

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAÏA  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE



Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master en recherche opérationnelle  
Option : Modélisation Mathématique et techniques de décision

## Thème

*Comparaison de différents noyaux à supports positifs dans l'estimation de la  
fonction densité*

Réalisé par :

✓ FORTAS Khaled

✓ TOUAT Touati

Devant le jury composé de :

<b>Présidente :</b>	Mme S. AMROUN	M.A.B	Université de Bejaia
<b>Promotrice :</b>	Mme Y. ZIANE	M.C.B	Université de Bejaia
<b>Examinatrice :</b>	Mme L. DJERROUD	M.A.A	Université de Bejaia
<b>Examinatrice :</b>	Mme L.HARFOUCH	Doctorant	Université de Bejaia

---

Année Universitaire 2017/2018

# *Remerciements*

*Nous tenons à remercier :*

*Le bon Dieu de nous avoir donné la patience et la volonté pour accomplir ce travail,*

*Nos remerciements s'adressent également à :*

*Notre promotrice Mme Y. ZIANE pour ses conseils, ses orientations pour nous avoir*

*transmis les renseignements nécessaires à la réalisation de ce travail,*

*et son aide durant l'encadrement.*

*Nous remercions également :*

*Les membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger*

*de lire et d'évaluer ce mémoire.*

*Nous tenons également à remercier*

*Tous les enseignants de notre département qui nous ont accompagnés au cours*

*de notre formation et à tout le personnel de la bibliothèque de l'université.*

*Enfin, nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*



Je dédie modeste travail à :

Mon très cher père ;

Ma très cher mère ;

Toute ma famille ;

Tout mes amis ;

**Khaled**



Je dédie modeste travail à :

Mon très cher père ;

Ma très cher mère ;

Toute ma famille ;

Tout mes amis ;

**Touati**

# TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>8</b>
<b>1 ESTIMATION DE LA FONCTION DE DENSITÉ PAR LA METHODES DE NOYAU ASSOCIÉ</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Estimation de la fonction de la densité par la méthode du noyau classique . . . . .	11
1.2.1 Principe générale de la méthode d'estimation par méthode du noyau . . . . .	11
1.2.2 Espérance de l'estimateur . . . . .	12
1.2.3 Variance de l'estimateur . . . . .	13
1.2.4 Biais de l'estimateur . . . . .	13
1.2.5 Critères d'Erreurs . . . . .	14
1.3 Convergence de l'estimateur à noyau classique . . . . .	14
1.3.1 Convergence presque sure . . . . .	14
1.3.2 Convergence du biais . . . . .	14
1.3.3 Normalité asymptotique . . . . .	15
1.3.4 Convergence en loi . . . . .	15
1.3.5 Convergence en moyenne quadratique . . . . .	15
1.3.6 Convergence en moyenne quadratique intégrée . . . . .	15
1.3.7 Convergence en probabilité . . . . .	15
1.4 Estimation à noyau associé . . . . .	16
1.5 Construction d'un noyau associé . . . . .	16
1.5.1 Méthode mode-dispersion . . . . .	16

1.6	Propriétés de l'estimateur à noyau associé . . . . .	20
1.6.1	Biais . . . . .	20
1.6.2	Variance . . . . .	21
1.6.3	Critères d'Erreurs . . . . .	21
1.7	Convergence de l'estimateur á noyau associé . . . . .	21
1.7.1	Convergence presque sure . . . . .	21
1.7.2	Convergence du biais . . . . .	21
1.7.3	Normalité asymptotique . . . . .	21
1.7.4	Convergence uniforme du biais . . . . .	22
1.7.5	Convergence en moyenne quadratique . . . . .	22
1.7.6	Convergence en moyenne quadratique intégrée . . . . .	22
1.8	Conclusion . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Noyau associé à support positif</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Estimateur de la densité à noyau associé Gamma . . . . .	23
2.3	Estimateur de la densité à noyau Gamma généraliser GG . . . . .	26
2.4	Estimateur de densité de noyau Birnbaum-Saunders généralisé GBS . . . . .	29
2.5	Estimateurs de densité de noyau Skew-GBS . . . . .	31
2.6	Conclusion . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Méthode d'estimation du paramètre de lissage</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Méthode plug-in . . . . .	35
3.3	Méthodes validation croisée (CV) . . . . .	37
3.3.1	Méthodes validation croisée non biaisée (UCV) . . . . .	37
3.3.2	Méthodes validation croisée biaisée (BCV) . . . . .	38
3.4	L'approche bayésienne . . . . .	38
3.5	Approche Bayésienne globale : . . . . .	41
3.6	Conclusion . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Simulation</b>	<b>43</b>
4.1	Introduction . . . . .	43
4.2	Plan de simulation . . . . .	43

4.3 Résultats de simulation . . . . .	46
4.4 Interprétation des résultats . . . . .	47
4.5 Conclusion . . . . .	49
<b>Conclusion générale</b>	<b>50</b>

## TABLE DES FIGURES

1.1	Représentations graphique de la loi bêta(a,b) . . . . .	17
1.2	Représentations graphique de la loi Pareto(a,b)avec a=1 . . . . .	19
2.1	Représentations graphique de la loi Gamma(a,b) . . . . .	24
2.2	Noyaux associés Gamma pour x=2.7 . . . . .	24
2.3	Représentations graphique du différents noyaux Skew-GBS (pour v=2) . . . . .	33
4.1	Représentations graphique de les estimateurs . . . . .	48

## LISTE DES TABLEAUX

1.1	Quelques noyaux continus classiques . . . . .	12
1.2	Quelques types de noyaux associées(pour la suite voir Tableau 1.2) . . . . .	19
1.3	Quelques types de noyaux associées (suite du Tableau 1.1) . . . . .	20
2.1	Distributions GBS . . . . .	30
2.2	Noyaux GBS . . . . .	30
4.1	Résultats de simulation pour $D_1$ . . . . .	46
4.2	Résultats de simulation pour $D_2$ . . . . .	46
4.3	Résultats de simulation pour $D_3$ . . . . .	47

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans nombreux domaines (médecine, économie, finances, marketing...) surviennent des phénomènes complexes à modéliser. Dans le cas univarié, ces derniers sont souvent décrits par une variable aléatoire réelle (v.a.r.)  $X$  à support connu  $S \subseteq \mathbb{R}$ . Cet ensemble  $S$  peut être constitué des parties continues (intervalles) ou discrètes,

On considère  $f$  la densité inconnue de la v.a.r.  $X$  à valeurs dans  $S \subseteq \mathbb{R}$ . Oú l'estimation de la densité de probabilité  $f$  est similaire à sa construction à partir des données observées  $X$ .

Il existe deux approches largement utilisées pour l'estimation de la densité de probabilité  $f$  l'approche paramétrique et l'approche non-paramétrique. Dans l'approche paramétrique ,l'idée principale de cette approche est de supposer que la densité  $f$  à estimer appartient à une famille de distributions ayant un nombre fini de paramètres ,il existe plusieurs méthodes pour estimer les paramètres (la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments...etc.). Par opposition, l'approche non-paramétrique ne fait aucune hypothèse à priori sur l'appartenance de  $f$  à une famille de lois de probabilités, plusieurs méthodes ont été proposées et utilisées pour l'estimation de la densité de probabilité (méthode d'estimation par histogramme, méthode d'estimation par les séries orthogonales , la méthode du noyau...etc.), la méthode qui a rencontré le plus de succès est la méthode du noyau qui fut introduite par **Rosenblatt** [1956] puis améliorée par **Parzen** [1962], elle est la plus fréquente et la plus utilisée pour estimer les densités de probabilités dans ces dernières décennies, et ce succès rencontré par l'estimateur à noyau revient à la simplicité de l'expression théorique de l'estimateur, il laisse à l'utilisateur une grande attitude non seulement dans le choix du noyau, mais encore dans le choix du paramètre de lissage  $h$ .

Dans notre mémoire, nous intéressons à l'estimation de densité de probabilité à support positif  $S \in [0, +\infty[$  par la méthodes de noyau associés, notre travail est composé de quatre chapitres et une conclusion générale.

Le Chapitre 1 est composé de deux parties, la première rappelle les propriétés essentielles des estimateurs à noyaux continus classiques sur  $S = R$ . La seconde partie est consacrée à la méthode des noyaux associés continus, par la suite, la technique "mode-dispersion" pour la construction des noyaux associés continus non-classiques, en précisant leurs propriétés.

Dans le Chapitre 2, on traite quelques estimateurs de la densité à noyau associé à support positif, noyau Gamma, noyau Gamma Généraliser GG puis le noyau Birnbaum-Saunders Généralisé GBS, et noyau Skew-GBS en précisant les principaux propriétés et résultats associées à ces noyaux .

Dans le Chapitre 3, on présente les différentes méthodes pour le choix du paramètre de lissage  $h$  ( méthode plug-in , méthodes validation croisée (CV), l'approche bayésienne), puisque le paramètre de lissage  $h$  joue un rôle très importante dans le processus d'estimation.

Dans le Chapitre 4, nous présentons les déférentes résultats de simulations effectué à partir de plusieurs densités cibles connues : loi lognormale, loi exponentielle et loi de weibull , afin de :

- ▶ Comparer les différents noyaux dans l'estimation de la densités de Probabilités, le travaille de simulation est effectué pour les Noyaux :
  - \* Birnbaum-Saunders Généralisé GBS.
  - \* Skew-GBS
- ▶ Etudier l'influence de la taille et le modèle utilisée de l'échantillon sur le résultats de simulation.

Enfin,nous terminons par une conclusion générale et une bibliographie.

# CHAPITRE 1

## ESTIMATION DE LA FONCTION DE DENSITÉ PAR LA METHODES DE NOYAU ASSOCIÉ

### 1.1 Introduction

Dans la littérature, la plupart des estimateurs de la densité par la méthode du noyau se résument à l'utilisation de noyaux symétriques (classiques) connus : noyau optimal d'Epanechnikov [1969], noyau gaussien,... etc, et cette fonction noyau avait été construit pour estimer des densités  $f$  à support non borné  $S = R$ , et depuis des travaux sur l'estimation des densités à support positif( travaux de Chen [1999, 2000] sur les noyaux bêta et gamma, respectivement pour les densité à support  $S = [0, 1]$  et  $S = [0, \infty[$ , et de Scaillet [2004] sur les noyaux inverse gaussien et réciproque inverse gaussien pour les densités à support  $S = [0, \infty[$  ...etc) est née une nouvelle famille d'estimateurs que nous appelons estimateurs à noyaux associés où la fonction noyau est paramétrée par le point d'estimation  $x$  et le paramètre de lissage  $h$ .

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord une notion générale sur l'estimation de la fonction de densité par la méthode du noyau (classique), par la suite on présente les noyaux associés continus et on donne le principe de construction du noyau associé à partir d'une fonction densité de probabilité, ensuite on présente les propriétés de l'estimateur à noyau associé, à la fin on présente les propriétés de convergence de l'estimateur à noyau associé.

Tout au long de ce chapitre, on suppose que les observations  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables indépendantes de même loi (iid) de densité  $f$ .

## 1.2 Estimation de la fonction de la densité par la méthode du noyau classique

L'estimation d'une densité de probabilité  $f$  est similaire à sa construction à partir des données observées. Il existe plusieurs méthodes d'estimation non paramétrique de la fonction  $f$ , nous nous intéressons ici plutôt à la méthode d'estimation par noyau qui a connu beaucoup de succès. Cette méthode, elle a été proposée initialement par Rosenblatt [1956] et Parzen [1962] pour estimer la fonction de la densité  $f$  à **support non borné**. Nous commençons par présenter le principe générale de la méthode d'estimation par la méthode du noyau classique et quelques caractéristiques sur cette estimateur ;

### 1.2.1 Principe générale de la méthode d'estimation par méthode du noyau

Par définition de la fonction de répartition  $F$  :

$$F_n(x) = \frac{\text{nombre d'observations} \leq x}{n}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, x]}(X_i)$$

tel que :

$$1_{]-\infty, x]}(X_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par définition de la densité de probabilité  $f$  est égale à la dérivée de la fonction de répartition  $F$  :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}.$$

Quand  $h$  est très petit :

$$f(x) = \frac{1}{2h} [F_n(x+h) - F_n(x-h)]$$

$$= \frac{1}{2h} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, x+h]}(X_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, x-h]}(X_i) \right]$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n 1_{]x-h, x+h]}(X_i).$$

et on peut écrire l'estimateur  $\hat{f}$  comme suit :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (1, 1)$$

avec

$$K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } -1 < \frac{x - X_i}{h} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$K : R \rightarrow R$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(y) dy = 1$$

Cet estimateur est appelée l'estimateur à noyau de Parzen-Rosenblatt, avec  $K$  est une fonction intégrable positive appelée **Noyau** et  $h$  est le paramètre de **lissage**, les conditions que vérifie  $K$  sont :

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(y) dy = 1, \int_{-\infty}^{\infty} yK(y) dy = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} y^2 K(y) dy = \delta_K^2$$

Une fonction  $K$  de support  $S$  est dite noyau si elle est une densité de probabilité symétrique ( $K(-u) = K(u)$ ), de moyen  $\mu_K$  nulle ( $\mu_K = \int_S uK(u) du = 0$ ), de variance  $\sigma_K^2$  finie ( $\sigma_K^2 = \int_S u^2 K(u) du < +\infty$ ), et de carré intégrable ( $\int_S K(u)^2 du < +\infty$ ).

