aléatoirement et avec remise à partir des indices déjà estimés un indice S_i^{*r} pour $i = 1, \dots, p$ et $r = 1, \dots, R$ [8]

$$S_i \in \left[\hat{S}_i - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (S_i^{*r} - \bar{S}_i^*)^2}, \hat{S}_i + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (S_i^{*r} - \bar{S}_i^*)^2} \right] \quad (2.18)$$

avec $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de loi normale $\mathcal{N}_{(0,1)}$ et $\bar{S}_i^* = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R S_i^{*r}$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse de sensibilité de modèles mathématiques dépendants de paramètres indépendants. Plus précisément, nous avons présenté quelques estimations des indices de Sobol par les méthodes Monte-Carlo. Ces notes nous seront utiles pour notre application en chapitre 3.

CHAPITRE 3

ANALYSE DE SENSIBILITÉ POUR UNE OPTION D'ACHAT EUROPÉENNE

Comme nous l'avons déjà souligné, l'incertitude de la volatilité et le taux d'intérêt sans risque n'est pas comptée dans le modèle de Black-Scholes-Merton. Pour cela, dans ce chapitre, nous introduisons un nouveau modèle basé sur la formule de Black-Scholes-Merton en prenant compte de l'aléatoire de ces paramètres. Puis nous effectuons une analyse de sensibilité par la méthode de simulation Monte-Carlo.

3.1 Nouveau modèle

D'après la formule de Black-Scholes-Merton, on constate que le modèle dépend de cinq paramètres. Trois d'entre eux sont contrôlables : le prix actuel de l'actif sous-jacent S_t , le prix d'exercice K et la date d'échéance T . Par contre, le taux d'intérêt sans risque r et la volatilité σ sont variants au cours de la durée de vie de l'option. Pour présenter cette incertitude dans ces paramètres, nous les considérons comme suit :

$$r = \bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1); \quad (3.1)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.2)$$

où

- \bar{r} et σ_r représentent respectivement la moyenne et l'écart-type du taux d'intérêt sans risque ;
- $\bar{\sigma}$ et σ_σ représentent respectivement la moyenne et l'écart-type de la volatilité ;
- ε_1 et ε_2 représentent le bruit blanc infligé au taux d'intérêt sans risque et la volatilité, de loi normale centrée et réduite.

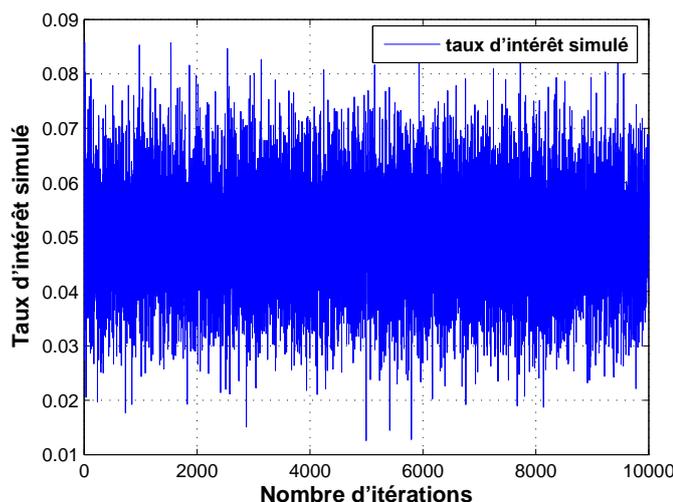


FIGURE 3.1 – Graphe du modèle (3.1) pour $\bar{r} = 0.05$ et $\sigma_r = 0.01$.

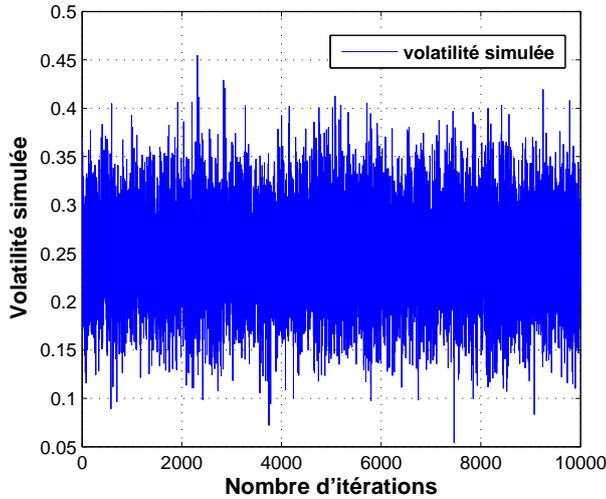
Les figures (3.1) et (3.2) illustrent graphiquement les nouveaux modèles des deux paramètres. Ces figures montrent que les réalisations du taux d'intérêt sans risque et la volatilité sont autour de la moyenne.

Formule du modèle

La formule de Black-Scholes-Merton d'une option d'achat européenne par rapport aux modèles (3.1) et (3.2), plus précisément par rapport aux bruits exogènes, peut être écrite de la manière suivante :

$$C_T(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1, \bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K \exp(-(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1)T) \mathcal{N}(d_2), \quad (3.3)$$

où

FIGURE 3.2 – Graphe du modèle (3.2) pour $\bar{\sigma} = 0.25$ et $\sigma_{\sigma} = 0.05$.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1) + \frac{(\bar{\sigma} + \sigma_{\sigma} \varepsilon_2)^2}{2}\right] T}{(\bar{\sigma} + \sigma_{\sigma} \varepsilon_2) \sqrt{T}}, \quad (3.4)$$

et

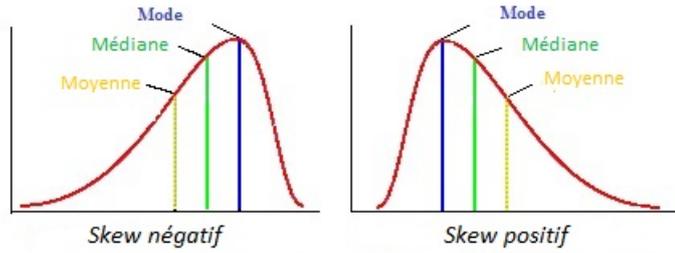
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[(\bar{r} - \sigma_r \varepsilon_1) - \frac{(\bar{\sigma} + \sigma_{\sigma} \varepsilon_2)^2}{2}\right] T}{(\bar{\sigma} + \sigma_{\sigma} \varepsilon_2) \sqrt{T}} = d_1 - (\bar{\sigma} + \sigma_{\sigma} \varepsilon_2) \sqrt{T}. \quad (3.5)$$

3.2 Analyse de sensibilité du modèle

Avant d'énoncer l'algorithme de l'analyse de sensibilité, nous allons définir quelques outils permettant de caractériser la valeur d'une option.

