

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité CONSTRUCTION MECANIQUE

PAR :

MOSLI KARIM

AMARI LOUNIS

Thème

**Identification paramétrique des modèles hyper-élastiques des
matériaux élastomères**

Soutenu le 07/07/2019 devant le jury composé de:

Pr H. BECHIR

Président

Dr S. BOUZIDI

Rapporteur

Dr. K. YAYA

Examineur

Année Universitaire 2018-2019

Liste des figures

LISTE DES FIGURES

Figure. I.1 : Vulcanisation au soufre.....	03
Figure I.2 : comportement statique d'un caoutchouc naturel pour différents chargements à partir des données expérimentales de TRELOAR (1944).....	04
Figure 1.3 : Représentation schématique de l'effet Mullins	05
Figure I.4 : Effet Payne pour des élastomères non chargés et chargés.....	06
Figure II.1 : Système de configurations	07
Figure II.2 : Modèle à 3- chaînes.....	14
Figure II.3 : Modèle à 8- chaînes.....	15
Figure III.1 : Principe générale d'un outil d'optimisation pour une méthode de descente.....	18
Figure III.2 : Organigramme de la méthode du Simplexe Nelder-Mead.....	19
Figure III.3 : Organigramme simplifié de la méthode Monte Carlo.....	20
Figure III.4 : Organigramme simplifié des algorithmes génétiques	21
Figure III.5 : Classification des méthodes d'optimisation	22
Figure III.6 : Exemples d'opérations d'optimisation mises en œuvre dans l'algorithme du simplexe. (A) Contraction, (B) réflexion, (C) contraction-réflexion, (D) exemple d'optimisation pour un cas à deux dimensions.	24
Figure III.7 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale.....	29
Figure III.8 : Erreur relative(%) en fonction de l'élongation pour le modèle Néo-Hookéen.	30
Figure III.9 : Identification du modèle de Mooney-Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale.....	31
Figure III.10 : Erreur relative (%) en fonction de l'élongation pour le modèle de Mooney Rivlin.....	31

Liste des figures

Figure III.11 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale.....	33
Figure III.12 : Erreur relative (%) en fonction de l'élongation pour le modèle d'Arruda Boyce.....	33
Figure III.13 : Organigramme de la méthode de la détermination du domaine de validité d'un modèle théorique.....	35
Figure III.14 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode Simplexe. (a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....	37
Figure III. 15 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni- axiale à l'aide de la méthode SQP. (a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....	38
Figure III. 16 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo. (a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....	39
Figure III. 17 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode génétique (a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....	40
Figure III. 18 : Identification du modèle de Mooney-Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode Simplexe. (a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....	42
Figure III. 19 : Identification du modèle de Mooney-Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode SQP.	

Liste des figures

(a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....43

Figure III. 20 : Identification du modèle de Mooney-Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo.

(a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....44

Figure III. 21 : Identification du modèle de Mooney-Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode génétique

(a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....45

Figure III. 22 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode Simplexe

(a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....47

Figure III. 23 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode SQP.

(a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....48

Figure III. 24 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo.

(a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....49

Figure III. 25 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode génétique

(a) : Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation.....50

Figure III. 26 : Comparaisons des résultats du modèle Néo-Hookéen avec des résultats expérimentaux de trésor.....51

Liste des figures

Figure III. 27 : Comparaisons des résultats de modèle Mooney-Rivlin avec des résultats expérimentaux de Treloar.....	52
Figure III. 28 : Comparaisons des résultats de modèle Arruda-Boyce avec des résultats expérimentaux de Treloar.....	53

LISTE DES TABLEAUX

Tableau III.1 : Données et résultats de l'identification des paramètres du modèle Néo-Hookéen.....28

Tableau III.2 : Données et résultats de l'identification des paramètres du modèle de Mooney-Rivlin29

Tableau III.3 : Données et résultats de l'identification des paramètres du modèle d'Arruda-Boyce31

Tableau III.4 : Résultats de l'identification des paramètres du modèle Néo-Hookéen et de son domaine de validité35

Tableau III.5 : Résultats de l'identification des paramètres du modèle de Mooney-Rivlin et de son domaine de validité40

Tableau III.6 : Résultats de l'identification des paramètres du modèle d'Arruda-Boyce et de son domaine de validité.....45

Tableau III.7 : Résultat d'identification de paramètre du modèle Néo-Hookéen avec logiciel de calcul élément finis.....50

Tableau III. 8 : Résultats d'identification des paramètres du modèle Mooney-Rivlin avec logiciel de calcul élément finis.....51

Tableau III. 9 : Résultat d'identification des paramètres du modèle Arruda-Boyce avec logiciel de calcul élément finis.....52

NOMENCLATURES

(C_0) : Configuration initiale ;

(C_t) : Configuration actuelle ;

$d\vec{X}_1$: Vecteur élémentaire dans la configuration initiale ;

$d\vec{x}_1$: Transformée de $d\vec{X}_1$ dans la configuration actuelle ;

$\bar{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Cauchy ;

$\bar{\bar{C}}$: Tenseur des déformations Green-Lagrange gauche ;

$\bar{\bar{F}}$: Opérateur gradient de la transformation ;

$\bar{\bar{F}}^t$: Transposé opérateur gradient de la transformation ;

$\bar{\pi}$: Premier tenseur de Piola-Kirchhoff (P.K.1) ;

$\bar{\bar{S}}$: Deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff (P.K.2) ;

$\bar{\bar{B}}$: Tenseur des déformations Green-Lagrange droit ;

$\bar{\bar{I}}$: étant la tenseur identité.

$I_1(\bar{\bar{C}})$: premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange droit $\bar{\bar{C}}$;

$I_2(\bar{\bar{C}})$: Deuxième invariant du tenseur des déformations de Green-lagrange droit $\bar{\bar{C}}$;

$I_3(\bar{\bar{C}})$: Troisième invariant du tenseur des déformations de Green-lagrange droit $\bar{\bar{C}}$

W : potentiel élastique ;

μ : Module du cisaillement du matériau ;

J : Le Jacobien de la transformation ;

K : constante de Boltzmann ;

N : nombre de chaines par unité de volume ;

λ : L'élongation ;

SOMMAIRE

Liste des figures

Liste des tableaux

Nomenclature

Introduction générale.....1

Chapitre I : Généralités sur les élastomères

Introduction.....2

I. Généralités sur les élastomères2

I.1. Le terme polymère2

I.2. La macromolécule2

I.3. Présentation des élastomères2

I.4. Comportement mécanique des élastomères.....3

 I.4.1. Hyper-élasticité3

 I.4.2. Viscoélasticité4

 I.4.3. Incompressibilité4

 I.4.4. Effet Mullins5

 I.4.5. Effet Payne5

I.5. Conclusion.....6

Chapitre II : Lois de comportement hyper-élastique des élastomères

Introduction7

II.1. Rappel de la mécanique des milieux continus7

II.2. description du mouvement7

II.3. Description des déformations et des contraintes8

 II.3.1. Tenseur des déformations8

 II.3.1.1. Tenseur des déformations dans la configuration initiale (C_0).....8

Sommaire

II.3.1.2. Tenseur des déformations dans la configuration actuelle (C_t).....	9
II.3.1.3. Invariants principaux du tenseur des déformations.....	9
II.4. Les tenseurs de contrainte.....	10
II.5. Loi de comportement	11
II.5.1. Matériau hyper-élastique..... ;;;	11
II.6. Deux approches modélisation.....	11
II.6.1. Approche phénoménologique.....	12
II.6.2. Approche micromécanique	13
III.7. Conclusion.....	15

Chapitre III : Identification paramétrique des modèles hyper-élastiques

Introduction.....	16
III.1 Méthodes d'optimisation.....	16
III.1.1 C'est quoi l'identification	16
III.1.2 Base mathématique de l'optimisation	16
III.1.3 Classification des méthodes d'optimisation	17
III.1.3.1 Méthodes déterministes.....	17
III.1.3.2 Méthodes stochastiques.....	19
III.1.3.3 Méthodes hybrides	20
III.1.4 Quelques algorithmes de minimisation.....	22
III.1.4.1 Algorithme de simplexe (Nelder-Mead)	22
III.1.4.2 Algorithme SQP	23
III.1.4.3 Méthode de Monte Carlo	23
III.1.4.4 Algorithme génétique	24

Sommaire

III.2 Identification paramétrique des modèles hyper-élastiques avec quatre algorithmes de minimisation.....	26
III.2.1 Modèle Néo-Hookéen.....	28
III.2.2 Modèle de Mooney- Rivlin.....	29
III.2.3 Modèle d'Arruda-Boyce.....	31
III. 3 Détermination du domaine de validité des modèles utilisés dans l'étude.....	33
III.3.1 Modèle Néo-Hookéen.....	35
III.3.2 Modèle de Mooney-Rivlin.....	40
III.3.3 Modèle d'Arruda-Boyce.....	45
III. 4. Identification avec un logiciel de calcul par éléments finis.....	50
III.4.1. Modèle Néo-Hookéen.....	50
III.4.2. Modèle de Mooney-Rivlin.....	51
III.4.3. Modèle Arruda-Boyce.....	52
Conclusion	53
Conclusion générale.....	54

Introduction générale

Introduction générale

Les élastomères sont des matériaux largement utilisés dans le domaine de l'industrie. La multiplicité de leur utilisation provient de leurs caractéristiques mécaniques très intéressantes comme la capacité à subir de fortes déformations élastiques. Le comportement mécanique de ces matériaux reste encore mal connu nécessitant des hypothèses simplificatrices.

L'objectif de ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de l'identification paramétrique des modèles hyper-élastiques. La recherche des paramètres matériels d'un modèle théorique nécessite une base de données expérimentales.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques caractéristiques mécaniques des élastomères.

Le deuxième chapitre donne un bref rappel de la mécanique des milieux continus ainsi qu'une présentation de quelques modèles hyper-élastiques.

Nous aborderons dans le troisième chapitre, quelques algorithmes de minimisation (Monte Carlo, algorithme génétique, algorithme du simplexe (Nelder-Mead) et SQP). Le but de l'étude est d'appliquer les différentes procédures d'optimisation afin d'identifier les paramètres matériels de trois modèles hyperélastiques (Néo-Hookéen, Mooney-Rivlin et Arruda-Boyce).

Enfin, nous terminons par une conclusion générale.

Introduction

Ce chapitre est consacré à une présentation générale des élastomères notamment leur propriétés mécaniques.

I. Généralités sur les élastomères

I.1. Le terme polymère [1]

Le mot (polymère) issu du grec (pollue qui signifie plusieurs et qui veut dire partis), est en chimie un concept qui peut être confondu à la macromolécule. Tandis que pour un matériau donné, il sous entend qu'il est constitué (totalement ou principalement) de macromolécules.

I.2. La macromolécule [1]

Une macromolécule est constituée d'un ensemble de plusieurs molécules (généralement organique) liées elles par des liaisons covalentes. Elles souvent assimilée à une chaîne dont les chainons représentent les motifs élémentaires (les monomères). De ce fait, la macromolécule est appelée (polymère), le chainon lui est dit (monomère).

I.3. Présentation des élastomères [2]

Les élastomères entrent dans la catégorie des polymères amorphes. On distingue généralement les caoutchoucs « Naturels », issus de l'hévéaculture, des caoutchoucs « synthétiques » produits par l'industrie pétrochimique (les silicones faisant exception puisque ce caoutchouc minéral est fabriqué à partir de la silice). A l'origine, seul le caoutchouc naturel était connu, et uniquement sous sa forme crue. Il est utilisé sous différents aspects, le caoutchouc trouvait alors des applications diverses telles que les gommes ou l'imperméabilisation de tissus. La gomme crue est constituée de macromolécules enchevêtrées et liées entre-elles par des liaisons faibles ce qui lui confère de piètres propriétés mécaniques.

L'année 1839 marque un tournant dans l'histoire du caoutchouc grâce à la mise au point par Charles Goodyear de la vulcanisation. Ce procédé consiste à créer des liaisons ou pontages entre les macromolécules par l'adjonction d'un agent vulcanisant (par exemple du soufre). Un apport d'énergie (généralement cycle en température à 140 °C – 200 °C) permet l'activation de liaisons fortes entre les chaînes polymères (**Figure.I.1**) créant ainsi un réseau

amorphe tridimensionnel plus ou moins réticulé. Ces liaisons vont limiter les mouvements relatifs irréversibles des chaînes et donner à la matière ses propriétés hyper-élastiques.

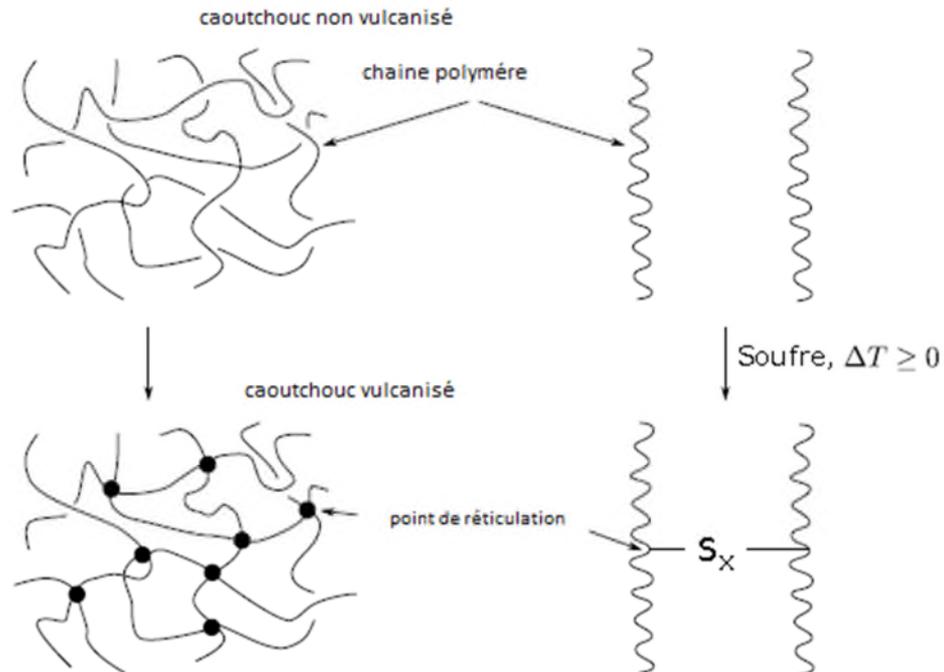


Figure.I.1 :Vulcanisation au soufre

I.4. Comportement mécanique des élastomères

I.4.1. Hyperélasticité [3]

Les élastomères, dans leur état caoutchoutique, ont la particularité de supporter de grande déformations, et ce, de manière quasi-réversible, c'est-à-dire que le matériau retourne à l'état initial lors de son déchargement. La (Figure I.3) montre le comportement statique d'un caoutchouc naturel chargé, pour différents types de sollicitations : traction uniaxiale (UT), traction équi-biaxiale (ET), et cisaillement pur (PS).

Comme illustré sur la (figure I.2), les déformations d'un élastomère peuvent atteindre jusqu'à 800% de déformation, ce qui dépasse nettement le cadre des petites déformations. Ce comportement est alors défini comme hyper-élastique. De plus, les caoutchoucs sont des matériaux quasi-incompressibles, avec un coefficient de Poisson proche de 0.5. Cela signifie que le volume d'une pièce en élastomère varie très peu, quel que soit le chargement. Outre l'hyper-élasticité de ces matériaux, leur comportement dépend fortement des conditions de chargements.

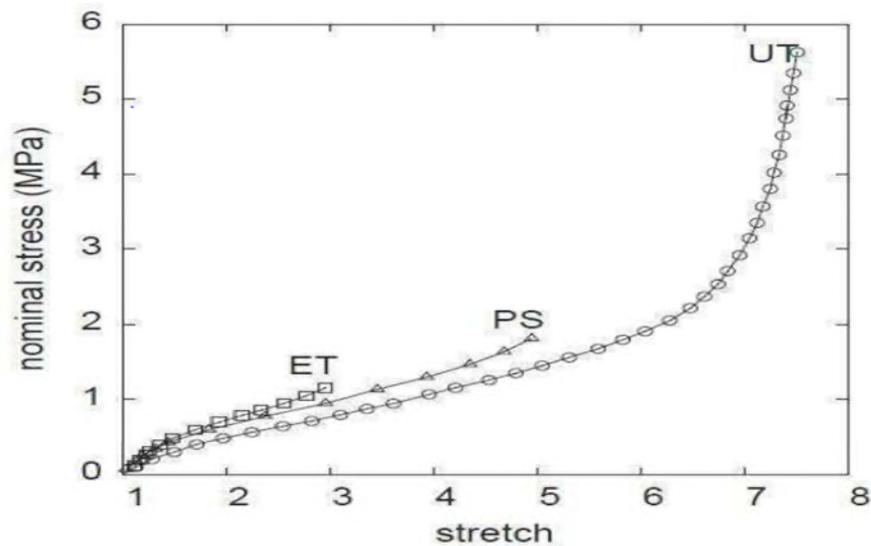


Figure I.2 : Comportement statique d'un caoutchouc naturel pour différents chargements à partir des données expérimentales de TRELOAR (1944)

I.4.2. Viscoélasticité [4]

Un matériau est dit viscoélastique lorsqu'il présente un comportement mécanique intermédiaire entre le comportement d'un solide élastique parfait et le comportement d'un fluide visqueux. La réponse d'un matériau viscoélastique est alors intermédiaire entre celle d'un solide élastique (contrainte proportionnelle à la déformation) et d'un fluide visqueux (contrainte proportionnelle à la déformation).

I.4.3. Incompressibilité [5]

Le module de cisaillement d'un élastomère est très faible devant son module de compressibilité, Le coefficient de Poisson est quasiment égal à $1/2$. On suppose alors que les élastomères sont incompressibles (la déformation se fait sans variation du volume). D'un point de vue analytique, l'hypothèse d'incompressibilité parfaite est très intéressante afin d'exprimer les relations de comportement pour des problèmes aux limites. Cependant, elle pose des problèmes dans le cadre de l'implémentation des modèles hyper-élastiques dans les codes de calcul éléments finis.

I.4.4. Effet Mullins [6]

Le comportement mécanique des élastomères chargés est modifié après l'application d'une première extension. Cette extension entraîne une perte de rigidité pour les déformations rémanente (fig .I.3). ce phénomène est appelé Effet Mullins.

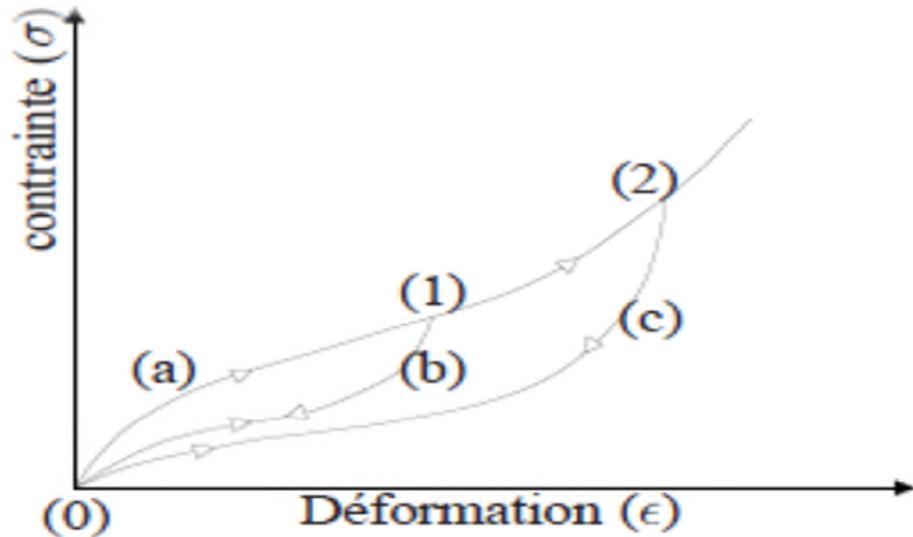


Figure I.3 : Représentation schématique de l'effet Mullins

I.4.5. Effet Payne [6]

Le comportement mécanique d'un élastomère non chargé est linéaire dans le domaine de faibles déformations. L'introduction de charges conduit à une non-linéarité du comportement dont le module initial montre une forte sensibilité à la quantité de la charge. Dans ce cas, la valeur du module décroît avec la déformation jusqu'à une valeur (G_{∞}) ou elle se stabilise.

Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Payne. Les charges introduisent donc de la viscoélasticité non linéaire dont le facteur de perte augmente avec la fraction volumique de charges (fig I.4). La valeur du module élastique initial (G') diminue après un tout premier balayage à déformation croissante par contre le module final (G'_{∞}) reste quasiment constant.

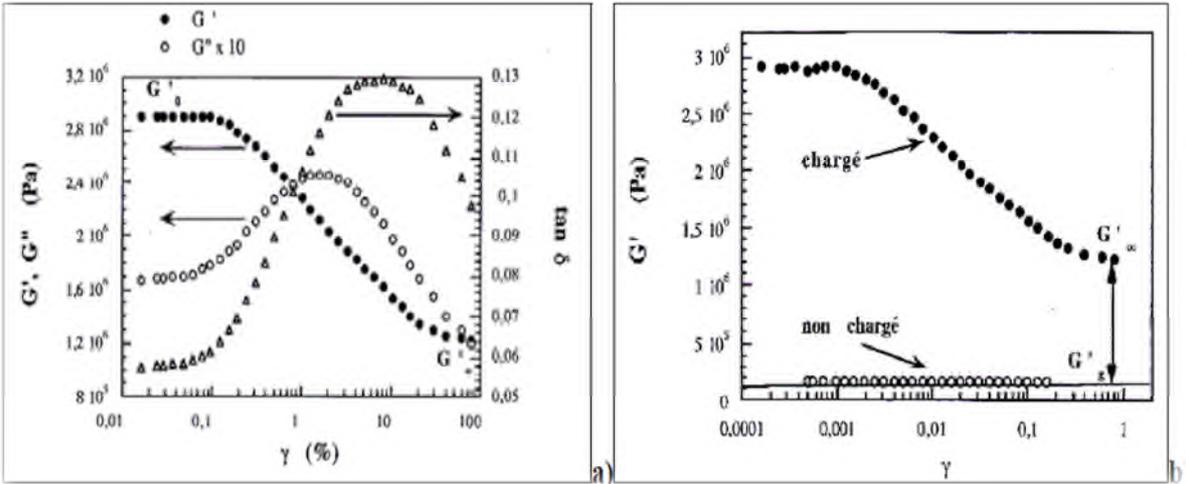


Figure I.4 : Effet Payne pour des élastomères non chargés et chargés

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposés différents propriétés mécaniques des élastomères. Ces propriétés rendent leur modélisation mathématique très compliquée.

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner un bref rappel de la mécanique des milieux continus, ainsi que de présenter quelques modèles hyper-élastique de la littérature.

II.1. Rappel de la mécanique des milieux continus

II.2. Description du mouvement [7]

Soit un solide (S) évoluant dans un référentiel (R). Il occupe le domaine Ω dans la configuration (C_0) que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant t le domaine (ω) dans la configuration (C_t) (Figure II.1).

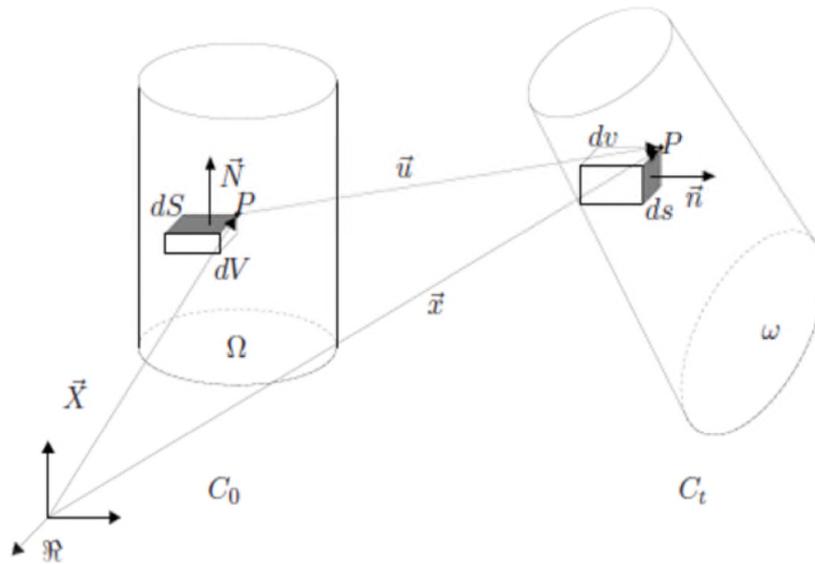


Figure II.1 : Système de configurations. [7]

Le mouvement du milieu continu est alors défini par la donnée de la fonction $\vec{\phi}$ et cette équation (II.1), qui définit la transformation faisant passer de la configuration de référence (C_0) à la configuration (C_t)

$$\vec{\phi} : \begin{cases} (C_0) \rightarrow (C_t) \\ (\vec{X}) \rightarrow \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \end{cases} \quad \text{II.1}$$

En introduisant u , le vecteur déplacement, l'équation (II.2) peut se mettre sous une forme équivalente

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \quad \text{II.2}$$

Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, ou tenseur tangent (Figure II.2). Considérons un vecteur \overrightarrow{dX} dans la configuration initiale, son transformé dans la configuration actuelle s'obtient par la relation (II.3) :

$$\overrightarrow{dx} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{dX} \quad \text{II. 3}$$

Et de manière indicielle, on peut écrire :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \quad \text{II. 4}$$

\mathbf{F} (est appelé aussi gradient de la transformation) représente la cinématique de mouvement de la configuration initiale (C_0) vers la configuration actuelle (C_t). Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume dv , ou de surface $\vec{N}ds$ de (C_0) à leurs images respectives dv et $\vec{n}ds$ dans (C_t), se déclinent comme suit :

Pour un élément de volume :

$$dv = JdV \quad \text{II. 5}$$

ou $J = \det \mathbf{F}$ II. 6

pour un élément de surface :

$$\vec{n} ds = J dS \mathbf{F}^{-T} \vec{N} \quad \text{II.7}$$

La condition d'incompressibilité, c'est-à-dire $J=1$ est couramment utilisé dans la modélisation des élastomères.

II.3. Description des déformations et des contraintes

II.3.1. Tenseur des déformations [8]

Les tenseurs permettant de caractériser complètement la variation géométrique du solide entre la configuration initiale (C_0) et la configuration déformée (C_t), (les variations de longueurs, d'angles et de dilatations volumiques) dépendent de la configuration choisie.

II.3.1.1. Tenseur des déformations dans la configuration initiale (C_0)

Si on considère deux vecteurs $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ dans la configuration initiale (C_0) qui deviennent respectivement $d\vec{x}_1$ et $d\vec{x}_2$ après déformation, nous pouvons écrire :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = (\mathbf{F} d\vec{X}_1)(\mathbf{F} d\vec{X}_2) = (d\vec{X}_1 \mathbf{F}^T)(\mathbf{F} d\vec{X}_2) \quad \text{II.8}$$

Le terme T désigne la transposition.

On introduit alors le tenseur des déformations symétrique de Cauchy-Green gauche \mathbf{C} appelé également tenseur des dilatations défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{II.9}$$

La relation (II.8.9) devient alors :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{X}_1 \mathbf{C} \cdot d\vec{X}_2 \quad \text{II.10}$$

Le tenseur \mathbf{C} décrit les dilatations dans la configuration lagrangienne. Ainsi, les élongations principales λ_i représentent les valeurs propres de tenseur $\mathbf{C}_i = 1, 2, 3$

On peut également définir le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} dans la configuration matérielle (non déformée) par :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{X}_1 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} d\vec{X}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = 2(d\vec{X}_1 \cdot \mathbf{E} d\vec{X}_1) \quad \text{II.11}$$

$$\text{Avec : } \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{II.12}$$

\mathbf{I} étant le tenseur identité.

II.3.1.2. Tenseur des déformations dans la configuration actuelle (C_t)

Il est possible d'exprimer la déformation dans la configuration actuelle de la manière suivante :

$$d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = (d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{F}^{-1})(\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}_2) \quad \text{II.14}$$

soit :

$$d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{x}_1 (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot d\vec{x}_2 = (d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} = d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\vec{x}_2 \quad \text{II.15}$$

ou $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ est le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit ou encore le tenseur de dilatation en configuration eulérienne.

II.3.1.3. Invariants principaux du tenseur des déformations

Considérons le tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche \mathbf{C} , ses invariants principaux I_1, I_2 et I_3 , sont obtenus via l'expression de polynôme caractéristique :

$$\det(\mathbf{C}) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 \quad \text{II.16}$$

Les valeurs propres de tenseur de déformation de tenseur Cauchy sont désignés par λ_i ($i = 1, 2, 3$), nous aurons alors :

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad \text{II.17}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{Tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{Tr}(\mathbf{C}^2)] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2$$

II.18

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad \text{II.19}$$

II.4. Les tenseurs de contrainte [9]

Les contraintes sont des efforts internes de cohésion. Elles peuvent être décrites de différentes manières.

Considérons une coupe fictive de D_0 et un élément de surface dS_0 de cette coupe de normale \vec{N}_0 , appelé facette. Cette facette se transforme par f en une facette dS de normale \vec{n} . Soit \vec{df} , la résultante des efforts internes s'appliquant sur cette facette. Le vecteur contrainte \vec{t} défini par $\vec{t} = \frac{\vec{df}}{dS}$ dépend linéairement de \vec{n} , on définit généralement trois tenseurs de contrainte :

- Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, appelé tenseur des contraintes de Cauchy, défini par :

$$\vec{df} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} dS \quad \text{II.20}$$

Il est Eulérien et symétrique.

- Le tenseur $\boldsymbol{\pi}$ appelé tenseur de Boussinesq ou tenseur de Piola-Kirchhoff (PK1), est défini par :

$$\vec{df} = \boldsymbol{\pi} \vec{N}_0 dS_0 \quad \text{II.21}$$

- Le tenseur \mathbf{S} , appelé tenseur de Piola-Lagrange ou le second tenseur de Piola-Kirchhoff (PK2), qui est défini dans l'état non déformé par :

$$\vec{df}_0 = \mathbf{F}^{-1} \vec{df} = \mathbf{S} \vec{N}_0 dS_0 \quad \text{II.22}$$

De par leur construction, ces trois tenseurs sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\pi} = J\mathbf{F}^{-t} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{II.23}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\pi} \quad \text{II.24}$$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-t} \quad \text{II.25}$$

II.5. Loi de comportement

II.5.1. Matériau hyper-élastique [9]

Les matériaux hyper-élastiques sont caractérisés par l'existence d'une énergie volumique de déformation W dépendant uniquement de l'état de déformation courant $\mathbf{F}(t)$ (noté \mathbf{F} dans la suite) dont dérive les contraintes. En faisant l'hypothèse d'incompressibilité ($J = 1$ et $I_3 = 1$), les différents tenseurs des contraintes peuvent s'écrire en fonction de W :

- En écriture lagrangienne :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \quad \text{II.26}$$

- En écriture Eulérienne :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} - p\mathbf{I} \quad \text{II.27}$$

- En écriture mixte :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-1} \quad \text{II.28}$$

II.6. Deux approches de modélisation [6]

Les lois de comportement hyper-élastique sont introduites via l'expression de l'énergie volumique de déformation. La littérature présente deux catégories de modèles : les modèles phénoménologiques (ou macroscopiques) et les modèles physiques.

Les modèles phénoménologiques sont basés sur des considérations mathématiques et de mesures expérimentales. Quant aux modèles physiques, ils permettent de proposer des formes d'énergie dépendant de la microstructure. L'avantage de ces modèles est que les constantes matérielles ont un sens physique. Nous citons ici quelques modèles hyper-élastiques incompressibles.

II.6.1. Approche phénoménologique [6]

- **Modèle de Mooney-Rivlin (1940) :**

$$w(I_1, I_2) = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3) \quad \text{II.29}$$

Le modèle de Mooney-Rivlin est très utilisé dans l'industrie des élastomères pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%.

- **Modèle de Gent-Tomas (1958)**

$$w(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + A_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right). \quad \text{II.30}$$

Le modèle de Gent-Tomas contient deux constantes matérielles, et vérifie la forme globale du modèle de Rivlin-Saunders. Ce modèle traduit convenablement le comportement des élastomères pour des déformations inférieures à 200%.

- **Modèle de Gent (1996)**

Gent suppose que l'élongation des chaînes n'est pas infinie et que I_1 admet une valeur limite I_m , il propose alors un modèle phénoménologique que s'apparente au modèle de réseau introduit par Arruda-Boyce (1993). Il est donné par la relation suivante :

$$W(I_1, I_2) = -\frac{E}{6} (I_m - 3) \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3}\right). \quad \text{II.31}$$

- **Modèle d'Ogden (1972)**

Ogden a introduit l'idée que l'énergie volumique peut s'exprimer en termes d'élongations principale

$$w(I_1, I_2) = \sum_{n=0} \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad \text{II.32}$$

Les constants μ_n et α_n sont les paramètres matériaux λ_1, λ_2 et λ_3 sont les élongations principales. Les puissances mises en jeu dans le potentiel d'Ogden sont réelles qui confère un intérêt particulier

II.6.2. Approche micromécanique [6]

- **Modèle néo - Hookéen (1943)**

C'est le modèle hyper-élastique le plus simple. Il correspond au modèle de Mooney-Rivlin à un seul terme, mais sa justification est plus moléculaire que phénoménologique.

Le modèle Néo-Hookéen est donné par l'expression suivante

$$W = \frac{1}{2} n k T (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad \text{II.33}$$

Qui peut encore s'écrire :

$$W = \frac{1}{2} n k T (I_1 - 3)$$

- **Modèle de James-Guth (3-chaines) (1943)**

Le modèle simplifié de James-Guth suppose que la réseau de n chaines par unité de volume est représenté par trois sous-groupes de densité de n / 3 chaines est parallèle aux **trois** axes du repère de déformations principales (Fig II.3). L'énergie de déformation correspondante s'écrit :

$$W = \frac{1}{3} nkTN_3 \sum_{j=1}^3 [\lambda_{jr} \beta_j + \ln \left(\frac{\beta_j}{\sinh \beta_j} \right)] - c_3^* , \quad \text{II.34}$$

Avec $\beta_j = L^{-1}(\lambda_{jr})$ et ou L^{-1} est l'inverse de la fonction de Langevin définie par :

$$L(x) = \coth(x) - 1/x. \quad c_3^* \text{ est constante.}$$

La loi constitutive du modèle à 3- chaines est :

$$\sigma_j = -p + \frac{\mu_0}{3} N_3 \beta_j \lambda_{jr} , \quad j = 1, 2, 3.$$

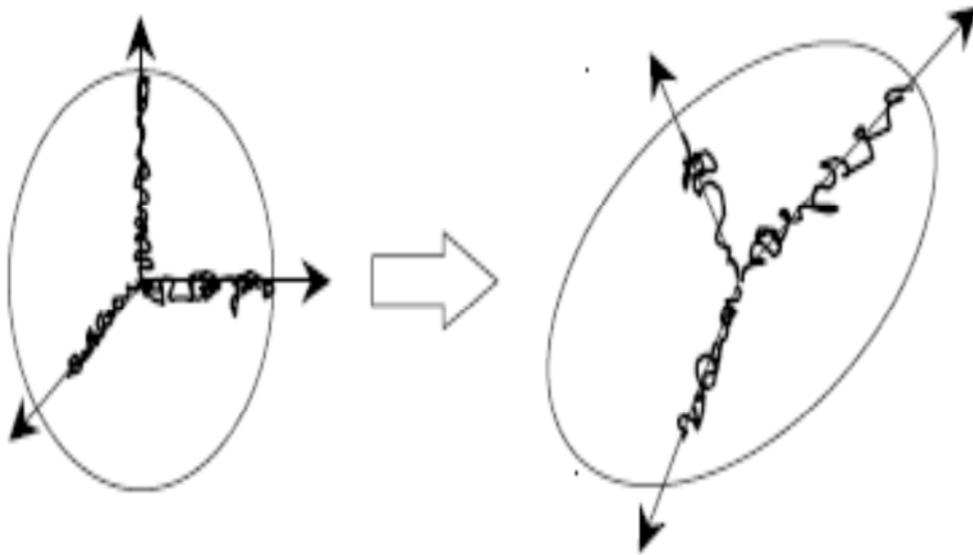


Figure II.2 : Modèle à 3- chaines

- **Modèle d'Arruda-Boyce (1993)**

Le modèle d'Arruda-Boyce suppose que le réseau est constitué de 8- chaines situées sur les diagonales d'un cube défini comme un élément de volume de référence (Fig II.3). Toutes les chaines se déforment de manière identique, et l'énergie de déformation du modèle est donnée par :

$$W = nkTN_8 \left[\lambda_r \beta + \ln\left(\frac{\beta}{\sinh\beta}\right) \right] - c_8^* , \quad \text{II.35}$$

Avec $\beta = L^{-1}(\lambda_r)$ et c_8^* est constante.

La relation contrainte-déformation s'écrit alors :

$$\sigma_j = -p + \frac{\mu_0 \beta}{3\lambda_r} \lambda_j^2 , \quad j = 1, 2, 3.$$

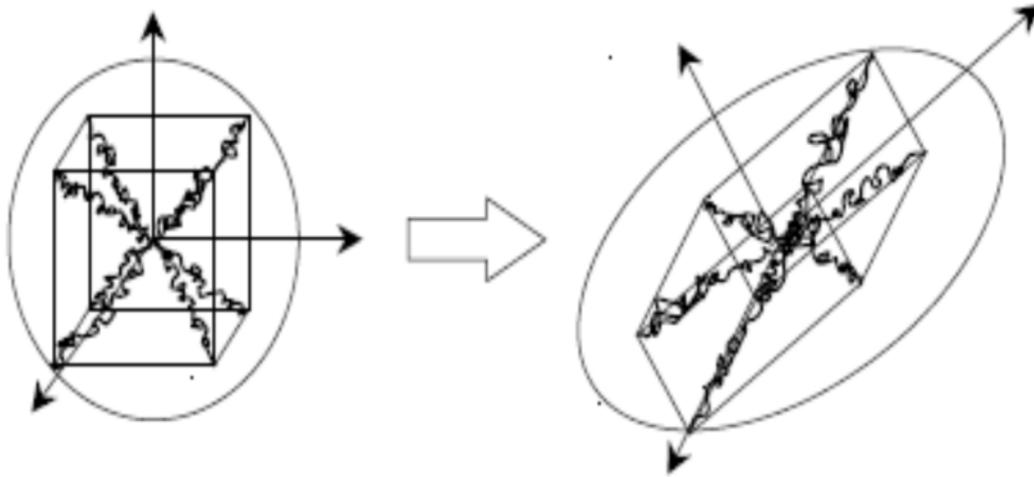


Figure. II.3 : Modèle à 8- chaînes

Conclusion

La modélisation d'un milieu continu hyper-élastique passe par le choix d'un potentiel hyper-élastique W . Il est requis de connaître les valeurs numériques des paramètres matériels.

