



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Dynamique des Fluides et Energétique

Thème

Les fractales et les systèmes complexes

Présenté par

Mlle BERKANI SOUAD

Soutenu le : 09/07/2019

Devant le Jury composé de:

Nom	Prénom	Département d'affiliation	Qualité
Mme OURRAD	MEZIANI OUERDIA	Département de physique	Présidente
Mme AMATOUS	NAWAL	Département de physique	Examinatrice
Mme BOUCHARA	LYDIA	Département de physique	Encadreuse

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout Puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je voudrais adresser toute ma reconnaissance à l'encadreuse de ce mémoire, en l'occurrence Mme BOUCHARA, qui fut la première à me faire découvrir le sujet et qui a guidé mon mémoire.

Je tiens à remercier également les enseignants de l'université d'Abderrahmane MIRA, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

L'enseignement de qualité dispensé par le Master « Dynamique des Fluides et Energétique » a également su nourrir mes réflexions et a représenté une profonde satisfaction intellectuelle, merci donc aux enseignants.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire, en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens à témoigner toute ma gratitude à ma famille pour l'affection et le soutien inestimable qu'elle m'a accordé depuis le début de mes études.

Dédicaces

En signe de respect et de reconnaissance, je dédie le présent mémoire à tous ceux qui ont, de près ou de loin, contribué à son aboutissement et à ma réussite.

Liste des figures

Figure 1 : Résumé chronologique de l'histoire des fractales

Figure 2 : Objet non fractal

Figure 3 : Objet fractal

Figure 4 : Autosimilarité dans le triangle de Sierpinski

Figure 5 : Autosimilarité dans le chou romanesco

Figure 6 : Autosimilarité dans la fougère

Figure 7 : Présentation graphique d'un système complexe

Figure 8 : Dimension fractal selon Hausdorff

Figure 9: Étapes de construction du Tapis de Sierpinski

Figure 10 : Étapes de la construction d'une courbe de Von Koch

Figure 11 : Étapes de construction de la courbe de Hilbert

Figure 12 : L'ensemble de Cantor aléatoire

Figure 13: L'ensemble de Cantor régulier

Figure 14 : Ensembles de Julia

Figure 15: L'ensemble de Mandelbrot

Figure 16 : Mouvement aléatoire permanent des particules

Figure 17 : Schéma explicatif du mouvement Brownien

Figure 18 : Exemple de multifractale

Figure 19 : Hiérarchie des ilots 2-3-8-8-8 dans le cas de la standard Map pour $k=6.908745$

Figure 20 : Enveloppe Hölderienne d'un signal au point x_0

Figure 21 : Le spectre des singularités « $f(\alpha)$ »

Figure 22 : Le spectre des singularités « $\tau(q)$ »

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : les principales différences qui existent entre la géométrie fractale et la géométrie euclidienne

Le tableau 2.1 : certains objets, leurs représentations ainsi que leurs dimensions topologiques

Le tableau 3.1 : quelques valeurs de dimensions fractales

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Résumé/ Abstract

Introduction générale1

Chapitre 1 : Présentation des fractales dans les systèmes complexes3

Section 1 : Aperçue sur les fractales.....3

1. Evolution des fractales.....3

2. Définition des fractales4

3. La géométrie euclidienne et la géométrie fractale5

4. Caractéristiques d'un objet fractal5

5. Les fractales dans la nature et dans l'univers8

Section 2 : Les systèmes complexes9

1. Les fractale : une géométrie complexe incontournable9

2. Théorie des systèmes complexes10

3. Les systèmes complexes des sciences physiques11

4. Propriétés des systèmes complexes 12

5. Les méthodes et outils de l'étude des systèmes complexes 12

Section 3 : Dimension fractale13

1. Notion de dimension fractale et d'invariance d'échelle14

2. Les types de dimensions fractales14

2.1.La dimension topologique.....14

2.2.La dimension de Hausdorff-Besicovitch15

2.3.La dimension du Tapis de Sierpinski16

3. Méthodes de calcul de la dimension fractale18

Chapitre 2 : les fractales déterministes et les fractales aléatoires dans les systèmes complexes20

Section 1 : Les fractales déterministes20

1. Les fractals linéaires20

1.1 La courbe triadique de Von Koch20

1.2 La courbe de Hilbert.....	22
1.3 L'ensemble triadique de Cantor	23
2. Les fractals non linéaires	24
2.1 Les ensembles de Julia	24
2.2 L'ensemble de Mandelbrot.....	25
 Section 2 : Les fractals aléatoires (non déterministes)	26
1. Objets fractals naturels.....	26
2. Les ensembles fractals aléatoires	26
2.1. Le mouvement Brownien	26
2.2. La méthode de Bouligand-Minkowski	31
 <u>Chapitre3 : Le formalisme multifractal dans les systèmes complexe</u>	36
 Section 1 : Formalisme multifractal.....	36
1. Historique des multifractales	36
2. Du Mono au multifractal	37
3. Transport multifractal.....	38
4. Analyse multifractal et formalisme multifractal.....	39
5. L'intérêt de faire une analyse multifractal	40
5.1. Exposant de Hölder	40
5.2. Dimension de Hausdorff	42
5.3. Spectre multifractal.....	43
 Section 2 : Champs d'application des fractales.....	45
1. Domaines d'application des fractales	45
2. Apport des fractales à la science moderne.....	46
 Conclusion générale.....	48

Bibliographie

Introduction Générale

Introduction générale

L'apparition de la notion « fractale » au début des années 1970, a représenté une révolution consistante dans les divers domaines.

Les fractals ont été inventés par le mathématicien Benoit Mandelbrot, pour décrire la géométrie de la nature, dont les formes complexes et irrégulières échappent à la géométrie classique. Il était le pionnier ayant pris conscience, que de nombreuses formes dans la nature présentaient une structure fractale, il a remarqué que « *les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, les rivages ne sont pas des arcs de cercle, l'écorce d'un arbre n'est pas lisse et l'éclair ne trace pas de ligne droite* » [1]. La géométrie fractale rend compte de la complexité de la nature et permet de l'étudier. Par conséquent, le concept de fractal a été introduit, dans le but d'étudier les phénomènes et les formes irrégulières et fragmentées.

L'effort réalisé par Mandelbrot, pour l'unification dans une même science, des courbes de longueur infinie et des surfaces présentant des irrégularités à toutes leurs échelles d'observation, a été et demeure, d'un grand intérêt scientifique, comme en témoigne, une organisation au Canada pendant plusieurs années, du congrès sur « L'ingénieur et les fractals » [2].

L'analyse fractale a ouvert de nouveaux champs de prospection et d'investigation en ingénierie, autour de questions, notamment centrées sur :

- ✓ La rugosité de certaines surfaces élaborées par des techniques aléatoires de finissage (sablage, rodage);
- ✓ Le transfert de matière pendant les essais de frottement et d'usure qui libèrent des particules dont la forme et la distribution de surface est fractale;
- ✓ Les phénomènes non linéaires ou turbulents qui présentent une évolution temporaire classique ;

De nos jours, le concept fractal a pris de l'ampleur et a une importance primordiale, du faite que les difficultés liées aux phénomènes engendrant des structures fractales sont, d'une manière générale, très difficiles. Cependant, leur formulation et l'appréhension géométrique ont été considérablement simplifiées à travers le formalisme multi fractal. Ceci explique certainement l'immense succès que connaît ce concept dans tous les phénomènes dont l'apparence présente un désordre.

Les fractales sont à la base d'un nouveau système de géométrie permettant de représenter des objets très irréguliers. Elles constituent pour de nombreux scientifiques un nouvel outil, de plus elles permettent d'apporter une nouvelle analyse et une nouvelle façon de raisonner. Ceci étant elles ont aidé à solutionner de nombreux problèmes scientifiques jusque là sans réponse. Elles ont été reconnues et sont régulièrement utilisées dans de nombreux domaines aussi divers que l'astronomie, l'agriculture, la topographie, la médecine, et le traitement fractal des séries chronologiques s'est généralisé, notamment en climatologie et en économie financière.

Ce qui nous a incité à s'intéresser aux fractales dans ce présent mémoire et d'essayer de répondre à la problématique suivante : **Comment l'analyse fractale a pu remédier au calcul des dimensions des objets de structure irrégulière et dont la géométrie traditionnelle a échoué ?**

Pour ce faire, il s'avère nécessaire de définir qu'est-ce qu'une fractale ? En quoi consiste un système complexe ? Ensuite nous allons étaler les principales dimensions étudiées dans le cadre des fractales.

Puis, nous allons essayer de voir quels sont les différents types de fractales, le formalisme multifractal, et de citer quelques domaines d'applications des fractales et les apports des fractales notamment dans la science moderne.

Afin d'apporter des éléments de réponses à notre problématique, nous avons structuré notre travail selon le plan suivant :

- ✓ Un premier chapitre introductif qui présentera : **les fractales dans les systèmes complexes**, où seront développés les notions et les définitions de base ayant trait aux fractales ;
- ✓ Le second chapitre portera sur : **les fractales déterministes et les fractales aléatoires dans les systèmes complexes**, qui permettra de bien saisir ces deux catégories de fractales et de les rendre plus claire à travers la présentation de certaines études y afférentes;
- ✓ Le troisième chapitre sera consacré pour le **formalisme multifractal** et sur la présentation de quelques **domaines d'application des fractales**.
- ✓ Enfin, une conclusion générale.

***Chapitre 1 : Présentation des fractales
dans des systèmes complexes***

Chapitre 1 : Présentation des fractales dans les systèmes complexes

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter certaines notions, définitions, et ce, à travers trois sections, la première est un aperçu sur les fractales, la seconde sur les systèmes complexes et la troisième sera consacrée pour la dimension fractale.

Section 1 : Aperçu sur les fractales

1. Evolution des fractales

Platon avait cherché à expliquer la nature au moyen de cinq formes solides régulières, Newton et Kepler ont tordu le cercle de Platon en ellipse. La science moderne a étudié les formes de Platon en termes de particules et d'ondes, elle a généralisé les courbes de Newton et Kepler en termes de probabilités relatives.

Les fractales sont largement attribuées au mathématicien Benoît Mandelbrot (1924-2010). Au fil de sa carrière, il s'est vu confier la responsabilité d'étudier et d'enseigner sur les ensembles complémentaires dits de Julia et de Fatou, les premiers ayant été découverts par le mathématicien Gaston Julia (1893-1978), qui avait été l'un des professeurs de Mandelbrot. Coup de chance, son poste à Harvard lui donnait accès à des ordinateurs IBM tout nouveaux, un véritable luxe pour l'époque. Il s'est servi de ces ordinateurs pour générer des ensembles de Julia, dont il a isolé une sous-catégorie qui demeuraient invariants à toute échelle. Ces ensembles montraient un degré de récurrence et d'autosimilarité inédits, et il les a appelés *fractales*. Les ensembles n'apparaissent jamais lisses comme une droite ou une courbe euclidienne mais plutôt dentelés, pointus, recourbés, et ce presque également à toutes les échelles.