Noyaux	Support	Densité
Gaussien	$R$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$
Cosinus	$[-1, 1]$	$\frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{2}x)$
Triangulaire	$[-1, 1]$	$1 -  x $
Double exponentielle	$R$	$\frac{1}{2} \exp(-\frac{1}{2} x )$

TABLE 1.1 – Quelques noyaux continus classiques

## 1.2.2 Espérance de l'estimateur

$$\begin{aligned} E[\hat{f}(x)] &= E\left[\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right] \\ &= \frac{1}{nh} n E\left[K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right] \\ &= \frac{1}{h} \int_S K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) f(t) dt. \end{aligned} \quad (1, 2)$$

en posant  $t = x - hu$ , on a :

$$E[\hat{f}(x)] = \int_S K(u) f(x - hu) du.$$

Le développement en séries de Taylor de  $f(x - hu)$  au voisinage de  $x$  est alors

$$f(x - hu) = f(x) - huf'(x) + \frac{1}{2}h^2u^2f''(x) + O(h^2).$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} E[\widehat{f}(x)] &= \int_S K(x) \{f(x) - huf'(x) + \frac{1}{2}h^2u^2f''(x)\} dx + O(h^2) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x)\sigma_K^2 + O(h^2). \end{aligned}$$

### 1.2.3 Variance de l'estimateur

$$\begin{aligned} Var[\widehat{f}(x)] &= \frac{1}{(nh)^2} Var[\sum_{i=1}^n K(\frac{x - X_i}{h})] & (1,3) \\ &= \frac{1}{(nh)^2} n Var[K(\frac{x - X_1}{h})] = \frac{1}{nh^2} \left[ E \left[ K^2(\frac{x - X_1}{h}) \right] - E^2 \left[ K(\frac{x - X_1}{h}) \right] \right] \\ &= \frac{1}{nh^2} \int_S \left[ K\left(\frac{x-t}{h}\right) \right]^2 f(t) dt - \frac{1}{nh^2} E^2 \left[ K(\frac{x - X_1}{h}) \right]. \end{aligned}$$

puis en posant  $t = x - hu$ , on obtient

$$Var[\widehat{f}(x)] = \frac{1}{nh^2} \int_S K^2(u) f(x - hu) dt - \frac{1}{nh^2} E^2 \left[ K(\frac{x - X_1}{h}) \right].$$

d'après le développement en séries de Taylor de  $f(x - hu)$  au voisinage de  $x$ , alors on trouve que :

$$Var[\widehat{f}(x)] = \frac{1}{nh} \int_S K^2(u) f(u) dt + R_n + O(\frac{1}{nh}).$$

avec :

$$R_n = \frac{1}{nh^2} \left( -huf'(x) + (1/2)h^2u^2f''(x) - E^2 \left[ K(\frac{x - X_1}{h}) \right] \right) \simeq O(\frac{1}{nh}).$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} Var[\widehat{f}(x)] &= \frac{1}{nh} \int_S K^2(u) f(u) dt + R_n + O(\frac{1}{nh}) \\ &= \frac{1}{nh} f(x) \int_S K^2(u) du + O(\frac{1}{nh}). \end{aligned}$$

### 1.2.4 Biais de l'estimateur

$$\begin{aligned} Biais[\widehat{f}(x)] &= E[\widehat{f}(x)] - f(x) & (1,4) \\ &= \frac{h^2}{2} f''(x)\sigma_K^2 + O(h^2). \end{aligned}$$

## 1.2.5 Critères d'Erreurs

Lorsqu'on définit l'estimateur à noyau, il y a un certain nombre de critères qui permettent d'évaluer la similarité de l'estimateur  $\hat{f}$  par rapport à la vraie densité  $f$  à estimer. Parmi les nombreux critères proposés dans la littérature on a ( $MSE$  et  $MISE$ )

### 1.2.5.1 Erreur quadratique moyenne ponctuelle de l'estimateur (MSE)

$$\begin{aligned}MSE(x) &= E \left[ \left( \hat{f}(x) - f(x) \right)^2 \right] \\ &= Var[\hat{f}(x)] + Biavis^2[\hat{f}(x)]\end{aligned}\tag{1, 5}$$

En utilisant les expressions finales de la variance et le biais, on obtient alors :

$$MSE(x) = \frac{h^4}{4} (f''(x))^2 \sigma_K^4 + \frac{f(x)}{nh} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du + O\left(\frac{1}{nh}\right) + O(h^4).$$

### 1.2.5.2 Erreur quadratique moyenne intégrée de l'estimateur(MISE)

" L'Erreur Quadratique Moyenne Intégrée " ( $MISE$ ) est une mesure globale de l'efficacité de l'estimateur  $\hat{f}$  est obtenue en intégrant le  $MSE$  sur tout le support  $S$  de  $f$  :

$$\begin{aligned}MISE(x) &= \int_S MSE(x) dx \\ &= \int_S Var[\hat{f}(x)] dx + \int_S Biavis^2[\hat{f}(x)] dx \\ &= \frac{h^4}{4} \sigma_K^4 \int_{-\infty}^{+\infty} (f''(x))^2 dx + \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du + O(h^4 + \frac{1}{nh}).\end{aligned}\tag{1, 6}$$

## 1.3 Convergence de l'estimateur à noyau classique

### 1.3.1 Convergence presque sure

si  $h = h(n) \rightarrow 0$  et  $nh(n) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors l'estimateur  $\hat{f}(x)$  est convergent presque sûrement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |\hat{f}(x) - f(x)| = 0.$$

### 1.3.2 Convergence du biais

$$\int_S |E(\hat{f}(x)) - f(x)| dx \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty, h(n) \rightarrow 0.$$

### 1.3.3 Normalité asymptotique

Le théorème centrale-limite donne la convergence en loi :

$$\frac{\widehat{f}(x) - E(\widehat{f}(x))}{\sqrt{V(\widehat{f}(x))}} \longrightarrow N(0,1), \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \quad h(n) \longrightarrow 0.$$

### 1.3.4 Convergence en loi

si  $h = h(n) \longrightarrow 0$  et  $nh(n) \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$ , alors l'estimateur  $\widehat{f}(x)$  est convergent en loi :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x) &\xrightarrow{\text{en loi}} N\left(E(\widehat{f}(x)), V(\widehat{f}(x))\right) \\ &\xrightarrow{\text{en loi}} N\left(f(x), \frac{f(x)}{nh}R(k)\right). \end{aligned}$$

où  $R(k) = \int_S K^2(u)du + O\left(\frac{1}{nh}\right)$ .

### 1.3.5 Convergence en moyenne quadratique

si  $h = h(n) \longrightarrow 0$  et  $nh(n) \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$ , alors l'estimateur  $\widehat{f}(x)$  consistant en moyenne quadratique en tout point  $x$  pour lequel la densité  $f$  est continue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\widehat{f}(x)) = 0.$$

### 1.3.6 Convergence en moyenne quadratique intégrée

si  $h = h(n) \longrightarrow 0$  et  $nh(n) \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$ , alors l'estimateur  $\widehat{f}(x)$  consistant en moyenne quadratique intégrée en tout point  $x$  pour lequel la densité  $f$  est continue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MISE(\widehat{f}) = 0.$$

### 1.3.7 Convergence en probabilité

si  $h = h(n) \longrightarrow 0$  et  $nh(n) \longrightarrow \infty$  quand  $n \longrightarrow \infty$ , alors l'estimateur  $\widehat{f}(x)$  est convergent en probabilité :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} p(\sup_{x \in R} |\widehat{f}(x) - f(x)| \leq \varepsilon) = 1.$$

## 1.4 Estimation à noyau associé

**Définition 1.1.** Soit  $S$  le support d'une fonction de densité  $f$  à estimer. Étant donné  $x \in S$  et  $h > 0$ , on appelle noyau associé continu  $K_{x,h}$  toute fonction de densité liée à la variable aléatoire  $\mathcal{K}_{x,h}$  de support  $S_{x,h}$  (pouvant ne pas dépendre de  $x$  et/ ou  $h$ ) contenant au moins  $x$ , vérifiant les conditions suivantes :

$$x \in S_{x,h} \quad (1, 7)$$

$$E[\mathcal{K}_{x,h}] = x + A(x, h) \quad (1, 8)$$

$$V[\mathcal{K}_{x,h}] = B(x, h) \quad (1, 9)$$

où  $\mathcal{K}_{x,h}$  est une variable aléatoire de densité  $K_{x,h}$  et les termes  $A(x, h)$  et  $B(x, h)$  convergent vers 0 quand  $h \rightarrow 0$ .

**Définition 1.2.** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un n-échantillon aléatoire indépendant et identiquement distribué issu d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de densité inconnue  $f$  sur  $S$ , l'estimateur à noyau associé continu  $\hat{f}_n$  de la fonction densité de probabilité  $f$  comme suit :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i), \quad x \in S \subseteq R \quad (1, 10)$$

où  $K_{x,h}$  est le noyau associé continu de cible  $x$  et de fenêtre (paramètre de lissage)  $h$ , et il est facile de voir que le noyau (classique)  $K(\cdot)$  en (1, 1) devient un cas particulier des noyaux associés continus  $K_{x,h}$  qui dépendent intrinsèquement de  $x$  et  $h$ , à travers la relation :

$$K_{x,h}(\cdot) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x - \cdot}{h}\right) \quad (1, 11)$$

## 1.5 Construction d'un noyau associé

### 1.5.1 Méthode mode-dispersion

Pour construire un noyau associé continu  $K_{x,h}$ , [Kokonendji and Libengué \[2011\]](#) et [Libengué \[2013\]](#) ont proposé récemment une technique de construction des noyaux associés continus dite *mode dispersion* tel que les noyaux associés peuvent se construire à partir de n'importe quel type de noyau qui est une densité de probabilité à deux paramètres ayant un paramètre de dispersion,

#### 1.5.1.1 Principe de construction :

Étant donné un type de noyau  $K_{\Theta}(a, b)$  sur  $S_{\Theta}(a, b)$ , uni-modal de mode  $M(a, b)$  et d'un paramètre de dispersion  $D(a, b)$ , la méthode Mode-Dispersion permet la construction d'une fonction

$K_{\Theta}(x, h)$ , dépendant de  $x$  et  $h$  en résolvant en  $a$  et  $b$  le système :

$$\begin{cases} M(a, b) = x \\ D(a, b) = h \end{cases}$$

Les solutions  $a = a(x, h)$  et  $b = b(x, h)$  du système permettent d'exprimer  $\Theta(a, b)$  en fonction de  $x$  et  $h$ . On obtient alors  $\Theta(a, b) = \Theta(a(x, h), b(x, h))$  que nous désignons simplement par  $\Theta(x, h)$ .

### 1.5.1.2 Exemple de construction de noyau associé :

**Exemple. [Noyau associé bêta]**

Nous considérons la loi bêta noté  $BE_{\Theta(a,b)}$  de paramètres  $a > 1$  et  $b > 0$  ( $a$  et  $b$  sont tous des paramètres de forme) et défini sur  $S_{BE} = [0, 1]$  par :

$$BE_{(a,b)}(u) = \frac{1}{\beta(a,b)} u^{a-1} (1-u)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(u)$$

où  $\beta(a, b)$  est la fonction bêta .

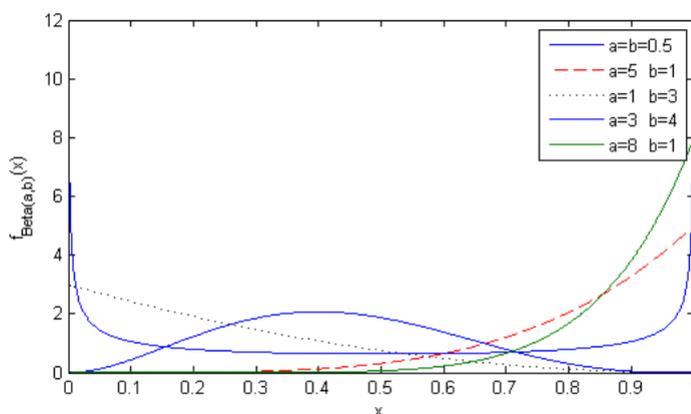


FIGURE 1.1 – Représentations graphique de la loi bêta(a,b)

On pose que son mode et son paramètre de dispersion sont :

$$M(a, b) = (a - 1)/(a + b - 2) \text{ et } D(a, b) = 1/(a + b - 2)$$

où

$$\begin{cases} M(a, b) = x \\ D(a, b) = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x/h + 1 \\ b = (1 - x)/h + 1 \end{cases}$$

ainsi, le noyau bêta associé au principe mode-dispersion sera alors :

$$K_{BE(x/h+1, (1-x)/h+1)}(u) = \frac{1}{\beta(\frac{x}{h} + 1, \frac{1-x}{h} + 1)} u^{x/h} (1-u)^{(1-x)/h} \mathbf{1}_{[0,1]}(u) \quad (1, 12)$$

**Exemple. [Noyau associé Gamma ]**

La densité de probabilité de la distribution  $\text{Gamma}_{(a,b)}$  est :

$$GA(a,b)(u) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^{-a} u^{a-1} \exp(-u/b) 1_{[0,+\infty[}(u) \quad (1,13)$$

avec paramètres  $a > 1$  et  $b > 0$  ( $a$  et  $b$  celui d'échelle) et défini sur  $S_{GA} = [0, +\infty[$ .