Il existe des modèles du comportement hyper-élastique physiques ou phénoménologiques, qui sont exprimés en fonction des invariants et en fonction des élongations.

Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques algorithmes de minimisation et leur application pour l'identification des paramètres matériels des modèles hyper-élastiques.

III.1 Méthodes d'optimisation

III.1.1 C'est quoi l'identification [9]

L'identification consiste à faire coïncider une solution \vec{Y} issue d'un modèle (analytique, semi analytique ou numérique) et une mesure expérimentale $\vec{\bar{Y}}$. Ces mesures sont constituées de n points de mesure Y_i correspondant à n valeurs calculées \hat{Y}_i . Nous définissons alors une norme \emptyset pour quantifier l'écart entre ces deux ensemble de valeurs :

$$\emptyset = \sum_{i=1}^n \|Y_i - \hat{Y}_i\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{\bar{Y}} - \vec{Y}\|^2$$

Ainsi, annuler \emptyset revient à faire coïncider les mesures avec les valeurs théoriques. Cependant, les mesures expérimentales sont souvent entachées d'une erreur de mesure, tandis que les valeurs théoriques sont sujettes à des hypothèses simplificatrices quelquefois importantes. Pour identifier les paramètres du matériau, il suffit alors de minimiser \emptyset .

III.1.2 Base mathématique de l'optimisation [10]

L'optimisation est une stratégie que permet de trouver un optimum avec ou sans contraintes. Mathématiquement parlant, cela se traduit par la formulation suivante :

$$\min_x f(x) \text{ Ou } \max_x f(x)$$

où x est le vecteur des variables inconnues, f est la fonction objectif à maximiser ou minimiser. Il convient de noter qu'une minimisation d'une fonction est équivalente à la maximisation de son opposée ($\min_x f(x) = \max_x (-f(x))$). Dans ce qui suit, nous considérons le cas de problème de minimisation.

Dans le cas où le vecteur des inconnus est soumis à des conditions, le problème devient un problème d'optimisation avec contraintes. L'ensemble des contraintes réduit le domaine des points admissibles ou réalisables. Les contraintes peuvent être des contraintes d'égalités ou d'inégalités. Le problème III.1 devient donc :

$$\min_x f(x) ; \begin{cases} h_i(x) = 0 ; & 1 < i < p \\ g_i(x) < 0 ; & 1 < i < q \end{cases} \quad \text{III.1}$$

Où h_i et g_i sont des contraintes d'égalité et d'inégalité, respectivement.

III.1.3 Classification des méthodes d'optimisation [10]

Il existe trois grandes catégories d'outils d'optimisation, à savoir les approches déterministes, stochastiques et hybrides.

III.1.3.1 Méthodes déterministes

Cette classe d'algorithmes d'optimisations peut être décomposée en deux sous-classes : les algorithmes basés sur le calcul du gradient de la fonction à optimiser et les algorithmes sans calcul de gradient.

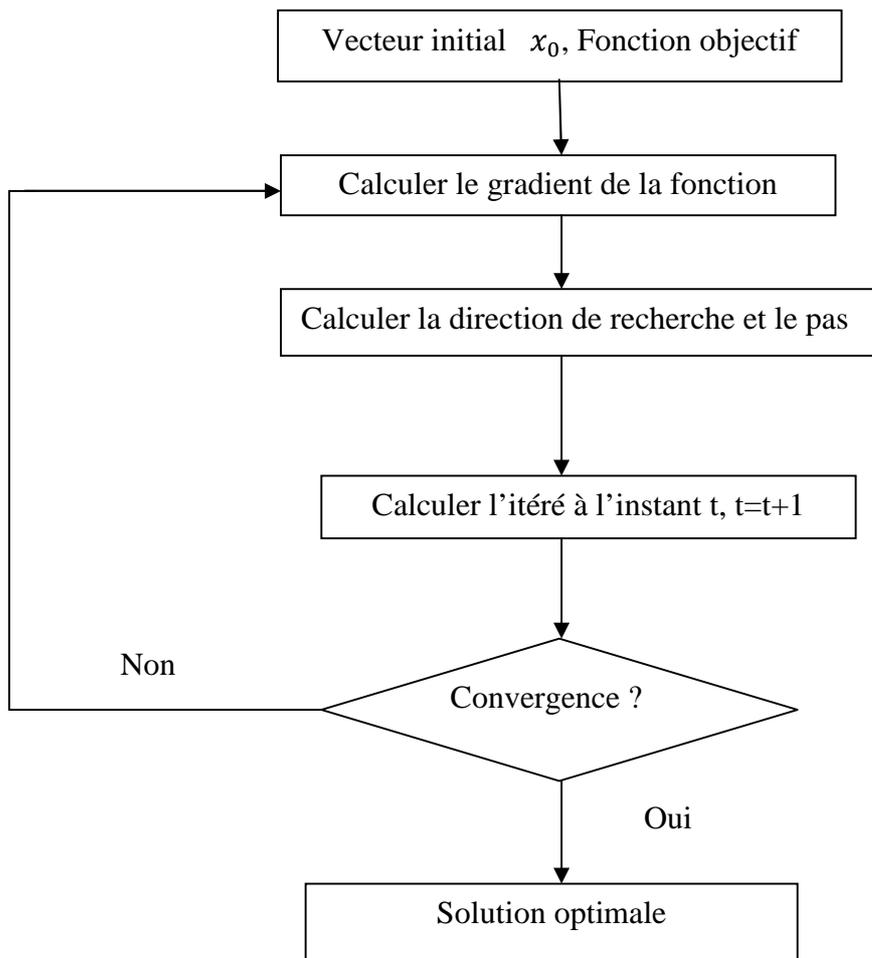


Figure III.1 : Principe générale d'un outil d'optimisation pour une méthode de descente [10].

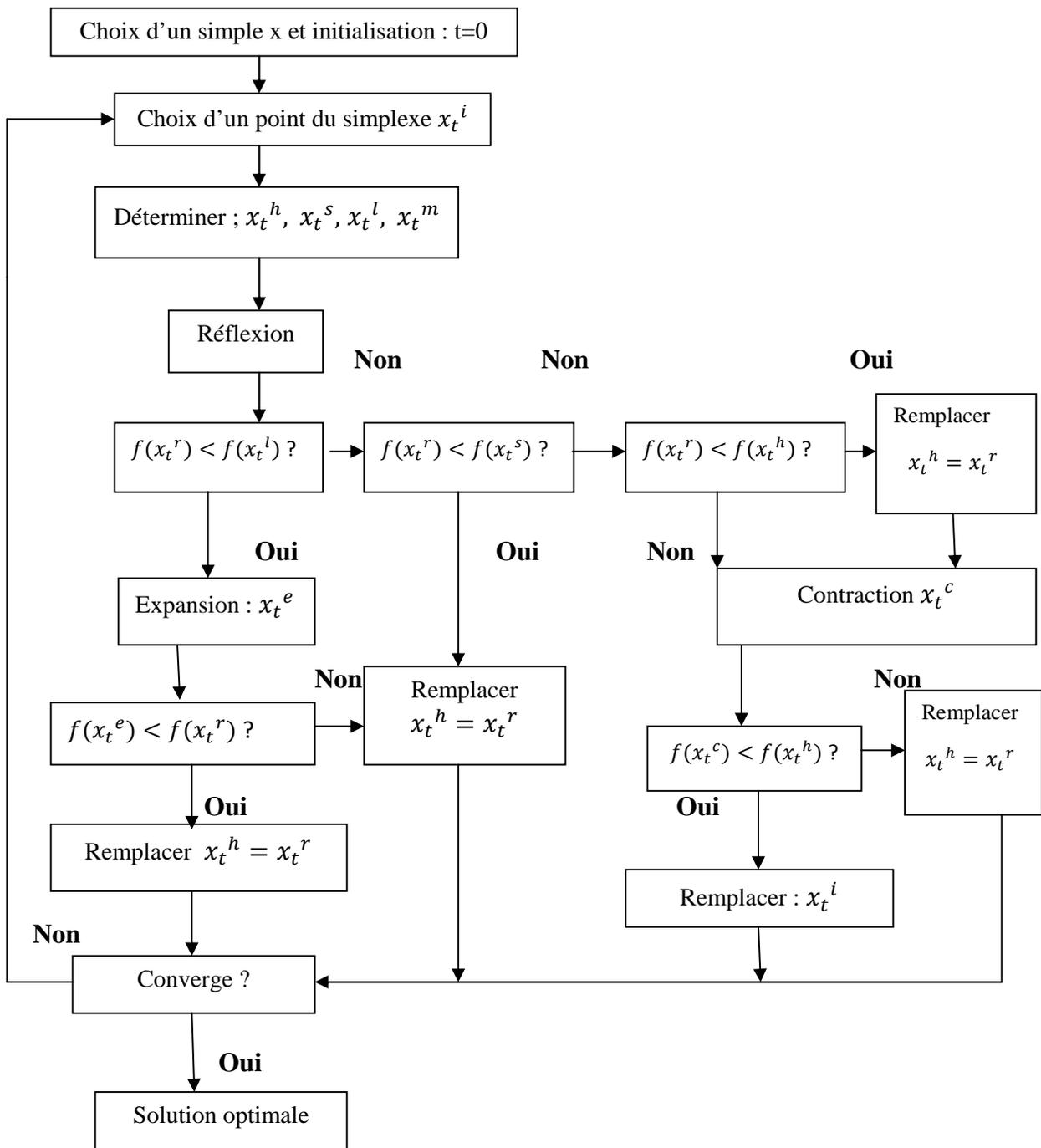


Figure III.2 : Organigramme de la méthode du Simplexe de Nelder-Mead [10].

x_r^i : Le point du simplexe

x_r^h : Le point où la valeur de la fonction objectif est la plus élevée

x_r^s : Le point où la valeur de la fonction à la deuxième valeur la plus élevée

x_r^l : Le point où la valeur de la fonction est la plus petite

x_r^m : Le point barycentre

III.1.3.2 .Méthodes stochastiques

L'objectif d'une méthode d'optimisation est de trouver un optimum global. Les méthodes d'optimisations stochastiques introduisent des transitions aléatoires, qui permettent d'éviter les pièges des optimums locaux de telle sorte que nous arrivons finalement à obtenir un optimum global.

Les méthodes les plus utilisées sont : Monte Carlo, Recuit Simulé, algorithme génétique et Recherche Tabou.

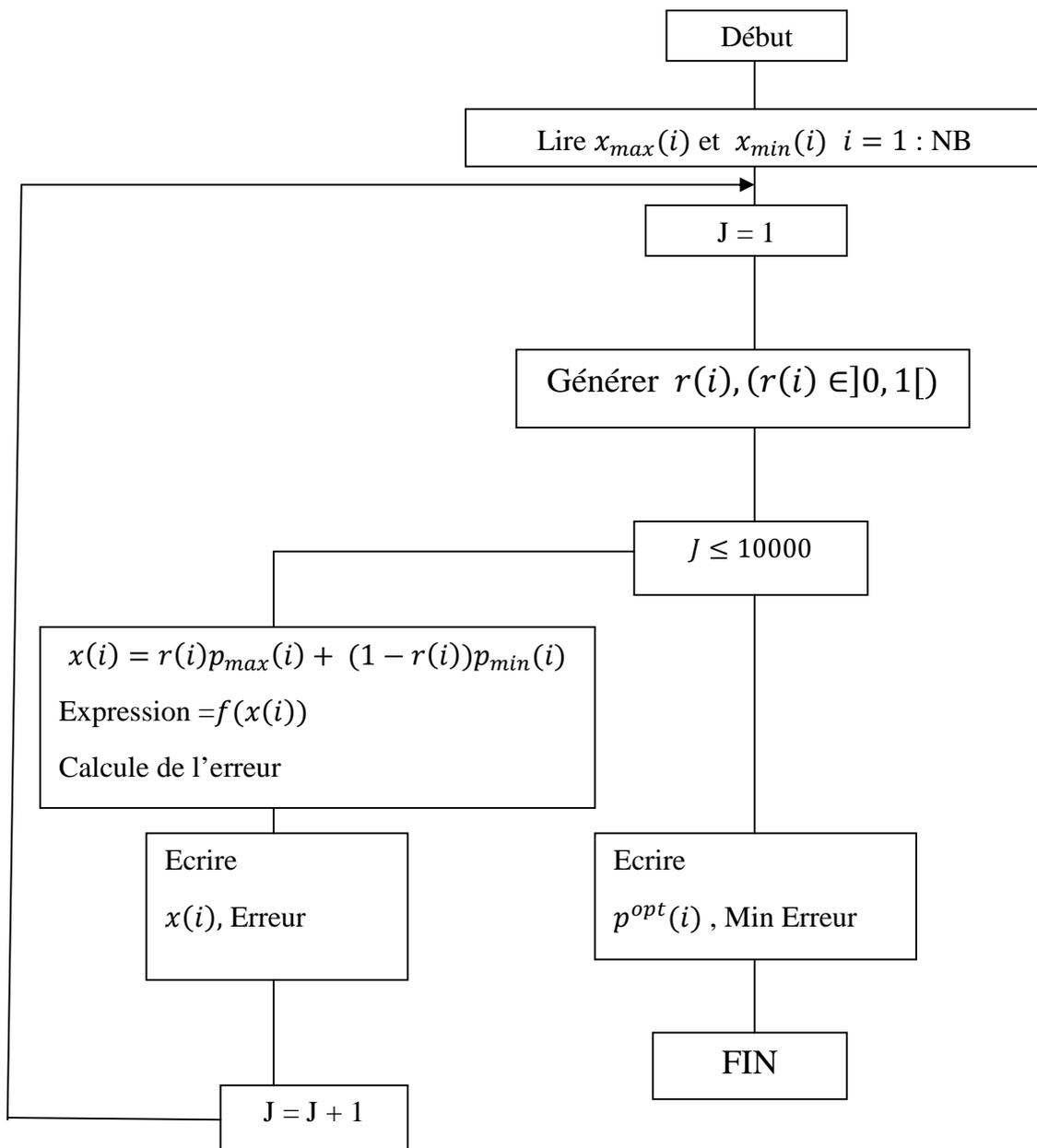


Figure III.3 : Organigramme simplifié de la méthode Monte Carlo [5].

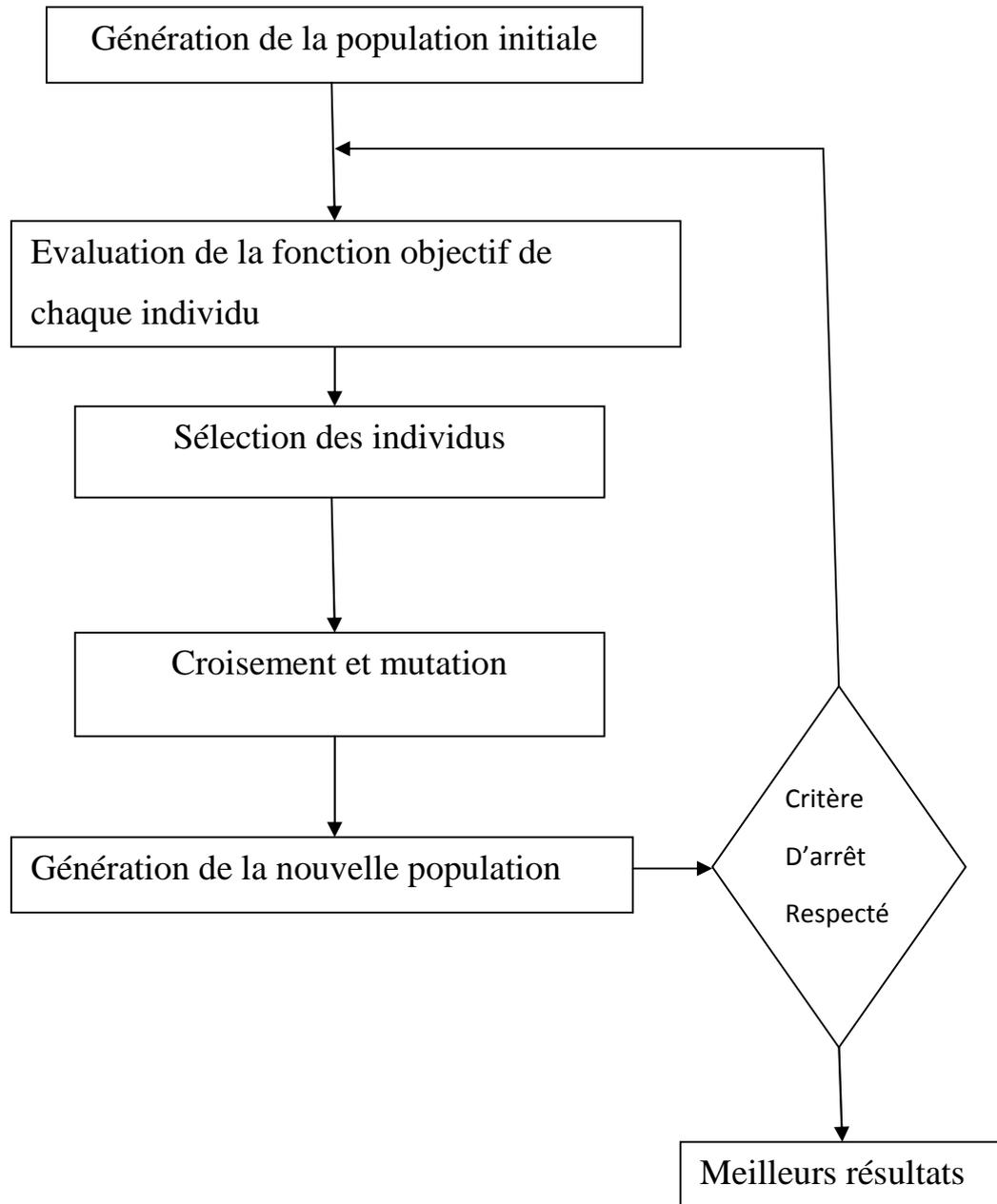


Figure III.4 : Organigramme simplifié de l'algorithme génétique [12]

III.1.3.3.Méthodes hybrides

Les méthodes hybrides ou les techniques d'hybridation ont une tendance actuelle dans les développements des approches d'optimisation. Cette technique vise à combiner les avantages de deux méthodes d'optimisation afin d'obtenir des méthodes efficaces pour la résolution des problèmes d'optimisation difficiles.

Il existe deux types d'un problème d'optimisation [10]:

$x^* \in X$ est un minimum *global* si et si seulement si le point où la fonction objectif à la plus petite valeur sur tout l'espace de recherche.

$x^* \in X$ est un minimum *local* si et si seulement si le point où la fonction objectif à la valeur la plus petite au voisinage de ce point.

L'organigramme de la figure (III.5) résume ces trois catégories de méthodes d'optimisation [11].