3.2.1 Coefficient d'asymétrie

Le coefficient d'asymétrie ou le **Skewness** mesure le degré d'asymétrie d'une distribution autour de sa moyenne. Une variable est dite normalement distribuée si le *Skewness* est très proche de ou égale à 0. Tandis que ce dernier s'écarte plus loin de zéro, une valeur positive indique que la queue de droite de la distribution est plus grosse et elle est serrée vers le haut que le bas et vice versa si la valeur est négative [2].

FIGURE 3.3 – Distribution d'une loi de probabilité selon le *Skewness*.

Dans le cas d'un *Skewness* négatif, la moyenne est inférieure à la médiane qui est inférieure au mode, et inversement dans le cas d'une distribution asymétrique à droite.

Définition 3.2.1. [2] On dit qu'une distribution est **symétrique** autour de sa moyenne, si chaque fois que la distribution centrée associée prend la valeur X avec un effectif n , elle prend également la valeur X avec le même effectif n .

Elle est dite **oblique** dans le cas contraire. Le *skewness* est mesuré par le moment d'ordre 3 :

$$Skew = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right], \quad (3.6)$$

où μ et σ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la variable X .

3.2.2 Coefficient d'aplatissement

Le coefficient d'aplatissement (**Kurtosis**) de la distribution d'une variable aléatoire mesure, abstraction faite de la dispersion, la répartition des masses de probabilité autour de leur centre c'est-à-dire, leur concentration à proximité ou à distance du centre de probabilité [2].

Définition 3.2.2. [12] Le **Kurtosis** est défini comme suit

$$Kurto = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right]. \quad (3.7)$$

Une distribution est dite **platicurtique** ($Kurto < 3$) (si elle est plus aplatie que la distribution normale) et **leptocurtique** ($Kurto > 3$) si elle est moins aplatie que la distribution normale. La distribution normale est dite **mesocurtique** ($Kurto = 3$).

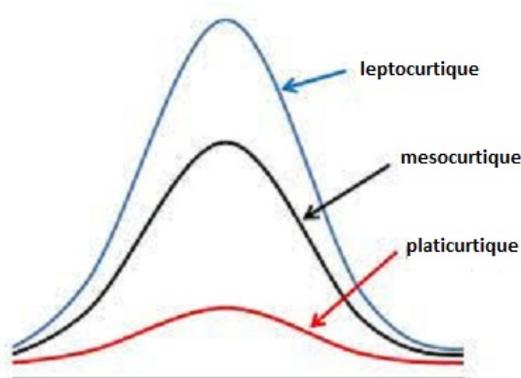


FIGURE 3.4 – Représentation graphique d'une distribution de probabilité selon le coefficient d'aplatissement.

3.2.3 Valeur à risque

La notion de valeur à risque (**Value at Risk** "VaR" en anglais) est apparue pour la première fois dans le secteur des assurances à la fin des années 1980. Elle est une approche moderne qui est développée pour répondre aux besoins des instruments financiers d'une mesure de risque sur les marchés financiers [13].

Par définition, la VaR est le niveau de perte maximal qui ne sera dépassé qu'à une probabilité bien déterminée sur une période de temps.

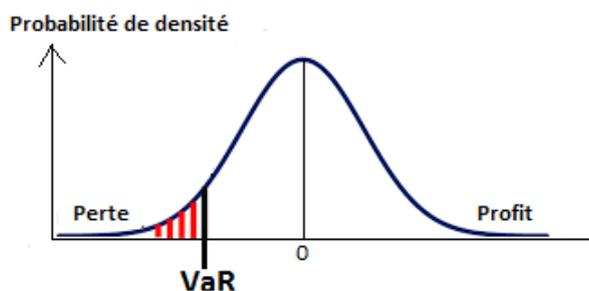


FIGURE 3.5 – Value at Risque.

Le calcul de la VaR requiert alors de spécifier à priori :

- **La distribution de perte et profit du portefeuille** : elle peut suivre différentes lois de probabilité et être conditionnelle ou inconditionnelle.
- **Le niveau de probabilité** , qui est le seuil critique : généralement il est de 5% ou 1%. Plus le seuil est petit, plus la probabilité de dépasser le niveau de la VaR sera

réduit.

- **L'horizon de temps t** : qui est la période de détention de l'actif ou le portefeuille d'actifs. Plus la période est longue, plus on est exposé au risque.

3.2.4 Étapes de simulation

1. Entrées

- S_0 : Prix actuel de l'actif sous-jacent ;
- K : Prix d'exercice de l'option ;
- T : Date d'expiration de l'option ;
- \bar{r} : Moyenne du taux d'intérêt sans risque ;
- $\bar{\sigma}$: Moyenne de la volatilité ;
- σ_r : Écart-type du taux d'intérêt sans risque ;
- σ_σ : Écart-type de la volatilité ;
- N : Taille et nombre d'échantillons à simuler.