Son mode et son paramètre de dispersion étant respectivement  $M(a,b) = (a-1)$  et  $D(a,b) = b$  de même méthode de résolution de l'exemple précédent (1)[noyau Bêta]

$$\begin{cases} M(a,b) = x \\ D(a,b) = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x/h + 1 \\ b = h \end{cases}$$

ainsi,

$$\Theta(x,h) = \left(\frac{x}{h} + 1, h\right) \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } h > 0.$$

Ainsi, le noyau associé gamma construit est :

$$K_{GA_{(x/h+1,h)}}(u) = \frac{u^{x/h}}{\Gamma(x/h+1)h^{x/h+1}} \exp(-u/h) 1_{[0,+\infty[}(u)$$

**Exemple. [Noyau associé Pareto ]**

La densité de probabilité de la distribution pareto s'écrit sous la forme :

$$f(u) = \frac{ba^b}{u^{b+1}} 1_{[a,+\infty[}(u)$$

Il est de paramètres  $a > 0$  et  $b > 0$  (respectivement paramètres de forme et d'échelle de loi de pareto)

La moyenne et la variance ainsi que son mode  $M(a,b)$  et son paramètre de dispersion  $D(a,b)$  de la loi pareto sont donnés respectivement par :

$$E[X] = \frac{ba}{(b-1)}, \quad V[X] = \frac{ba^2}{b-2} - \frac{ba}{(b-1)^2}, \quad M(a,b) = a, \quad D(a,b) = 1/b,$$

En résolvant le système on obtient :

$$\begin{cases} M(a,b) = a = x \\ D(a,b) = 1/b = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 1/h \end{cases}$$

$$\Theta(x,h) = (x, 1/h) \text{ pour tout } h > 0 \text{ et } x \in ]0, +\infty[$$

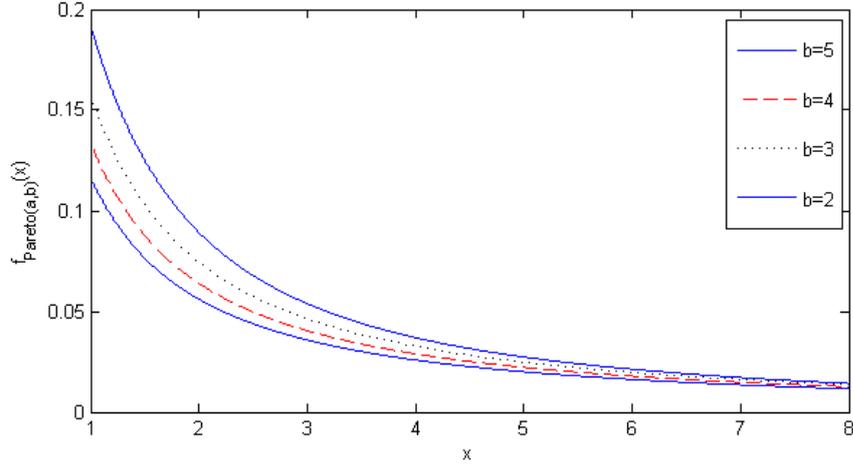


FIGURE 1.2 – Représentations graphique de la loi Pareto(a,b) avec a=1

ainsi, le noyau Pareto associé au principe mode-dispersion sera alors :

$$K_{PA(x,1/h)}(u) = \frac{1}{hu} \left(\frac{x}{u}\right)^{1/h} \mathbf{1}_{[x,+\infty)}(u)$$

Puis, en exprimant sa moyenne, ainsi que sa variance en fonction des solutions, on trouve :

$$E[K_{PA(x,1/h)}] = \frac{x}{(1-h)} \quad , \quad V[K_{PA(x,1/h)}] = \frac{(xh)^2(1-2h)^{-1}}{(1-h)^2}$$

Nous résumons, dans le tableau suivant, les différents résultats obtenus sur quelques types de noyaux :

	<i>Bêta étendu</i>	<i>Bêta</i>	<i>Gamma</i>	<i>Inverse gamma</i>
$S_{\theta(a,b)}$	$[t_1, t_2], 0 \leq t_1 < t_2$	$[0, 1]$	$[0, \infty)$	$(0, \infty)$
$K_{\theta(a,b)}$	$\frac{(u-t_1)^{a-1}(t_2-u)^{b-1}}{B(a,b)(t_2-t_1)^{a+b-1}}$	$\frac{u^{a-1}(1-u)^{b-1}}{B(a,b)}$	$\frac{b^{-a}u^{a-1}\exp(-\frac{u}{b})}{\Gamma(a)}$	$\frac{b^a u^{-(a-1)}\exp(-\frac{b}{u})}{\Gamma(a)}$
$M(a,b)$	$\frac{(a-1)t_2+(b-1)t_1}{a+b-2}$	$\frac{a-1}{a+b-2}$	$(a-1)b$	$\frac{b}{a+1}$
$D(a,b)$	$(a+b-2)^2$	$(a+b-2)^{-1}$	$b$	$b^{-1}$
$E(Z_{\theta(a,b)})$	$t_1 + \frac{a(t_2-t_1)}{a+b}$	$\frac{a}{a+b}$	$ab$	$\frac{b}{a-1}$
$Var(Z_{\theta(a,b)})$	$\frac{ab((t_2-t_1))^2}{(a+b)^2(a+b+1)}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	$ab^2$	$\frac{b^2}{(a-1)^2(a-1)}$

TABLE 1.2 – Quelques types de noyaux associées (pour la suite voir Tableau 1.2)

	<i>Inverse gaussien</i>	<i>Réciproque IG</i>	<i>Pareto</i>	<i>Log – Normal</i>
$S_{\theta(a,b)}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$	$[a, \infty)$	$(0, \infty)$
$K_{\theta(a,b)}$	$\frac{\sqrt{b} \exp -\frac{b}{2a}(\frac{u}{a}-2+\frac{a}{u})}{\sqrt{2\Pi t^3}}$	$\frac{\sqrt{b} \exp -\frac{b}{2a}(au-2+\frac{1}{au})}{\sqrt{2\Pi u}}$	$\frac{ba^b}{u^{b+1}}$	$\frac{1}{ub\sqrt{2\Pi}} \exp -\frac{1}{2}(\frac{\log(u)-a}{b})^2$
$M(a, b)$	$a\{(1 + \frac{9a^2}{4b^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{3a}{2b}\}$	$\frac{1}{a}\{(1 + \frac{9a^2}{4b^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2b}\}$	$a$	$\exp(a - b^2)$
$D(a, b)$	$b^{-1}$	$b^{-1}$	$b^{-1}$	$b$
$E(Z_{\theta(a,b)})$	$a$	$a^{-1} + b^{-1}$	$\frac{ab}{b-1}$	$e^{a+\frac{b^2}{2}}$
$Var(Z_{\theta(a,b)})$	$\frac{a^3}{b}$	$\frac{1}{ab} + \frac{2}{b^2}$	$\frac{a^2b}{(b-1)^2(b-2)}$	$(e^{b^2} - 1)e^{2a+b^2}$

TABLE 1.3 – Quelques types de noyaux associées (suite du Tableau 1.1)

où  $Z_{\theta(a,b)}$  est une variable aléatoire de loi  $K_{\theta(x,h)}$  (où  $K_{\theta(x,h)}$  est un noyau associé construit par la méthode mode-dispersion).

## 1.6 Propriétés de l'estimateur à noyau associé

Dans cette partie, nous présentons une étude générale des propriétés asymptotiques des estimateurs à noyaux associés continus asymétriques, qui dépendent intrinséquement du point d'estimation  $x$  et du paramètre de lissage  $h$ .

### 1.6.1 Biais

Le biais de  $\widehat{f}_h(x)$  est :

$$\begin{aligned}
\text{biais}(\widehat{f}_h(x)) &= E(\widehat{f}_h(x)) - f(x) \\
&= \int_{S \cap S_{x,h}} f(t)K_{x,h}(t)dt - f(x) \\
&= E(f(k_{x,h})) - f(x)
\end{aligned} \tag{1, 14}$$

Le développement de Taylor de  $f(k_{x,h})$  au point moyen  $E(k_{x,h}) = m_{x,h}$  est

$$f(k_{x,h}) \stackrel{\circ}{=} f(m_{x,h}) + (k_{x,h} - m_{x,h})f'(m_{x,h}) + \frac{1}{2}(k_{x,h} - m_{x,h})^2 f''(m_{x,h}),$$

où le symbole  $\stackrel{\circ}{=}$  indique l'équivalence asymptotique.

$$\begin{aligned}
\text{biais}(\widehat{f}_h(x)) &\stackrel{\circ}{=} f(m_{x,h}) + \frac{1}{2}E((k_{x,h} - m_{x,h})^2)f''(m_{x,h}) - f(x) \\
&= f(E(k_{x,h})) + \frac{1}{2}V(k_{x,h})f''(x) - f(x).
\end{aligned}$$

## 1.6.2 Variance

La variance de  $\widehat{f}_h(x)$  est :

$$\begin{aligned} V(\widehat{f}_h(x)) &= \frac{1}{n} \int_{S \cap S_{x,h}} K_{x,h}^2(t) f(t) dt - \frac{1}{n} \left( \int_{S \cap S_{x,h}} K_{x,h}(t) f(t) dt \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \int_{S \cap S_{x,h}} K_{x,h}^2(t) f(t) dt - \frac{1}{n} \left( \text{biais}(\widehat{f}_h(x)) + f(x) \right)^2. \end{aligned} \quad (1, 15)$$

## 1.6.3 Critères d'Erreurs

### 1.6.3.1 Erreur quadratique moyenne (MSE)

$$\begin{aligned} MSE(\widehat{f}_h(x)) &= \text{biais}(\widehat{f}_h(x))^2 + V(\widehat{f}_h(x)) \\ &= f(E(K_{x,h}) + \frac{1}{2}V(k_{x,h})f''(x) - f(x))^2 \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_{S \cap S_{x,h}} K_{x,h}^2(t) f(t) dt - \frac{1}{n} (\text{biais}(\widehat{f}_h(x)) + f(x))^2. \end{aligned} \quad (1, 16)$$

### 1.6.3.2 Erreur quadratique moyenne intégrée (MISE)

$$\begin{aligned} MISE(\widehat{f}_h(x)) &= \int_S MSE(\widehat{f}_h(x)) \\ &= \int_S \left( f(E(K_{x,h}) + \frac{1}{2}V(k_{x,h})f''(x) - f(x))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} \int_{S \cap S_{x,h}} K_{x,h}^2(t) f(t) dt - \frac{1}{n} (\text{biais}(\widehat{f}_h(x)) + f(x))^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (1, 17)$$

## 1.7 Convergence de l'estimateur á noyau associé

### 1.7.1 Convergence presque sure

La loi des grand nombre nous donne la convergence presque surement notée *PS*. Pour tout  $x$  fixé dans  $S$  nous avons :

$$\widehat{f}_h(x) \longrightarrow f(x), \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \quad h(n) \longrightarrow 0.$$

### 1.7.2 Convergence du biais

$$\int_S |E(\widehat{f}_h(x)) - f(x)| dx \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \quad h(n) \longrightarrow 0.$$

### 1.7.3 Normalité asymptotique

Le théorème centrale-limit donne la convergence en loi :

$$\frac{\widehat{f}_h(x) - E(\widehat{f}_h(x))}{\sqrt{V(\widehat{f}_h(x))}} \longrightarrow N(0, 1), \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \quad h(n) \longrightarrow 0.$$

### 1.7.4 Convergence uniforme du biais

Soit  $f$  une densité de probabilité bornée et continue sur son support  $S$ , et  $\hat{f}_h$  son estimateur à noyau associé. Pour tout compact  $I \subseteq S$ , on a

$$\sup_{u \in I} |E[\hat{f}_h(x)] - f(x)| \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

### 1.7.5 Convergence en moyenne quadratique

soit  $f$  une densité continue sur  $S = R$  et  $\hat{f}_n$  son estimateur à noyaux (classique)  $K$  vérifiant :

$$\int_S K(u)du = 1, \sup_{u \in S} |K(u)| < \infty \text{ et } \int_S |K(u)du| < \infty.$$

si le paramètre  $h$  satisfait

$$h \rightarrow 0, nh \rightarrow \infty, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

alors  $MSE\{\hat{f}_h(x)\} \rightarrow 0, \forall x \in S = R$  où  $\rightarrow$  désigne la convergence en probabilité.

### 1.7.6 Convergence en moyenne quadratique intégrée

Soit  $f$  une densité de puissance  $p^{eme}$  intégrable et son estimateur à noyau (classique)  $K$  satisfaisant

$$\int_S K(u)du = 1, \sup_{u \in S} |K(u)| < \infty \text{ et } \int_S |K(u)du| < \infty.$$

Si  $h$  vérifie

$$h \rightarrow 0, nh \rightarrow \infty, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

alors  $MISE\{\hat{f}_h(x)\} \rightarrow 0$

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode du noyau classique et associé pour l'estimation non paramétrique de la densité de probabilité. Nous avons donné les différents résultats théoriques concernant la convergence et la consistance de ces méthodes .

## CHAPITRE 2

# NOYAU ASSOCIÉ À SUPPORT POSITIF

### 2.1 Introduction

Dans cette partie nous présentons une étude générale sur quelques types des estimateurs de la densité à noyaux associés à support positif ( Gamma , Gamma Généraliser , Birnbaum Saunders Généralisé GBS et Skewed Birnbaum Saunders Généralisé (Sekew-GBS)), et pour chacun des cas, nous présentons d'abord le type de noyau  $K_{x,h}$  et les propriétés qui nous avons vus dans le chapitre précédent pour obtenir les caractéristiques possibles pour chaque estimateur .

### 2.2 Estimateur de la densité à noyau associé Gamma

le noyau associé gamma a été pour la première fois proposé par [Chen\[2000\]](#) dans le but d'estimer les densités sur  $[0, +\infty[$ , La densité de probabilité de la distribution  $Gamma_{(a,b)}$  est :

$$f_{GA(a,b)}(u) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^{-a} u^{a-1} \exp(-u/b) 1_{[0,+\infty[}(u) \quad a > 1, b > 0 \quad (2.1)$$

où  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{a-1}dx$ ,  $a > 0$ . les paramètre  $a$  et  $b$  sont définies respectivement la forme et d'échelle.