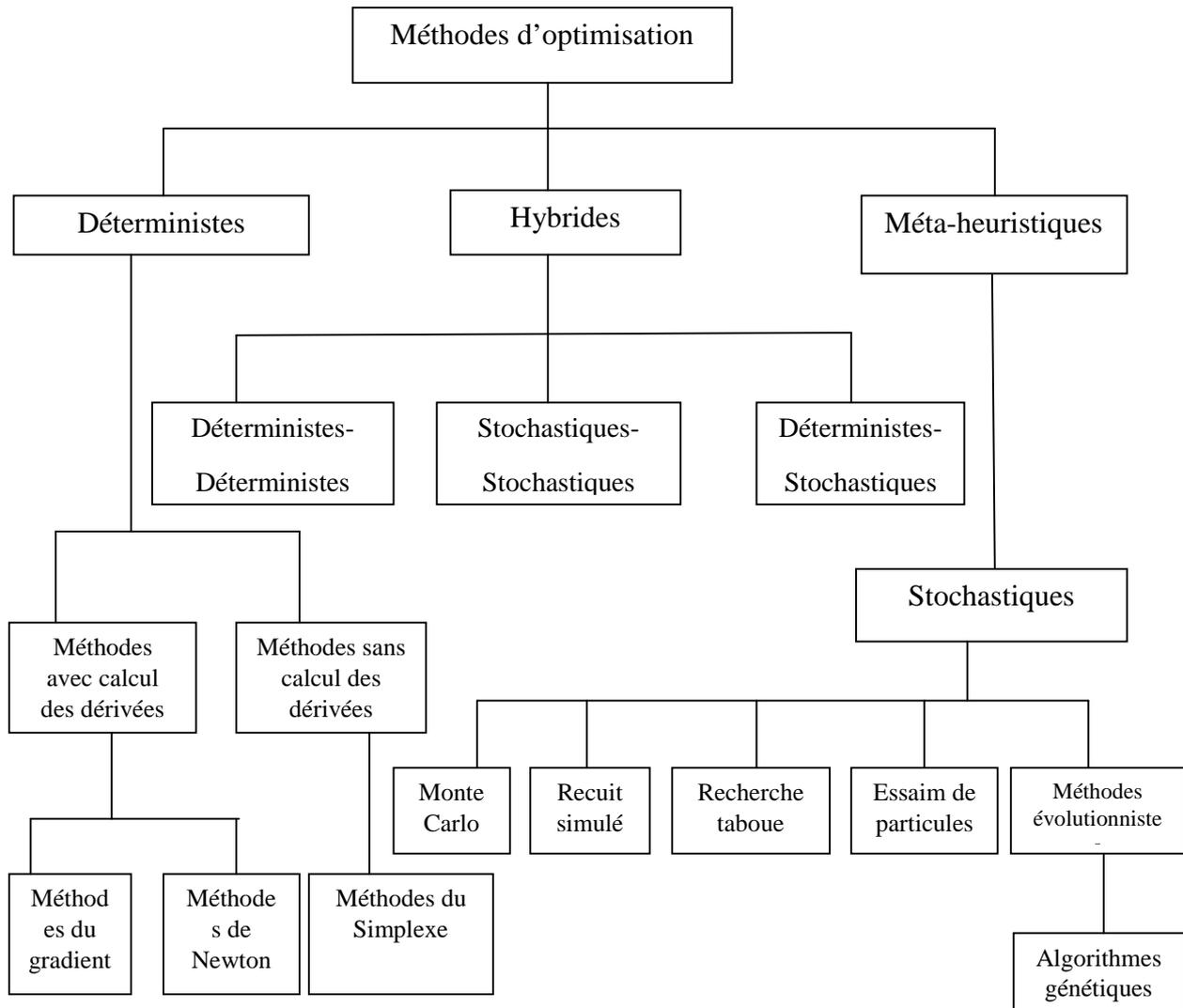


Figure III.5 : Classification des méthodes d'optimisation [10]

Les méthodes déterministes avec ou sans gradient, avec ou sans contrainte sont des algorithmes de recherche locale qui peuvent converger rapidement mais souvent vers un optimum locale.

Les méthodes stochastiques utilisent des techniques d'optimisation globales et puissantes pour résoudre des problèmes non linéaires. Cependant, elles nécessitent beaucoup d'évaluation de la fonction objectif et ainsi un temps de calcul couteux, et ils peuvent rencontrer une difficulté à converger.

Selon le problème à traiter, une combinaison de deux méthodes de même ou de différente catégorie permet de combiner les avantages des deux méthodes tout en évitant leurs inconvénients.

III.1.4. Quelques algorithmes de minimisation

III.1.4.1 Algorithme de simplexe (Nelder-Mead) [13]

L'Algorithme du simplexe (ou Nelder-Mead) est une méthode qui dépend moins de l'initialisation. Soit un espace dans lequel sont décrits les paramètres solution, p . Un "simplexe" est construit à partir de $p + 1$ tirage aléatoires de paramètres. Des transformations s'appliquent sur ce simplexe jusqu'à remplir le critère de convergence. En pratique, on s'intéresse à trois tirages de paramètres les deux présentent la valeur de la fonction cout ou la plus élevée et celui qui présente la valeur la plus faible. A partir de ces trois points, les différentes opérations, fonctions de l'itération précédente, s'opèrent :

- Contraction du simplexe (Figure III.6.A),
- Réflexion du simplexe (Figure III.6.B),
- Combinaison des 2 opérations (Figure III.6.C).

La Figure (III.6.D) illustre un exemple de l'utilisation de l'algorithme du simplexe pour un cas à deux dimensions. Cette méthode présente l'intérêt d'être robuste, de réaliser des transformations extrêmement simples entre chaque itération et de pouvoir être mise en œuvre facilement sur des espaces de grandes dimensions. De plus, contrairement aux méthodes de gradient, le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de calcul du gradient. L'inconvénient de cette méthode réside dans la donnée arbitraire que constitue le simplexe de départ. De plus, les algorithmes basés sur le simplexe présentent une grande difficulté à converger lorsque le nombre de paramètres augmente.

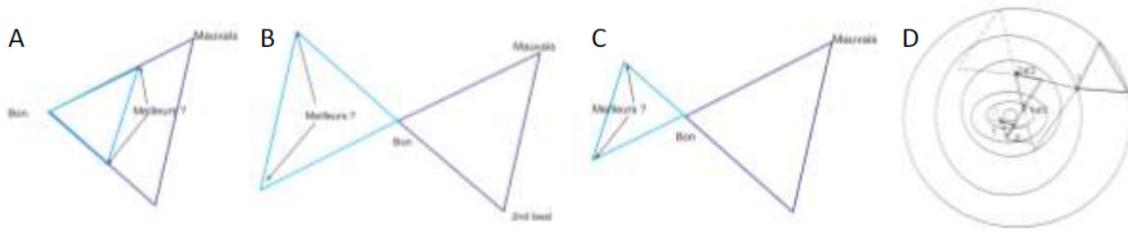


Figure III.6 : Exemples d'opérations d'optimisation mises en œuvre dans l'algorithme du simplexe. (A) Contraction, (B) réflexion, (C) contraction-réflexion, (D) exemple d'optimisation pour un cas à deux dimensions.

III.1.4.2 Algorithme SQP [14]

L'optimisation quadratique successive est un algorithme de résolution d'un problème d'optimisation non linéaire. Un tel problème consiste à déterminer des paramètres qui minimisent une fonction, tout en respectant des contraintes d'égalité et d'inégalité sur ces paramètres. On parle aussi de l'algorithme OQS pour Optimisation Quadratique Successive ou de l'algorithme SQP pour *Sequential Quadratic Programming*, en anglais.

III.1.4.3 Méthode de Monte Carlo [5, 10, 12]

La méthode de Monte Carlo inventé par Nicolas Métropolis et Stanislaw Ulam est la méthode stochastique la plus basique.

Pour un nombre N de tirage aléatoire, on calcule la différence entre les valeurs expérimentale et les valeurs théorique ensuite, on retire les valeurs des coefficients P_i ($i = 1, k$ représente le nombre de paramètres) qui donnent un minimum d'erreur (c'est-à-dire le coefficient P_i pour lesquels la courbe théorique coïncide avec la courbe expérimentale). Ces coefficients représentent les paramètres du modèle.

Le coefficient P_i est compris entre sa valeur maximale et sa valeur minimale, il est donné par la relation suivante :

$$P_i = r_i P_{min} + (1 - r_i) P_{max} \quad \text{III.2}$$

Où P_{min} et P_{max} représentent respectivement les valeurs minimale et maximale du coefficient P_i le nombre aléatoire r_i est compris entre 0 et 1.

L'avantage de cette méthode réside dans le fait que les valeurs numériques des paramètres peuvent être bornées à un domaine où ils gardent un sens physique. Malgré la simplicité de la mise en œuvre de cette méthode, elle nécessite un nombre important d'évaluations de la fonction objectif (l'erreur ou le résidu).

III.1.4.4 Algorithme génétique [15]

Les méthodes évolutionnaires sont des méthodes d'optimisation probabilistes qui sont souvent présentées par analogie avec la théorie de la sélection naturelle de Darwin. Les individus les plus performants d'une population ont une plus grande probabilité de survivre et de se reproduire, en donnant des descendants encore mieux adaptés. La correspondance avec la minimisation d'une fonction est la suivante : un "individu" est un point x , la "population" est un ensemble de points, et "la performance d'un individu" x est évaluée par sa valeur de fonction cout, $f(x)$. En partant d'un échantillonnage de l'espace de recherche (une population initiale), ces méthodes réalisent des tirages de nouvelles populations (des "générations") à l'aide d'opérations de sélection, croisement et mutation. Les différents algorithmes évolutionnaires se distinguent par la mise en œuvre de ces opérations. Historiquement, ils ont été développés indépendamment en trois variantes : algorithmes génétiques, stratégies d'évolution et programmation évolutive.

Un exemple de structure d'algorithme évolutionnaire est la suivante :

1. initialisation de la population $P(t)$, $t=0$
2. évaluation de la population courante $P(t)$: calcul de la fonction cout pour tous les points de la population :
3. sélection de certains individus de $P(t)$ en fonction de leur fonction cout f (par exemple les meilleurs) : les "parents" $P_0(t)$;
4. croisement entre parents et création des "enfants" (des nouveaux points) $P_1(t)$;
5. mutation (perturbation aléatoire) des individus de $P_1(t)$ $P_2(t)$;

6. évaluation de $P_2(t)$;
7. formation de la nouvelle population $P(t + 1)$ à partir des individus de $P(t)$ et de $P_2(t)$ par exemple en choisissant les meilleurs individus appartenant à $P(t)$ et à $P_2(t)$;
8. $t \leftarrow t + 1$;
9. si le critère d'arrêt n'est pas satisfait, retour en 3.

Les algorithmes évolutionnaires permettent de réaliser des recherches globales, formellement grâce à l'étape 5. Leur intérêt pratique réside dans leur applicabilité à une très large gamme de problèmes car ils n'utilisent que la fonction cout (pas de dérivées) et peuvent accommoder des variables mixtes. Cependant, pour trouver un optimum, ils ont besoin d'un grand nombre d'évaluations de la fonction cout. Ainsi, ils ne sont considérés directement utilisables que pour les problèmes où le calcul de la fonction ne nécessite pas de ressources importantes.

III.2 Identification paramétrique des modèles hyper-élastiques avec quatre algorithmes de minimisation

Dans cette partie, nous allons identifier les paramètres de trois modèles hyper-élastiques de la littérature, à savoir le modèle Néo-Hookéen, Mooney Rivlin et Arruda - Boyce.

Le but de l'étude est de comparer les différentes méthodes d'optimisation utilisées pour notre identification paramétrique.

Les résultats expérimentaux utilisés sont ceux de TRELOAR sur le Latex. L'auteur a effectué sur ce matériau trois types d'essais ; la traction uni-axiale, la traction équi-biaxiale et le cisaillement pur. Dans toute notre étude, nous utilisons les résultats de la traction uni-axiale pour l'identification des paramètres matériels des modèles.

On définit la fonction objectif comme étant la somme des écarts quadratiques :

$$err = \left(\sum_{i=1}^n (\pi_{exp}^i - \pi_{theo}^i)^2 \right)^{1/2}$$

Où $\pi_{exp}^i, \pi_{theo}^i$ représentent respectivement la contrainte de Piola Kirchhoff expérimentale et théorique et n est le nombre de points de mesures.

Dans le cas d'un chargement uni-axial suivant la direction x , le tenseur gradient de la déformation est :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}$$

Le tenseur de Cauchy Green droit est défini par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites de l'essai de traction uni-axiale sont :

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

La relation contrainte – déformation de chaque modèle est déterminée à partir de la relation contrainte –déformation où la pression hydrostatique est éliminée à partir des conditions aux limites :

- Modèle Néo-Hookéen : $\sigma = \mu_0(\lambda^2 - \lambda^{-1})$ avec : $\frac{\mu_0}{2} = C_1$

- Modèle de Mooney-Rivlin : $\sigma = 2 \left(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-1})$

- Modèle d'Arruda-Boyce : $\sigma = \frac{\mu_0}{3} \left(\frac{3-\lambda_r^2}{1-\lambda_r^2} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-1})$

où $\lambda_r = \frac{\lambda_{chaine}}{\lambda_l} = \sqrt{\frac{I_1}{3N_8}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 + 2\lambda^{-1}}{3N_8}}$ avec : λ_r : la dillatation relative d'une chaine,

λ_l : l'allongement limite du réseau $\lambda_l = \sqrt{N_8}$

et la contrainte de Piola Kirchhoff est donnée par :

- Modèle Néo-Hookéen $\pi^{NH} = 2C_1(\lambda - \lambda^{-2})$

- Modèle de Mooney-Rivlin $\pi^{MR} = \sigma = 2 \left(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) (\lambda - \lambda^{-2})$

- Modèle d'Arruda-Boyce $\pi^{AB} = \frac{\mu_0}{3} \left(\frac{3-\lambda_r^2}{1-\lambda_r^2} \right) (\lambda - \lambda^{-2})$

Pour accélérer le processus d'identification, une étude préliminaire est souvent nécessaire.

Pour les modèles Néo-Hookéen et Mooney-Rivlin, le paramètre $3\mu_0$ représente la pente de la courbe de la contrainte en fonction de l'élongation. Les coefficients C_{10} et C_{01} se trouvent au voisinage de 0.2 tandis que le paramètre C_{01} est très faible. Pour le modèle d'Arruda Boyce, il est clair que $\lambda_r < 1$ ce qui implique que $N_8 > 19$.

III.2.1.Modèle Néo-hookéen

Le tableau suivant regroupe les données et les résultats de l'identification des paramètres du modèle Néo-Hookéen.

Algorithme	SQP	Simplexe	Génétique	Monte Carlo
Données	Le point initial=0.15	Le point initial=0.15	-Génération de vecteurs de paramètres aléatoirement. $C_1 \in [0.01, 0.25]$	-Nombre de tests =100000 $C_1 \in [0.01, 0.25]$
Résultats C_1 [MPa]	0.2189	0.22	0.2	0.1718

Tableau III.1 : Données et résultats de l'identification des paramètres du modèle Néo-hookéen

La figure (III.7) illustre le tracé de la contrainte de Piola- Kirchhoff en fonction de l'élongation et cela pour les différents paramètres identifiés à l'aide des quatre méthodes d'optimisation.

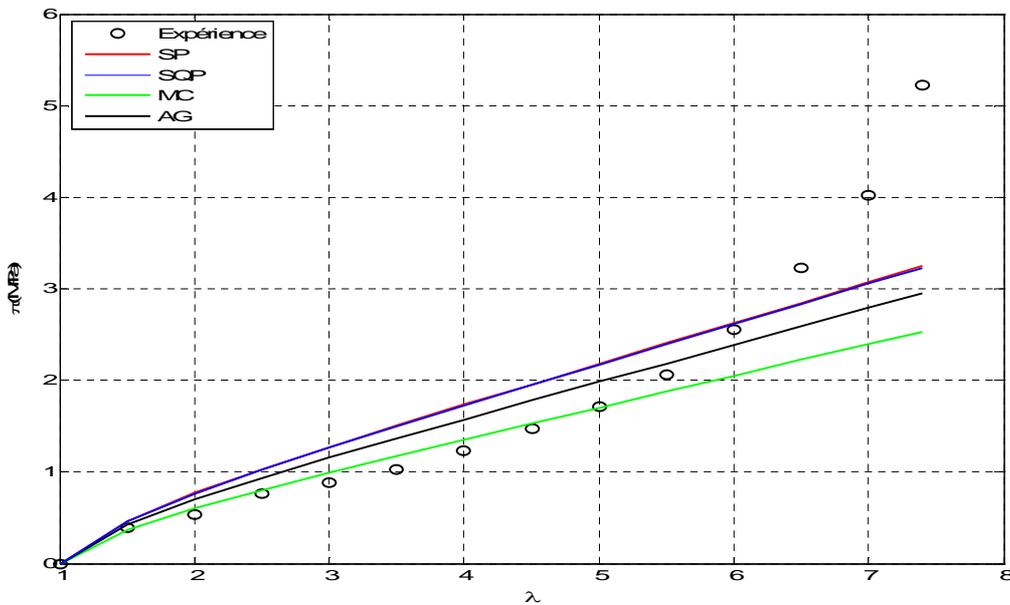


Figure III.7 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale

La figure (III.8) illustre le tracé de l'erreur relative définie par $Err = \left| \frac{\pi_{exrj} - \pi_{modj}}{\pi_{exrj}} \right|$ en fonction de l'élongation. Il est clair que seule l'identification à l'aide de l'algorithme de Monte -Carlo est satisfaisante.

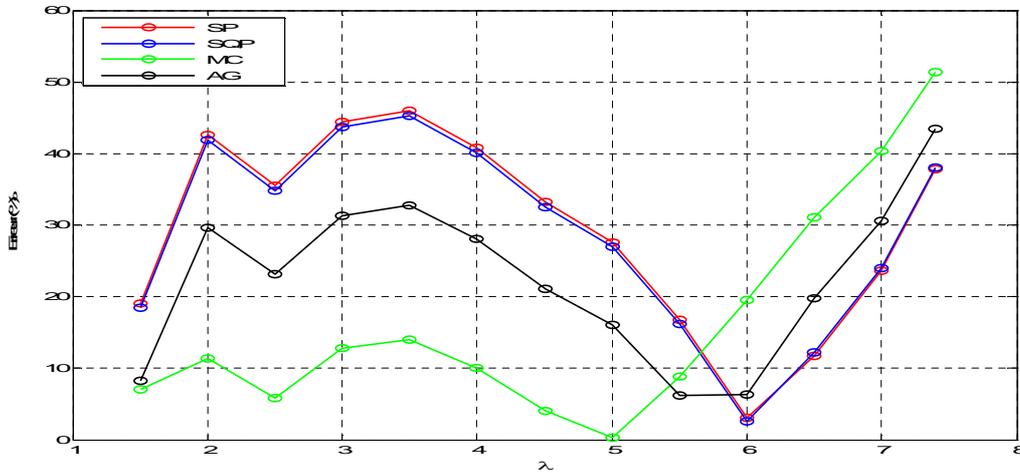


Figure III.8 : Erreur relative(%) en fonction de l'élongation pour le modèle Néo-Hookéen

III.2.2.Modèle de Mooney-Rivlin

Le tableau suivant regroupe les données et les résultats de l'identification des paramètres du modèle de Mooney-Rivlin.