2. Procédure de la simulation

- (a) Considération d'une boucle avec N itération
 - i. Générer 02 variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée et réduite $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$;
 - ii. Calcul de r et σ respectivement par (3.1) et (3.2) ;
 - iii. Calcul de d_1 , d_2 , et C_T respectivement par (3.4), (3.5) et (3.3).
- (b) Convertir C_T en 0 s'il est négatif en vertu que $C_T = \max(S_T - K, 0)^+$;
- (c) Estimation des indices de Sobol
 - i. Calcul de la moyenne et la variance totale des prix d'option simulé en utilisant les formules (2.12) et (2.13) ;
 - ii. Calcul des variances partielles associées respectivement au taux d'intérêt, la volatilité et leur interaction par la formule (2.14) ;
 - iii. Calcul des variances partielles des mêmes paramètres cas de sensibilité totale par (2.16) ;

- iv. Calcul des indices de Sobol par et les indices de sensibilité totale par (2.15) et (3.17);
- (d) Calcul de l'intervalle de confiance par la méthode de *bootstrap*, voir (page 23);
- (e) Calcul de *Skewness* par (3.6) et *Kurtosis* par (3.7);
- (f) Calcul de 0.05 – *quantile*.

3. Sorties

- La moyenne et la variance totales des prix d'option simulés;
- Les indices de Sobol et les indices de sensibilité totale;
- *Skewness*, *Kurtosis* et 0.05 – *quantile*.

Algorithm 1 Simulation

début

Entrées : $S_0, K, T, \bar{r}, \bar{\sigma}, \sigma_r, \sigma_\sigma, N$

pour i allant de 1 à N faire

Générer $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$;

Calculer r et σ ;

Calculer d_1, d_2 et C_T .

fin pour

si($C_T < 0$)

$C_T = 0$

fin si

Calculer la moyenne et les variances;

Calculer les indices de Sobol et les indices totaux;

Calculer l'intervalle de Confiance pour les indices de Sobol;

Calculer le *Skewness*, *Kurtosis* et le 0.05 – *quantile*.

3.3 Analyse de sensibilité du modèle

3.3.1 Quantification du prix de l'option sous l'incertitude par simulation Monte-Carlo

Dans cette section nous nous intéressons à simuler les indices de Sobol sous **Matlab R2009b**. Pour calculer le prix d'une option simulé sous l'incertitude des deux paramètres

le taux d'intérêt et la volatilité, dans ce qui suit, nous fixons les valeurs des paramètres d'entrée comme suit : $K = 95$; $S_0 = 100$; $T = 0.4$; $\bar{r} = 0.0505$; $\bar{\sigma} = 0.2505$; $\sigma_r = 0.0290$; $\sigma_\sigma = 0.0525$; $N = 10000$

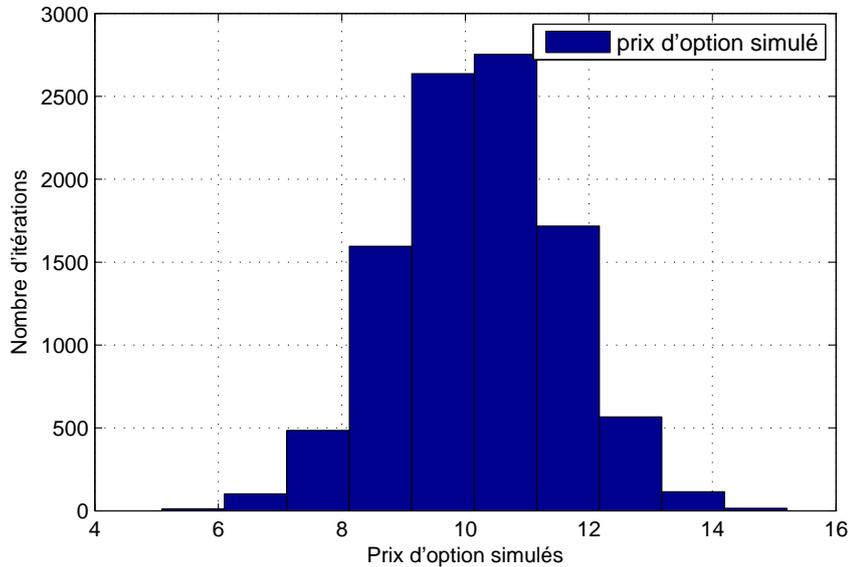


FIGURE 3.6 – Valeur d'une option simulée.

$\mathbb{E}(C_T)$	$\mathbb{V}(C_T)$	$Skew(C_T)$	$Kurt(C_T)$	0.05 – quantile
10.1922	1.8151	0.0032	2.9782	0.1376

TABLE 3.1 – Quantificateurs de l'option.

D'après les résultats numériques obtenus dans le tableau (3.1), nous constatons une variation du prix un peu significative autour de sa moyenne. Les prix sont distribués symétriquement puisque le *Skewness* est très proche de 0. La distribution a une allure normale, ceci est dû aux paramètres d'entrée où nous avons pris une petite volatilité.

3.3.2 Simulation des indices de Sobol

Dans tout ce qui suit, nous considérons les notations suivantes :

- S_r : l'indice de sensibilité associé au taux d'intérêt sans risque ;

- S_σ : l'indice de sensibilité associé à la volatilité ;
- $S_{r\sigma}$: l'indice de sensibilité associé à l'interaction du taux d'intérêt sans risque avec la volatilité ;
- S_r^{tot} : l'indice de sensibilité totale associé au taux d'intérêt sans risque ;
- S_σ^{tot} : l'indice de sensibilité totale associé à la volatilité ;

Afin d'étudier la part de l'influence de ces paramètres incertains, nous estimons les indices de sensibilité de Sobol et les indices totaux. L'estimation de ces indices par la simulation Monte-Carlo est donnée en tableau (3.2).

	S_r	S_σ	$S_{r\sigma}$	Somme
Indices normaux	0.2834	0.7275	-0.0060	1.0049
Indices totaux	0.2725	0.7166	-	-

TABLE 3.2 – Les indices de Sobol normaux et totaux .

Les valeurs de ces estimations sont également illustrées par les diagrammes en baton dans la figure (3.7).