En 1975, il a introduit les fractales au public dans un livre en français (*Les objets fractals : forme, hasard, dimension*), suivi quelques années plus tard d'un livre en anglais (*The Fractal Geometry of Nature*, 1982). De nos jours, l'ensemble de Mandelbrot et celui de Julia sont les plus célèbres.[1]

Le résumé de l'approche historique des fractales est présenté dans la (**figure 1**).

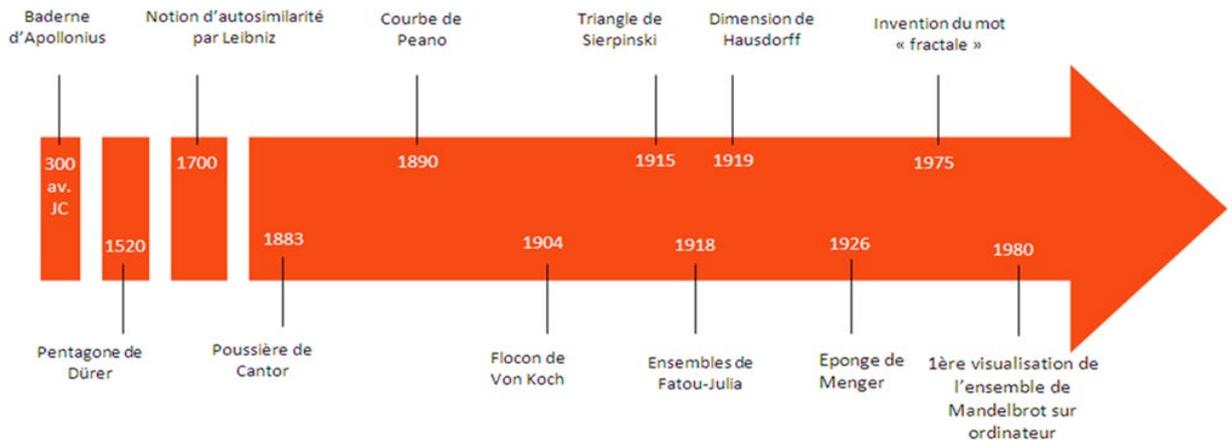


Figure 1 : Résumé chronologique de l'histoire des fractales

2. Définition des fractales

Le terme « *fractale* » veut dire qui a été fractionné à l'infini, à partir de la racine latine *fractus*, qui signifie brisé, irrégulier. Ce terme était au départ un adjectif : un objet fractal.

Selon Falconer K (1990) : « *nous ne devons pas essayer de définir strictement les fractales, mais nous devons considérer comme fractal, toute structure qui possède un certain nombre de caractéristiques minimales* » [2].

Plus généralement, une fractale est définie comme « *une figure dont la dimension de Hausdorff est plus grande que la dimension topologique* » [3].

Mandelbrot était perplexe sur le comportement des autres mathématiciens, qui se sont concentrés uniquement sur la géométrie des objets réguliers (droite, carré, cercle,...etc.), émanant de la création humaine et non celle de l'environnement, à savoir la nature.

Ainsi il définit un objet fractal comme « *un ensemble qui présente des irrégularités à toutes les échelles. C'est un univers virtuel à définition infinie, chaque zoom sur une partie de l'image révèle de nouveaux détails, de nouvelles formes. Par contre un objet est dit non fractal s'il n'y a pas d'apparition de nouvelles formes à chaque zoom d'une de ses parties* » [4], tel qu'il est illustré dans la (figure 2) et (figure 3) ci-après :

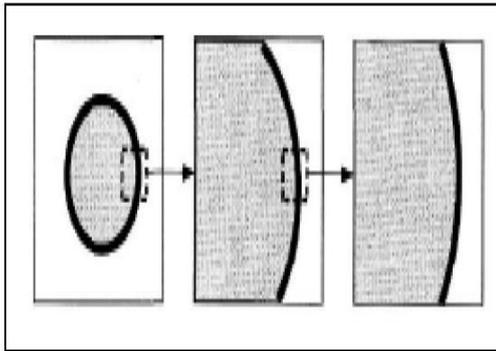


Figure 2 : Objet non fractal

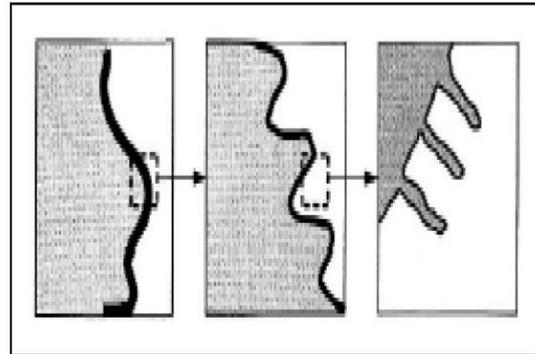


Figure 3: Objet fractal

Les définitions de la dimension fractale, les propriétés d'autosimilarité et d'auto affinité, aident à la compréhension de ce concept.

3. La géométrie euclidienne et la géométrie fractale

La géométrie fractale constitue un complément qui manquait à la géométrie euclidienne. Les principales différences qui existent entre la géométrie fractale et la géométrie euclidienne sont représentées dans le tableau suivant :

Tableau 1.1 : les principales différences qui existent entre la géométrie fractale et la géométrie euclidienne

Géométrie fractale	Géométrie euclidienne
invention moderne par le mathématicien Benoît Mandelbrot (1975)	mise au point par le mathématicien grec Euclide , 300 ans avant J.C.
inexistence de taille ou d'échelle spécifique	basée sur une taille ou échelle caractéristique
bien adaptée pour décrire la géométrie dans la nature	utilisée pour la description des objets fabriqués par l'homme (architecture et topographie)
objets décrits par un algorithme	objets décrits par une formule simple

4. Caractéristiques d'un objet fractal

Les conditions de base en vertu desquelles, une surface de rupture peut être reconnue comme fractale sont les suivantes :

- ✓ Un objet fractal est obtenu par **itération**.

- ✓ Sa **forme** est extrêmement **irrégulière**, soit extrêmement interrompue ou fragmentée, quelle que soit l'**échelle d'observation**. Il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels (caractéristique de rugosité) ;
- ✓ Il est exactement ou statistiquement **auto-similaire** (le tout est semblable à une de ses parties) ;
- ✓ Il a des **détails similaires** à des **échelles** arbitrairement petites ou grandes ;
- ✓ Sa **dimension fractale dépasse** sa dimension **topologique** et possède une valeur non entière.

En effet, la géométrie fractale se base sur « *La répétition d'un principe d'emboîtement d'échelles* » [5].

Géométriquement, une fractale est caractérisée par :

- **L'initiateur** ou figure initiale (L) Est la forme de la structure de base. Il s'agit en général d'un objet géométrique euclidien (un carré, un cercle,...). L'initiateur joue un rôle mineur dans la géométrie fractale. Il représente la partie euclidienne dans un objet fractal. Il exprime si un objet ressemble plutôt à un carré ou à un cercle ou à une autre forme euclidienne. Il est lié au paramètre « facteur de forme »
 - **Le générateur** : la règle de répétition qui génère le système spatial hiérarchique est désignée comme le générateur de la fractale. Il définit de quelle manière on passe d'une échelle à la suivante et contient l'information sur les paramètres qui caractérisent le principe d'emboîtement.
 - **L'itération** : une fractale est générée en appliquant la règle de répétition de façon itérative, en passant par différentes étapes d'itération. À chaque étape, la structure générée est constituée de répliques de la figure initiale qui s'appellent les éléments ou éléments occupés (N) de la structure. L'ensemble de ces éléments occupés est désigné comme la masse occupée d'une fractale à une étape d'itération donnée.
- ✚ **Définition de l'autosimilarité** : l'autosimilarité est le caractère d'un objet dans laquelle on peut trouver des similarités en l'observant à différentes échelles. Par conséquent, une fractale est un objet dont chaque élément est aussi un objet fractal, tel qu'il est visible dans la (figure 4) relative au triangle de Sierpinski.

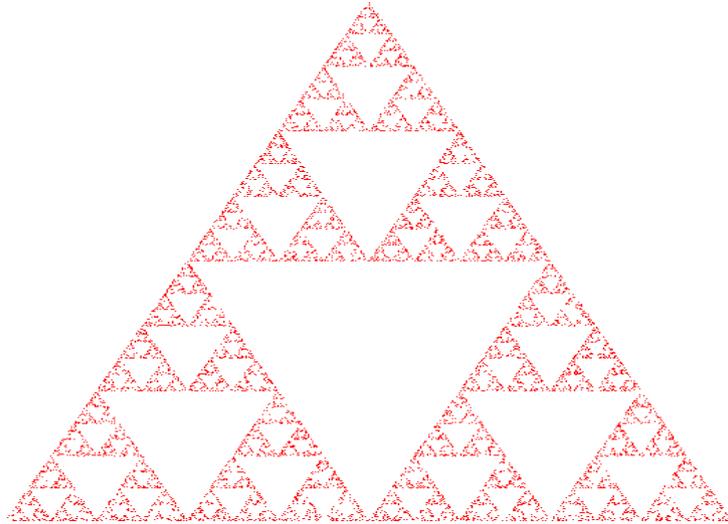


Figure 4: L'autosimilarité dans le triangle de Sierpensi

Remarque : cette figure est obtenue en utilisant le programme « MAPLE »

L'exemple le plus illustrant de l'autosimilarité est le chou romanesco (figure5), appelé également « le chou des mathématiciens ».



Figure 5 : Autosimilarité dans le chou romanesco

Un autre exemple peut être énoncé afin de mieux cerner l'autosimilarité, à savoir la feuille de fougère (**figure 6**), qui est composée de feuilles plus petites, elles-mêmes composées de feuilles plus petites de même forme, et ainsi de suite.



Figure 6 : Autosimilarité dans la fougère

4. Les fractales dans la nature et dans l'univers

Des formes fractales peuvent être observables dans la nature, ces objets ont une structure auto-similaire sur une échelle étendue, mais finie.

A. Les fractales en biologie végétale : les arbres et les végétaux à nature fractale :

L'analyse d'un arbre sous différentes échelles, permet de constater l'existence d'un schéma qui se répète sous ces échelles différentes. En regardant avec plus d'attention les branches de cet arbre, on peut discerner un schéma qui semble se répéter, même principe que l'autosimilarité pour les fractales.