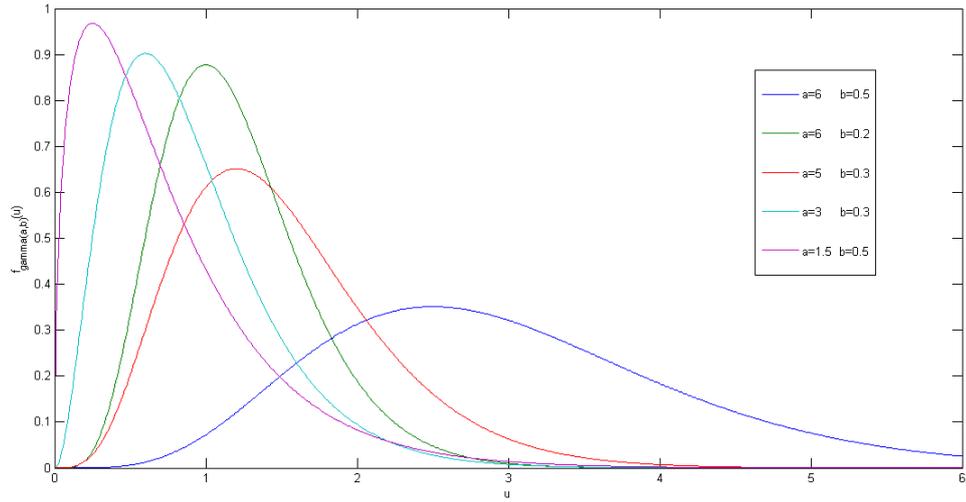


FIGURE 2.1 – Représentations graphique de la loi Gamma(a,b)

le noyau associé gamma construit par la méthode de mode-dispersion est :

$$K_{GA(x/h+1,h)}(u) = \frac{u^{x/h}}{\Gamma(x/h + 1)h^{x/h+1}} \exp(-u/h) 1_{[0,+\infty[}(u) \quad (2.2)$$

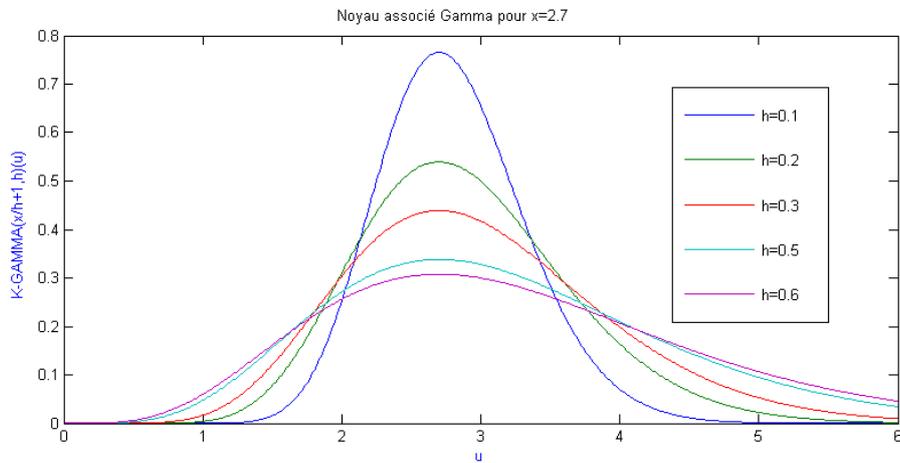


FIGURE 2.2 – Noyaux associés Gamma pour x=2.7

L'estimateur de la densité à noyau associé gamma est alors :

$$\hat{f}_{GA}(x) = (1/n) \sum_{i=1}^n K_{GA(x/h+1,h)}(X_i) \quad (2.3)$$

”Biais”

$$Biais[\widehat{f}_{GA}(x)] = h \left\{ f'(x) + \frac{1}{2}xf''(x) \right\} + o(h)$$

”Variance”

$$\begin{aligned} Var[\widehat{f}_{GA}(x)] &= \frac{1}{n}Var[K_{GA(\frac{x}{h}+1,h)}(X_i)] \\ &= \frac{1}{n}E[K_{GA(\frac{x}{h}+1,h)}(X_i)]^2 + O(1/n) \end{aligned}$$

Soit  $\eta_x$  une variable aléatoire de distribution gamma de paramètre  $(x/h + 1, h)$ , On aura :

$$E \{ K_{x/h+1,h}(X_i) \}^2 = B_h(x)E \{ f(\eta_x) \};$$

$$B_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n\sqrt{h\pi}}x - 1/2f(x) & \text{si } x/h \rightarrow \infty \\ \frac{\Gamma(2K+1)}{2^{1+2x}\Gamma^2(K+1)}n^{-1}h^{-1}f(x) & \text{si } x/h \rightarrow K \end{cases} \text{ avec } k > 0 \text{ constante}$$

”MSE” L’erreur quadratique moyenne

$$MSE[\widehat{f}_{GA}(x)] \simeq h^2 \left\{ f'(x) + \frac{1}{2}xf''(x) \right\}^2 + n^{-1}B_h(x)f(x). \quad (2.4)$$

”MISE” L’erreur quadratique moyenne intégrée

L’erreur quadratique moyenne intégrée (MISE) associé au noyau gamma est donnée par la forme :

$$\begin{aligned} MISE(\widehat{f}_{GA}) &= h^2 \int_0^\infty [xf'(x) + \frac{1}{2}xf''(x)]^2 dx + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}n^{-1}h^{-1/2} \\ &\quad * \int_0^\infty x^{-1/2}f(x)dx + o(n^{-1}h^{-1/2} + h^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

et Par la minimisation du  $MISE$ , le paramètre de lissage optimal de l’estimateur à noyau (GA) est :

$$h_{GA}^* = \frac{\left[ \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right) \int_0^\infty x^{-1/2}f(x)dx \right]^{2/5}}{4^{2/5} \left[ \int_0^\infty [xf'(x) + (\frac{1}{2})xf''(x)]^2 dx \right]^{2/5}} \quad (2.6)$$

En remplaçant (2.6) dans (2.5), le MISE optimal associé est :

$$MISE_{GA}^* = \frac{5}{4^{4/5}} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{-1/2}f(x)dx \right]^{4/5} \left[ \int_0^\infty \left( xf'(x) + \frac{1}{2}xf''(x) \right)^2 dx \right]^{1/5} n^{-4/5}. \quad (2.7)$$

## 2.3 Estimateur de la densité à noyau Gamma généraliser GG

On considère la variable aléatoire  $Y \sim GG(\alpha, \beta, \gamma)$  de la fonction densité de probabilité de loi Gamma généraliser ( $GG$ ) qui prend la forme suivante :

$$p(y, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma y^{\alpha-1} \exp(-(y/\beta)^\gamma)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha/\gamma)} 1_{\{y \geq 0\}}$$

d'après [chen\[2000\]](#) Il utilise la loi gamma pour la construire des noyaux associés continus asymétriques et Pour construction d' un noyau à partir du la fonction densité de probabilité tel que le principe est de permettez  $(\alpha, \beta, \gamma)$  à des fonctions dépend de la cible  $x \geq 0$  et de fenêtre de lissage  $h$  tel que :  $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_h(x), \beta_h(x), \gamma_h(x))$ , et avec ;

$$K_{GG}(u, x, h) = p(u, \alpha, \beta, \gamma)$$

,Ce qui conduit au L'estimateur de la densité à noyau associé gamma généralisé, qui donné par :

$$\hat{f}_{GG}(x) = (1/n) \sum_{i=1}^n K_{GG}(X_i; x, h) \quad (2.8)$$

**Définition 2.1.** soit  $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_h(x), \beta_h(x), \gamma_h(x)) \in R_+^3$  des fonctions continus de paramètre  $x$  et de paramètre de lissage  $h$ , pour chaque paramètre  $(\alpha, \beta, \gamma)$  On considère la fonction densité de probabilité de  $GG \left( \alpha, \beta \Gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right), \gamma \right)$  ie :

$$K_{GG}(u; x, h) = \frac{\gamma u^{\alpha-1} \exp \left[ - \left( \frac{u}{\beta \Gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right)} \right)^\gamma \right]}{\left( \beta \Gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right) \right)^\alpha \Gamma(\alpha/\gamma)} 1_{\{u \geq 0\}} \quad (2.9)$$

On dit que la fonction appartient à la famille Gamma Généraliser ( $GG$ ) s'il vérifie les 5 conditions suivante :

**Condition 2.1.**

$$\beta = \begin{cases} x & \text{si } x \geq C_1 h \\ \varphi_h(x) & \text{si } x \in [0, C_1 h[ \end{cases}$$

avec  $0 < C_1 < \infty$  est une constante ,et  $C_2 h \leq \varphi_h(x) \leq C_3 h$ , tel que  $0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \infty$  des constantes.

**Condition 2.2.**  $\gamma, \alpha \geq 1$ ; et pour  $x \in [0, C_1h]$ , avec  $\alpha$  satisfie  $1 \leq \alpha \leq C_4$ ,  $C_4$  constante tel que  $1 \leq C_4 \leq \infty$ .

**Condition 2.3.**

$$M_h(x) = \frac{\Gamma(\alpha/\gamma)\Gamma(2\alpha/\gamma)}{(\Gamma(\frac{\alpha+1}{\gamma}))^2} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + (C_5/x)h + o(h) & \text{si } x \geq C_1h \\ O(1) & \text{si } x \in [0, C_1h] \end{array} \right\}$$

avec  $0 < |C_5| < \infty$  constante.

**Condition 2.4.**

$$H_h(x) = \frac{\Gamma(\alpha/\gamma)\Gamma(2\alpha/\gamma)}{2^{1/\gamma}(\Gamma(\frac{\alpha+1}{\gamma}))\Gamma(\frac{2\alpha-1}{\gamma})} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + o(1) & \text{si } x/h \rightarrow \infty \\ O(1) & \text{sinon } x/h \rightarrow C_{onst} \end{array} \right.$$

**Condition 2.5.** Quand  $n \rightarrow \infty$

$$A_{h,v}(x) = \left\{ \frac{\gamma\Gamma(\frac{\alpha+1}{\gamma})}{\beta} \right\}^{v-1} \frac{\Gamma\left\{\frac{v(\alpha-1)+1}{\gamma}\right\}}{v \frac{v(\alpha-1)+1}{\gamma} \{\Gamma(\alpha/\gamma)\}^{2v-1}} \sim \left\{ \begin{array}{ll} V_I(v)(xh)^{\frac{1-v}{2}} & \text{si } x/h \rightarrow \infty \\ V_B(v)h^{1-v} & \text{si } x/h \rightarrow C_{onst} \end{array} \right.$$

$v \in R_+$ , avec  $0 < V_B(v), V_I(v) < \infty$  dépende de seulement de  $v$ .

les caractéristiques de l'estimateur à noyau associée Gamma-Généraliser ( $GG$ ) sont :

## ”Biais”

Biais de  $\widehat{f}_{GG}$  :

$Biais[\widehat{f}_{GG}(x)] \sim B_1(x, f)h$  avec :

$$B_1(x, f) = \left\{ \begin{array}{ll} (C_5/2)xf''(x) & \text{si } x \geq C_1h \\ \xi_h(x)f'(x) & \text{si } x \in [0, C_1h] \end{array} \right.$$

tel que  $\xi_h(x) = (\varphi_h(x) - x)/h = O(1)$

## ”Variance”

Variance de  $\widehat{f}_{GG}$

$$Var \left\{ \widehat{f}_{GG}(x) \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} (nh^{1/2})^{-1}V_I(2)f(x)/\sqrt{x} & \text{si } x/h \rightarrow \infty \\ (nh)^{-1}V_B(2)f(x) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

## ”MSE”

MSE de  $\hat{f}_{GG}$

$$MSE[\hat{f}_{GG}(x)] \sim h^2(C_5^2/4)x^2[f''(x)]^2 + \frac{V_I(2)f(x)}{nh^{1/2}\sqrt{x}} \quad (2.10)$$

et Par la minimisation du  $MSE$ , le paramètre de lissage optimal de l'estimateur à noyau (GG) est :

$$h_{GG}^* = \left[ \frac{V_I(2)f(x)}{C_5^2[f''(x)]^2} \right]^{2/5} x^{-1} n^{-2/5} \quad (2.11)$$

## ”MISE”

MISE de  $\hat{f}_{GG}$  :

$$MISE[\hat{f}_{GG}(x)] \sim h^2(C_5^2/4) \int_0^\infty [xf''(x)]^2 dx + \frac{V_I(2)}{nh^{1/2}} \int_0^\infty f(x)/\sqrt{x} dx \quad (2.12)$$

et Par la minimisation du  $MISE$ , le paramètre de lissage optimal de l'estimateur à noyau (GG) est :

$$h_{GG}^{**} = \left[ \frac{V_I(2) \int_0^\infty f(x)/\sqrt{x} dx}{C_5^2 \int_0^\infty [xf''(x)]^2 dx} \right]^{2/5} n^{-2/5} \quad (2.13)$$

## Exemples du noyau GG

**noyau gamma modifié :**

Noyau gamma modifié a été proposée pour améliorer les performances (réduire le biais), tel que dans cette classe de loi on pose :

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} (x/h, x) & \text{si } x \geq 2h \\ \left( \frac{1}{4} \left( \frac{x}{h} \right)^2 + 1, \frac{x^2}{4h} + h \right) & \text{si } x \in [0, 2h[ \end{cases}$$

avec  $\gamma = 1$ , on a

$$K_{GG}(u; x, h) = \frac{u^{\alpha-1} \exp(-u/(\beta/\alpha))}{(\beta/\alpha)^\alpha \Gamma(\alpha)} 1_{\{u \geq 0\}}$$

on pose que :

$$\begin{cases} \alpha = \rho_h(x) \\ \beta/\alpha = h \end{cases}$$

d’ou La forme du noyau gamma modifié est :

$$K_{GG-MOD(\rho_h(x), h)}(u) = \frac{u^{\rho_h(x)-1} \exp(-u/h)}{h^{\rho_h(x)} \Gamma(\rho_h(x))} 1_{\{u \geq 0\}}$$

## Noyau Weibull

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\sqrt{2x/h}, x) & \text{si } x \geq 2h \\ \left( \frac{1}{2} \frac{x}{h} + 1, \frac{x^2}{4h} + h \right) & \text{si } x \in [0, 2h[ \end{cases}$$

avec  $\gamma = \alpha$ , on trouve que :

$$K_{GG}(u; x, h) = \frac{\alpha u^{\alpha-1} \exp\left(-\left\{\frac{u}{\beta/\Gamma(1+1/\alpha)}\right\}^\alpha\right)}{\{\beta/\Gamma(1+1/\alpha)\}^\alpha} 1_{\{u \geq 0\}}$$

cette noyau est définit la fonction densité de probabilité de *Weibull*( $\alpha, \beta/\Gamma(1+1/\alpha)$ ) qui écrit sous la forme :

$$K_{W(\alpha, \beta/\Gamma(1+1/\alpha))}(u) = \frac{\alpha}{\beta/\Gamma(1+1/\alpha)} \left\{ \frac{u}{\beta/\Gamma(1+1/\alpha)} \right\}^{\alpha-1} \exp\left(-\left\{\frac{u}{\beta/\Gamma(1+1/\alpha)}\right\}^\alpha\right) 1_{\{u \geq 0\}} \quad (2, 14)$$

## 2.4 Estimateur de densité de noyau Birnbaum-Saunders généralisé GBS

Les noyaux associés continus asymétriques GBS sont développés à partir des distributions GBS introduits par [Díaz-García and V.Leiva \[2005\]](#), on considère la variable aléatoire  $T \sim GBS(\alpha, \beta, g)$  où ,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  sont des paramètres de forme et d'échelle respectivement. La densité de  $T$  prend alors la forme suivante :

$$f_T(t; \alpha; \beta; g) = cg \left( \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right) \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{t^3}} \right), \quad t > 0 \quad (2, 15)$$

où  $c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x^2) dx}$  est une constante de normalisation,  $g$  est la fonction densité réelle de la variable aléatoire  $Z = \left( \sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right) / \alpha$ .

La moyenne et la variance de  $T$  sont, respectivement :

$$E[T] = \frac{\beta}{2}(2 + u_1 \alpha^2)$$

$$V[T] = \frac{\beta^2 \alpha^2}{4}(2\alpha^2 u_2 + 4u_1 - \alpha^2 u_1^2).$$

où  $u_r = u_r(g) = E[U^r]$ , avec  $U \sim G_{\chi^2}(1, g)$ .