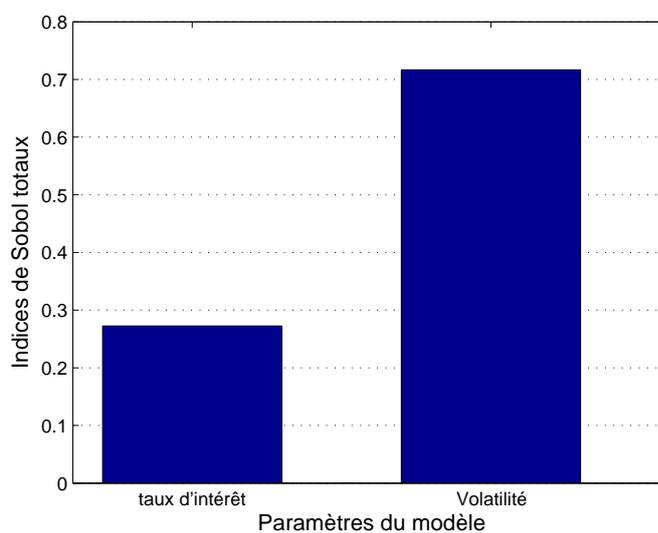


FIGURE 3.7 – Les indices de sensibilité totaux du prix de l'option.

D'après les résultats numériques obtenus, il est clair que la volatilité est le paramètre le plus influant sur la valorisation du prix de l'option. Et ce qui est remarquable que son interaction avec le taux d'intérêt sans risque est faiblement influente sur le prix de l'option. Ceci peut être dû à l'hypothèse d'indépendance de ces deux paramètres.

Estimons, maintenant, les indices de Sobol pour des différentes maturités.

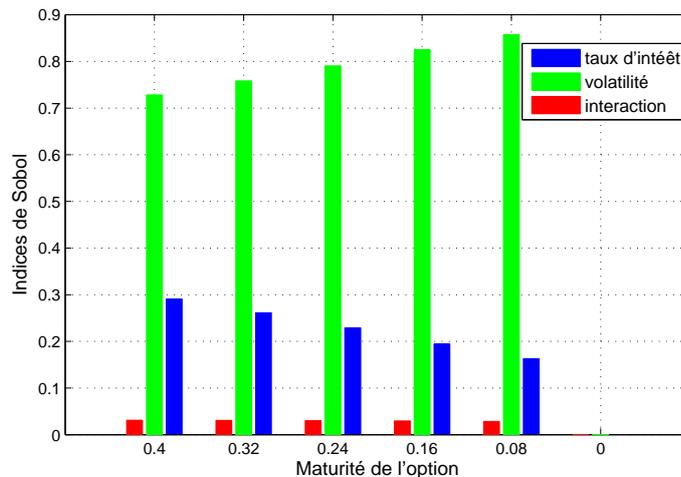


FIGURE 3.8 – Les indices de sensibilité le long de la durée de vie de l'option pour $T = 0.4, \dots, 0$.

De la figure (3.8), on remarque que la volatilité est toujours le paramètre le plus influant pour les différentes dates d'échéance. Cette influence est en croissance quand la date d'échéance diminue.

3.4 Analyse de sensibilité dans un p-boxe

Dans cette section nous désirons étudier cette sensibilité dans un contexte plus large tout en utilisant le *p-boxe* (*probability-boxe*).

3.4.1 Boite de probabilité

Dans un cadre plus général d'une distribution de probabilité, nous définissons une loi de densité d'une variable X avec ses bornes inférieure et supérieure.

Cela est dû au manque de connaissance exacte de la formule de la loi (incertitude épistémique). Ainsi, le p-boxe prend en compte l'aléatoire (incertitude aléatoire) aussi bien que pour l'incertitude épistémique dans la description de la variable X [21].

Les bornes inférieure et supérieure de la loi de densité $g(X)$, sont notées par $[\underline{g}(X), \bar{g}(X)]$. De plus, la loi de densité mais inconnue $g_X(x)$ de la variable X se trouve entre ces deux bornes :

$$\underline{g}(X) \leq g(X) \leq \bar{g}(X). \quad (3.8)$$

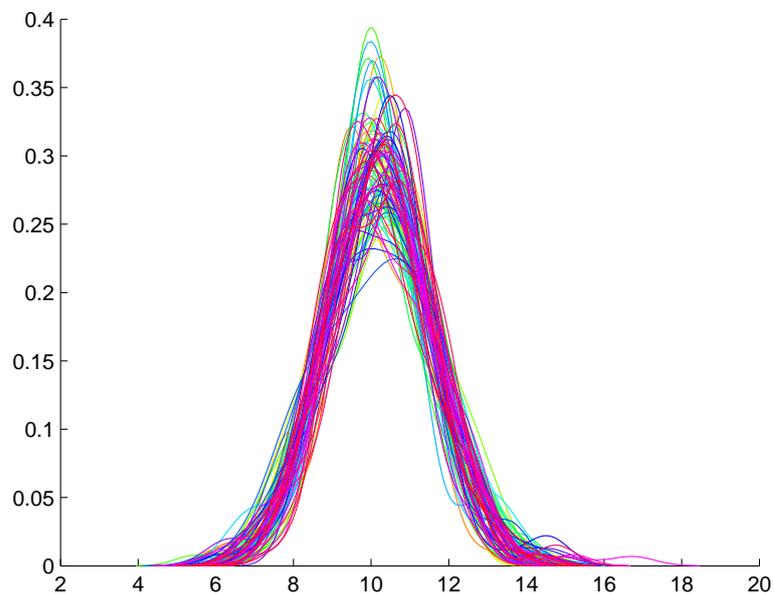


FIGURE 3.9 – P-boxe d'une loi de densité Gaussienne $\mathcal{N}([0.24, 0.26], [0.04, 0.06])$.

En cette figure (3.9), nous sommes certains que notre loi appartient à ce p-boxe.

Dans ce qui suit nous nous intéressons au p-boxe paramétrique. Ce type de p-boxe nous permet d'avoir une idée sur la forme de la loi de densité mais garde l'incertitude dans ses paramètres. Plus la surface du p-boxe est plus petite plus qu'on est proche de l'exakte. Il est représenté par une famille de lois de densité dont les paramètres θ se trouvent dans un intervalle.

$$g(X) = g(X, \theta), \quad \theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i], \quad i = 1, \dots, n_\theta \quad (3.9)$$

Ceci permet de faire clairement une séparation entre l'incertitude aléatoire et épistémique : l'incertitude aléatoire est représentée par la distribution de la variable, et l'incertitude épistémique est représentée par l'intervalle des paramètres.