Algorithme	SQP	Simplexe	Génétique	Monte Carlo
Données	Le point initial = [0.2, 0.01]	-Le point initial = [0.25, 0.01]	-Génération de vecteurs de paramètres aléatoirement. $c_{10} \in [0.1, 0.25]$ $c_{01} \in [10^{-3}, 10^{-2}]$	-Nombre de tests =100000 $c_{10} \in [0.1, 0.25]$ $c_{01} \in [10^{-5}, 10^{-2}]$
Résultats				
C_{10} (MPa)	0.2382	0.36	0.238	0.1546
C_{01} (MPa)	0.0001	-0.656	0.001	0.0023

Tableau III.2 : Données et résultats de l'identification des paramètres du modèle de Mooney-Rivlin

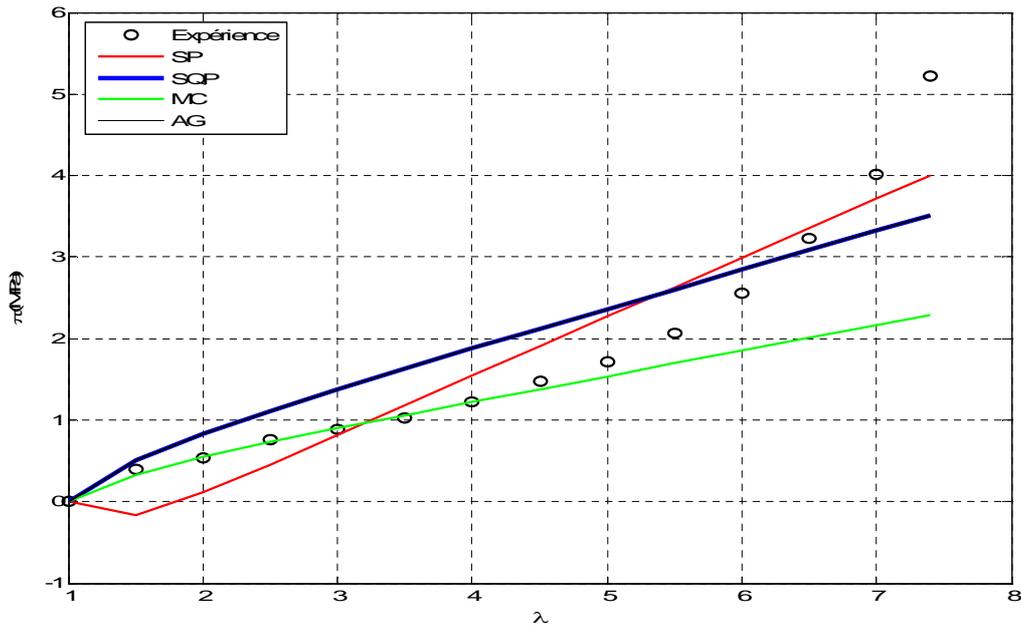


Figure III.9 : Identification du modèle de Mooney -Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale

La figure (III.9) illustre le tracé de la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de l'élongation et cela pour les différents paramètres identifiés à l'aide des quatre méthodes d'optimisation.

On constate que la méthode simplex donne un paramètre négatif et une contrainte négative, ceci est dû par le fait que cette méthode n'impose aucune condition sur l'intervalle de définition des paramètres.

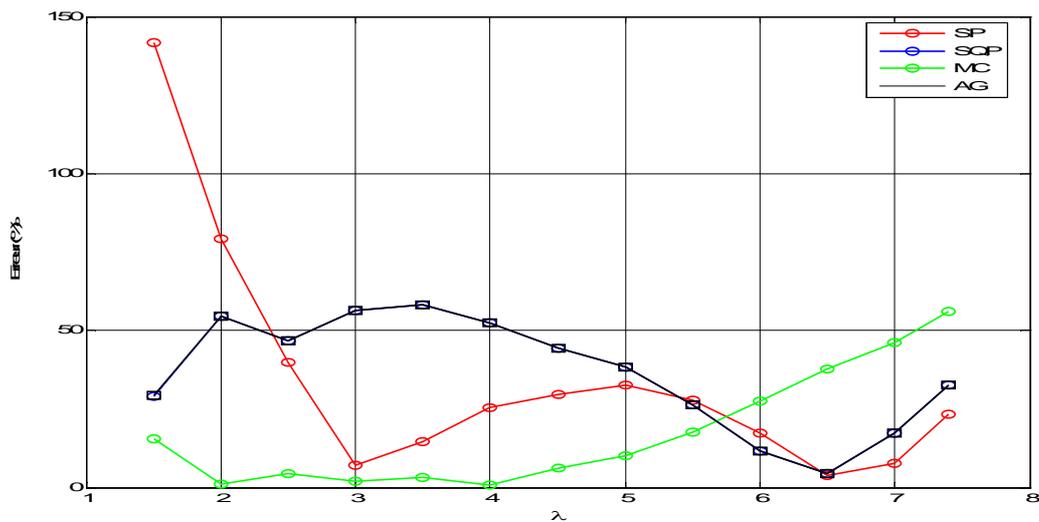


Figure III.10 : Erreur relative (%) en fonction de l'élongation pour le modèle de Mooney-Rivlin

La (Figure III.10) montre que l'identification à l'aide de l'algorithme de Monte-Carlo est satisfaisante dans l'intervalle [1, 5]. Les autres méthodes donnent des résultats peu satisfaisants.

III.2.3 Modèle d'Arruda-Boyce

La procédure d'identification à l'aide des quatre algorithmes de minimisation est utilisée pour identifier les paramètres du modèle d'Arruda-Boyce.

Algorithme	SQP	Simplexe	Génétique	Monte Carlo
Données	Le point initial = [0.2, 20]	Le point initial = [0.2, 20]	-Génération de vecteurs de paramètres aléatoirement $\mu_0 \in [0.2, 0.5]$ $N \in [20, 30]$	-Nombre de tests =100000 $\mu_0 \in [0.2, 0.5]$ $N \in [20, 30]$
Résultats $\mu_0 [MPa]$ N_8	0.2500 24.877	0.2690 25.866	0.2680 25.806	0.3205 29.827

Tableau III.3 : Données et résultats de l'identification des paramètres du modèle d'Arruda-Boyce

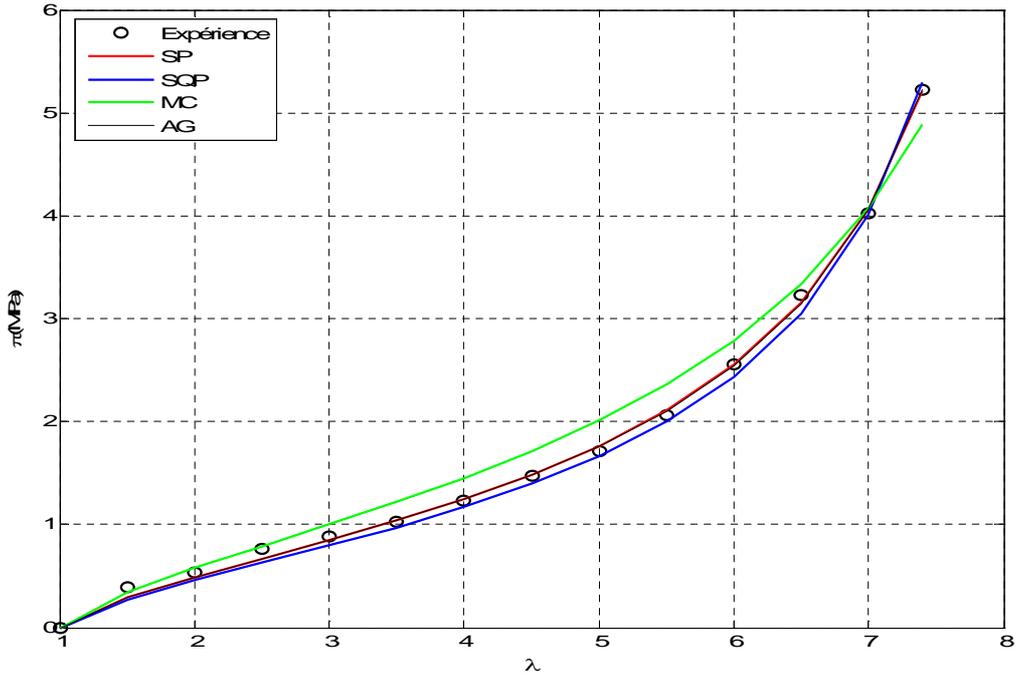


Figure III.11 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale

Les différents algorithmes de minimisation fournissent presque les mêmes résultats à l'exception de la méthode Monte-Carlo.

La figure (III.11) montre une bonne corrélation entre la théorie et les résultats expérimentaux.

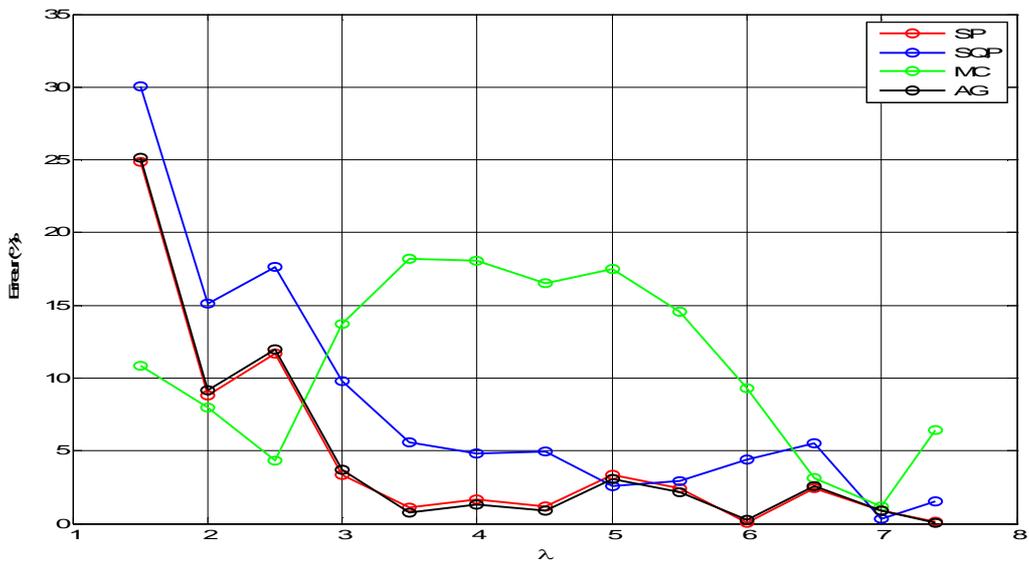


Figure III.12 : Erreur relative (%) en fonction de l'élongation pour le modèle d'Arruda-Boyce

III.3 Détermination du domaine de validité des modèles utilisés dans l'étude

Dans cette étude, nous allons définir le domaine de validité de chaque modèle en utilisant les résultats expérimentaux de TRELOAR sur le latex en traction uni-axiale.

La fonction objectif est définie ici par la somme des valeurs absolues des erreurs relatives :

$$er = \sum_{i=1:n} \left| \frac{\pi_{exp}^i - \pi_{theo}^i}{\pi_{exp}^i} \right|$$

La procédure de l'identification est la suivante :

Si les résultats de l'identification ne sont pas satisfaisants, nous réduisons le domaine de validité utilisé pour l'identification jusqu'à l'obtention de paramètres qui fournissent une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et le modèle théorique.

Les données de l'identification sont données dans la partie (III.2), et la figure (III.13) montre l'organigramme de la méthode.

L'erreur relative moyenne à ne dépasser est fixée par une valeur appelée seuil de l'erreur relative E_0 , et elle est considérée comme une donnée de l'identification.

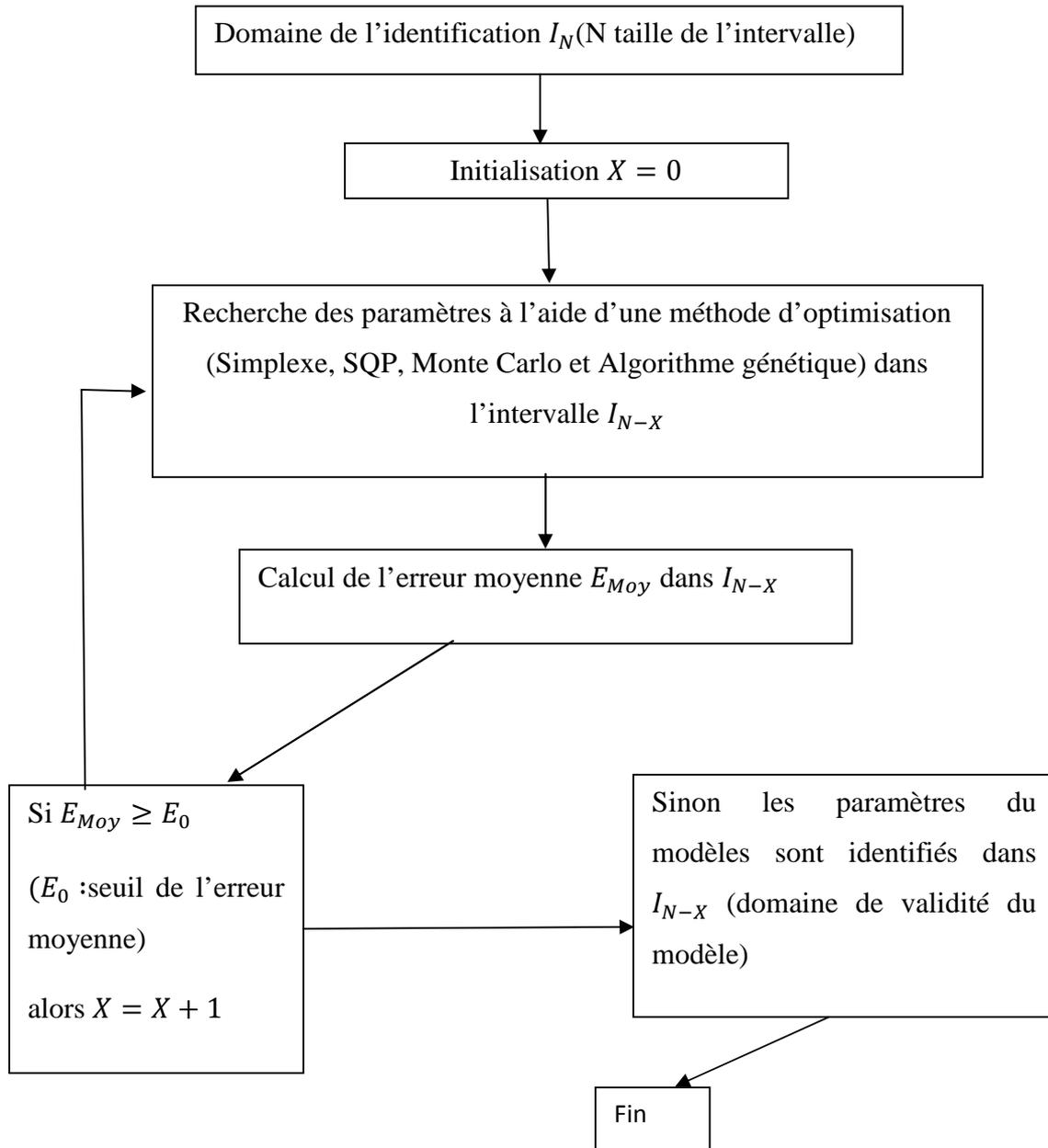


Figure III. 13 : Organigramme de la méthode de la détermination du domaine de validité d'un modèle théorique.

Les résultats de l'identification sont illustrés sur les tableaux (III. 4) (III. 5) et (III. 6)

III.3.1 Modèle Néo-Hookéen

Algorithme	Erreur relative maximale E_0	Résultats C_1 [MPa]	Domaine de validité
SQP	Sans condition	$C_1=0.3536$	[1, 7.4]
	10%	$C_1=0.1723$	[1, 5]
	5%	$C_1=0.1562$	[1, 4]
Simplexe	Sans condition	$C_1=0.2500$	[1, 7.4]
	10%	$C_1= 0.1724$	[1, 5]
	5%	$C_1= 0.1562$	[1, 4]
Génétique	Sans condition	$C_1=0.2499$	[1, 7.4]
	10%	$C_1=0.1724$	[1, 5]
	5%	$C_1= 0.1561$	[1, 4]
Monte Carlo	Sans condition	$C_1= 0.1899$	[1, 7.4]
	10%	$C_1= 0.1601$	[1, 5]
	5%	$C_1=0.1587$	[1, 5]

Tableau III.4 : Résultats de l'identification des paramètres du modèle Néo-Hookéen et son domaine de validité

Les figures (III. 14)-(III. 17) illustrent les courbes de réponses pour le modèle Néo-Hookéen en utilisant les quatre algorithmes de minimisation.

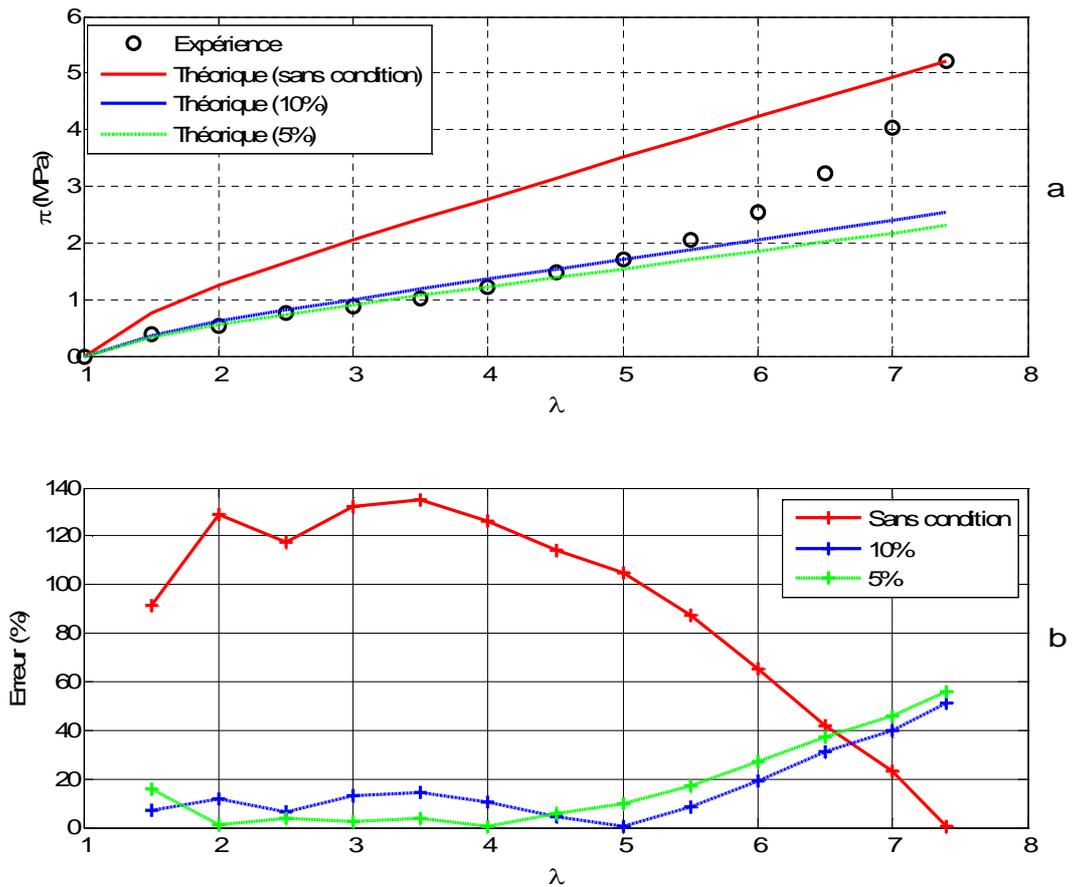


Figure III.14 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode Simplexe

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

La méthode simplex ne donne pas de bons résultats puisque cette dernière ne dépend que du point initial. Cette méthode de recherche locale peut converger vers un optimum local.