Dans le même principe, l'inflorescence qui est la disposition des fleurs sur la tige d'une plante à fleur, on constate que le motif de disposition s'apparente à nouveau à celui d'une fractale.

B. Les fractales en morphologie animale : à titre d'exemple l'éponge de mer, qui présente des particularités similaires à celles des fractales, une infime partie prélevée sur l'éponge grossie plusieurs fois est semblable à l'éponge tout entière.

C. Les fractales en anatomie : il y a lieu de citer les vaisseaux sanguins, les poumons et l'intestin grêle. L'observation de la structure de ce dernier à travers des grossissements différents, l'autosimilarité est très claire, il existe des villosités à toutes les échelles d'observations, jusqu'aux cellules de l'intestin.

D. Les fractales se retrouvent également en géologie : les fractales constituent le paysage (côtes, montagnes, rivières, vagues...).

Par exemple : le nuage, qui se forme par condensation de la vapeur d'eau, présente un contour morcelé et brisé qui possède le même motif lorsque l'on change d'échelle, on constate l'existence d'une surface ayant une courbure fractale.

E. Les fractales en météorologie : la présence des fractales dans le domaine météorologique se manifeste à travers les avalanches, les tourbillons, les ouragans, les éclairs ...etc.

L'éclair par exemple, se produit pendant un orage, du fait de l'existence des charges négatives dans les nuages qui se sont accumulées en quantité suffisante, ajoutant à cela la présence de l'eau de pluie qui est conductrice de l'électricité. Lorsque deux gouttes d'eaux sont sensiblement à la même distance, l'éclair se divise. Ainsi, la position des gouttes d'eau étant aléatoire, l'éclair se forme aléatoirement dans l'air en ayant une structure fractale.

F. Les fractales dans l'univers

L'universa de diverses entités, ces entités telles que (les étoiles, les nuages de gaz, les galaxies, les trous noirs) sont rassemblées en amas galactiques de toutes sortes et forment une gigantesque structure et adoptent une organisation fractale.

Section 2 : Systèmes complexes

1. Les fractale : une géométrie complexe incontournable

En physique, les fractales permettent de décrire les phénomènes complexes, non linéaires, non déterministes et donc aléatoires. Dans la pratique, les fractales qui sont des figures géométriques de structure complexe et dont la création ou la forme met en jeu des règles utilisant le fractionnement. Elles sont à la base d'un nouveau système complexe de géométrie permettant de représenter des objets très irréguliers. En physique, où un réseau aimanté, un milieu désordonné, un fluide qui s'écoule de manière turbulente, une galaxie, sont des systèmes complexes.

L'analyse fractale représente une autre approche de la complexité, cette approche est née de la nécessité de trouver des outils adéquats pour modéliser des phénomènes naturels ou artificiels complexes et irréguliers. De nombreux phénomènes complexes naturels, biologiques ou physiques ont été identifiés comme « fractals, et l'étude des modèles qui en découlent a amené des progrès importants (turbulence, modèles de croissance, phénomènes vibratoires, fracture des matériaux, signaux biomédicaux, tremblements de terre, éruptions volcaniques).

2. Théorie des systèmes complexes

La théorie des systèmes complexes est récente, elle est l'objet de nombreux travaux de recherche du fait d'une prise de conscience de la présence des systèmes complexes dans de nombreuses disciplines, et de la nécessité de comprendre leur fonctionnement.

Plusieurs théories ont contribué au développement de la théorie des systèmes complexes, la théorie du chaos est l'une de ces théories :

✚ **La théorie du chaos:** qui est une théorie qui explique qu'il est impossible de prévoir l'état d'un système à long terme malgré les lois physiques, du fait de l'ignorance des conditions de départ du système.[6]

D'abord définir ce qu'est un système : c'est la donnée d'une fonction de transfert, qui décrit le comportement en entrée/sortie du système et d'une fonction de transition, qui fixe les conditions d'évolution de l'état du système.

Un système s'obtient par intégration récursive d'autres systèmes. Il est dit « complexe » lorsque les systèmes ainsi intégrés deviennent plus nombreux ou plus hétérogènes.

Un système complexe est un ensemble constitué d'un grand nombre d'entités en interaction, qui ne permet pas de prévoir sa rétroaction, son comportement ou son évolution. En effet, un système complexe est constitué d'agents qui interagissent :

- Entre eux ;
- Avec leur environnement ;
- Et avec les phénomènes émergents créés par ces interactions.

A titre d'exemple d'un système complexe :

- ✓ **Agents :** particules
- ✓ **Interactions :** Règles de la physique des atomes et particules élémentaires
- ✓ **Phénomène émergent :** Pression, température, courant électrique

A noter qu'un système complexe n'est pas un système compliqué, car ce dernier est un système qui fait intervenir beaucoup de variables et de leurs interactions, mais dont le comportement est prédictible.

Par exemple, un moteur est un système compliqué, mais il ne représente pas un système complexe.

➤ **Définition de l'émergence**

L'émergence est une propriété importante des systèmes complexes, qui consiste un processus de création de phénomènes par ces interactions. Elle est souvent pertinente au niveau global mais dépourvue de sens au niveau individuel des constituants.

Par exemple : la propriété de l'eau d'être liquide n'a de signification que lorsqu'on considère un très grand nombre de molécules d'eau. Une unique molécule d'eau n'est ni liquide ni solide.

Les émergences possèdent de nouvelles caractéristiques vis-à-vis de celles des agents et des interactions qui les ont créés.

➤ **Présentation graphique d'un système complexe :**

Le schéma (figure 7) résume le mécanisme d'un système complexe

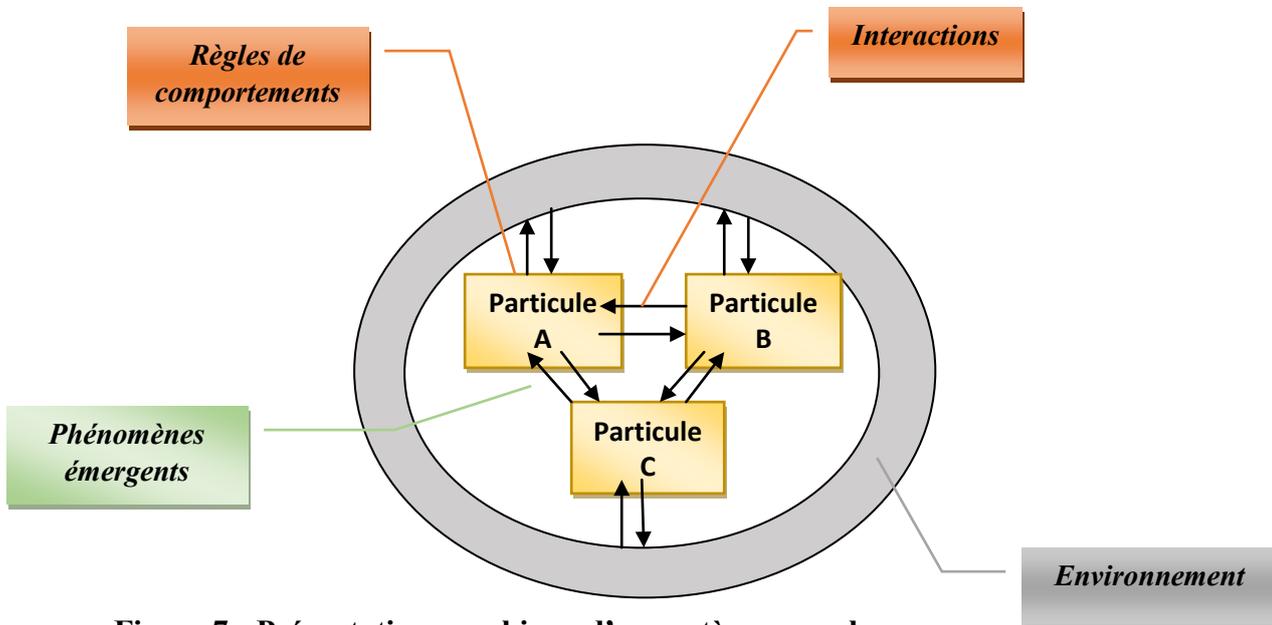


Figure 7 : Présentation graphique d'un système complexe

3. **Systèmes complexes des sciences physiques :** les agents de ces systèmes ont des règles de comportement notablement plus simples que celles des systèmes complexes de sciences du vivant. Il se représente comme suit :

a- **Système cosmologique :**

- Système solaire

b- **Systèmes macroscopiques :**

- Chimie : minérale (petites molécules), organique (grosses molécules)
- Dynamique des fluides : météorologie, diffusion, percolation.

(Imprévisibilité : effet papillon petites causes grands effets)

- Cellules de Bénard : émergence permanente des cellules
- Thermodynamique : systèmes fermés (Carnot), système ouvert dissipatifs (Ilya Prigogine)
- Réseau de distribution d'électricité : phénomène de coupure de courant en cascade

c- Systèmes de particules élémentaires :

- Systèmes d'atomes et de molécules, leurs propriétés macroscopiques (température, pression, organisation...) sont une émergence des relations entre les particules élémentaires.

4. Propriétés des systèmes complexes:

Les propriétés des systèmes complexes sont:

- Sensibilité aux conditions initiales, dynamique cyclique, convergence vers des bassins d'attraction et bifurcations, points de bascule. Ces propriétés relèvent de la théorie du chaos.
- Un système complexe ne peut s'étudier que globalement
- Création de phénomènes émergents souvent surprenants : adaptation, évolution, auto-organisation, coévolution, reproduction (création de nouveaux agents), création d'organisation gigogne (sous-systèmes dans les systèmes), lois de distributions inégalitaires, objets fractal. En effet, les fractales tel que l'ensemble définie par Benoit Mandelbrot constitue un système complexe

5. Les méthodes et outils de l'étude des systèmes complexes

S'intéresser aux systèmes complexes vise différents objectifs :

- Comprendre leur fonctionnement, leurs lois ;
- Prévoir leurs évolutions ;
- Définir des interventions sur les systèmes pour les faire évoluer dans le sens souhaité.

Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes et outils : simulation basée sur des agents (par exemple au moyen d'automates cellulaires), théorie des graphes et réseaux, intelligence collective, analogie avec d'autres systèmes complexes, théorie du bord du chaos, théorie des

réseaux neuronaux, morphogénèse , théorie du chaos, théorie des catastrophes, logique des variables floues, algorithmes génétiques, méthodes de création et d'innovation au moyen d'un processus itératif de reproduction et sélection.