3.4.2 P-boxe du modèle

On reprend les modèles (3.1) et (3.2) :

$$r = \bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1 \quad \varepsilon_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1); \quad (3.10)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.11)$$

avec

$$r \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathcal{U}[\underline{\mu}_r, \bar{\mu}_r], \mathcal{U}[\underline{\sigma}_r, \bar{\sigma}_r]); \quad (3.12)$$

et

$$\sigma \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathcal{U}[\underline{\mu}_\sigma, \bar{\mu}_\sigma], \mathcal{U}[\underline{\sigma}_\sigma, \bar{\sigma}_\sigma]), \quad (3.13)$$

tout en préservons les formules de d_1 , d_2 et C_T

$$C_T(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1, \bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K \exp(-(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1)T) \mathcal{N}(d_2);$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1) + \frac{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2)^2}{2} \right] T}{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2) \sqrt{T}};$$

et

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1) - \frac{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2)^2}{2} \right] T}{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2) \sqrt{T}} = d_1 - (\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2) \sqrt{T}.$$

Algorithme de la simulation

Les étapes de la simulation sont toujours les mêmes, mais on les refait N fois puisque nos paramètres d'entrée sont générés N fois suivants une loi uniforme.

Algorithm 2 Simulation pour un p-box

début**Entrées** : S_0, K, T, N **pour** j allant de 1 à N **faire**Générer $\bar{r} \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\mu}_r, \bar{\mu}_r]$ Générer $\bar{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\mu}_\sigma, \bar{\mu}_\sigma]$ Générer $\sigma_r \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\sigma}_r, \bar{\sigma}_r]$ Générer $\sigma_\sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\sigma}_\sigma, \bar{\sigma}_\sigma]$ **pour** i allant de 1 à N **faire**Générer $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ Calculer r et σ Calculer d_1, d_2 et C_T **fin pour****si**($C_T < 0$) $C_T = 0$ **fin si**

Calculer la moyenne et les variances

Calculer les indices de Sobol et les totaux

Calculer l'intervalle de Confiance pour les indices de Sobol

Calculer le *Skewness, Kurtosis* .**fin pour**

Résultats de la simulation

Sous **MATLAB R2009b**, fixons les paramètres d'entrée $K = 95$; $S_0 = 100$; $T = 0.4$; $N = 5000$, et cette fois-ci \bar{r} , σ_r , $\bar{\sigma}$ et σ_σ ne sont plus des constantes mais sont de loi uniforme respectivement :

$$\bar{r} \rightsquigarrow \mathcal{U}[0.0405, 0.0605];$$

$$\bar{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{U}[0.2405, 0.2605];$$

$$\sigma_r \rightsquigarrow \mathcal{U}[0.0190, 0.0290];$$

$$\text{et } \sigma_\sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}[0.0428, 0.0628].$$

Le p-boxe de loi de densité associé à notre modèle pour un échantillon $N = 5000$ est représenté dans la figure (3.10).

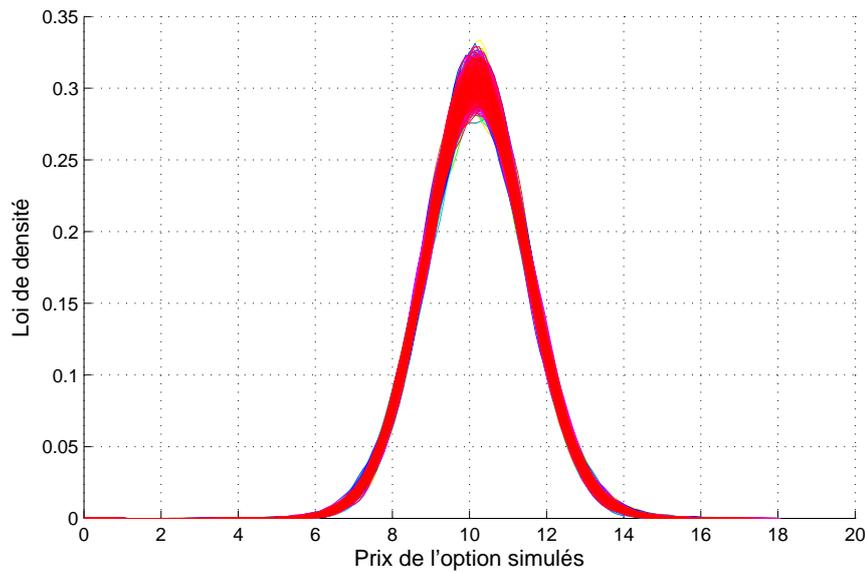


FIGURE 3.10 – Loi de densité des prix de l'option

les résultats obtenus pour les quantificateurs du modèle sont présentés dans le tableau (3.3).

Quantificateur	$\mathbb{E}(C_T)$	$\mathbb{V}(C_T)$	$Skew(C_T)$	$Kurt(C_T)$
min	10.1288	1.5478	-0.1187	$-0.2615 \cdot 10^{-3}$
max	10.2593	1.8105	0.1816	$0.2827 \cdot 10^{-3}$

TABLE 3.3 – Quantification du prix l'option cas de p-boxe.

Ces résultats montrent bien l'explication du p-boxe. En effet, ils incluent les résultats obtenus en haut (ceux du cas normal). Ici, le *Skewness* est bien varié entre l'asymétrie gauche et droite par contre le *Kurtosis* est très proche de 0, ce qui signifie que notre distribution est platicurtique. Nous étudions la variation de la moyenne et la variance des prix de l'option sous leurs intervalles en ce qui suit.