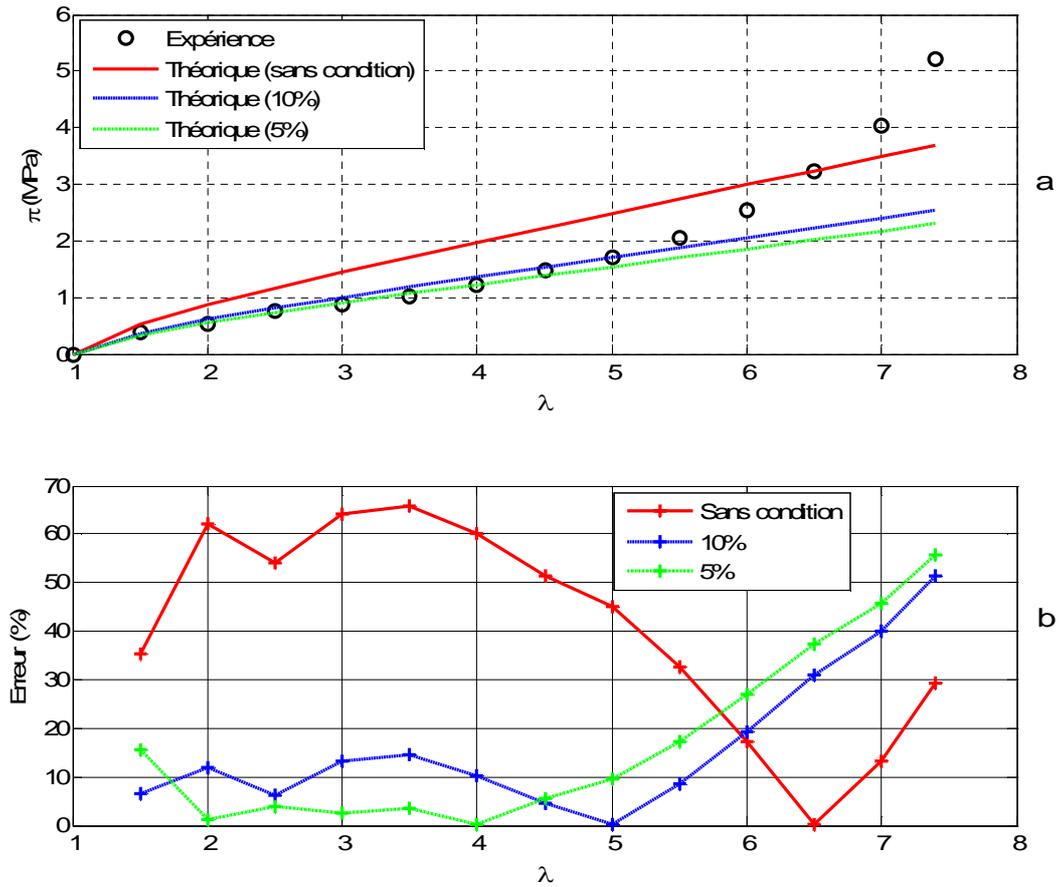


Figure III. 15 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode SQP

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

La deuxième méthode déterministe utilisée dans l'étude (SQP) ne donne pas de bons résultats. Il s'agit d'une recherche locale de l'optimum.

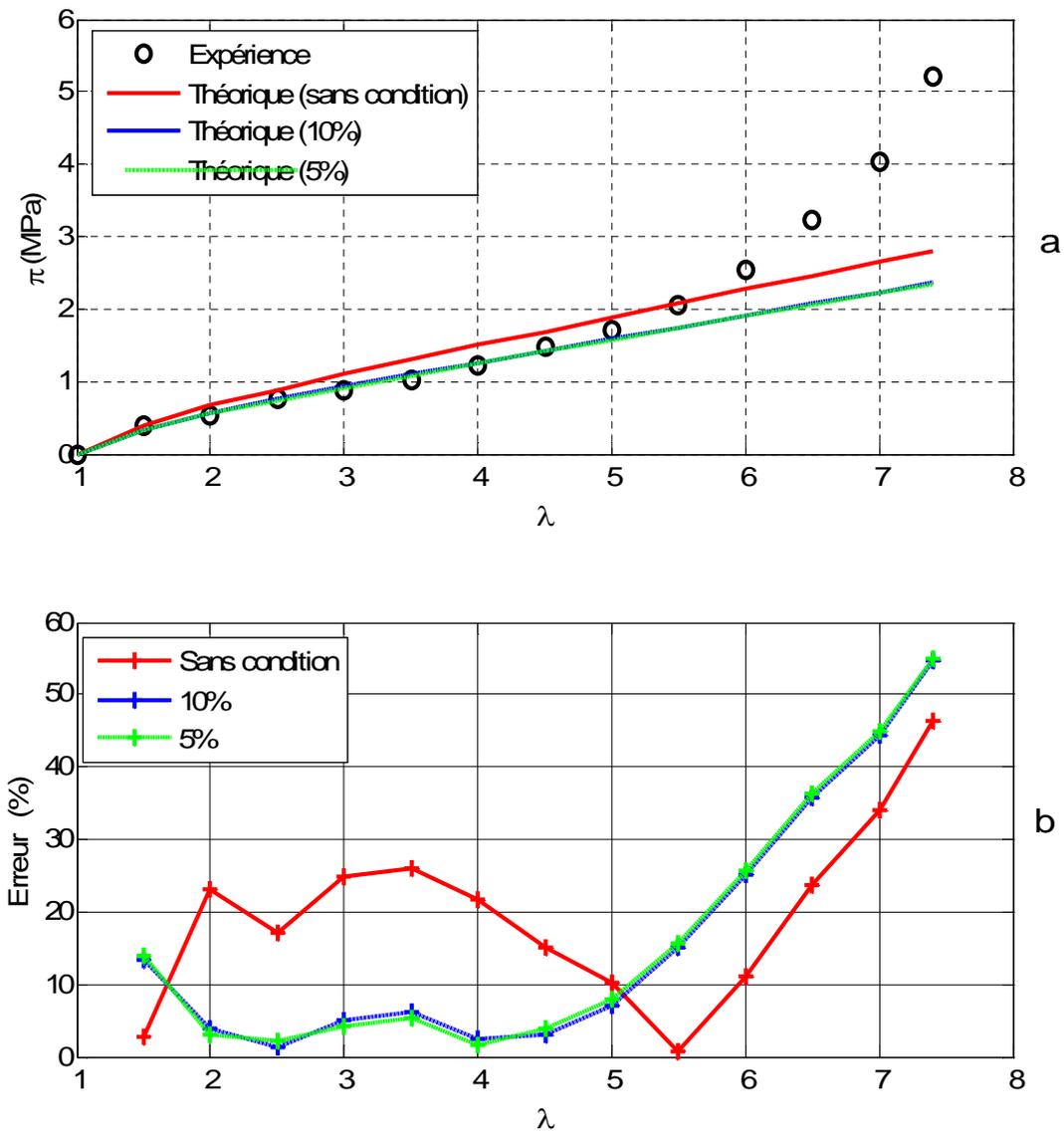


Figure III. 16 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

Il est clair que la méthode Monte Carlo donne les meilleurs résultats comparés aux autres méthodes.

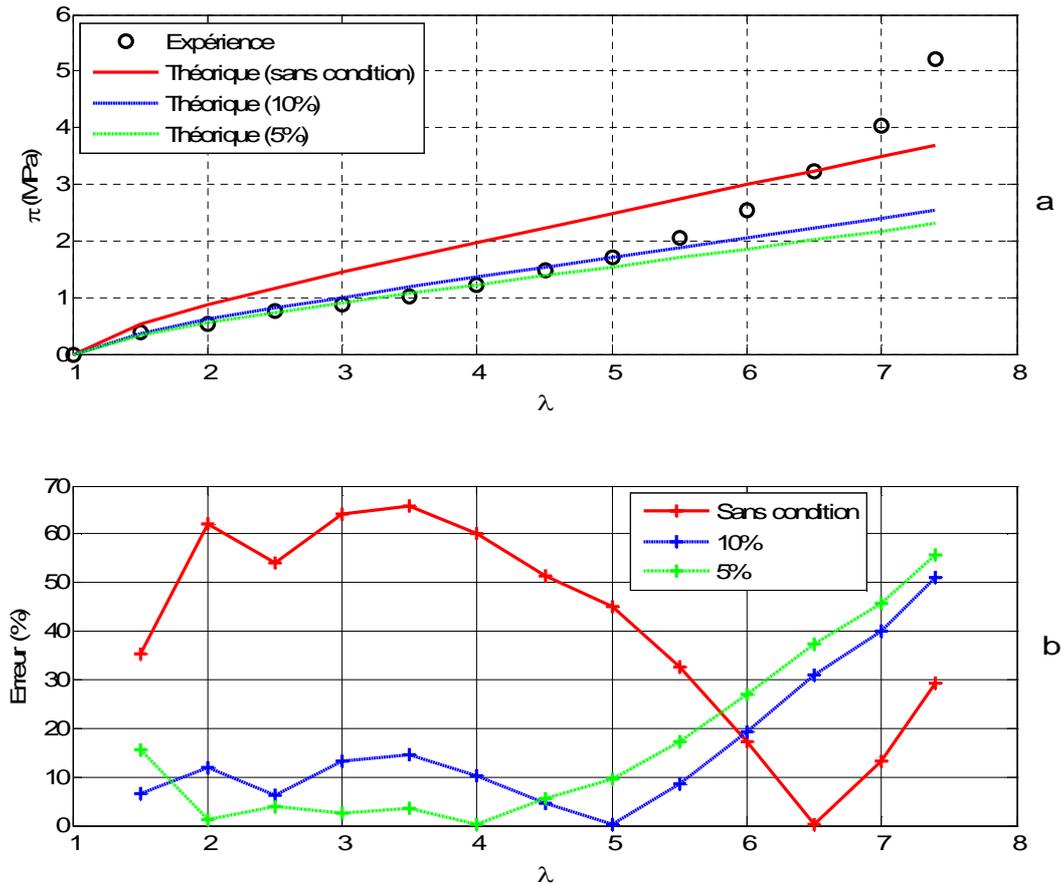


Figure III. 17 : Identification du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode génétique

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

L'algorithme génétique ne fournit pas de bons résultats. Ceci est dû au nombre de tests limités utilisés dans notre identification.

Avec les quatre méthodes d'optimisation, on montre que le domaine de validité du modèle Néo-Hookéen est pour des élongations $\lambda \in [1, 5]$. Le paramètre du modèle est égal à $C_1 \approx 0.15MPa$.

III.3.2 Modèle de Mooney-Rivlin

Algorithme	Erreur relative maximale	C10[MPa] C01 [MPa]	Domaine de validité
SQP	Sans condition	C10=0.3534 C01=0.0016	[1, 7.4]
	10%	C10=0.1721 C01=0.0012	[1, 5]
	5%	C10=0.1559 C01=0.0010	[1, 4]
Simplexe	Sans condition	C10=0.25 C01=0.01	[1, 7.4]
	10%	C10=0.1713 C01=0.0053	[1, 5]
	5%	C10=0.1551 C01=0.0043	[1, 4]
Généétique	Sans condition	C10=0.25 C01=0.01	[1, 7.4]
	10%	C10=0.17195 C01=0.00235	[1, 5]
	5%	C10=0.1545 C01=0.0068	[1, 4]
Monte Carlo	Sans condition	C10=0.1651 C01=0.000009	[1, 7.4]
	10%	C10=0.1510 C01=0.0012	[1, 5]
	5%	C10=0.1516 C01=0.0010	[1, 5]

Tableau III.5 : Résultats de l'identification des paramètres du modèle de Mooney-Rivlin et son domaine de validité

Les figures (III. 18)-(III. 21) illustrent les courbes de réponses pour le modèle de Mooney-Rivlin en utilisant les quatre algorithmes de minimisation.

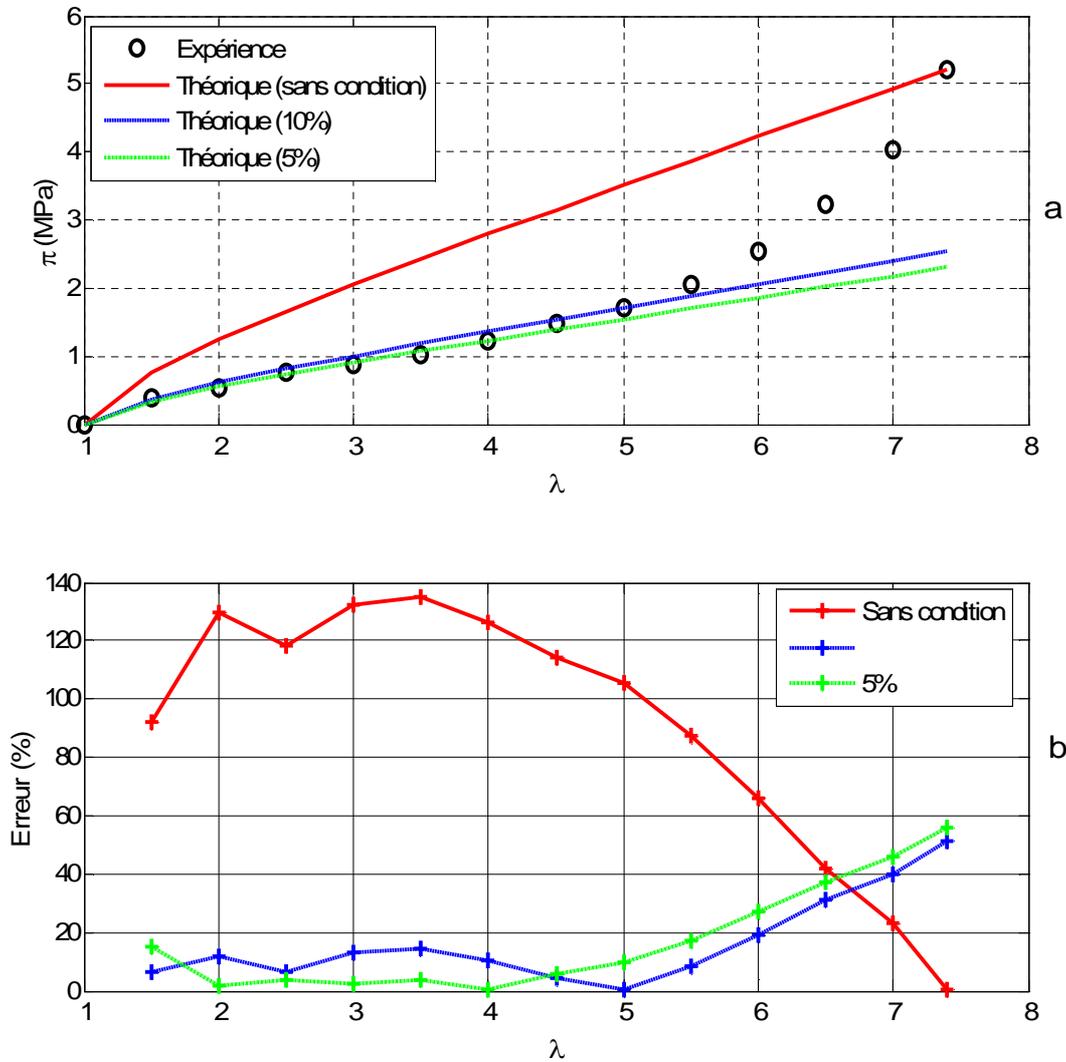


Figure III. 18 : Identification du modèle de Mooney- Rivlin sur l’essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l’aide de la méthode Simplexe

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l’élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l’élongation

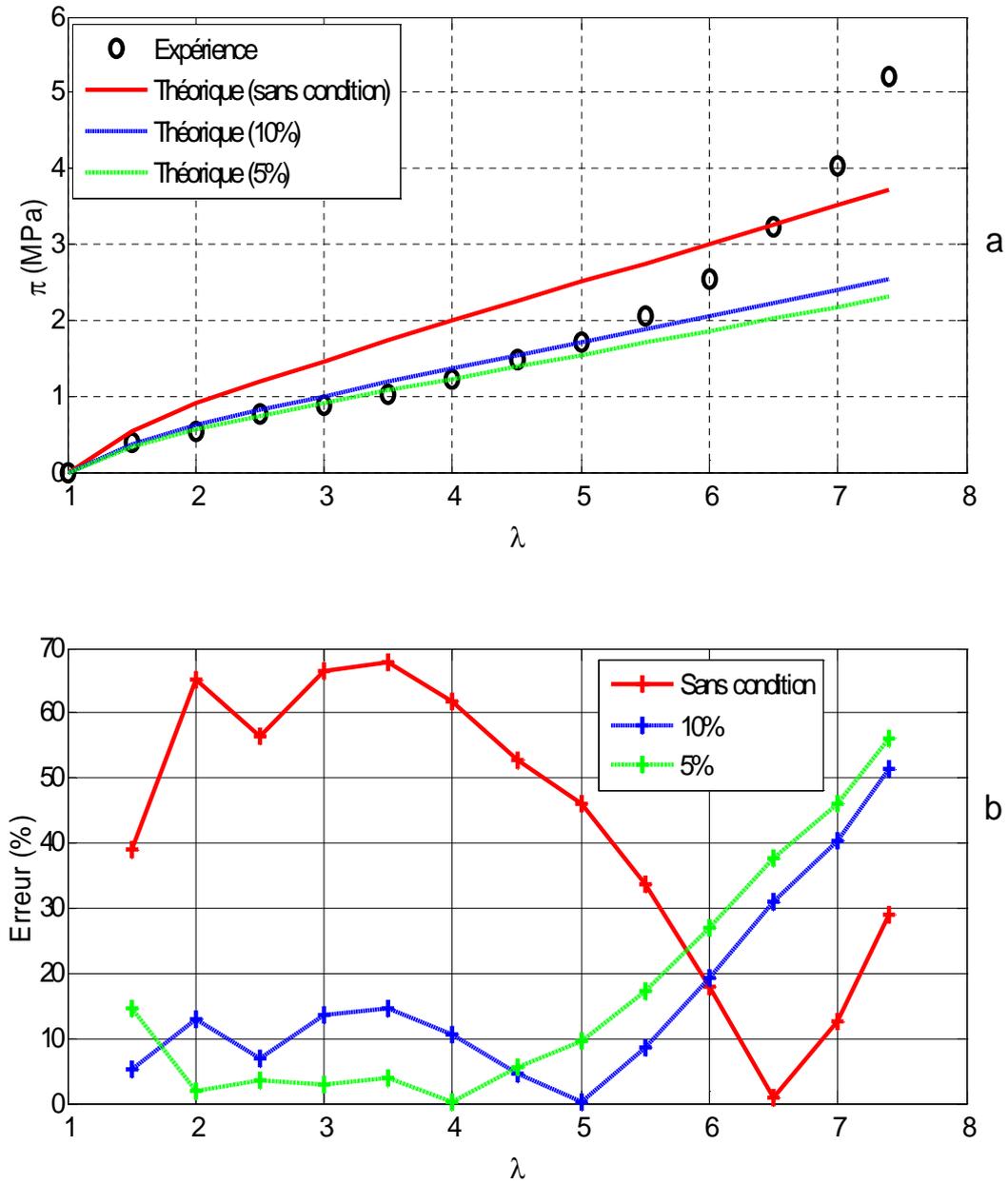


Figure III. 19 : Identification du modèle de Mooney-Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode SQP