L'importance de la simulation basée sur des agents permet d'étudier le comportement dynamique des systèmes complexes. Elle doit son essor aux progrès de l'informatique. C'est une méthode itérative qui calcule l'état d'un système à l'instant « $t+1$ » en fonction de l'ensemble de son état à l'instant précédent « t ». Elle est donc bien adaptée aux propriétés des systèmes complexes parce qu'à chaque instant « t » elle tient compte de l'ensemble de l'état du système considéré.

La simulation basée sur des agents est une réponse à l'impuissance des mathématiques classiques dans l'étude des systèmes complexes. Il est généralement impossible de les mettre en équation à cause de la variété des agents et de leurs règles de comportement. A chaque instant, tous les agents peuvent avoir des règles de comportement différentes. D'autre part le nombre des objets n'est pas assez élevé pour que les lois statistiques puissent s'appliquer.

Théorie du bord du chaos

La théorie du « bord du chaos » explique le comportement d'un système complexe adaptatif par son degré de stabilité qui est défini par l'impact d'une perturbation du système : [7]

- **Système stable** si l'impact d'une perturbation du système est faible et de courte durée.
- **Système instable** si l'impact est fort, global et permanent.

La simulation informatique du système complexe a montré qu'il existe entre la stabilité et l'instabilité un état appelé « bord du chaos » où l'impact d'une perturbation est de dimension moyenne, locale, mais de longue durée.[8]

En fait, les fractales et le chaos sont deux approches complémentaires, pour le chaos, la géométrie est subordonnée à la dynamique, alors que pour les fractales, c'est la géométrie qui domine. Les fractales fournissent un nouveau langage pour décrire la forme du chaos.

Section 3 : Dimension fractale

La caractéristique la plus importante des fractales est leur dimension fractale, qui est une généralisation de la notion de dimension entière, propre à la géométrie euclidienne.

1. Notion de dimension fractale et d'invariance d'échelle

Dans la géométrie classique, une ligne est un objet à une dimension, une surface est un objet à deux dimensions, un volume est un objet à trois dimensions. Nous sommes donc habitués à des objets dont la dimension (D) est un nombre entier 1, 2 ou 3. Mais il n'est pas précisé quelle serait la dimension d'une série de points sur une ligne, une courbe irrégulière et plane, une surface pleine de convolutions. Dans ce but le terme de dimension fractale a été introduit.

La dimension fractale est donc un nombre qui mesure le degré d'irrégularité ou de fragmentation d'un objet ou qui mesure la rugosité d'une surface. La dimension fractale est une fraction ou un nombre irrationnel (π , 1.23, etc.) ou un entier (Peano).

Cette notion de dimension fractale s'applique aux objets invariants d'échelle, dont les parties sont semblables à l'objet lui-même à une dilatation (agrandissement) près. Lors du changement de l'échelle d'observation d'un objet invariant d'échelle, les formes sont conservées.

Donc, l'invariance d'échelle est une symétrie qui se retrouve à toutes les échelles. Elle implique la récurrence d'un motif à l'intérieur d'un motif.

En effet, la dimension fractale a l'information sur les structures géométriques des fractales, c'est pourquoi elle est considérée comme un indice puissant de mesure de leur irrégularité. Vu l'importance de cet indice et l'impact de son utilisation en pratique, la précision de son estimation est nécessaire.

2. Les types de dimensions fractales

Il existe divers types de dimensions fractales pour une structure fractale donnée, ces dimensions fournissent en général des valeurs proches de la valeur théorique de la dimension fractale

2.1. La dimension topologique D_t

La dimension topologique tient compte de la manière dont est divisé l'objet à mesurer. Si on considère des objets géométriques constitués :

- d'un ensemble de **points**, on dit dans ce cas que sa dimension topologique est $D_t = 0$
- d'éléments de **courbe**, $D_t = 1$,

- d'éléments de **surface** $D_t = 2 \dots$

Le **tableau 2.1** ci-après résume cinq objets, leurs représentations ainsi que leurs dimensions topologiques [9] :

<u>Objets</u>	<u>Représentations</u>	<u>Dimensions</u>
un point		0
une ligne (droite, courbe...)		1
une figure plane (quadrilatère, cercle...)		2
Une figure dans l'espace (parallélépipède, sphère...)		3

A partir des données de ce tableau, on peut constater que les dimensions données sont exclusivement entières. Mais les fractales ne possèdent pas forcément des dimensions entières.

2.2. La dimension de Hausdorff-Besicovitch

La dimension fractale a été proposée en 1919 par Félix Hausdorff et elle a été développée en 1935 par Besicovitch. Elle est souvent appelée de dimension de Hausdorff-Besicovitch. Elle est basée sur la considération de l'ensemble de tous les pavages possibles.

La dimension de Hausdorff d'un fractal est définie comme le quotient logarithmique entre le nombre d'homothétie interne d'un objet sur l'inverse de sa raison [10] :

(1)

$$D = \frac{\ln n}{\ln (1/r)}$$

La dimension fractale selon Hausdorff est présentée dans la (figure 8).

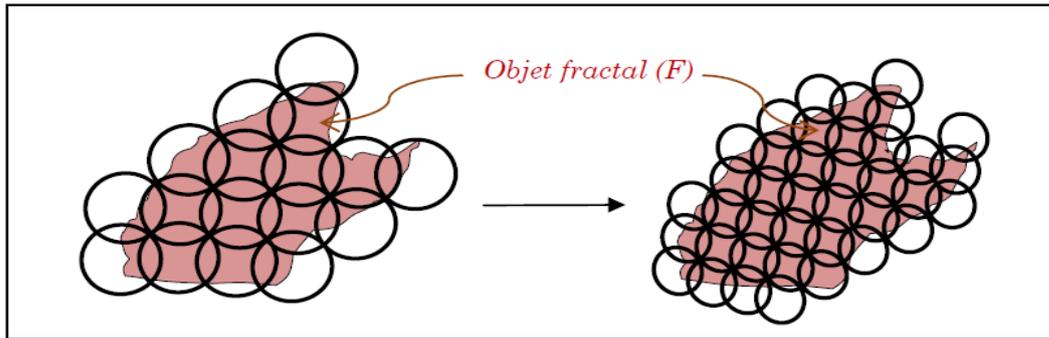
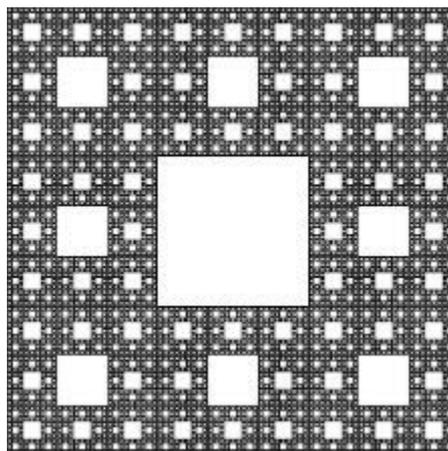


Figure 8 : Dimension fractale selon Hausdorff

2.3. La dimension du Tapis de Sierpinski

Le tapis de Sierpinski imaginé en 1916 par le mathématicien Waclaw Sierpinski, est une fractale qui consiste à diviser un carré en neuf puis retirer celui du milieu n fois. Donc, à chaque itération, il est obtenu huit nouveaux carrés dont la longueur est un tiers de celle des carrés de l'itération précédente.



❖ Calcul de l'aire du carré de Sierpinski :

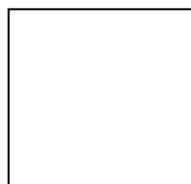
Le calcul de l'aire du tapis s'effectue à travers différentes itérations :

Etape 0

Prenons un carré de côté 1

Son aire est égale à $1 \cdot 1 = 1$

Notons ainsi $U_0 = 1$



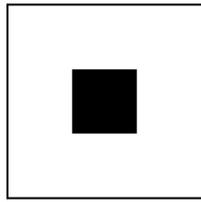
Etape 1

On réalise une première construction

L'aire du tapis est donc égale à l'aire totale du carré

moins le carré central enlevé dont l'aire est de $1/9$

On obtient donc $U_1 = 1 - 1/9 = 8/9$

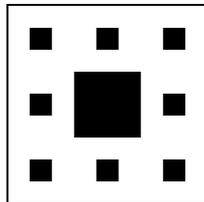


Etape 2

On répète cette opération une seconde fois. Cette fois, l'aire totale du tapis est égale à l'aire de la construction précédente moins l'aire totale des 8 carrés enlevés.

L'aire des 8 carrés enlevés est de $(1/9) * (8/9) = 8/81$

Donc $U_2 = (8/9) - (8/81) = (64/81)$



Etape 3

Après avoir répéter cette opération une troisième fois, le schéma de réflexion est le même que précédemment : l'aire du carré à l'étape 3 est égale à l'aire de la construction précédente moins l'aire des 64 carrés enlevés.

On a donc $U_3 = (64/81) - (64/81) * (1/9) = 512/729$

Etape 4

On réalise une quatrième fois l'opération afin de confirmer la suite de récurrence probable.

L'aire du tapis est égale à l'aire du tapis de la troisième étape moins l'aire des carrés enlevés.

Cette dernière est égale à $1/9$ de l'aire précédente, donc $(512/729) * (1/9) = 512/6561$

Soit $U_4 = (512/729) - (512/6561) = 4096/6561$

Il s'agit d'une formule de récurrence : $U_{n+1} = U_n - U_n * (1/9) = U_n - (U_n/9)$ avec surface unité

$U_0 = 1$

Or (U_n) est une suite géométrique de raison $8/9$.

Donc (U_n) peut être écrite sous la forme explicite suivante :

$$U_n = U_0 * (8/9)^n = (8/9)^n \quad (2)$$

On calcule la limite de l'aire : $-1 < 8/9 < 1$ donc la limite de la suite est 0.

Plus n tend vers ∞ , plus la limite se rapproche de 0. C'est à dire, que l'aire sera égale à 0 pour l'itération n , soit qu'on aura enlevé toute la surface du tapis à l'itération n .

A titre de récapitulation des étapes citées ci-dessus, le tapis est obtenu en découpant le carré en neuf carrés égaux avec une grille de trois par trois, et en supprimant la pièce centrale, et en appliquant cette procédure indéfiniment aux huit carrés restants, comme illustré à la figure 9 suivante :

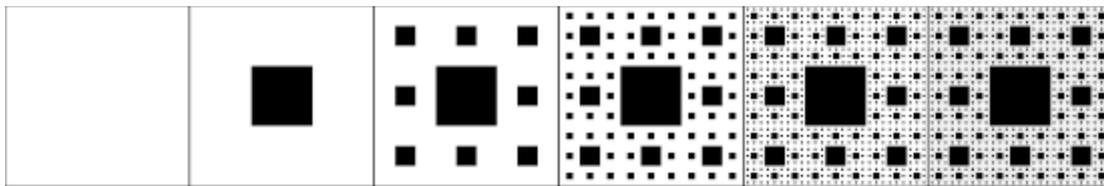


Figure 9: Étapes de construction du Tapis de Sierpinski

❖ Calcul de la dimension du tapis

À l'itération U_{n+1} , 8 nouveaux carrés apparaissent d'une longueur d'un tiers de l'itération U_n .