Des cas particuliers de fonction de densité *GBS* sont présentés dans le tableau :

L'estimateur de la fonction densité inconnue  $f$  à noyau *GBS* , il est de la forme :

Distribution	$g = g(\mu), \mu > 0$	$c$	$u_1(g)$	$u_2(g)$	$\mu$
Normale	$\exp(-\frac{1}{2}\mu)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	1	3	$\mu \sim X^2(1)$
PE	$\exp(-\frac{1}{2}\mu^\nu), \nu > 0$	$\frac{2^{\frac{1}{\nu}} \Gamma(\frac{3}{2\nu})}{\gamma(\frac{1}{2\nu})}$	$\frac{2^{\frac{2}{\nu}} \Gamma(\frac{5}{2\nu})}{\gamma(\frac{1}{2\nu})}$	$\frac{v}{2^{\frac{1}{2\nu}} \Gamma(\frac{1}{2\nu})}$	$\mu = V^{\frac{1}{\nu}}, v \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{v})$
Student(t)	$(1 + \frac{t}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}, \nu > 0$	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}$	$\frac{v}{(v-2)}, v > 2$	$\frac{3v^2}{(v-2)(v-4)}, v > 4$	$\mu \sim F(1, v)$

TABLE 2.1 – Distributions GBS

$$\widehat{f}_{GBS(h^{1/2}, x, g)}(x) = \widehat{f}_{GBS}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{GBS(h^{1/2}, x, g)}(x_i) \quad (2, 16)$$

où  $K_{GBS(h^{1/2}, x, g)}$  est une noyau des paramètre  $\alpha = h^{1/2}$ ,  $\beta = x$  et  $g$  est générateur.

$$K_{GBS(\alpha, \beta, g)}(t) = K_{GBS(h^{\frac{1}{2}}, x, g)}(t) = cg \left( \frac{1}{h} \left( \frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2 \right) \right) \frac{1}{\sqrt{4h}} \left( \frac{1}{\sqrt{tx}} + \sqrt{\frac{x}{t^3}} \right), t > 0, h > 0, x > 0.$$

où  $c$  est une constante de normalisation et  $h$  est un paramètre de lissage. Quelques cas particuliers de noyaux  $GBS$  sont donnés dans le tableau :

Distribution	Noyau	$C_{g^2}$
BS	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2h}\left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2\right)\right) \frac{1}{\sqrt{4h}} \left(\frac{1}{\sqrt{tx}} + \sqrt{\frac{x}{t^3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \text{sqrt}}$
BS-PE	$\frac{\nu}{2^{\frac{1}{\nu}} \Gamma(\frac{1}{2\nu})} \exp\left(\frac{-1}{2h^\nu}\left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2\right)^\nu\right) \frac{1}{\sqrt{4h}} \left(\frac{1}{\sqrt{tx}} + \sqrt{\frac{x}{t^3}}\right), \nu > 0$	$2^{\frac{1}{\nu}} \Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2\nu}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)$
BS-t	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left[1 + \frac{1}{\nu h}\left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2\right)\right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4h}} \left(\frac{1}{\sqrt{tx}} + \sqrt{\frac{x}{t^3}}\right), \nu > 0$	$\frac{\sqrt{v}\gamma(v)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1+2v}{2})}$

TABLE 2.2 – Noyaux GBS

### Propriété de l'estimateur à noyau GBS

Considérons les condition suivantes associées à la densité réelle inconnue  $f$  :

(C<sub>1</sub>) La fonction  $f$  est deux fois différentiable et sa dérivée seconde est continus et bornée

(C<sub>2</sub>) La fonction  $K(t) = t^{-1/2}f(t)$  et  $\eta(t) = t^{-3/2}f(t)$  sont continus et bornés.

(C<sub>3</sub>)  $\int_0^\infty (xf'(x))^2 dx < \infty$

(C<sub>4</sub>)  $\int_0^\infty (x^2f''(x))^2 dx < \infty$

(C<sub>5</sub>)  $\int_0^\infty x^{-1}f(x)dx < \infty$ .

Ensuit, sous les condition(C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) nous trouvons le biais et la variance de l'estimateur à noyau  $GBS$  proposé.

le biais et la variance de ces estimateurs sont, respectivement

$$B[\widehat{f}_{GBS}(x)] = \frac{h\mu_1(g)}{2} (xf'(x) + f''(x)x^2) + O(h) \quad \text{et}$$

$$V[\widehat{f}_{GBS}(x)] = \frac{c^2}{c_{g^2}nh^{\frac{1}{2}}} f(x) + O\left(\frac{1}{nh^{\frac{1}{2}}}\right)$$

où l'erreur quadratique moyenne intégrée ( $MISE$ ) de l'estimateur de la densité à noyau  $GBS$

est :

$$\begin{aligned} MISE[\widehat{f}_{GBS}] &= \int_0^\infty \left( B^2[\widehat{f}_{GBS}(x)] + V[\widehat{f}_{GBS}(x)] \right) dx \\ &= \frac{h^2}{4} \mu_1^2(g) \int_0^\infty (xf'(x) + x^2f''(x))^2 dx + \frac{c^2}{c_{g^2}nh^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x) dx + O\left(\frac{1}{nh^{\frac{1}{2}}} + h^2\right). \end{aligned} \quad (2, 17)$$

Le paramètre de lissage optimal qui minimise (2, 17) est :

$$h^* = \left[ \frac{c^2 \int_0^\infty x^{-1} f(x) dx}{c_{g^2} \mu_1^2(g) \int_0^\infty (xf'(x) + x^2f''(x))^2 dx} \right]^{2/5} n^{-2/5}. \quad (2, 18)$$

En remplaçant (2, 18) dans (2, 17), le MISE optimal est :

$$MISE^*[\widehat{f}_{GBS}] = \frac{5}{4} \left[ \mu_1^2(g) \int_0^\infty (xf'(x) + x^2f''(x))^2 dx \right]^{1/5} \left( \frac{c^2}{c_{g^2}} \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x) dx \right)^{4/5} n^{-4/5}. \quad (2, 19)$$

## 2.5 Estimateurs de densité de noyau Skew-GBS

Vilca and Leiva [2006] ont introduit les distributions skewed-Birnbaum Saunders généralisé (Skew-GBS). Ces distributions offrent une plus grande flexibilité et cela grâce à l'incorporation d'un paramètre d'asymétrie (skewness).

Soit la variable aléatoire  $T = \beta \left( \frac{\alpha Z}{2} + \left( \left( \frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \sim Skew-GBS(\alpha, \beta, \lambda, g)$ , où  $\alpha > 0, \beta > 0$  sont des paramètres de forme et d'échelle respectivement,  $\lambda \in R$  est un paramètre d'asymétrie (skewness) noté  $\lambda$  et  $g$  est une fonction densité de la variable aléatoire  $Z = \left( \sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right) / \alpha$ .

La densité de la v.a  $T$  est donnée par :

$$f(t, \alpha, \beta, \lambda, g) = 2cg \left( \frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right) F_s \left( \frac{\lambda}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right) \frac{t^{-\frac{3}{2}}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}. \quad (2, 20)$$

où

$t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, c = 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} g(x^2) dx$  est une constante de normalisation, et  $F_s$  est la fonction de répartition de la densité d'une distribution symétrique  $f_s = cg$  dans  $R$ .

La moyenne et la variance de  $T$  sont, respectivement :

$$E[T] = \frac{\beta}{2} (2 + \alpha^2 \sigma_3 + \alpha \omega_1) \quad (2, 21)$$

$$V[T] = \frac{\beta^2}{4} (4\alpha^2 \sigma_2 - \alpha^2 \omega_1^2 + 2\alpha^3 \omega_3 - 2\alpha^3 \sigma_2 \omega_1 - \alpha^4 \sigma_2^2 + 2\alpha^4 \sigma_4). \quad (2, 22)$$

où  $\sigma_r = E[Z^r]$  et  $\omega_r = E[Z^r \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4}]$  avec  $Z \sim SS(0, 1, \lambda; g)$

Les distributions skewed-GBS, contiennent les distributions skewed-BS, skewed-BS-PE et skewed-BS-t, Ils sont donnés par :

$$- f_{Skew-BS}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2\alpha^2} (t/\beta + \beta/t - 2)\right) * \Phi\left(\frac{\lambda}{\alpha} \left(\sqrt{t/\beta} - \sqrt{\beta/t}\right)\right) \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}$$

$$\begin{aligned}
- f_{Skew-BS-PE}(t) &= \frac{2\eta}{2^{1/(2\eta)}\Gamma(\frac{1}{2\eta})} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^{2\eta}}(t/\beta + \beta/t - 2)^\eta\right) \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} \\
&\quad * \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\Gamma(1/(2\eta))}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2\eta}, \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{2\eta}(t/\beta + \beta/t - 2)^\eta\right)\right)\right) \\
- f_{Skew-BS-t}(t) &= \frac{2\Gamma((v+1)/2)}{\sqrt{v\pi}\Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{1}{v\alpha^2}(t/\beta + \beta/t - 2)\right)^{(v+1)/2} \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} \\
&\quad * \left(1 - \frac{1}{2}I_{v/(v+(\lambda/\alpha)^2(t/\beta+\beta/t-2))}(v/2, 1/2)\right)
\end{aligned}$$

où

$t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \nu > 0, \eta > 0$  et  $\lambda \in R$ .

- $\Phi$  est la fonction de répartition de la distribution  $N(0, 1)$ ,
- $\Gamma(\alpha, x)$  est une fonction gamma incomplète définie comme suit  $\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x y^{\alpha-1} \exp(-y) dy$ ,
- $\Gamma(x)$  est une fonction gamma définie comme suit  $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} \exp(-y) dy$ ,
- $I_x(\alpha, \beta)$  est le taux de la fonction bêta, il est défini par  $I_x(\alpha, \beta) = \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B_1(\alpha, \beta)}$ ,

où  $B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy$ , (dit aussi fonction bêta incomplète régularisée)

L'estimateur de la fonction densité inconnue  $f$  à noyau skewed-GBS est donné par [Saulo et al \[2013\]](#). Il est de la forme :

$$\hat{f}_{skew-GBS(\sqrt{h}, x, \lambda; g)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{skew-GBS(\sqrt{h}, x, \lambda; g)}(X_i). \quad (2, 23)$$

où

$$\begin{aligned}
K_{skew-GBS(\sqrt{h}, x, \lambda; g)}(X_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2cg \left( \left( \frac{1}{h} \right) \left( \frac{X_i}{x} + \frac{x}{X_i} - 2 \right) \right) F_s \left( \left( \frac{\lambda}{\sqrt{h}} \right) \left( \sqrt{\frac{X_i}{x}} + \sqrt{\frac{x}{X_i}} \right) \right) \\
&\quad * \frac{X_i^{-\frac{3}{2}}(X_i + x)}{\sqrt{4hx}}.
\end{aligned} \quad (2, 24)$$

avec  $c, g$  et  $F_s$  donné en (2, 20).

Le noyau skewed-GBS contient le noyau skewed-BS, le noyau skewed-BS-PE et le noyau skewed-BS-t. Ils sont donnés respectivement par :

$$K_{skew-BS(\sqrt{h}, x, \lambda; g)}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2h} \left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2\right)\right) * \Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{h}} \left(\sqrt{\frac{t}{x}} + \sqrt{\frac{x}{t}}\right)\right) \frac{t^{\frac{3}{2}}(t+x)}{\sqrt{4hx}} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
K_{skew-BS-PE(\sqrt{h}, x, \lambda; g)}(t) &= \frac{2\nu}{2^{\frac{1}{2\nu}}\Gamma(\frac{1}{2\nu})} \exp\left(\frac{-1}{2h^\nu} \left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2\right)^\nu\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2\nu})}\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}, \frac{\lambda^{2\nu}}{2h^\nu} \left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2\right)^\nu\right)\right) \\
&\quad * \frac{t^{-\frac{3}{2}}(t+x)}{\sqrt{4hx}}
\end{aligned}$$

$$K_{skew-BS-t(\sqrt{h},x,\lambda;g)}(t) = \frac{2\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{1}{\nu h} \left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2\right)\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \left(1 - I_{\nu/(\nu+(\frac{\lambda^2}{h})(\frac{t}{x} + \frac{x}{t} - 2))}(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})\right) * \frac{t^{-\frac{3}{2}}(t+x)}{\sqrt{4hx}}$$

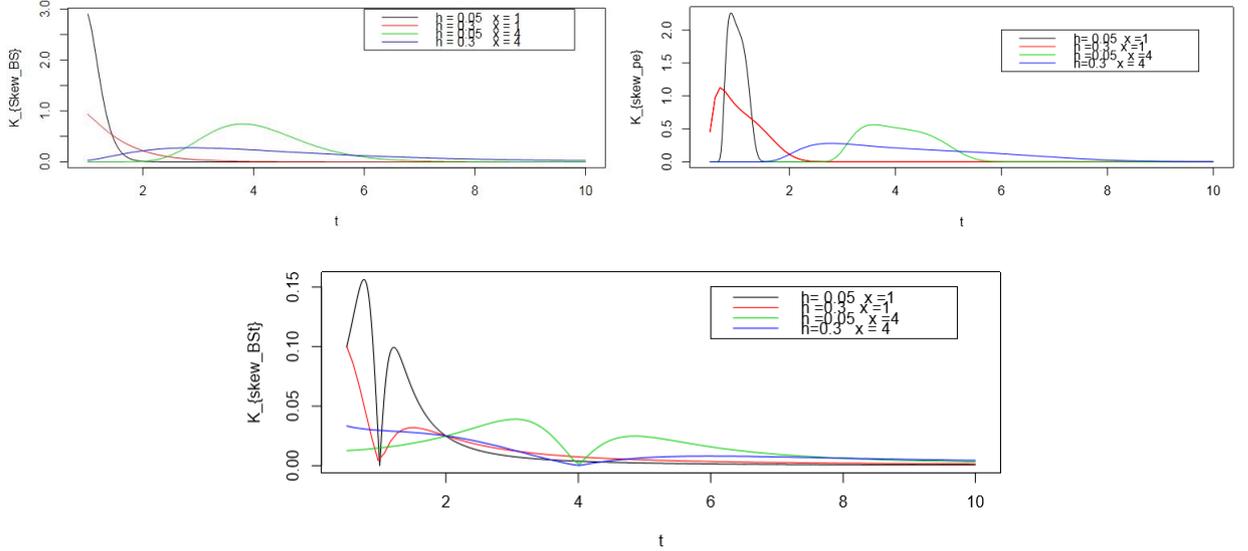


FIGURE 2.3 – Représentations graphique du différents noyaux Skew-GBS (pour  $\nu=2$ )

## Propriété de l'estimateur à noyau Skew-GBS

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$  échantillon aléatoire inconnue de support  $[0, \infty[$ , les conditions suivantes associées à la densité réelle  $f$  :

- (C<sub>1</sub>) Il est deux fois continuellement différentiable.
- (C<sub>2</sub>) Sa seconde dérivée est continue et bornée.
- (C<sub>3</sub>)  $\int_0^\infty (xf'(x))^2 dx < \infty$
- (C<sub>4</sub>)  $\int_0^\infty (x^2 f''(x))^2 dx < \infty$
- (C<sub>5</sub>)  $\int_0^\infty x^{-1} f(x) dx < \infty$ .