(a) Contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

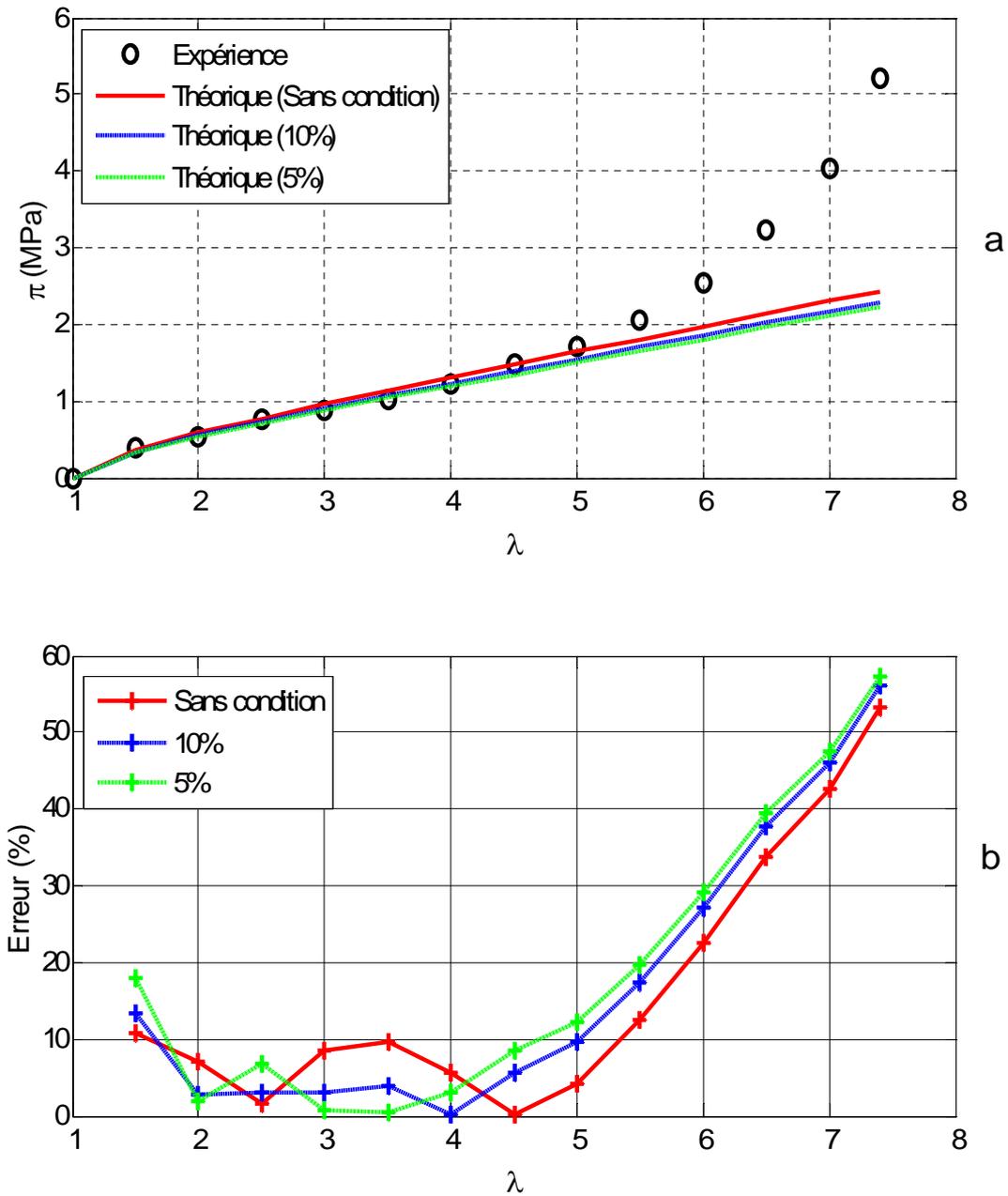


Figure III. 20 : Identification du modèle de Mooney-Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

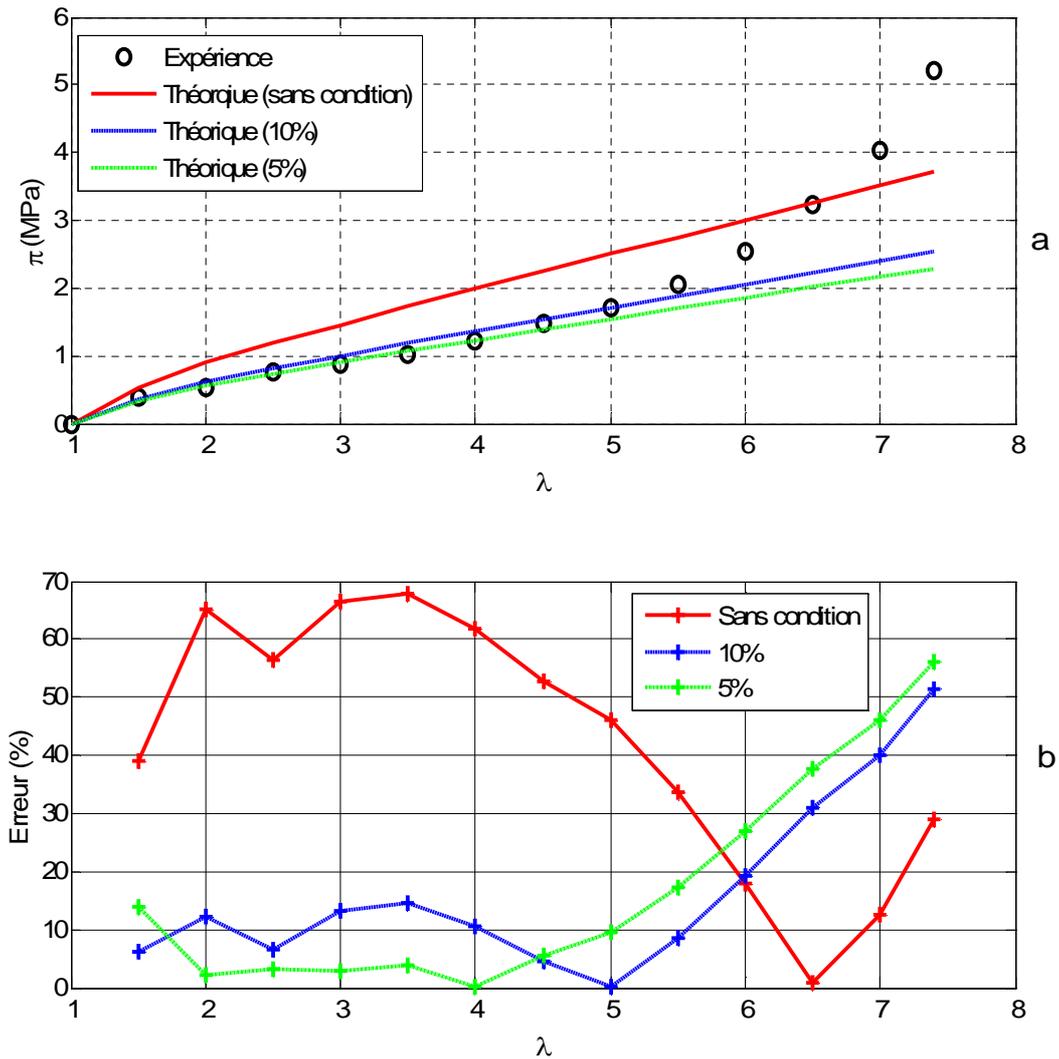


Figure III. 21 : Identification du modèle de Mooney- Rivlin sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode génétique

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

Pour le modèle de Mooney-Rivlin, la méthode de Monte Carlo donne les meilleurs résultats

Les paramètres du modèle de Mooney-Rivlin sont : $c_{10} \approx 0.15MPa$ et $c_{01} \approx 0.01MPa$, et le domaine de validité est $\lambda \in [1, 5]$.

III.3.3 Modèle d'Arruda-Boyce

Algorithme	Erreur relative maximale	$\mu_0 [MPa]$ N_8	Domaine de validité
SQP	Sans condition	$\mu_0=0.1790$ $N_8=22.490$	[1, 7.4]
	10%	$\mu_0=0.2747$ $N_8=10.9469$	[1, 5]
	5%	$\mu_0=0.31975$ $N_8=6.31519$	[1, 4]
Simplexe	Sans condition	$\mu_0= 0.20142$ $N_8= 23.21406$	[1, 7.4]
	10%	$\mu_0= 0.2983$ $N_8 = 20.0014$	[1, 5]
	5%	$\mu_0= 0.3544$ $N_8 = 20.0009$	[1, 4]
Génétique	Sans condition	$\mu_0= 0.3449$ $N_8= 29.9902$	[1, 7.4]
	10%	$\mu_0= 0.2816$ $N_8 = 26.4563$	[1, 5]
	5%	$\mu_0= 0.29488$ $N_8 = 24.9146$	[1, 4]
Monte Carlo	Sans condition	$\mu_0= 0.2666$ $N_8= 25.7518$	[1, 7.4]
	10%	$\mu_0 =29.9450$ $N_8=0.2754$	[1, 5]
	5%	$\mu_0= 0.2701$ $N_8 = 27.066$	[1, 5]

Tableau III.6 : Résultats de l'identification des paramètres du modèle d'Arruda-Boyce et son domaine de validité.

Les figures (III. 22)-(III. 25) illustrent les courbes de réponses pour le modèle d'Arruda - Boyce en utilisant les quatre algorithmes de minimisation.

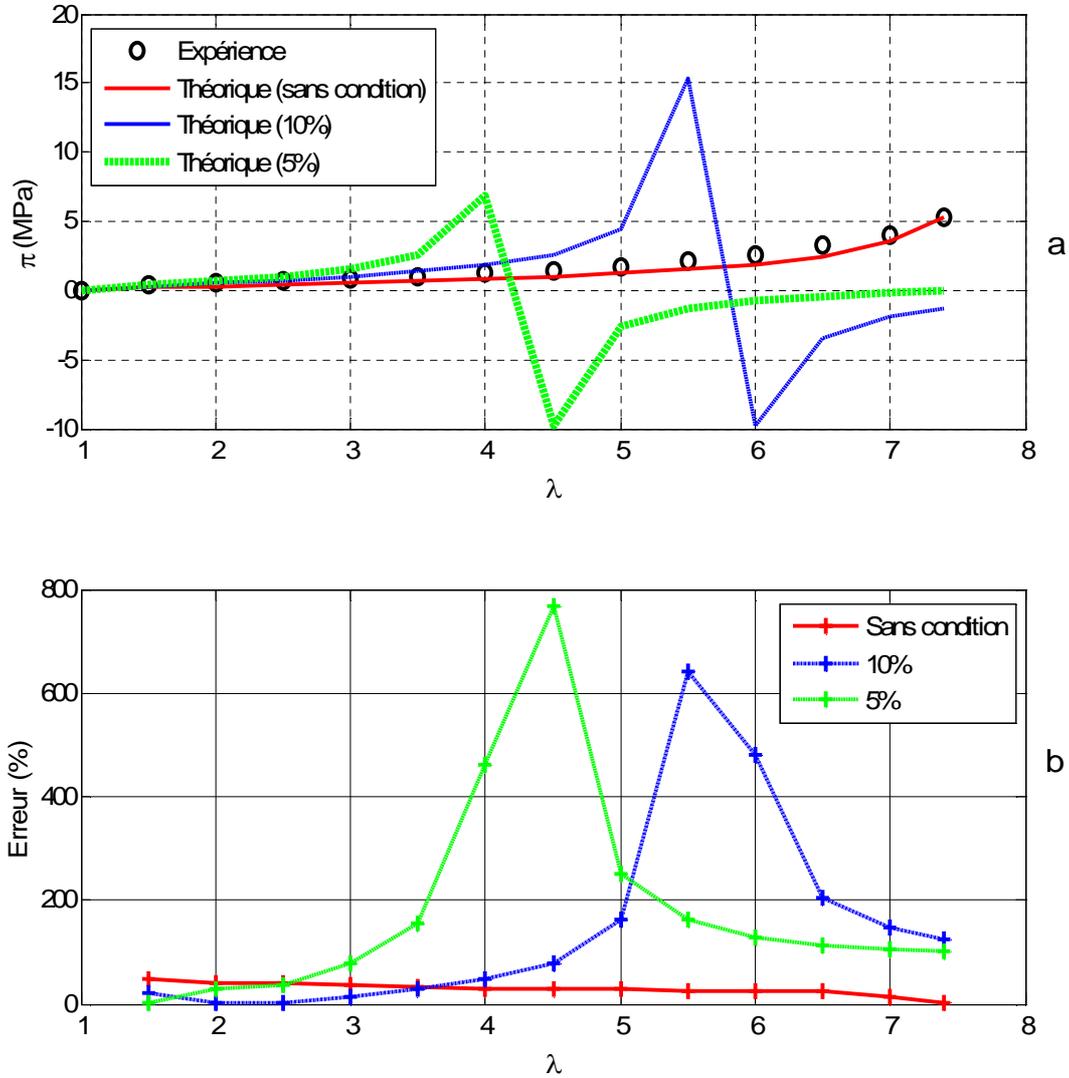


Figure III. 22 : Identification du modèle d'Arruda -Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode Simplexe

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

La méthode simplexe n'est pas capable de fournir de bons résultats puisqu'elle n'impose aucune condition sur le domaine de définition des paramètres.

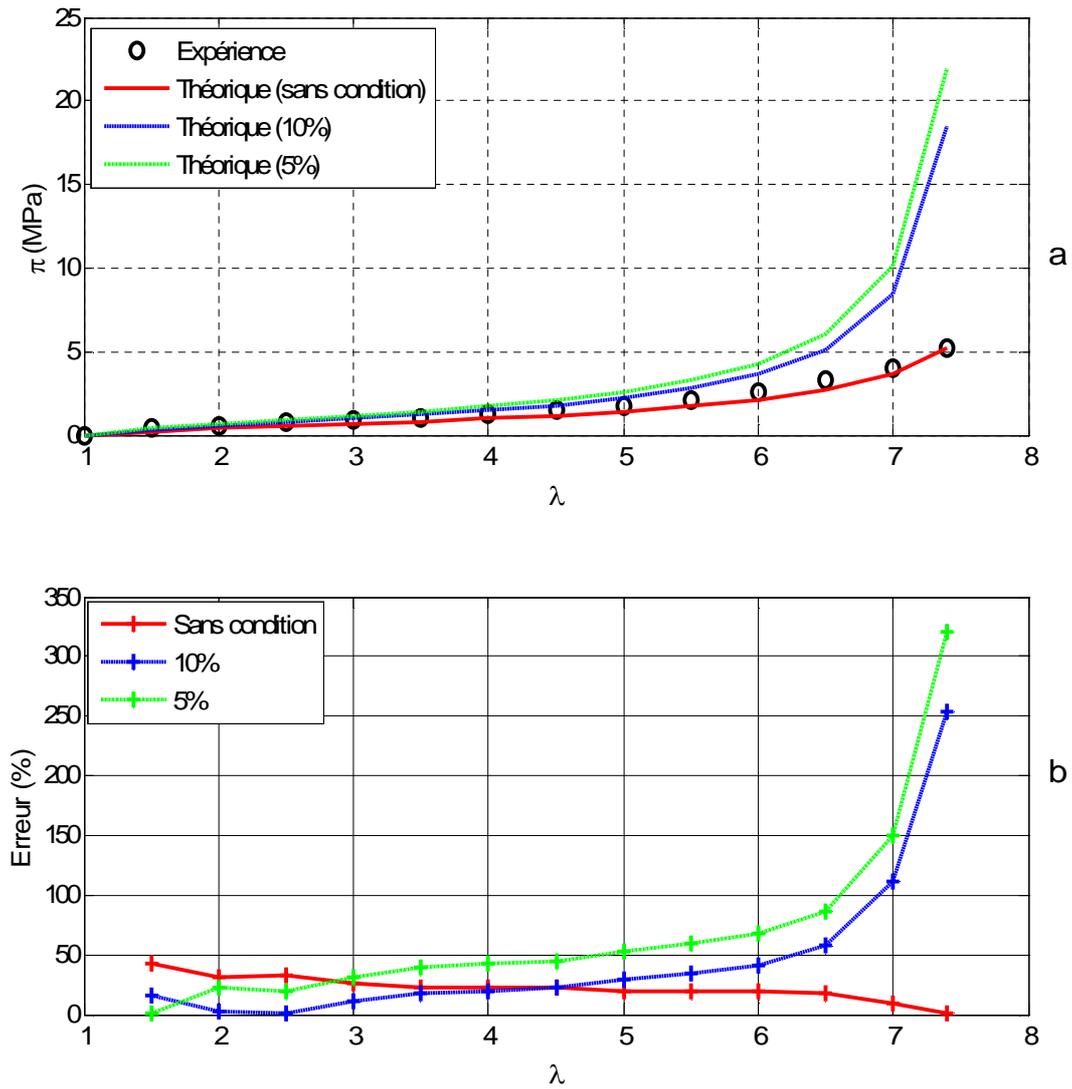


Figure III. 23 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode SQP

(a) Contrainte de Piola Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

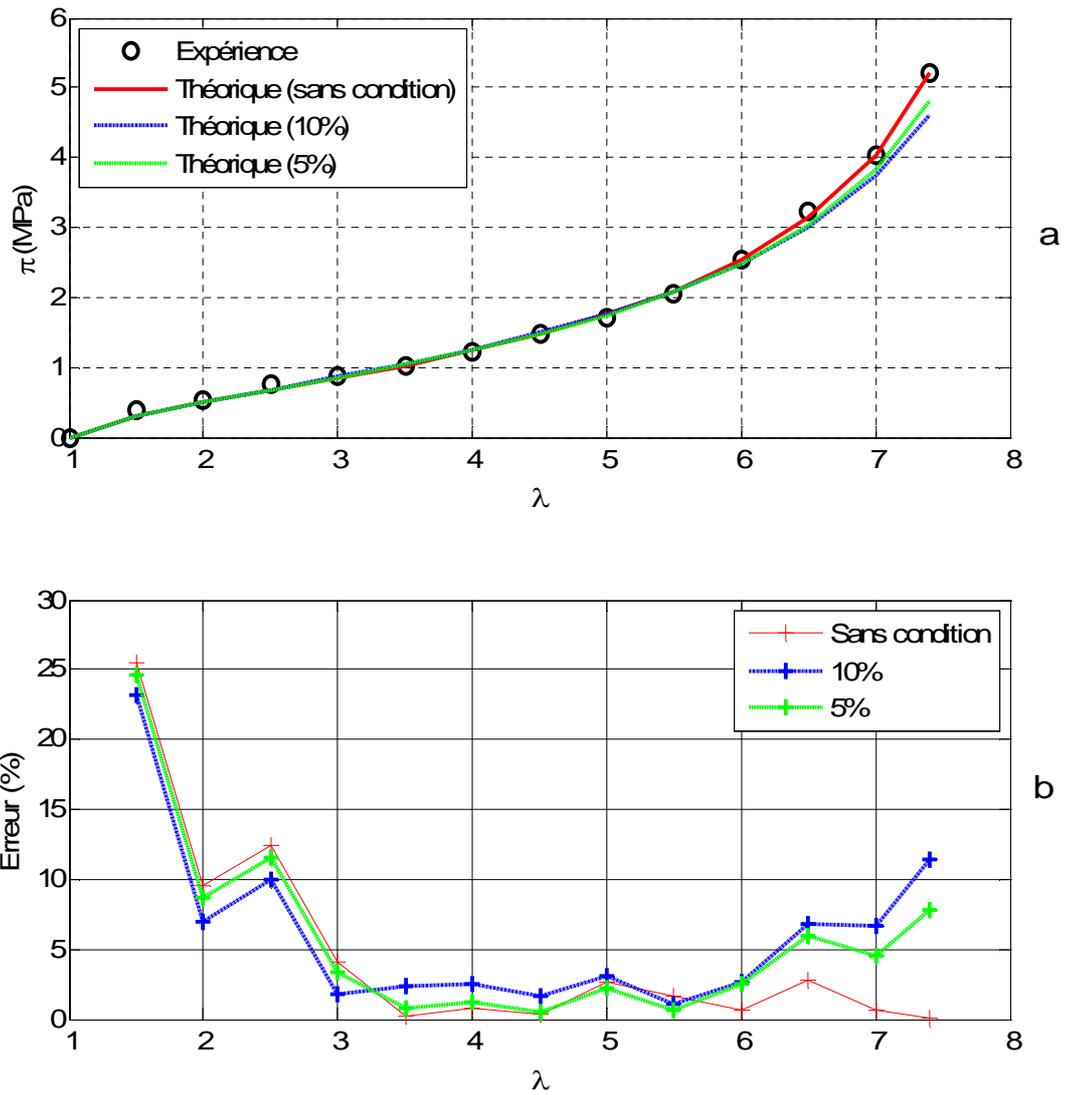


Figure III. 24 : Identification du modèle d'Arruda-Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode de Monte Carlo