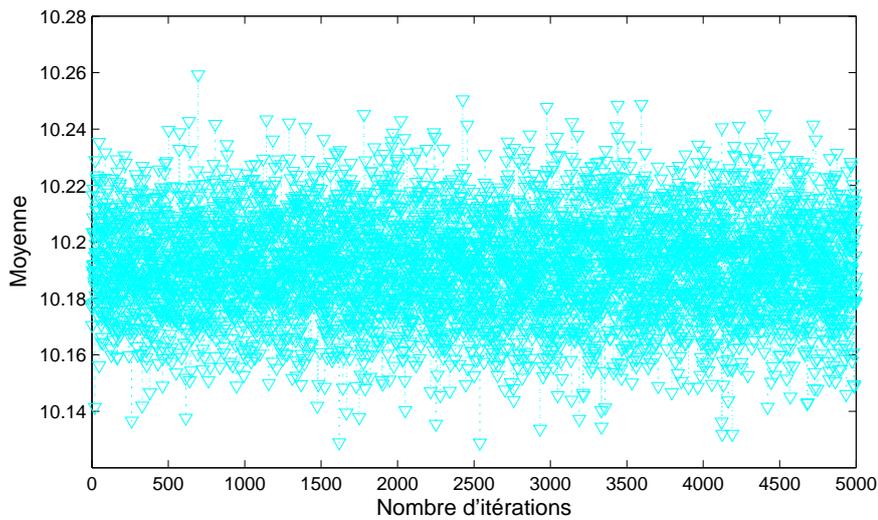


FIGURE 3.11 – Variation de la moyenne au cours des 5000 itérations

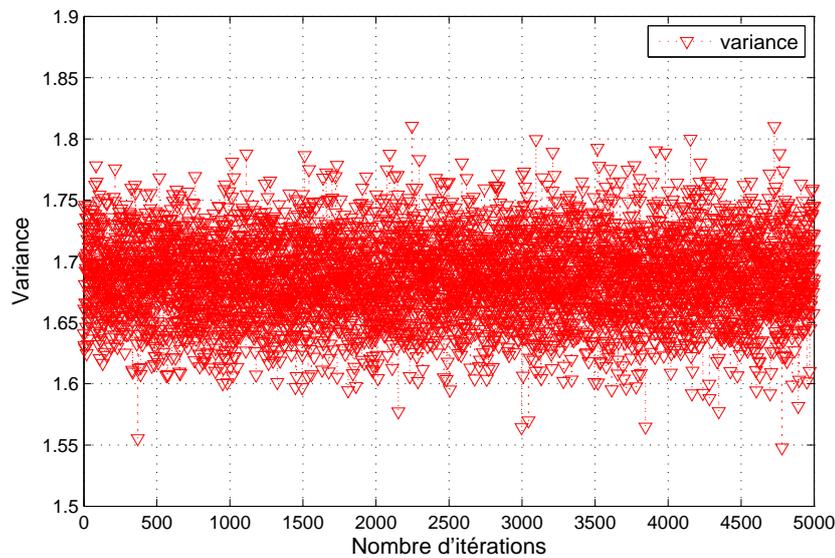


FIGURE 3.12 – Variation de la variance au cours des 5000 réplifications

Les figures (3.11) et (3.12) montrent qu'il n'en existe presque pas de variables aberrantes. Les valeurs sont presque tous proches de la médiane pour les quantificateurs comme le montre la figure (3.13)

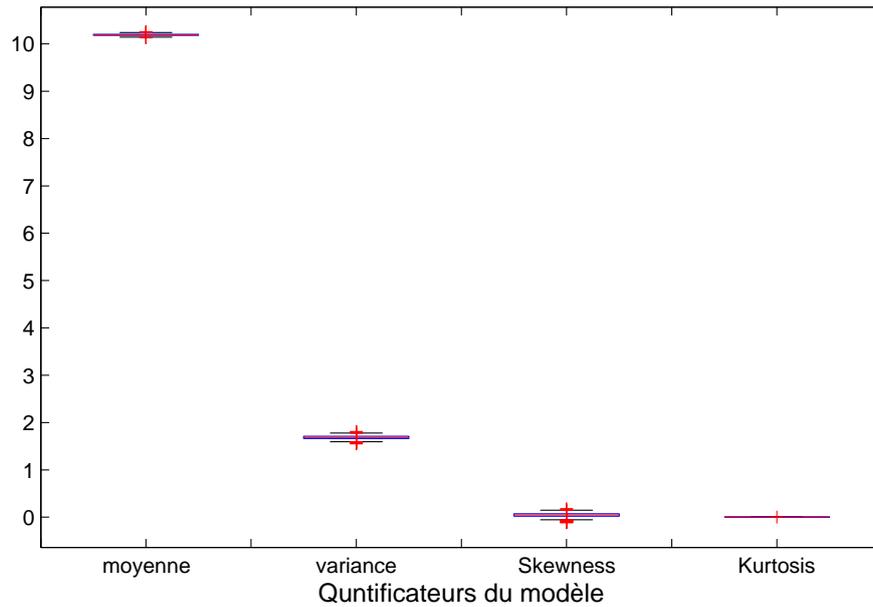


FIGURE 3.13 – Quantification du prix de l'option

Indices de Sobol

Concernant l'estimation des indices de Sobol, en utilisant cette nouvelle démarche, nous obtenons les résultats présentés en figure (3.14).

La figure (3.14) montre qu'en chaque itération, la volatilité est le paramètre le plus influant sur le prix de l'option contre une très faible influence de l'interaction sur le prix de l'option.

Les valeurs minimale et maximale des indices de Sobol et des indices totaux sont données dans le tableau (3.4).

	S_r	S_σ	$S_{r\sigma}$	S_r^{tot}	S_σ^{tot}
min	0.1629	0.7704	-0.0547	0.1863	0.7090
max	0.2910	0.8137	0.0891	0.2296	0.8371

TABLE 3.4 – Min et max des indices de Sobol et les indices totaux.

Les résultats sont résumés dans la figure (3.15).