Le biais de l'estimateur de la densité à noyau skew-GBS est :

$$Biais[\hat{f}_{skew-GBS}(x)] = h \left( \frac{1}{2} x f'(x) \sigma_2 + \frac{1}{2} x^2 f''(x) \sigma_2 \right) + O(h).$$

où  $\sigma_2$  est donné en (2, 22).

La variance de l'estimateur de la densité à noyau skew-GBS est :

$$Var[\hat{f}_{skew-GBS}(x)] = 2c^2 C_k^{-1} n^{-1} h^{-\frac{1}{2}} x^{-1} f(x) + O\left(n^{-1} h^{-\frac{1}{2}}\right).$$

où,  $C_k$  est une constante de normalisation telle que  $\int_{-\infty}^{\infty} 2g^2(z^2)F_s^2(\lambda z)dz = 1/C_k$ .

L'erreur quadratique moyenne ( $MSE$ ) et l'erreur quadratique moyenne intégrée ( $MISE$ ) de l'estimateur de la densité à noyau skew- $GBS$  sont, respectivement :

$$\begin{aligned} MSE[\hat{f}_{skew-GBS}(x)] &= \frac{h^2}{4} (xf'(x)\sigma_2 + x^2f''(x)\sigma_2)^2 \\ &+ 2c^2C_k^{-1}n^{-1}h^{\frac{-1}{2}}x^{-1}f(x) + O\left(n^{-1}h^{\frac{-1}{2}} + h^2\right). \end{aligned} \quad (2, 25)$$

$$\begin{aligned} MISE[\hat{f}_{skew-GBS}(x)] &= \int_0^{\infty} MSE[\hat{f}_{skew-GBS}(x)] dx \\ &= \frac{h^2}{4}\sigma_2^2 \int_0^{\infty} (xf'(x) + x^2f''(x))^2 dx \\ &+ 2c^2C_k^{-1}n^{-1}h^{\frac{-1}{2}} \int_0^{\infty} x^{-1}f(x)dx + O\left(n^{-1}h^{\frac{-1}{2}} + h^2\right). \end{aligned} \quad (2, 26)$$

Le paramètre de lissage optimal qui minimise (2, 26) est :

$$h_{Skew-GBS}^* = \left( \frac{(2c^2C_k^{-1} \int_0^{\infty} x^{-1}f(x)dx)^{2/5}}{(\sigma_2^2 \int_0^{\infty} (xf'(x) + x^2f''(x))^2 dx)^{2/5}} \right) n^{-2/5}. \quad (2, 27)$$

En remplaçant (2, 27) dans (2, 26), le  $MISE$  optimal est :

$$\begin{aligned} MISE^*[\hat{f}_{skew-GBS}(x)] &= \frac{5}{4} \left( \sigma_2^2 \int_0^{\infty} (xf'(x) + x^2f''(x))^2 dx \right)^{1/5} \\ &* \left( 2c^2C_k^{-1} \int_0^{\infty} x^{-1}f(x)dx \right) n^{4/5}. \end{aligned} \quad (2, 28)$$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés quelques estimateurs des noyaux associés à support positif et leurs propriétés. Les noyaux associés dépendent intrinsèquement du point d'estimation  $x$  et du paramètre de lissage  $h$ .

Le choix du paramètre de lissage  $h$  est très important dans l'estimation de la fonction de densité par la méthode du noyau, et dans le chapitre suivants nous allons présenter quelques méthodes pour le choix de ce paramètre.

## CHAPITRE 3

# MÉTHODE D'ESTIMATION DU PARAMÈTRE DE LISSAGE

### 3.1 Introduction

Dans la littérature, le choix du paramètre de lissage  $h$  est très important pour une bonne performance de l'estimateur (pour avoir une bonne estimation par la méthode des noyaux), il faut bien choisir le paramètre de lissage  $h$  puisque celui-ci à un rôle crucial dans le processus d'estimation. Lorsque la fenêtre  $h$  est très petite, l'estimateur est très volatile, par contre lorsque  $h$  grandit, l'estimateur est alors de moins en moins influencé par les données.

Plusieurs méthodes ont été proposer pour le choix de la paramètre de lissage  $h$ . Dans ce chapitre nous allons présenter quelques méthodes pour l'estimation du paramètre de lissage.

### 3.2 Méthode plug-in

La décision d'un choix optimal pour le paramètre de lissage  $h$  par la méthode de plug-in est prend plusieurs formes et critères, mais la plupart des critères sont basées sur la minimisation du critère d'erreur (on cherche à minimiser l'Erreur Quadratique Moyenne Intégrée Asymptotique (*AMISE*)) qui doit être optimisé.

l'Erreur Quadratique Moyenne Intégrée (MISE) est :

$$\begin{aligned} MISE &= \int E [f_h(x) - f(x)]^2 dx \\ &= \frac{h^4}{4} \sigma_k^4 R(f'') + \frac{R(k)}{nh} + O(h^5 + 1/n). \end{aligned} \quad (3,1)$$

et le critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Intégrée Asymptotique (AMISE) est :

$$\begin{aligned} AMISE &= MISE - O(h^5 + 1/n) \\ &= \frac{h^4}{4} \sigma_k^4 R(f'') + \frac{R(k)}{nh}. \end{aligned} \quad (3,2)$$

avec  $R(q) = \int q^2(x)dx$ , pour toute fonction  $q$ .

on peut déterminer le paramètre de lissage  $h^*$  qui minimise l'Erreur Quadratique Intégrée Moyenne Asymptotique :

$$\begin{aligned} \frac{dAMISE}{dh} = 0 &\Leftrightarrow h^3 \sigma_k^4 R(f'') - \frac{R(k)}{nh^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow nh^5 \sigma_k^4 R(f'') - R(k) = 0 \\ &\Leftrightarrow h^5 = \frac{R(k)}{n \sigma_k^4 R(f'')} \\ &\Leftrightarrow h^* = \left[ \frac{R(k)}{\sigma_k^4 R(f'')} \right]^{1/5} n^{-1/5}. \end{aligned} \quad (3,3)$$

La valeur optimale du  $AMISE^*$  est donnée par :

$$AMISE^* = \frac{5}{4} \left[ \sigma_k R^4(k) R(f'') \right]^{1/5} n^{-4/5}. \quad (3,4)$$

Mais dans le cas d'utilisation des noyaux associées asymétriques, le paramètre de lissage idéal au sens de  $AMISE$  dépend généralement de trois quantités inconnues exprimées à travers  $f$ ,  $f'$  et  $f''$ , et il est plus difficile le choix de la paramètre de lissage  $h$ ; [Scaillet\[2004\]](#) suggère d'estimer les quantités inconnues en remplaçant  $f$  par un modèle de référence log-normal de paramètres  $\mu_f$  et  $\delta_f^2$ . les paramètres de lissage obtenus par [Scaillet\[2004\]](#) pour la règle de référence en utilisant le noyau gaussien-inverse( $IG$ ) et le noyau gaussien-inverse-réciproque( $RIG$ ) sont donnés respectivement par :

$$h_{IG}^{rdr} = \left[ \frac{16\sigma_f^5 \exp [1/8(7\delta_f^2 - 20\mu_f)]}{12 + 68\delta_f^2 + 255\delta_f^4} \right]^{2/5} n^{-2/5}$$

$$h_{RIG}^{rdr} = \left[ \frac{16\sigma_f^5 \exp [1/8(-17\delta_f^2 - 20\mu_f)]}{12 + 4\delta_f^2 + \delta_f^4} \right]^{2/5} n^{-2/5}$$

En pratique, les deux paramètres  $\mu_f$  et  $\sigma_f^2$  sont estimés à l'aide des observations  $X_1; \dots; X_n$  par la moyenne et la variance empiriques.

## 3.3 Méthodes validation croisée (CV)

### 3.3.1 Méthodes validation croisée non biaisée (UCV)

La méthode de validation croisée non biaisée (*UCV*) a été proposée par Rudemo et Bowman[1984], cette méthode consiste à choisir le paramètre de lissage  $h$  qui minimise le *ISE*, qui donner par :

$$\begin{aligned} ISE(h) &= \int_R \left[ \hat{f}_h(x) - f(x) \right]^2 dx \\ &= \int_R \hat{f}_h^2(x) dx - 2 \int_R \hat{f}_h(x) f(x) dx + \int_R f^2(x) dx. \end{aligned} \quad (3,5)$$

Puisque  $\int_R f^2(x) dx$  ne dépend pas du paramètre de lissage  $h$ , alors on peut choisir  $h$  qui minimise la fonction  $UCV(h)$  donnée par :

$$\begin{aligned} UCV(h) &= ISE(h) - \int_R f^2(x) dx \\ UCV(h) &= \int_R \hat{f}_h^2(x) dx - 2 \int_R \hat{f}_h(x) f(x) dx. \end{aligned} \quad (3,6)$$

Remarquons que :

$$\int_R \hat{f}_h(x) f(x) dx = E[\hat{f}(x)]$$

L'estimateur empirique de  $\int_S \hat{f}_h(x) f(x) dx$  est  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{h,i}(X_i)$  d'où le critère  $UCV(h)$  qui doit être optimiser devient :

$$UCV(h) = \int_R \hat{f}_h^2(x) dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f_{h,i}(X_i).$$

avec  $f_{h,i}(X_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{X_i, h}(X_j)$  est l'estimateur de la densité construit à partir de l'ensemble des points sauf le point  $X_i$ ,

Alors le critère  $UCV(h)$  à optimiser devient :

$$UCV(h) = \int_R \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x, h}(X_i) \right)^2 dx - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{X_i, h}(X_j). \quad (3,7)$$

d'où le paramètre de lissage  $h$  optimale donner par la méthode validation croisée non biaisée (*UCV*) est :

$$h_{UCV}^* = \arg \min_h UCV(h). \quad (3,8)$$

### 3.3.2 Méthodes validation croisée biaisée (BCV)

Le critère de la méthodes validation croisée biaisée (BCV) à été introduit par **Scott et Terrell**[1987] pour remédier aux problèmes de validation croisée non biaisée (UCV).

le principe de cette méthode (BCV) est d'introduire un biais dans  $UCV(h)$  afin de réduire sa variance. comme nous avons déjà vus une approximation du  $AMISE$  est de la forme :

$$AMISE = \frac{1}{nh}R(K) + \frac{1}{4}h^4\sigma_K^4R(f'') \quad (3,9)$$

Le paramètre de lissage basé sur la méthode de validation croisée biaisée est la valeur  $h$  qui minimise un estimateur du  $AMISE$ .

On peut estimer le  $AMISE$  si l'on estime  $R(f'')$ . Un estimateur naturel de ce terme est donné par  $R(\hat{f}_h'')$  où  $\hat{f}_h$  est l'estimateur de la densité qui utilise la méthode du noyau.

**Lemme 3.1.** (*Scott et Terrell*) Supposant que le noyau  $K$  satisfait les conditions suivantes :

$$\int K''(u)du = 0, \quad \mu_1(K'') = \int uK''(u)du = 0, \quad \mu_2(K'') = \int u^2K''(u)du = 2.$$

On obtient le développement asymptotique :

$$E[R(\hat{f}_h'')] = R(f'') + \frac{R(K'')}{nh^5} + O(h^2).$$

*Scott et Terrell* proposent d'estimer  $R(f'')$  par  $\tilde{R}(f'')$ , avec :

$$\tilde{R}(f'') = R(\hat{f}_h'') - \frac{R(K'')}{nh^5}$$

L'estimateur de  $AMISE$  devient alors :

$$BCV(h) = \frac{h^4}{4}\sigma_K^4 \left[ R(\hat{f}_h'') - \frac{R(K'')}{nh^5} \right] + \frac{R(K)}{nh}. \quad (3,10)$$

## 3.4 L'approche bayésienne

Le concept fondamental de l'approche Bayésienne est la distribution a posteriori  $\pi(\theta|x)$  qui représente l'actualisation de l'information disponible sur les paramètres donc L'approche bayésienne utilise les observations d'une manière optimale pour ajuster une distribution a priori notée par  $\pi(\theta)$  en considérant le paramètre  $\theta$  comme variable aléatoire.

Soit le vecteur d'observations  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de fonction de densité  $f(x, \theta)$  avec  $\theta \in \Theta$  est le vecteur des paramètres à estimer. la forme de loi a posteriori  $\pi(\theta|x)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi(\theta/x) &= \frac{\text{densite conjointe de } \theta \text{ et } x}{\text{densite marginale de } \theta \text{ et } x} \\ &= \frac{\pi(x/\theta)\pi(\theta)}{\pi(x)} \end{aligned} \quad (3,11)$$

où  $\pi(x/\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$  est la fonction de vraisemblance et  $\pi(x)$  est la distribution marginale des données avec  $\pi(x) = \int_{\Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \pi(\theta) d\theta$ .

## Choix de la loi a priori

L'inférence Bayésienne nécessite le choix de la loi a priori sur le(s) paramètre(s) à estimer, mais dans le cas du paramètre de lissage  $h$  ce choix n'est pas unique et dans certaine mesure il est plus défficile à déterminer.

Dans cette étude nous présentons les de densités a priori les plus courant : les densités a priori conjuguées et les densités a priori non informatives.

### La loi a priori conjuguées

**Raiffa** et **Schlaifer** [1961] ont proposé l'utilisation de la densité a priori dite conjuguée qui facilite l'analyse bayesienne.