On a donc : $[(1/3)^n]^D = 8^n$

$$\Rightarrow \log(3^n)^D = \log(8^n)$$

$$\Rightarrow D \log(3^n) = \log(8^n)$$

$$\Rightarrow D = \log(8^n) / \log(3^n)$$

$$\Rightarrow D = n \log(8) / n \log(3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{D = 1,89}$$

Le tapis de Sierpinsky a donc une dimension d'environ **1,89** à l'énième itération.

3. Méthodes de calcul de la dimension fractale

Il existe de nombreuses méthodes de calcul de la dimension fractale, ces méthodes utilisent divers algorithmes pour estimer le paramètre N (le nombre d'Homothéties internes).

Toutes les méthodes de calcul reposent sur trois étapes :

- Mesurer les quantités représentées par l'objet en utilisant différentes mesures ;
- Tracer le logarithme des quantités mesurées en fonction du logarithme des tailles et approximer par régression linéaire ;
- Estimer la dimension fractale comme étant la pente de la droite obtenue.

Parmi les techniques de calcul de la dimension fractale, nous citons :

- Approches basées sur le comptage des boites.
- Approches basées sur la mesure d'aire.
- Approches basées sur le mouvement brownien.

Le tableau 3.1 ci-après présente quelques valeurs de dimensions fractales : [11]

Objet	Formule	Dimension
Cantor	$\log 2 / \log 3$	0,630929753
Flocon (Koch)	$\log 4 / \log 3$	1,261859507
Cercles d'Apollonius	$\frac{49}{65}\sqrt{3}$	1,3057
Enveloppe d'un mouvement brownien plan	4/3	1,333
Éponge de Menger, Éponge de Sierpinski	$\log 20 / \log 3$	2,726833027
Pentagones de Dürer	$\log 6 / \log (2 / (3 - \sqrt{5}))$	1,86171596
Tapis de Sierpinski	$\log 16 / \log 5$	1,7227
Triangle de Sierpinski	$\log 3 / \log 2$	1,584962501

Conclusion

A travers ce chapitre introductif, il convient de remarquer que la notion « fractale », est liée à une géométrie naturelle, qui représente des formes complexes, des objets dont la création ou la structure ne trouvent leurs règles que dans l'irrégularité ou la fragmentation.

Quant à la dimension fractale, c'est une grandeur qui a pour finalité la traduction de la façon dont un ensemble fractal occupe l'espace, à toutes les échelles. Donc, elle est étroitement dépendante, à la fois, de l'échelle de représentation et des méthodes de mesure mises en évidence.

***Chapitre 2 : les fractales déterministes et
les fractales aléatoires dans les
systèmes complexes***

Chapitre 2 : Les fractales déterministes et les fractales aléatoires dans les systèmes complexes

Il existe plusieurs types de fractales dont la classification peut être effectuée de façons différentes. Il y a les fractales déterministes et les fractales probabilistes (non déterministes), on peut les obtenir par un algorithme bien défini à l'avance ou bien de façon aléatoire. Ce deuxième chapitre scindé en deux (02) sections, permettra de présenter respectivement les fractales déterministes et les fractales aléatoires.

Section 1 : Les fractales déterministes

Ce sont des fractales dont la construction peut être réalisée géométriquement ou avec des méthodes numériques, dont les paramètres de la fractale sont gardés constants à chaque itération. On distingue deux types :

- ✓ Les fractals linéaires ;
- ✓ Les fractals non linéaires.

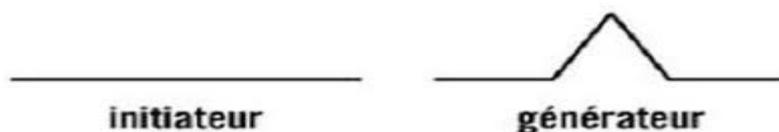
1. Les fractals linéaires :

Ce sont des systèmes de fonctions itérés, basés sur l'itération d'équations linéaires. Ce type peut être décrit par des règles de remplacement géométriques fixes (comme la courbe de Von Koch, de Hilbert, et le tapis de Sierpinski) [12].

Pour obtenir une fractale linéaire, il faut une figure de départ et une règle de production qui permet de comprendre comment s'effectue une itération.

1.1 La courbe triadique de Von Koch (1904)

C'est un célèbre exemple de courbe de longueur infinie et continue. Son départ est un segment de longueur l (un objet initiateur) et dont son tiers central sera remplacé par un « pic » formé de deux segments de longueur $l/3$ (l'itération avec un générateur transformera l'initiateur), ce même processus sera reproduit pour chacun des quatre nouveaux segments et ainsi de suite à l'infini, jusqu'à l'obtention d'une courbe exclusivement formée de « pics » qui n'admette pas de tangente.



Donc, si l'initiateur est un segment de dimension horizontale L :

- à la première itération (la courbe se confond alors avec le générateur) les segments de base auront pour longueur $\varepsilon_1 = L/3$;
- à la seconde itération ils auront pour longueur $\varepsilon_2 = L/9$ puisque chaque segment est à nouveau remplacé par le générateur ;
- puis $\varepsilon_3 = L/3^3$ à la troisième itération et ainsi de suite.

Les relations donnant la longueur L de la courbe sont donc :

$$\varepsilon_1 = L/3 \rightarrow L_1 = 4 \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = L/9 \rightarrow L_2 = 16 \varepsilon_2$$

...

$$\varepsilon_n = L/3^n \quad L_n = 4^n \varepsilon_n \quad \rightarrow$$

En éliminant n entre les deux égalités de la dernière ligne, la longueur L_n en fonction de l'unité de mesure ε_n s'écrit finalement :

$L_n = L^D (\varepsilon_n)^{1-D}$ avec $D = \log 4 / \log 3 = 1,2618$

(3)

Le processus des différentes itérations citées ci-dessus donne le résultat de la (figure 10) suivante :

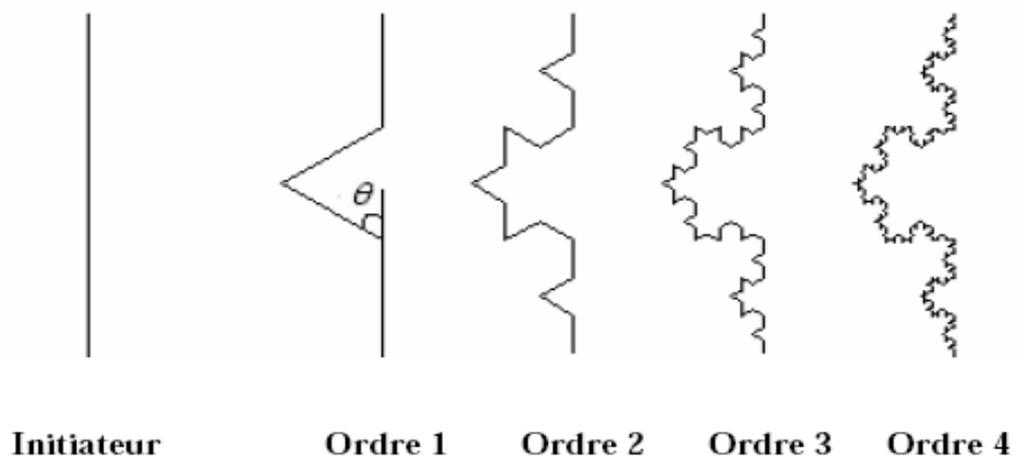


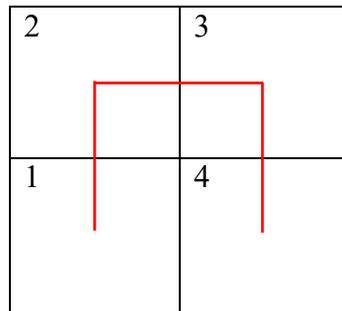
Figure 10 : Étapes de la construction d'une courbe de Von Koch

1.2. La courbe de Hilbert

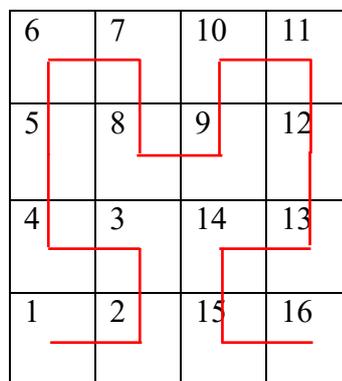
La courbe de Hilbert est une courbe continue remplissant un carré, décrite par le mathématicien allemand David Hilbert en 1891. Comme sa structure couvre un carré, sa dimension de Hausdorff et sa dimension topologique sont égales à 2. Cependant, elle est considérée comme une fractale.

La courbe remplit le carré $[0, 1]^2$, telle que $M(0) = (0, 0)$ et $M(1) = (1, 0)$. Donc elle est obtenue par l'algorithme suivant :

Étape 01 : il s'agit de partager $[0, 1]^2$ en 4 carrés égaux, numérotés de sorte que deux carrés successifs se touchent par un côté, en commençant par le carré en bas à gauche, et terminant par le carré en bas à droite



Étape 02 : il s'agit de partager également chacun de ces carrés en 4 micro carrés égaux, numéroté de sorte que deux micro carrés successifs se touchent par un côté, en commençant par le micro-carré en bas à gauche, et terminant par le micro-carré en bas à droite, le premier micro-carré d'un petit carré devant avoir un côté en commun avec le dernier micro-carré du petit carré précédent et le dernier micro-carré devant toucher par un coté le petit carré suivant.



La reproduction de ce processus à l'infini, à l'étape n , on obtient donc une suite de 4^n carrés $C_{n,0}, C_{n,1}, \dots, C_{n,4^{n-1}}$ de côté $1/2^n$, deux carrés successifs se touchant par un côté, recouvrant successivement les carrés $C_{n-1,0}, C_{n-1,1}, \dots, C_{n-1,4^{n-1}-1}$

Ces différentes étapes se récapitulent dans la (**figure 11**).