La surface des boxes associés aux indices et à leurs sommes se differt de l'un à l'autre, ceci est dû aux intervalles associés. Plus l'intervalle est petit plus qu'on est proche de

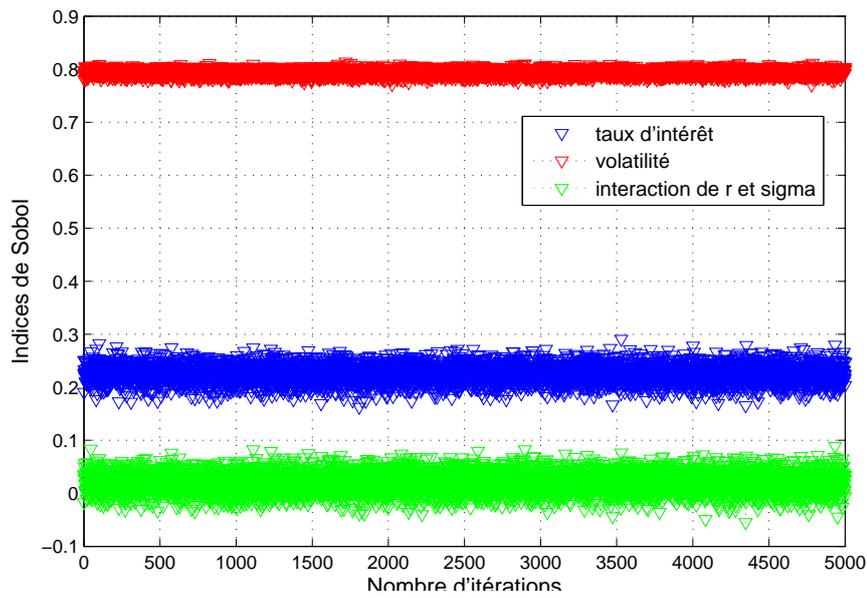


FIGURE 3.14 – Les paramètres influant les valeurs de l’option

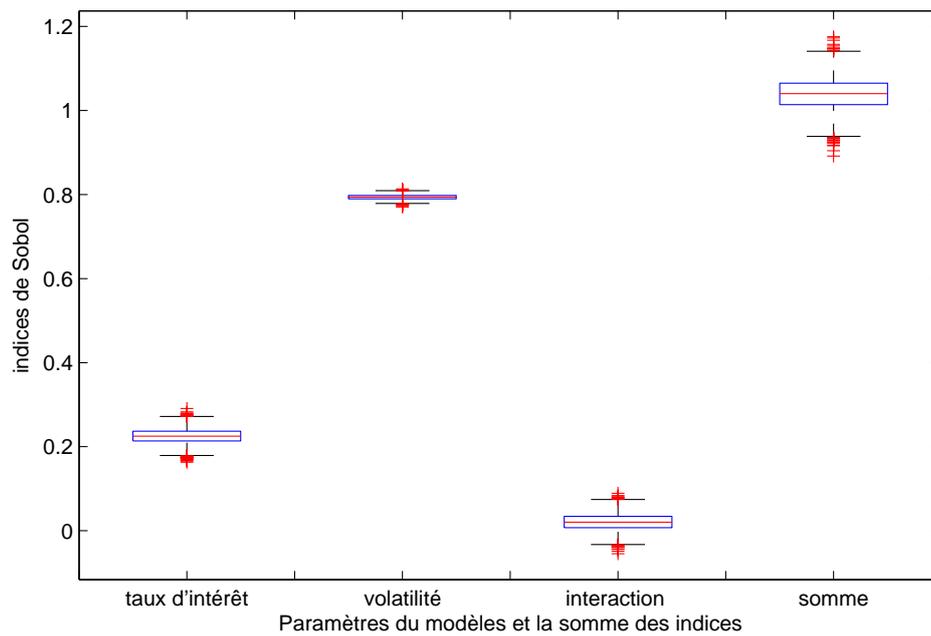


FIGURE 3.15 – Les indices de sensibilité pour N=5000.

la médiane dont le tiré rouge représente. La somme des indices en chaque réplcation appartient à un intervalle un peu large comme le nombre d’itération pris égal à 5000.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'analyse de sensibilité du nouveau modèle basé sur la formule Black-Scholes-Merton avec une perturbation du taux d'intérêt sans risque et la volatilité. Notre analyse a montré que la volatilité est le paramètre le plus influant sur le prix d'une option même dans contexte plus large (cas de p-boxe). Cela, nous a permis de généraliser notre analyse et de constater que toujours la volatilité est le paramètre le plus influant sur le prix d'une option.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail a été principalement consacré à l'analyse de sensibilité dans le célèbre modèle Black-Scholes-Merton. En effet, ce modèle porte beaucoup de critiques liées à ses hypothèses, surtout celles concernant le taux d'intérêt sans risque et la volatilité qui sont considérés constants. Ce mémoire comporte un nouveau modèle basé sur la formule de Black-Scholes-Merton, tout en considérant ces deux paramètres à savoir le taux d'intérêt sans risque et la volatilité comme des variables aléatoires. La part d'influence de ces deux paramètres a été quantifiée par les indices de sensibilité de Sobol qui sont estimés par la technique de simulation Monte-Carlo. En outre, les résultats obtenus sont généralisés en combinant les deux types d'incertitude (aléatoire et épistémique) en utilisant la technique de p-boxe.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques généralités sur les mathématiques financières. Puis, nous avons détaillé la description du modèle de Black-Scholes-Merton permettant de valoriser le prix théorique d'une option d'achat européenne avec ses hypothèses et ses indicateurs de sensibilité.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'analyse de sensibilité des modèles à variables d'entrée indépendantes. Cette analyse est basée sur la décomposition de la variance totale. Ainsi, nous avons décrit les indices de sensibilité de Sobol et les indices de sensibilité totale. Après, nous avons donné une estimation de ces indices par la simulation Monte-Carlo.

En troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à analyser le nouveau modèle de paramètres d'entrée indépendants perturbés à savoir le taux d'intérêt sans risque et la volatilité. Afin de caractériser le prix d'une option d'achat européenne, nous nous sommes basés sur la technique de simulation Monte-Carlo. Pour généraliser nos résultats, nous

avons suivis une nouvelle démarche tout en considérant le taux d'intérêt sans risque et la volatilité comme des variables aléatoires normales dont les paramètres suivent une loi uniforme.