**Définition 3.1.** Soit  $F$  une famille de distribution de densité  $f(x, \theta)$ . Une famille  $P$  de distribution a priori de densité  $\pi(\theta)$  est dite conjuguée par rapport à  $F$ , si la distribution a posteriori  $\pi(\theta/x)$  reste dans la même famille  $P$  pour tout  $\pi \in P$  et tout  $f \in F$ . Autrement dit, la distribution a posteriori garde la même forme que la distribution a priori. parceque, l'étudie des familles de densités a priori conjuguées tel que celles-ci aient la même forme fonctionnelle que la fonction de vraisemblance, dans ce cas, le passage de la fonction de vraisemblance à la densité a posteriori se réduit à un changement de paramètres et non à une modification de la forme fonctionnelle de la famille correspondante, Les densités a posteriori sont donc toujours calculables.

### La loi a priori non informatives

#### A priori de Laplace

**Laplace** munit les paramètres d'une loi a priori qui prend en compte son ignorance en donnant la même vraisemblance à chaque valeur du paramètre, en utilisant une loi uniforme. Ainsi, la densité a priori d'un paramètre  $\theta$  est définit par :

$$\pi(\theta) = k$$

où  $k$  est une constante. Une critique principale des lois a priori non informative concerne le problème d'invariance par reparamétrisation.

## A priori de Jeffreys

Jeffreys (1946, 1961) propose des lois a priori non informatives fondées sur l'information de Fisher, si le support de la variable dépend du paramètre à estimer, l'information de Fisher donnée par :

$$I(\theta) = E_{\theta} \left[ \left( \frac{\partial \log f(x/\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

Et quand le support de la variable ne dépend pas du paramètre à estimer, l'information de Fisher  $I(\theta)$  est égale à :

$$I(\theta) = -E_{\theta} \left[ \frac{\partial^2 \log f(x/\theta)}{\partial^2 \theta} \right]$$

La loi a priori de Jeffreys est donnée par :

$$\pi(\theta) = \sqrt{|I(\theta)|}$$

## Estimation bayésienne

### Fonctions de coût

Étant donné  $\hat{\theta}$  l'estimateur du paramètre  $\theta$ , on définit une fonction de coût non négative  $C(\epsilon)$  telle que  $\epsilon = \theta - \hat{\theta}$  est l'erreur d'estimation pour un vecteur d'observations  $x$  donné. L'objectif est de déterminer l'estimateur  $\hat{\theta}$  qui minimise le coût moyen  $E[C(\epsilon)]$ , aussi nommé par le risque de Bayes  $R$  défini par :

$$R = E[C(\epsilon)] = \int_{\Theta} C(\epsilon) \pi(\theta/x) d\theta$$

### Coût quadratique :

On dit que  $C(\epsilon)$  est quadratique si :

$$C(\epsilon) = C(\theta - \hat{\theta}(x)) = (\theta - \hat{\theta}(x))^2$$

L'estimateur de Bayes qui minimise le risque de Bayes étant donné cette fonction de coût, doit minimiser :

$$E[(\theta - \hat{\theta})/x] = \text{Var}[\theta|x] + (\hat{\theta}(x) - E[\theta|x])^2$$

L'estimateur qui minimise le risque bayésien en utilisant la fonction de coût quadratique est atteinte pour :

$$\hat{\theta} = E(\theta|x) = \int_{\Theta} \theta \pi(\theta|x) d\theta$$

### Coût entropie :

considérons le cas où  $C(\epsilon)$  est entropie si :

$$C(\epsilon) = C(\theta - \hat{\theta}(x)) = \frac{\hat{\theta}(x)}{\theta} - \log\left(\frac{\hat{\theta}(x)}{\theta}\right) - 1$$

L'estimateur qui minimise le risque bayésien en utilisant la fonction coût entropie est donnée par :

$$\hat{\theta} = \left[ \int_{\Theta} \frac{1}{\theta} \pi(\theta|x) d\theta \right]^{-1}$$

## 3.5 Approche Bayésienne globale :

Cette approche a été adaptée à l'estimation d'une fonction de probabilité  $f$  aux noyaux asymétriques par [Kuruwita et al \[2010\]](#) puis aux noyaux associés discrets par [Zougab et al \[2013\]](#). L'estimation Bayésienne du paramètre de lissage  $h$  conditionné aux données se fait par la densité a posteriori  $\pi(h/donnes)$ ;

soit  $X_1, \dots, X_n$  de variables aléatoire réelles, indépendantes et identiquement distribuées par une densité de probabilité  $f$  et de réalisations  $x = (x_1, \dots, x_n)$  on a ; la densité a posteriori  $\pi(h/donnes)$  est :

$$\pi(h/donnes) = \frac{\pi(x/h)\pi(h)}{\pi(x)} \quad (3, 12)$$

L'estimation Bayésienne globale du paramètre de lissage est généralement construite par le biais de ces étapes :

### Étape (1)

Donner la forme de l'estimateur de la vraisemblance  $f(x = x_1, \dots, x_n \setminus h)$ (la fonction de vraisemblance), la densité des données sachant le paramètre  $h$ , où :

$$f(x_1, \dots, x_n/h) = \prod_{i=1}^n f(x_i, h)$$

L'estimateur de la vraisemblance est obtenu en utilisant l'estimateur à noyau associé et la technique de jackknife, parfois appelée technique de validation croisée. est :

$$f(x_1, \dots, x_n/h) \approx \prod_{i=1}^n \hat{f}_{h,i}(x_i)$$

La technique du jackknife consiste à estimer  $f(x_i)$  à partir de l'ensemble des points sauf le point  $x_i$  en utilisant l'estimateur à noyau associée. L'estimateur à noyau associé et jackknife de  $f(x_i)$  est donné par :

$$\hat{f}_{h,i}(x_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{X_i,h}(X_j)$$

La vraisemblance est alors approximée par :

$$f(x_1, \dots, x_n/h) \approx \frac{1}{(n-1)^n} \prod_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{x_i,h}(x_j)$$

### Étape (2)

Choisir la loi a priori sur le paramètre de lissage  $h$  qui noté  $\pi(h)$  ;

### Étape (3)

Calculer la densité a posteriori  $\pi(h/x_1, \dots, x_n)$  du paramètre de lissage  $h$  qui donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(h/x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x_1, \dots, x_n/h)\pi(h)}{\pi(x_1, \dots, x_n)} \\ &\approx \frac{\pi(h) \prod_{i=1}^n \hat{f}_{h,i}(x_i)}{\pi(x_1, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

où  $\pi(x_1, \dots, x_n) = \int \hat{f}_{h,i}(x_i)\pi(h)dh$  est la loi marginale de l'échantillon.

### Étape (4)

Estimer le paramètre de lissage  $h$  par la moyenne, le mode ou la médiane a posteriori en utilisant la méthode Monte Carlo (*MC*).

## 3.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de présenter une idées générale sur les méthodes utiliser pour l'estimation du paramètre de lissage  $h$ , nous avons présenté les méthode : plug-in, validation croisée non biaisée(*UCV*), validation croisée biaisée(*BCV*), et une présentation générale sur l'approche bayésienne pour le choix de paramètre.

## 4.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre le travail de simulation effectué pour faire une comparaison entre les estimateurs avec différents noyaux ( $GBS$ ,  $Skew - GBS$ ).

Cette étude de simulation est basée sur les différents modèles et différentes tailles de l'échantillon pour étudier l'influence de la taille et le modèle utilisée de l'échantillon sur le résultats de simulation.

## 4.2 Plan de simulation

Dans cette section, nous examinons et comparons les performances entre les noyaux associées à support positifs qui nous avons étudié (l'estimateur de densité de noyau Birnbaum-Saunders généralisé  $GBS$  et l'estimateur de densité de noyau  $Skew - GBS$ ).

- la comparaison est basée sur les données simulées à partir de trois modèles ( $D_i, i = 1, 2, 3$ ), et pour différentes tailles d'échantillon  $n = 25, 50, 100, 200$  et  $500$ ,
- l'évaluation de performance entre les estimateurs est basée sur le critère de comparaison  $ISE$  (l'Erreur Quadratique Intégrée).

## ► les densités cibles

Nous avons fait les testes de simulation sur trois modèle du densité à support positive définie sur  $[0, \infty[$  et il sont données par :

-  $D_1$  modèle log-normale de paramètre  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$  :

$$f_1(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2}[\log(x) - 1]^2\right)_{1]0,+\infty[}(x).$$

-  $D_2$  modèle weibull de paramètre de forme  $\alpha = 0$  et de paramètre d'échelle  $\beta = 1$  :

$$f_2(x) = x^{-1} \exp(-x)_{1]0,+\infty[}(x).$$

-  $D_3$  modèle exponentielle de paramètre  $\lambda = 0.5$  :

$$f_3(x) = 0.5 \exp(-0.5x)_{1]0,+\infty[}(x).$$

## ► Les estimateurs de densités à noyaux associées :

Parmi les noyaux associées présentés dans les chapitres précédents, Nous comparons entre :

• L'estimateur de la densité à noyau associée Birnbaum-Saunders généralisé  $GBS$ , qui contiennent trois forme :

$$- \hat{f}_{BS}(x) = \frac{1}{2n\sqrt{2h\pi}} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-1}{2h}\left(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2\right)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{xX_i}} + \sqrt{\frac{X_i}{x^3}}\right).$$

$$- \hat{f}_{BS-PE}(x) = \frac{1}{n\sqrt{4h}} \frac{\nu}{2^{2\nu} \Gamma(\frac{1}{2\nu})} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-1}{2h\nu}\left(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2\right)^\nu\right) \left(\frac{1}{\sqrt{xX_i}} + \sqrt{\frac{X_i}{x^3}}\right).$$

$$- \hat{f}_{BS-t}(x) = \frac{1}{n\sqrt{4h}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \sum_{i=1}^n \left[1 + \frac{1}{\nu h}\left(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2\right)\right]^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{xX_i}} + \sqrt{\frac{X_i}{x^3}}\right).$$

• L'estimateur de la densité à noyau associée  $Skew - GBS$ , qui contiennent trois forme :

$$- \hat{f}_{Skew-BS}(x) = \frac{2}{n\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-1}{2h}\left(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2\right)\right) \Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{h}}\left(\sqrt{\frac{x}{X_i}} + \sqrt{\frac{X_i}{x}}\right)\right) \frac{x^{\frac{3}{2}}(x+X_i)}{\sqrt{4hX_i}}.$$

$$- \hat{f}_{Skew-BS-PE}(x) = \frac{2\nu}{n2^{\frac{1}{2\nu}}\Gamma(\frac{1}{2\nu})} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{-1}{2h\nu}\left(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2\right)^\nu\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2\nu})}\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}, \frac{\lambda^{2\nu}}{2h\nu}\left(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2\right)^\nu\right)\right) \\ * \frac{x^{\frac{-3}{2}}(x+X_i)}{\sqrt{4hX_i}}.$$

$$- \widehat{f}_{Skew-BS-t}(x) = \frac{2\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{n\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\nu h} \left(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2\right)\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \left(1 - I_{\nu/(\nu+(\frac{\lambda^2}{h})(\frac{x}{X_i} + \frac{X_i}{x} - 2))}(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})\right) \\ * \frac{x^{-\frac{3}{2}}(x+X_i)}{\sqrt{4hX_i}}.$$

## ► Choix de paramètre de lissage $h$ :

Nous avons sélectionné le paramètre de lissage  $h$  par la méthode validation croisée non biaisée ( $UCV$ ), où :

$$UCV(h) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i)\right)^2 dx - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{X_i,h}(X_j). \quad (4, 1)$$

$$Term1 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i)\right)^2 dx.$$

$$Term2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{X_i,h}(X_j).$$

On utilise Monte Carlo pour le calcul de l'intégrale de  $Term1$ , on commence par le changement de variable suivant :

$$x = \frac{1-y}{y}, dx = \frac{-1}{y^2} dy, \Rightarrow y = \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i)\right)^2 dx &= \int_1^0 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\frac{1-y}{y},h}(X_i)\right)^2 \frac{-1}{y^2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\frac{1-y}{y},h}(X_i)\right)^2 dy \\ &= E_{U_{[0,1]}} \left[ \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{(\frac{1-y}{y},h)}(X_i)\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{y_i^2} \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{(\frac{1-y_i}{y_i},h)}(X_j) \right]^2, y_i \sim U_{[0,1]} \end{aligned}$$

Le critère à optimiser de  $UCV(h)$  de vient :

$$UCV(h) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{y_i^2} \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{(\frac{1-y_i}{y_i},h)}(X_j) \right]^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n K_{X_i,h}(X_j).$$

avec

$$h_{UCV}^* = \arg \min_h UCV$$

## ► Le critère d'Erreur :

Nous avons choisi dévaluer l'erreur de l'estimation par l'erreur quadratique intégrée ( $ISE$ ) présentée ci-dessous :

$$ISE = \int_0^{\infty} \left\{ \widehat{f}_h(x) - f(x) \right\}^2 dx$$

On utilise l'approximation de Monte carlo pour l'évaluation de l'erreur quadratique intégrée (comme nous avons vu dans l'évaluation de  $UCV(h)$ ), il devient :

$$ISE \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{y_i^2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{\frac{1-y_i}{y_i}, h}(X_j) - f\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right) \right\}^2 \quad y_i \sim U_{[0,1]}$$

$\overline{ISE}$  : le  $ISE$  moyen empirique calculée avec le paramètre de lissage  $h_{UCV}$  pour un nombre de simulation égale à 25, donc

$$\overline{ISE} = E[ISE]$$

## 4.3 Résultats de simulation

$D$	$n$	$\overline{ISE}_{BS}$	$\overline{ISE}_{BS-PE}$	$\overline{ISE}_{BS-t}$	$\overline{ISE}_{Skew-BS}$	$\overline{ISE}_{Skew-BS-PE}$	$\overline{ISE}_{Skew-BS-t}$
$D_1$	25	0.09999356	0.08505491	0.10631664	0.21014454	0.04544331	<b>0.03732255</b>
	50	0.09045967	0.07121853	0.09954073	0.20630233	0.03466145	<b>0.02503514</b>
	100	0.07211834	0.07032122	0.08475487	0.20238872	0.02888147	<b>0.02293156</b>
	200	0.07247526	0.06825346	0.08401783	0.17877641	0.03203324	<b>0.02116764</b>
	500	0.06756565	0.06554439	0.07339448	0.16699865	0.02839289	<b>0.02106376</b>