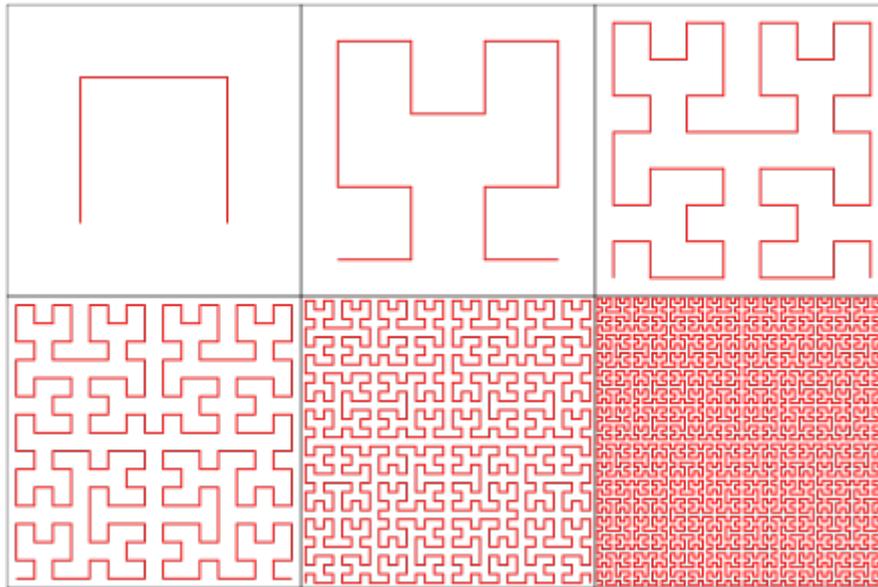


Figure 11 : Etapes de construction de la courbe de Hilbert

1.3.L'ensemble triadique de Cantor

L'ensemble triadique de Cantor, du nom du mathématicien **Georg Cantor**. Il se construit en partant d'un segment puis en enlevant à chaque étape le tiers central de chaque segment.

Partons de l'intervalle unité dans \mathbb{R} : $C_0 := [0, 1]$

Découpons-le en trois segments d'égale longueur $1/3$, supprimons le morceau central, et conservons seulement les deux morceaux gauche et droite, ce qui nous donne 2^1 intervalles de longueur $1/3$.

La (**figure 13**), obtenue au bout de la 6^{ème} étape est un ensemble invariant d'échelle, déterministe, au cours des itérations les segments deviennent de plus en plus fins, aboutissant à la « Poussière de Cantor ».

Si à chaque étape, on enlève $1/3$ de la bande noire au hasard, la (**figure 12**) obtenue est l'ensemble de Cantor aléatoire.



Figure 12 : L'ensemble de Cantor aléatoire Figure 13: L'ensemble de Cantor régulier

1. Les fractales non linéaires

Elles sont basées sur l'itération de nombres complexes, et sont définies par une relation de récurrence.

1.1 Les ensembles de Julia

Gaston Julia (1893-1978) fut un précurseur de l'étude des fractales, spécialiste des fonctions d'une variable complexe. Ses résultats sur l'itération des fractions rationnelles ont été utilisés, par Benoît Mandelbrot. Il a découvert les **ensembles de Julia**, sous-ensembles du plan complexe \mathbb{C} .

Soient deux nombres complexes C et Z_0 . On définit la suite (Z_n) par la relation récurrente suivante:

(4)

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

z_0 est varié et C est fixé pendant tout le calcul de l'image. A chaque valeur de C , correspond donc un ensemble particulier de Julia (**figure 14**).

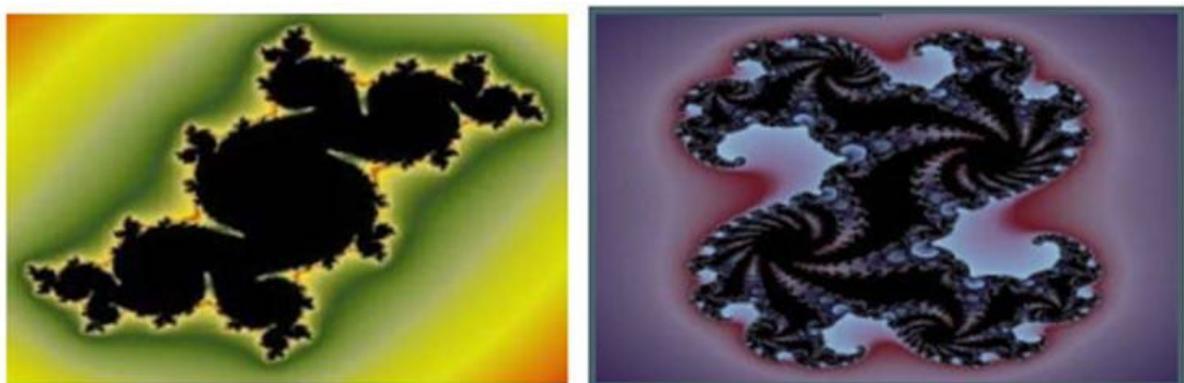


Figure 14 : Ensembles de Julia

1.2 L'ensemble de Mandelbrot

Des années plus tard, Mandelbrot étudia l'expression $Z_{n+1}=Z_n^2+C$, avec un ordinateur et a continué le travail entamé par Gaston Julia. Il a exploré l'utilité des fractales dans différents domaines notamment en physique et en économie.

Il crée sa propre équation qui englobe tous les ensembles de *Julia*.

Le fractal de Mandelbrot est la visualisation d'un objet mathématique. Il s'agit en réalité d'une matrice de nombre, où la valeur de chaque nombre est représentée par une couleur. Chaque point de l'image est un nombre calculé par l'ordinateur selon l'équation suivante :

$$Z_{n+1}=Z_n^2+C$$

Dans l'ensemble de Mandelbrot, l'étude de l'itération répétitive de cette expression $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ dans le cas particulier où $Z_0 = 0$.

La (**figure 15**) représente l'ensemble de Mandelbrot.

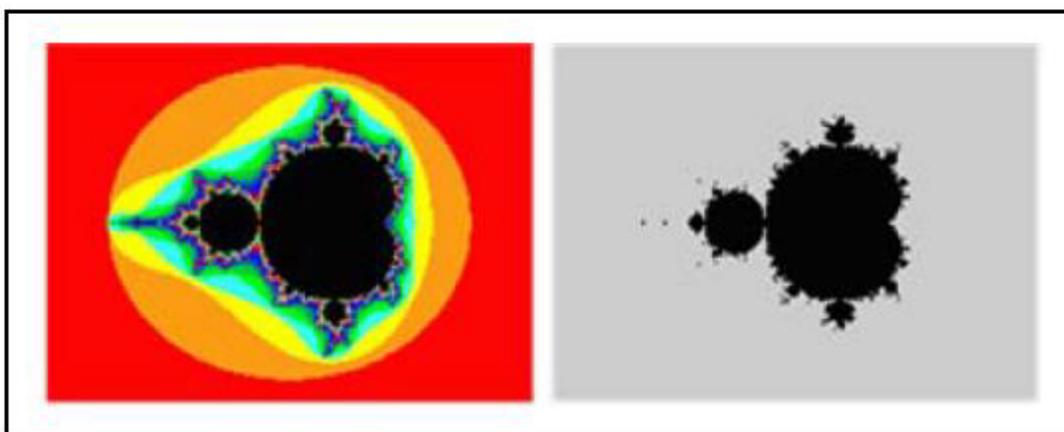


Figure 15: L'ensemble de Mandelbrot

A noter que les ensembles de Julia et de Mandelbrot sont étroitement associés.

Section 2 :Les fractales aléatoires (non déterministes)

Les fractales aléatoires sont des objets pour lesquels il n'existe pas de procédure bien déterminée d'obtention de formes, et dont les caractéristiques géométriques sont le fait du hasard. Elles se présentent sous deux formes :

- ✓ Objets fractals naturels ;
- ✓ Les ensembles fractals aléatoires.

1. Objets fractals naturels

Cette catégorie regroupe les fractales qui se rapprochent le plus de notre quotidien tels que les nuages, les montagnes, les choux-fleurs , les fougères.

2. Les ensembles fractals aléatoires

Ils peuvent être construits par simulation en introduisant des composantes aléatoires dans la procédure.

2.1. Le mouvement Brownien

L'expression « mouvement brownien » vient du nom du biologiste Robert Brown qui, en 1827, observa au sein de grains de pollens, les mouvements très irréguliers de poussières microscopiques. Ces particules se déplaçaient de façon aléatoires et dans toutes les directions. Le mouvement brownien est le nom du phénomène correspondant au mouvement aléatoire de particules dans un fluide.

Il peut être expliqué par la somme résultante des collisions exercées par de très petites et très nombreuses particules sur une grosse particule qui se traduit par un mouvement dans une direction quelconque. Ces petites particules forment le milieu dans lequel la grosse particule est submergée et c'est ces interactions qui induisent le mouvement très irrégulier de la grosse particule.

Un liquide pur est fait de molécules animées d'un mouvement aléatoire permanent, comme se traduit dans la (figure 16) :

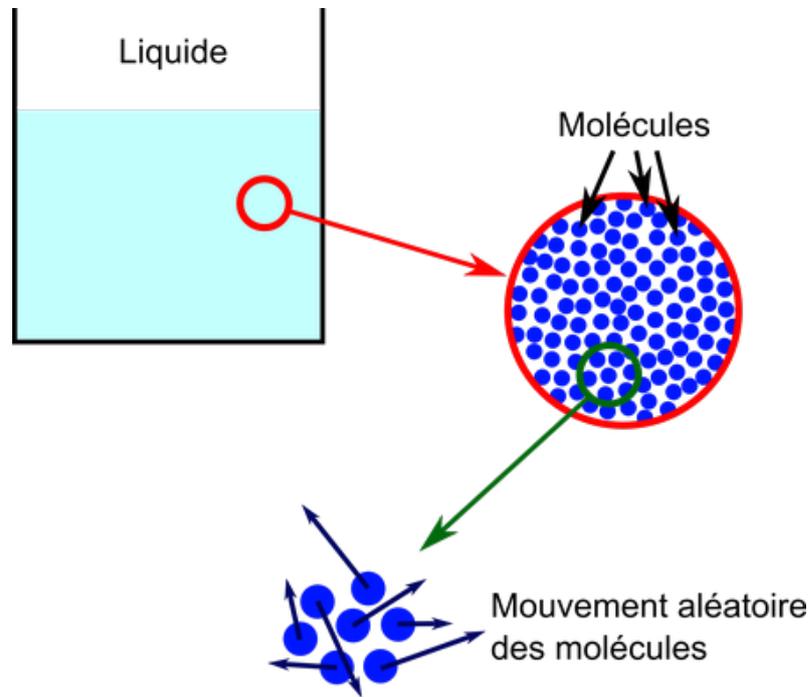


Figure 16 : Mouvement aléatoire permanent des particules

Des particules ajoutées à un fluide entrent en collision avec les molécules de manière aléatoire :

L'insertion de grosses particules comme, celles des grains de pollen, dans un fluide, celles-ci se retrouvent dans un bain de plein de molécules. Ces derniers, qui bougent par agitation thermique, vont rentrer en collision avec les particules. À chaque collision entre une molécule et une particule, la molécule va appliquer une force sur la particule et lui transférer une certaine quantité de mouvement. Chaque collision conduit donc à une force aléatoire sur la particule, à la fois dans sa direction et son amplitude (figure 17).