(a) Contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

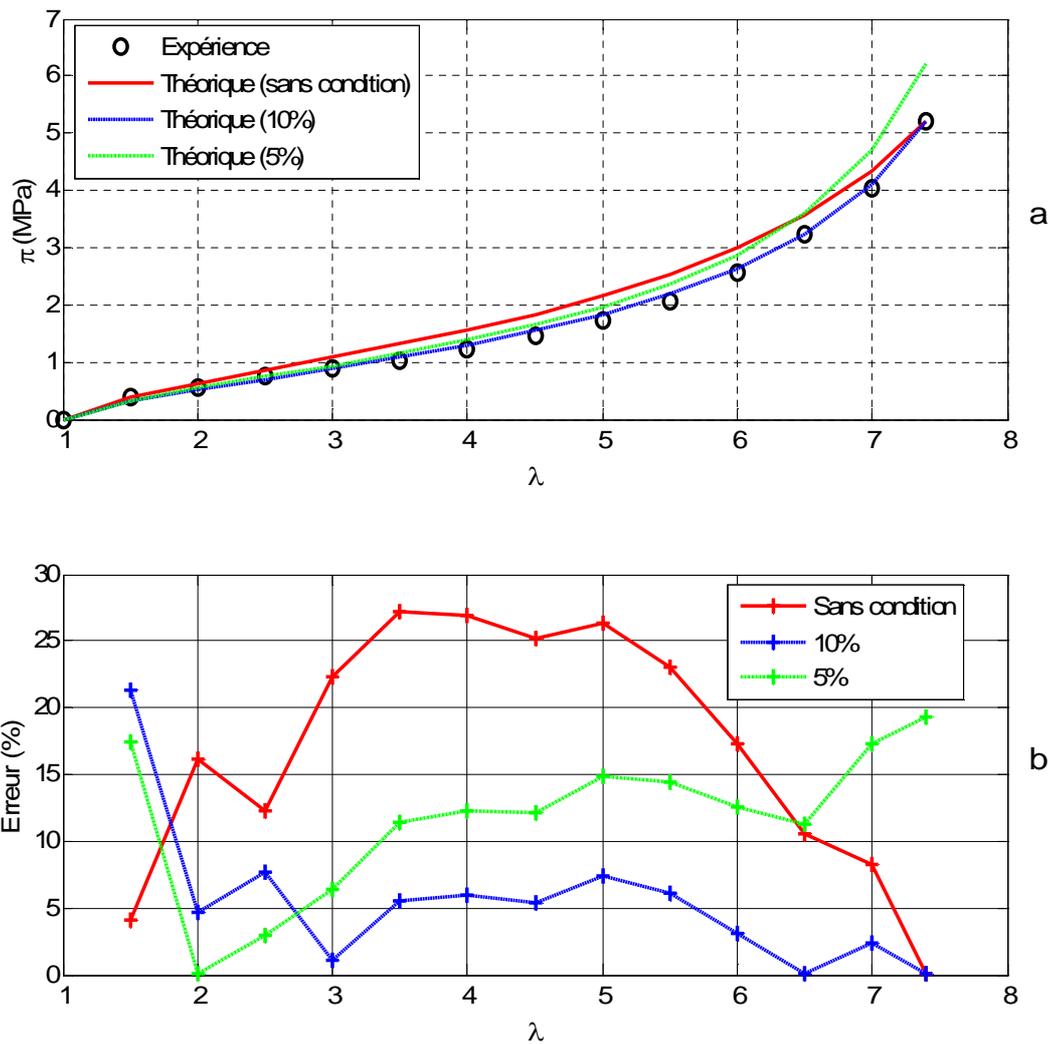


Figure III. 25 : Identification du modèle d'Arruda- Boyce sur l'essai de TRELOAR en traction uni-axiale à l'aide de la méthode génétique

(a) Contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de l'élongation, (b) : Erreur relative en fonction de l'élongation

Il est clair que les méthodes de Monte Carlo et d'algorithme génétique donnent les meilleurs résultats.

Le modèle d'Arruda Boyce donne de bons résultats surtout pour les valeurs élevées de l'élongation ce qui implique que son domaine de validité est $\lambda \in [1, 7.4]$

III. 4. Identification avec un logiciel de calcul par éléments finis

Dans cette étude nous allons présenter les résultats de l'identification des trois modèles hyper-élastiques à l'aide de la méthode Simplexe Nelder-Mead en utilisant un logiciel de calcul élément finis.

Rappelons que cette méthode implantée dans ce code de calcul nécessite l'introduction des bornes supérieures et inférieures de chaque paramètre.

III.4.1. Modèle Néo-Hookéen

Algorithme	Paramètre	Borne (min)	Borne (max)
Simplexe	C10= 0.175	0.1	0.25

Tableau III.7 : Résultat de l'identification du modèle Néo-Hookéen avec un logiciel de calcul élément finis.

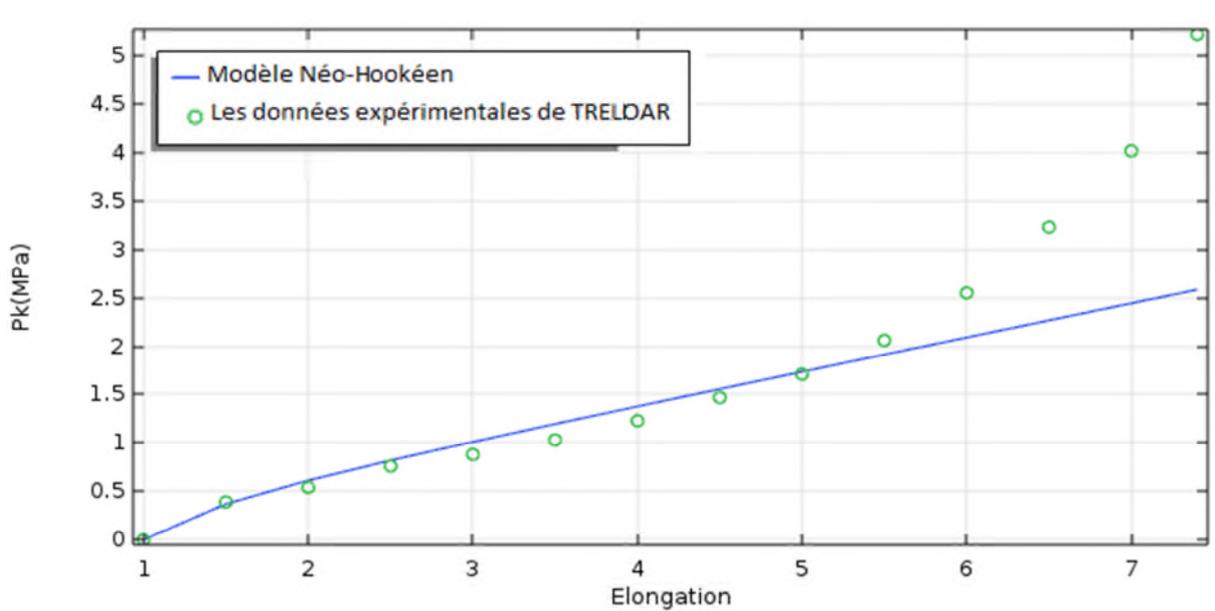


Figure III. 26 : Confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux de Treloar (modèle Néo-Hookéen)

III.4.2. Modèle de Mooney-Rivlin

Algorithme	Paramètres	Borne (min)	Borne (max)
Simplexe	C10=0.175	0.1	0.25
	C01=0.0075	0.000001	0.01

Tableau III. 8 : Résultat de l'identification du modèle de Mooney-Rivlin avec un logiciel de calcul élément finis.

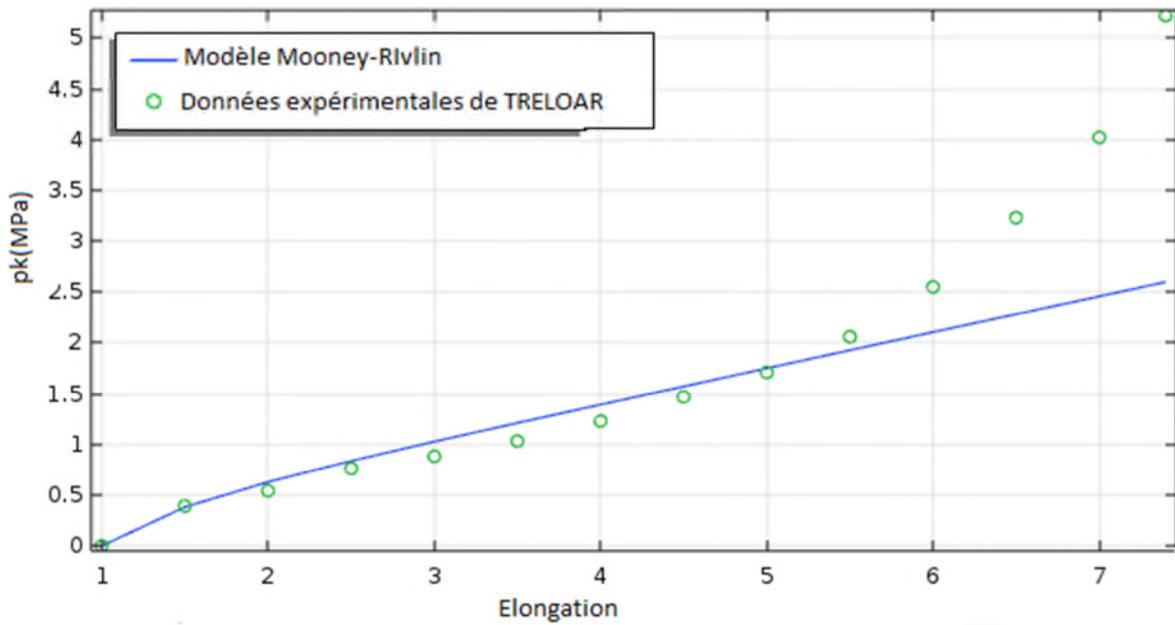


Figure III. 27 : Confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux de Treloar (modèle de Mooney-Rivlin)

III.4.3. Modèle Arruda-Boyce

Algorithme	Paramètres	Borne (min)	Borne (max)
Simplexe	$\mu_0=0.269$	0.2	0.5
	N8=25.868	20	30

Tableau III.9 : Résultat de l'identification du modèle d'Arruda-Boyce avec un logiciel de calcul élément finis.

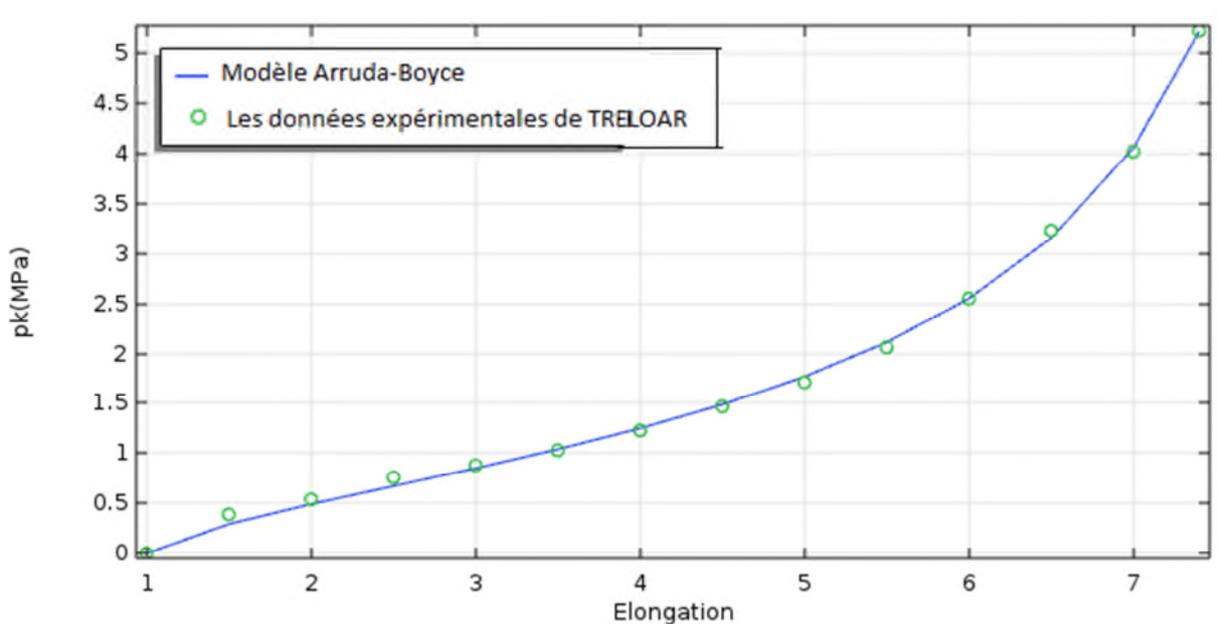


Figure III. 28 : Confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux de Treloar (modèle d'Arruda -Boyce)

Les résultats trouvés montrent que la méthode implémentée sous le code de calcul permet de définir le domaine de validité des différents modèles.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quatre algorithmes d'optimisation et leur application pour l'identification paramétrique de trois modèles hyper-élastiques. Il est clair que les méthodes stochastiques fournissent généralement de meilleurs résultats.

Conclusion générale

Ce travail a permis de présenter quatre méthodes d'optimisation très utilisées pour l'identification paramétrique. Nous avons appliqué ces quatre algorithmes de minimisation pour identifier les paramètres matériels de trois modèles hyper-élastiques, les modèles Néo-Hookéen, Mooney-Rivlin et Arruda -Boyce.

Les objectifs principaux de notre travail sont :

Faire une comparaison entre les quatre méthodes de minimisation. Les résultats obtenus montrent que les méthodes stochastiques de Monte Carlo et d'algorithme génétique sont généralement très performantes en termes de convergence. Cependant, elles sont plus coûteuses en temps que les méthodes déterministes du simplexe Nelder Mead et SQP.

Nous avons également montré que la méthode du simplexe qui ne nécessite pas l'introduction du domaine de définition des paramètres matériels peut donner des résultats incohérents, par exemple une contrainte négative de traction.

Le deuxième objectif était de présenter une procédure qui permet de définir le domaine de validité de chacun des modèles hyper-élastiques utilisés dans l'étude. Dans cette partie, nous avons réussi à écrire un programme permettant la recherche des paramètres d'un modèle en fonction de l'erreur moyenne entre les valeurs expérimentales et théoriques des contraintes.

Enfin, nous avons utilisé un logiciel de calcul par éléments finis pour identifier les trois modèles hyper-élastiques. La méthode choisie est la méthode du simplexe avec définition des bornes supérieures et inférieures des paramètres. Nous pouvons remarquer que les résultats obtenus sont similaires à ceux déterminés à l'aide de la programmation.

Notons que récemment, les méthodes hybrides sont utilisées puisqu'elles permettent de combiner les points forts de chaque catégorie, à savoir la convergence rapide et la robustesse.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] : Yahiaoui Karim, Etude expérimental du comportement d'une membrane en élastomère soumise à une pression interne, mémoire du Master, Université Bejaia .

[2] : Alexis. Delattre, caractérisation et modélisation du comportement hyper-viscoélastique d'un élastomère chargé pour la simulation des pièces lamifiées élastomère-métal et étude en fatigue, Thèse de doctorat, Université Francois Rabelais de Tours, le 19 septembre 2014.

[3] : Jean – Louis poisson, Détermination d'un critère de fatigue multiaxial appliqué à un élastomère synthétique, Thèse de doctorat, Université Francois Rabelais de Tours, juin 2001.

[4] : Imen Elkhaldi-Mkaouar, Application de la Différentiation Automatique pour l'identification, l'optimisation et l'étude de sensibilité dans quelques problèmes mécaniques, Thèse doctorat de l'université de Lorraine, le 12/03/2012.

[5] : Bouzidi Safia, contribution à la modélisation des phénomènes dissipatifs des élastomère chargés – approche différentielle, Thèse doctorat, Université de Bejaia, 17/02/2016.

[6] : Bouzidi Safia, modélisation micro – mécanique du comportement hyperélastique des élastomère composites, mémoire Magister, Université de Bejaia, 2006.

[7] : Stephane Meo, modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco hyperélasticité, Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée Aix Marseille 2.

[8] : Adel. Zine. Fatigue multiaxiale des élastomères vers un critère de dimensionnement unifié, 2006, Thèse de doctorat, Université de Lille.

[9] : Gilles Marckmann, contribution à l'étude des élastomères des membranes soufflées, thèse de doctorat, le 7 juin 2004, l'école centrale de Nantes et l'université de Nantes.

Références bibliographiques

- [10] : El Hacem. Brahim, Apport des outils d'optimisation pour l'identification des lois de comportement mécanique des matériaux. Thèse de doctorat, Université Lille1.2015.
- [11] Y. Saadallah, S. Derfouf, B. Guerira, M. Hadid, identification des paramètres viscoélastique et viscoplastique d'un modèle rhéologique par la technique des algorithmes génétiques, Courrier du Savoir – N°24, Septembre 2017, pp.121-128.
- [12] : A. Kaci , H.)Béchir , L. Chevalier, sur une méthode originale d'identification des lois comportement hyperélastique des élastomères, Rhéologie, Vol. 10, 58-64 2006.
- [13] : Jean-Sébastien Affagard, Identification des propriétés hyperélastiques des muscles de la cuisse à l'état passif. Couplage des techniques de corrélation d'images aux techniques d'imagerie médicale, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne (UTC), 2013.
- [14] : [http://www. Programmation quadratique successive Wikipedia](http://www.Programmation quadratique successive Wikipedia).
- [15] : Marco Antonio Luersen, GBNM : Un Algorithme d'Optimisation par recherche directe application à la conception de monopalmes de nage, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, 2004.

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'identification paramétrique des modèles hyper-élastiques. Dans la première partie, nous avons identifié les paramètres de trois modèles hyper-élastiques de la littérature, à savoir le modèle Néo-Hookeen, Mooney-Rivlin et Arruda-Boyce. Dans la deuxième partie, nous avons déterminé le domaine de validité de chaque modèle en utilisant les résultats expérimentaux de Treloar sur le latex en traction uni-axiale.

Mots clés : Elastomères, Hyper-élasticité, Optimisation, Identification.

Abstract

This work is part of the parametric identification of hyper-elastic models. In the first part, we have identified the parameters of three hyperelastic models of the literature, namely the Neo-Hookean, Mooney Rivlin and Arruda Boyce models. In the second part, we determined the range of validity of each model using the experimental results of Treloar on the latex in the case of extension test.

Key Words : Elastomers, Hyper-elasticity, Optimization, Identification