TABLE 4.1 – Résultats de simulation pour  $D_1$

$D$	$n$	$\overline{ISE}_{BS}$	$\overline{ISE}_{BS-PE}$	$\overline{ISE}_{BS-t}$	$\overline{ISE}_{Skew-BS}$	$\overline{ISE}_{Skew-BS-PE}$	$\overline{ISE}_{Skew-BS-t}$
$D_2$	25	0.08993298	0.08027443	0.11445243	0.16946934	<b>0.05451564</b>	0.07433751
	50	0.06486668	0.07193748	0.06849897	0.16985547	0.03434487	<b>0.02358922</b>
	100	0.05364935	0.05793817	0.06807243	0.15555589	0.04279426	<b>0.02188801</b>
	200	0.05558559	0.05118979	0.05788995	0.14840546	0.03579186	<b>0.02917764</b>
	500	0.05053337	0.04891769	0.04978654	0.14840024	0.03191759	<b>0.02898489</b>

TABLE 4.2 – Résultats de simulation pour  $D_2$

$D$	$n$	$\overline{ISE}_{BS}$	$\overline{ISE}_{BS-PE}$	$\overline{ISE}_{BS-t}$	$\overline{ISE}_{Skew-B S}$	$\overline{ISE}_{Skew-B S-PE}$	$\overline{ISE}_{Skew-B S-t}$
$D_3$	25	0.16169132	0.12452896	0.1582266	0.32585114	0.04063155	<b>0.02245422</b>
	50	0.12688696	0.11582777	0.1354232	0.27051173	0.03406311	<b>0.01539786</b>
	100	0.11101654	0.10308319	0.1217049	0.23750824	0.02924329	<b>0.01597756</b>
	200	0.10063194	0.09816214	0.1147359	0.20869127	0.02597743	<b>0.01574614</b>
	500	0.09832101	0.09421542	0.1021666	0.20605146	0.02214834	<b>0.01382676</b>

TABLE 4.3 – Résultats de simulation pour  $D_3$

## 4.4 Interprétation des résultats

- La moyen de  $ISE$  ( $\overline{ISE}$ ) engendré par chaque noyau ( $BS - Classique$ ,  $BS - PE$ ,  $BS - Student$ ,  $Skewed - BS$ ,  $Skewed - BS - PE$  et  $Skewed - BS - t$ ) décroît avec l'augmentation de la taille de l'échantillon pratiquent pour les trois (3) densités cibles ( $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$ ).

- Pour les noyaux  $GBS$  : On remarque que La moyen de  $ISE$  ( $\overline{ISE}$ ) obtenue avec les noyaux  $BS - PE$  est meilleur que  $BS - classique$  et  $BS - Student$  pratiquement pour les trois (3) densité cibles.

- Pour les noyaux  $Skewed - GBS$  : On remarque que La moyen de  $ISE$  ( $\overline{ISE}$ ) obtenue avec les noyaux  $Skewed - BS - t$  est meilleur que  $Skewed - BS - PE$  et  $Skewed - BS$  pour les trois (3) densités cibles.

- Si on comparant avec les six (6) noyaux, on observe que La moyen de  $ISE$  ( $\overline{ISE}$ ) obtenue par noyau  $Skewed - BS - t$  est meilleur que tous les autres noyaux pour les trois (3) densités cibles.

## Graphiquement :

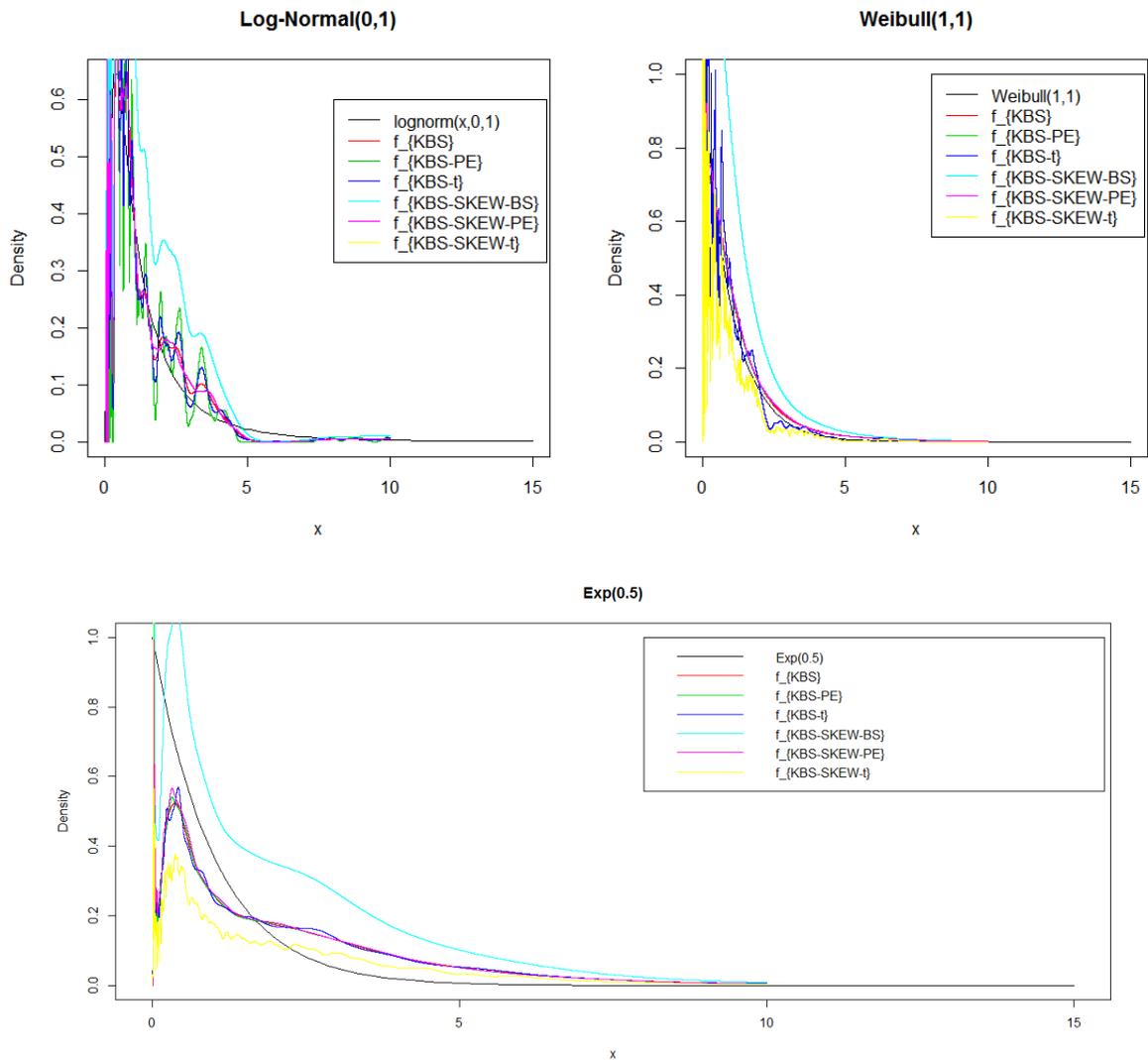


FIGURE 4.1 – Représentations graphique de les estimateurs

- La figure 4.1 représente les estimateurs de densité avec les noyau( $BS$ ,  $BS - PE$  et  $Skewed - BS - PE$ ) et le paramètre de lissage Sélectionné par L'approche classique  $UCV$  pour un seule estimation sur les densités cibles( $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$ ).
- les résultats montrent que les estimateurs de densité avec les noyaux ( $BS$ ,  $BS - PE$  et  $Skewed$ ) sont meilleur que les noyaux ( $Skewed - RS$ ,  $BS - t$ ,  $Skewed - BS - t$ ) pour les 3 densité cibles.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé un échantillon de simulation où nous avons comparé l'estimateur de la densité avec différents noyaux et l'approche classique *UCV* pour la sélection du paramètre de lissage  $h$ .

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre travail est basé sur l'approche non paramétrique pour l'estimation d'une fonction de la densité de probabilité inconnue  $f$  et cela en utilisant la méthode du noyau associé à support positif afin de faire de comparaison entre différents noyaux associés étudiés ( Birnbaum-Saunders généralisé GBS et Skewed GBS).

Dans un premier temps, nous avons présenté l'estimation de la densité par la méthode de noyau classique et la méthode du noyau associée, pour ce dernier nous avons présenté la méthode du Mode-Dispersion de la construction de noyau associée à partir d'une fonction de probabilité quelconque paramétrée, précisant leur propriété avec quelque exemple pour la construction des noyaux par cette méthode (Mode-Dispersion).

Ensuite, nous avons donné quelques types d'estimateurs à noyau associé à support positif  $[0, \infty[$  qui dépendent de paramètre de cible  $x$  et de paramètre de lissage  $h$ .

Le choix du paramètre de lissage  $h$  est très importante dans l'estimation de la fonction densité par la méthode du noyau associée pour cela nous avons présenté différentes méthodes pour le choix de ce paramètre (Méthode : Plug-in, UCV, BCV, ...etc).

Les résultats de simulation que nous avons obtenus avec différents noyaux ( $GBS$  et  $Skewed - GBS$ ) sur différentes densités cibles (Log-Normal, Weibull et Exponentielle) et différentes tailles pour l'estimation d'échantillon (25, 50, 100, 200, 500) pour l'estimation de la fonction de densité  $f$  montrent que le noyau  $Skewed - BS - Student$  est meilleur que le reste des noyaux.

## BIBLIOGRAPHIE

*S. Adjabi. sur le paramètre de lissage dans l'estimation de la densité de probabilité par la méthode du noyau. Actes du colloque International : modélisation mathématique et statistique, USTHB, Alger, pages 198-208, 2004.*

*S. X. Chen. Gamma kernel estimators for density functions. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 52 : 471-480, 2000.*

*S. X. Chen. Beta kernels estimators for density functions. Computational Statistics and Data Analysis, 52 : 471-480, 1999.*

*J.A.Díaz-García and V.Leiva. A newfamily of life distributions based on the contoured elliptically distributions. Journal of Statistical Planning Inference, 128 : 445-457, 2005.*

*S. Djouder. Méthodes de monte carlo dans l'estimation non paramétrique de la densité de probabilité par noyaux associés. Mémoire Magister, Université de Béjaia, Algérie, 2013.*

*E. A. Epanechnikov. Nonparametric estimation of a multidimensional probability density. Theory of Probability and its Applications, 14 : 153-158, 1969.M.*

*C. C. Kokonendji and F. G. Libengué. Méthode des noyaux associés continus et estimation de densité. Journées de Statistique de la SFdS, Tunis, 2011.*

*C. C. Kokonendji, F. G. Libengué, and D. Varron. Convergences des estimateurs à noyaux associés de densité. Journées de Statistique de la SFdS, Bruxelles, 2012.*

*C.N. Kuruwita, K. B. Kulasekera, and W. J. Padgett. Density estimation using asymmetric kernels and bayes bandwidths with censored data. Journal of Statistical Planning and Inference, 140 : 1765-1774, 2010.*

*E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. Annals of Mathematical Statistics, 33 : 1065-1076, 1962.*

*M. Rosenblatt. Remarks in some nonparametric estimates of a density function. Annals of Mathematical Statistics, 27 : 832-837, 1956.*

*H. Raiffa and R. Schlaifer. Applied statistical decision theory. Boston, Massachusetts : Harvard Business School, 1961.*

*D. W. Scott and G. R. Terrell. Biased and unbiased cross-validation in density estimation. Journal of the American Statistical Association, 82 : 1131-1146, 1987.*

*O. Scaillet. Density estimation using inverse and reciprocal inverse gaussian kernels. Journal of Nonparametric Statistics, 16 : 217-226, 2004.*

*D. W. Scott and G. R. Terrell. Biased and unbiased cross-validation in density estimation. Journal of the American Statistical Association, 82 : 1131-1146, 1987.*

*F. Vilca and V. Leiva. A new fatigue life model based on the family of skew-elliptical distributions. Communications in Statistics - Theory Method, 35 : 229-244, 2006.*

*N. Zougab. Etude comparative des méthodes de sélection du paramètre de lissage dans l'estimation de la densité de probabilité par la méthode du noyau. In Mémoire de Magister. Université de Béjaia, Algérie, 2007.*

*N. Zougab, S. Adjabi, and C C. Kokonendji. Adaptive smoothing in associated kernel discrete functions estimation using bayesian approach. Journal of Statistical Computation and Simulation, 83 : 2219-2231, 2012b.*

*N. Zougab, S. Adjabi, and C C. Kokonendji. A bayesian approach to bandwidth selection in univariate associate kernel estimation. Journal of Statistical Theory and Practice, 7(1) : 8-23, 2013.*

*Y. Ziane, S. Adjabi. Sur l'estimation non paramétrique de l'indice de variabilité et la distribution des densités Heavy Tailed. In Thèse de Doctorat. Université de Béjaia, Algérie, 2016*

## Résumé

*Notre étude est basée sur l'approche non paramétrique pour l'estimation d'une fonction de la densité de probabilité inconnue  $f$  avec la méthode du noyau associé à support positif. L'objectif est de faire une comparaison entre les estimateurs de densité avec différents noyaux associés, noyau Birnbaum-Saunders généralisé (GBS) et noyau Skewed – GBS.*

*Le paramètre de lissage  $h$  est sélectionné par l'approche classique méthode Validation Croisée non Baisée (UCV). Une étude de simulation est réalisée sur 3 densités cibles les résultats obtenus montrent, l'avantage du noyau Skewed – BS –  $t$ ) par rapport au noyau ( BS, BS – PE, BS –  $t$ , Skewed – BS, Skewed – BS – PE) .*

## Abstract

*Our study is based on nonparametric approach for the estimation of a function of the unknown probability density  $f$  with the method of the kernel to positive support. The objective is to make a comparison between the estimators of density with different associated kernels , generalized Birnbaum-saunders kernel (GBS) and skewed-GBS kernel .*

*The smoothing parameter  $h$  is selected by the classical method validation crossroad (UCV). A simulation study is performed on 3 target densities the results show ,the benefits to Skew – BS –  $t$  kernel to others kernels (BS, BS – PE, BS –  $t$ , Skew – BS and Skew – BS – PE )*