La réaction de la particule à cette force est un petit déplacement dans une direction aléatoire. Le déplacement dû à cette force n'est pas infini, car la viscosité du fluide a tendance à stopper tout déplacement de la grosse particule. La particule se déplace donc d'un « pas » d'une taille et direction et aléatoires à chaque collision avec une molécule. C'est ce phénomène qui anime les particules provenant du pollen que Brown a observées.

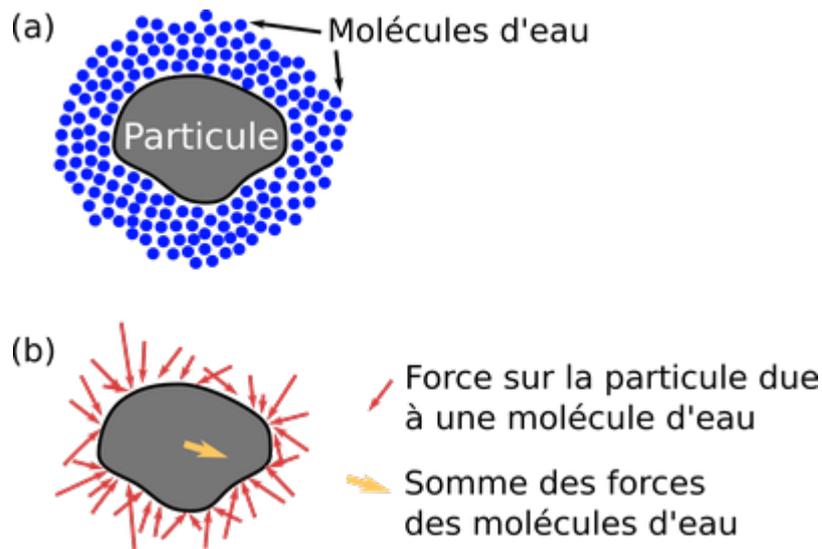


Figure 17 : Schéma explicatif du mouvement Brownien

(a) Une particule immergée dans un fluide est entourée de molécules.

(b) Les molécules en agitation appliquent des forces aléatoires sur la particule (flèches rouges).

La force résultante à un certain instant ressentie par la particule et due à l'agitation thermique (flèche orange) est la somme des vecteurs force rouges dus à chaque molécule qui est en collision avec la particule à cet instant. Cette force se traduit alors par un déplacement de la particule dans la direction de la flèche orange.

Un problème de statistiques : la description des chocs aléatoires avec les molécules permet de déduire les propriétés statistiques du mouvement des particules. En particulier:

- Le déplacement pendant un temps donné d'une particule est nul en moyenne. Bien que la particule bouge, elle a autant de chances de se déplacer à gauche ou à droite, car les collisions se produisent dans toutes les directions.
- Pour décrire l'amplitude du mouvement quand celui-ci a une direction moyenne nulle, il est courant de le caractériser par son déplacement quadratique moyen. C'est une quantité reliée à la mesure de la distance moyenne parcourue par une particule après un certain temps. Celle-ci n'est pas nulle en moyenne, et a les propriétés suivantes:
 - Plus les molécules frappent la particule fortement et souvent, plus le déplacement quadratique moyen est grand. L'amplitude du mouvement Brownien augmente donc avec la température, car l'agitation thermique augmente.

- Plus les particules sont grosses, plus l'amplitude du mouvement Brownien est faible. Quand la taille des particules augmente, leur surface augmente et les collisions avec les molécules sont plus nombreuses. Mais l'augmentation de la taille conduit également à une augmentation de la masse des particules, et un choc provoque un déplacement plus faible. La combinaison de ces deux variations conduit à un déplacement plus faible pour des grosses particules. La raison à cela est une propriété statistique appelée la loi des grands nombres [13]. Dans le contexte du mouvement brownien, elle signifie que plus le nombre de chocs aléatoires est important, plus la moyenne de la somme des chocs sera proche de zéro, ce qui explique le non appareance du mouvement brownien avec des objets macroscopiques.

En pratique, les particules visibles au microscope ont une taille typique d'au moins un micromètre, qui est assez proche de la taille à partir de laquelle le mouvement brownien devient négligeable. Ainsi, il est à constater clairement à travers le microscope que des gros objets ne sont pas sujets au mouvement Brownien, alors que des petits le sont.

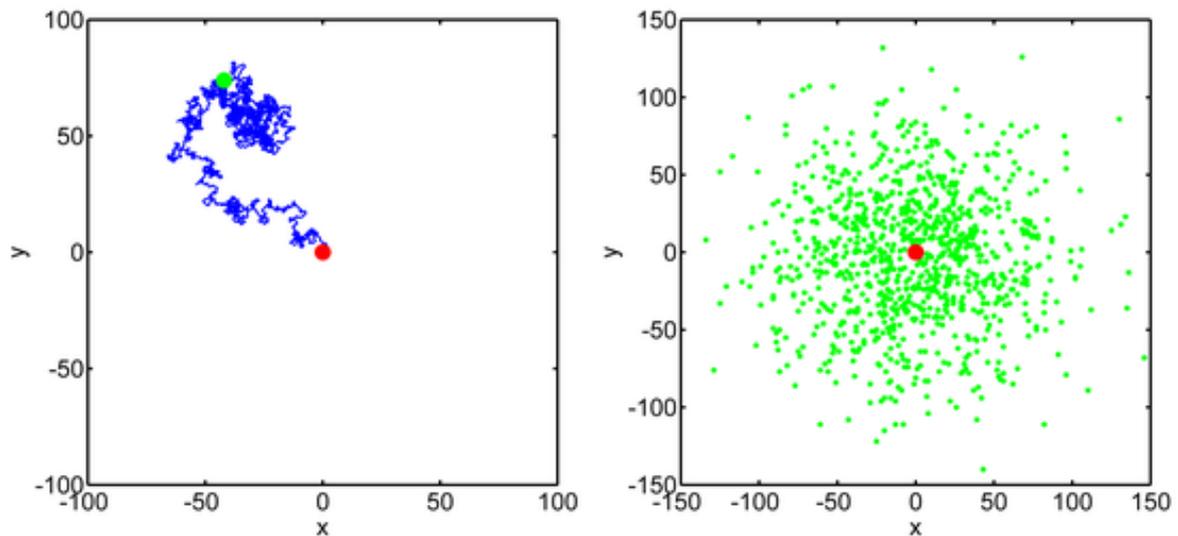
En résumé, les caractéristiques du mouvement Brownien sont :

- Le mouvement est très irrégulier et imprévisible, composé de translations et de rotations, la trajectoire d'une particule ne semble pas avoir de tangentes, elle change trop rapidement de direction de façon erratique, et ce, quelque soit l'échelle d'observation ;
- Plus l'échelle d'observation est petite, plus le caractère irrégulier est prononcé ;
- Deux particules semblent bouger de façon indépendante, même si elles sont très proches ;
- Le mouvement est d'autant plus actif que les particules sont petites ;
- La composition et la densité des particules n'ont pas d'influence ;
- Le mouvement est d'autant plus actif que le fluide n'est pas trop visqueux ;
- Le mouvement est plus actif en température haute ;
- Le mouvement est sans fin.

➤ **Représentation du mouvement brownien par une marche aléatoire**

Une représentation correcte et simple du mouvement brownien d'une particule au cours du temps consiste à découper le temps en petits intervalles et de supposer que pendant chaque intervalle, la particule se déplace d'un pas d'une longueur fixe mais d'une direction aléatoire.

Ainsi, il est facile de simuler le mouvement brownien avec un ordinateur pour illustrer certaines de ses propriétés statistiques.



Simulation du mouvement Brownien d'une particule :

➤ **(graphe Gauche) :**

Une particule bouge aléatoirement à partir de la position (0,0) (point rouge) et atteint la position finale indiquée par le point vert après un certain temps.

➤ **(graphe Droite)**

Des positions finales obtenues en répétant la simulation plusieurs fois.

Bien que la position moyenne de tous ces points est (0,0), les positions finales ne sont pas toutes (0,0). La taille du nuage de points est liée au déplacement quadratique moyen.

➤ **Explication par Albert Einstein**

En 1905, Einstein a fourni une description quantitative du mouvement brownien. Ses prédictions ont ensuite été vérifiées expérimentalement par Jean Perrin quelques années plus tard[14].

Le déplacement quadratique moyen correspond à un processus de diffusion, c'est-à-dire que si une particule est à la position $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ initialement, elle sera après un temps t à une position \mathbf{x} vérifiant

(5)

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

Où $\langle x^2 \rangle$ représente le déplacement quadratique moyen (les crochets indiquent de prendre la valeur moyenne de x^2 lorsqu'on répète l'expérience plusieurs fois), et D est un coefficient de diffusion. Einstein a établi une expression du coefficient de diffusion qui vaut pour des particules sphériques de rayon R .

$$D = \frac{k_B T}{6 \pi \eta R}$$

Où k_B est une constante (constante de Boltzmann), T la température, η la viscosité du liquide et R le rayon des particules. Dans cette formule, il apparaît que le déplacement quadratique moyen augmente avec la température et diminue avec la taille des particules, en accord avec les arguments statistiques précédents.

L'expression du coefficient de diffusion est particulièrement intéressante, car elle fait aussi intervenir la viscosité du liquide. $6\pi\eta R$ est en fait le coefficient de friction des particules dans le liquide. Ainsi, dans le processus de diffusion, les fluctuations thermiques ($k_B T$) des molécules augmentent la diffusion, alors que la friction, qui a tendance à ralentir et stopper les particules après qu'elles subissent une force aléatoire, la diminue.

2.2. La méthode de Bouligand-Minkowski

La méthode de Minkowski-Bouligandou méthode box-counting, est une manière de déterminer la dimension fractale d'un sous-ensemble S dans un espace euclidien R ou, plus généralement, dans un espace métrique. Pour calculer cette dimension pour une fractale S , il faut placer cette fractale dans un réseau carré et compter le nombre de cases nécessaires pour recouvrir l'ensemble[15].

La dimension de Minkowski est calculée en observant comment ce nombre de cases évolue à mesure que le réseau s'affine à l'infini.