À travers cette recherche, nous avons pu montrer l'effet de la volatilité sur le prix d'option simulé. Ce résultat a été généralisé via la technique de p-boîte.

Plusieurs perspectives peuvent être dégagées :

- Analyse de sensibilité du même modèle tout en considérant d'autres lois de modélisation des bruits exogènes ;
- Généralisation de cette analyse au cas de variables dépendantes ;
- Estimation des indices de Sobol par d'autres approches comme les polynômes de chaos.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. Hoeffding. *A class of statistics with asymptotically normal distribution*. The annals of Mathematical Statistics, Vol. 19, pp. 293–325, 1948.
- [2] S.C Brad. *Interpretation of the Kurtosis Statistic*. Journal of Taylor & Francis, Vol. 24, pp. 19-22, 1970.
- [3] F. Black et M. Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, Vol. 81, pp. 637-654, 1973.
- [4] S. Hora et R. Iman. *A comparison of maximum/bounding and bayesian/monte carlo for fault tree uncertainty analysis*. Sandia Laboratories, 1986.
- [5] C. Jacoboni et P. Lugli. *The Monte Carlo Method for Semiconductor Device Simulation*. Springer-Verlag, Wien New York, 1989.
- [6] I.M. Sobol. *Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models*. Russian Academy of Sciences, Vol. 1, pp. 407-414, 1993.
- [7] T. Homma et A. Saltelli. *Importance measures in global sensitivity analysis*. Reliability Engineering and System Safety, Vol. 52, pp. 1-17, 1996.
- [8] G.E Archer, A. Saltelli et I.M. Sobol. *Sensitivity measures, ANOVA-LIKE techniques and the use of bootstrap*. Statistical Computation Simulation, Vol. 58, pp. 99-120, 1997.
- [9] M.D. McKay. *Nonparametric variance-based methods of assessing uncertainty importance*. Reliability Engineering & System Safety, Vol. 57, pp. 267–279, 1997.
- [10] P. Wilmott, S. Howison et J. Dewynne. *The mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

-
- [11] N. El Karoui. *Couverture des risques dans les marchés financiers*. Palaiseau, 2003.
- [12] K. Kane. *Méthodes Monte Carlo pour l'évaluation des paramètres de sensibilité des valeurs d'options sur plusieurs actifs sous-jacents*. Thèse. Université de Montréal, 2006.
- [13] F. Hadj Ali. *Étude comparative du modèle GARCH(1,1) univarié et de la simulation historique dans les prévisions de "Value at Risk" et "Expected Shortfall"*. Thèse. Université de Montréal, 2010.
- [14] N. El Karoui et E. Gobet . *Les outils stochastiques des marchés financiers : une visite guidée de Einstein a Black-Scholes*. Ecole Polytechnique, 2011.
- [15] J. JACQUES. *Pratique de l'analyse de sensibilité : comment évaluer l'impact des entrées aléatoires sur la sortie d'un modèle mathématique*. IRMA, Lile, 2011.
- [16] A. Janon. *Analyse de sensibilité et réduction de dimension : Application à l'océanographie*. Thèse. Université de Grenoble, 2012.
- [17] A.S. Shinde et K.C Takale. *Study of Black-Scholes model and its applications*. Procedia Engineering, Vol. 38, pp 270-279, 2012.
- [18] G. Chastaing. *Indices de Sobol généralisés pour variables dépendantes*. Thèse. Université de Grenoble, 2013.
- [19] N. Bilal. *Implementation of Sobol's Method of Global Sensitivity Analysis to a Compressor Simulation Model*. International Compressor Engineering Conference, 2014.
- [20] N. Fajraoui. *Analyse de sensibilité et polynôme de chaos pour l'estimation des paramètres : application aux transferts en milieu poreux*. Thèse. Université de Strasbourg, 2014.
- [21] F. Pianosi, F. Sarrazin et T. Wangener. *A matlab toolbox for sensitivity analysis*. Journal of Elsevier, Vol. 70, p. 1364-8152, 2015.
- [22] J. Krznaric Matthew. *Comparison of Option Price from Black-Scholes Model to Actual Values*. Honors Research Projects, 2016.
- [23] B. Iooss et C. Prieur. *Shapley effects for sensitivity analysis with dependent inputs : comparisons with Sobol' indices, numerical estimation and applications*. Reliability Engineering & System Safety, Vol.2, pp. 1707-1334, 2018.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'analyse de sensibilité du modèle Black-Scholes-Merton évaluant le prix d'une option d'achat européenne. Cette analyse évalue la part de l'influence des paramètres incertains à savoir le taux d'intérêt sans risque et la volatilité. Elle est basée sur la décomposition de la variance totale en utilisant les indices de Sobol. Nous avons utilisé la simulation Monte-Carlo pour l'estimation des indices de Sobol associés aux paramètres incertains. Nous avons aussi utilisé la technique de p-boîte combinant les deux types d'incertitudes, aléatoire et épistémique dans le même contexte. Nous avons estimé la moyenne, la variance et la fonction de densité des prix d'option d'achat européenne.

Mots-clés : Option d'achat européenne, Black-Scholes-Merton, volatilité, taux d'intérêt sans risque, analyse de sensibilité, indices de Sobol, p-boîte, simulation Monte-Carlo.

Abstract

This master thesis is devoted to the sensitivity analysis of the Black-Scholes-Merton model evaluating the price of an European option Call. This analysis consists to evaluate the influence part of the uncertain parameters model, free interest rate and volatility. It is based on the use of the Sobol' decomposition of the total variance. We have used the technique Monte-Carlo simulation to estimate the Sobol indices associated with uncertain parameters. We have also used the p-boxe technique to integrate the both kind of uncertainty, aleatory and epistemic, in the same framework. We estimated the mean, variance and probability density function for European option Call price.

Keywords : European option of Call, Black-Scholes-Merton, volatility, free interest rate, sensitivity analysis, Sobol' indices, p-boxe, Monte-Carlo simulation.