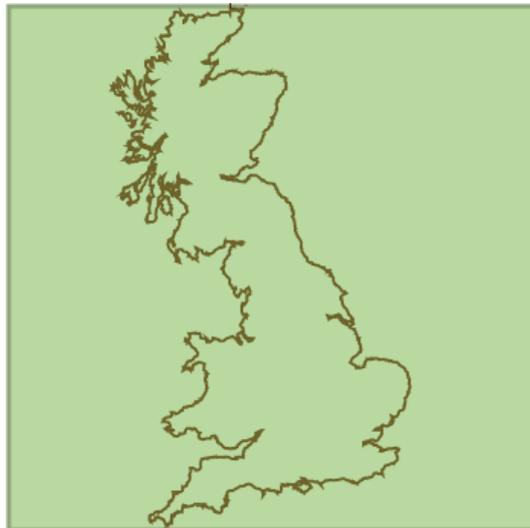
Supposons que $N(\varepsilon)$ soit le nombre de cases de côté ε nécessaires pour recouvrir l'ensemble. Alors la dimension de Minkowski est définie par

$$\dim_{box}(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\log(N\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \right)$$

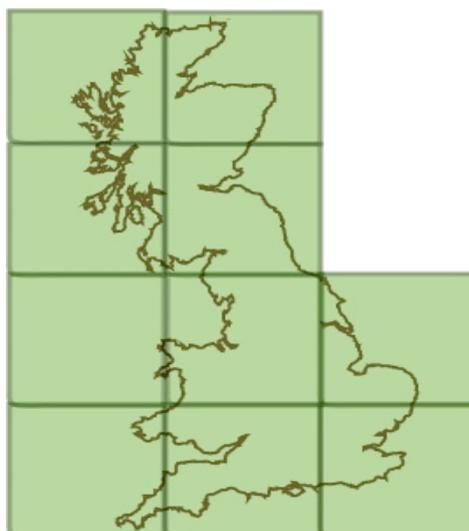
La dimension de Minkowski peut être vue comme la façon dont un ensemble peut être recouvert avec de petits objets de taille identique.

Cette méthode a été appliquée pour calculer la dimension des **côtes de Grande-Bretagne** :

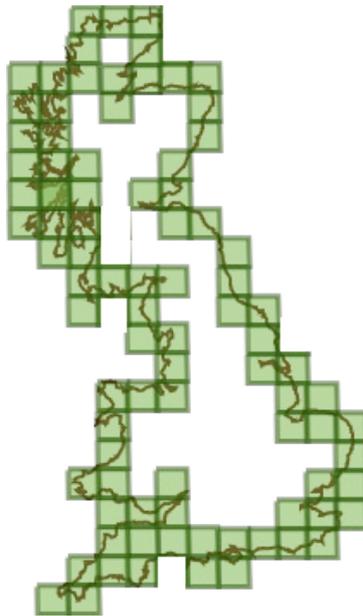
- Il s'agit d'utiliser une très grande unité de façon à ce que l'île tienne en entier dans le carré unité.



- Ensuite, il y a lieu de diviser l'unité par 4, il est à constater qu'une seule unité ne suffit plus pour recouvrir la carte. Il en faut 10 :



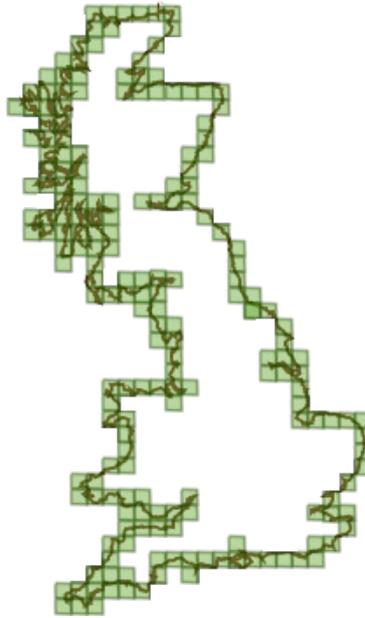
- Ainsi, quand l'unité de longueur est divisée par 4, la mesure de la figure ci-dessus est approximativement multipliée par 10. Cependant, à travers cette approximation, l'estimation de la dimension de cette figure est environ égale à $\log_4(10) \approx 1,66$
- A cette étape, l'approximation est loin de la réalité, donc pour avoir une meilleure valeur, il faut faire un découpage plus fin, en divisant davantage l'unité. Au lieu de diviser la longueur de l'unité en 4, elle sera divisée en 20, comme illustré dans la figure suivante :



De cette figure, il résulte qu'il faut 88 unités (petits carrés) pour recouvrir la carte. Ainsi la dimension des côtes de Grande-Bretagne est environ égale à $\log_{20}(88) \approx 1,49$.

Cette valeur est toujours une approximation, mais elle est toutefois plus proche de la réalité du faite d'un découpage plus fin.

- Pour une meilleure approximation, la division de l'unité en 40 au lieu de 20 donne le résultat suivant :



De cette figure, il résulte qu'il faut 198 unités (petits carrés) pour recouvrir la carte. Ainsi la dimension des côtes de Grande-Bretagne est environ égale à $\log_{40}(198) \approx 1,43$.

D'une manière générale, la division de la taille de l'unité par x , il faut N_x petits carrés pour recouvrir la carte, alors l'approximation de la dimension de la côte de Grande-Bretagne est donnée par la relation $\log_x(N_x)$. Plus x est grand, plus l'approximation est plus juste.

Conclusion

Au titre de ce deuxième chapitre, il y a lieu de tirer qu'il existe des fractales qui peuvent être réalisées grâce à un système d'itérations (courbe de Von Koch, courbe de Hilbert, tapis de Sierpinski) et des fractales réalisées grâce à une suite de points (Julia, Mandelbrot).

Il a été démontré également l'existence de deux familles de fractales, à savoir les fractales déterministes et les fractals non déterministes.

La première catégorie est basée sur des fonctions itérées, qui sont soit :

- strictement auto similaires, générées par l'application récursive de fonctions contractantes sur des sous-ensembles d'un espace métrique ;
- par récurrence non strictement auto-similaires, générées par des suites récurrentes non divergentes.

Quant aux fractales aléatoires, tels que les objets naturels, du fait que le processus dynamique qui permet leur création varie lui-même en fonction de temps et de façon aléatoire.

***Chapitre 3 : Le formalisme multifractal
dans les systèmes complexes***

Chapitre 3 : Le formalisme multifractal dans les systèmes complexe

Dans ce troisième chapitre, nous allons présenter le formalisme multifractal et ce à travers la première section, ensuite, nous allons citer quelques domaines d'application des fractales et ses apports à la science moderne qui sera étalé dans la deuxième section.

Section 1 : Formalisme multifractal

La connaissance de la dimension fractale d'un ensemble n'est pas toujours suffisante pour caractériser sa géométrie, il s'avère nécessaire de trouver une autre approche qui permet de caractériser le comportement local et global d'un objet : c'est le formalisme multifractal.

1. Historique des multi fractales

Historiquement, l'analyse multi fractale a été introduite en physique pour interpréter certaines observations expérimentales en liaison avec la théorie de Kolmogorov de la turbulence pleinement développée dans les années 1940 [16].

Selon la théorie homogène et isotrope introduite par Kolmogorov, la vitesse de l'écoulement devrait avoir partout la même irrégularité, mais les expériences récentes révèlent des déviations systématiques par rapport aux prédictions de cette théorie.

Les signaux de vitesse turbulente semblent très irréguliers dans certaines régions et beaucoup moins dans d'autres.

Au milieu des années 1980, les premiers enregistrements très précis de la vitesse d'un écoulement turbulent tels que ceux obtenus dans la soufflerie de Modane (travaux de Gagne, Hopfinger et leurs collaborateurs) ont confirmé la très grande complexité de ces données expérimentales [17].

En effet, la théorie de la turbulence a été à l'origine du formalisme multifractal introduit par Parisi et Frish en 1985. Ce formalisme relie mathématiquement le comportement local et global des singularités. Le concept de spectre des singularités apparaît en 1986 dans les travaux de Halsey et Al [18], sur les mesures invariantes d'attracteurs étranges de certains systèmes dynamiques.

Cependant le formalisme multifractal est au départ une formule heuristique, et n'est pas valide en toute généralité. Le problème de la détermination du domaine de validité de ce formalisme est le sujet de recherches de nombreux mathématiciens et physiciens, et dépasse maintenant largement le cadre de la turbulence [19]. Ainsi, le point de vue multifractal a

largement orienté la recherche sur les mesures invariantes des systèmes dynamiques, sur les processus stochastiques, mais aussi dans de nombreux autres problèmes issus de la physique où des signaux de nature fractale apparaissent.

2. Du Mono au multifractal

Un objet **monofractal** est un objet invariant par des transformations géométriques de dilatation. Sans plus d'information sur l'objet, il est possible de distinguer l'objet lui-même de l'un de ses détails. Alors qu'un **objet multifractal** est plus complexe, dans le sens où il est toujours invariant par dilatation et où le facteur nécessaire pour pouvoir distinguer le détail de l'objet entier dépend du détail observé.

Lorsque l'utilisation de plusieurs méthodes de calculs de la dimension fractale donne des résultats très différents, ceci veut dire que l'objet est très complexe. Donc, la dimension fractale s'avère insuffisante pour le caractériser. Il est nécessaire d'introduire la dimension fractale locale pour décrire la rugosité en chaque point.

En effet, lorsque la dimension fractale change d'un point à un autre, on dit que l'objet fractal est inhomogène ou multifractal comme se manifeste dans la (**figure 18**) .

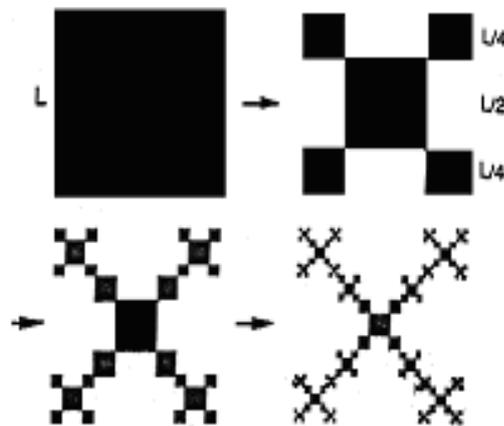


Figure 18 : Exemple de multifractal

La structure de la figure ci-dessus est complexe et appartient à la catégorie des multifractales.

3. Transport multifractal

Dans le cadre des structures fractales, les moments peuvent être représentés par l'utilisation d'un exposant $\nu(q)$ où q est l'ordre des moments [20].

Ainsi, une faible diffusion est donnée par l'équation suivante :

$$\mu(q) = \nu \cdot q \tag{8}$$

Quant à la forte diffusion, elle est non linéaire si :

$$\nu(q) = \frac{\mu(q)}{q} \neq C \text{ te} \tag{9}$$

Le transport dans ce cas est dit multifractal

Exemple : cas de la standard map pour $k=6.908745$ [21]

Par définition la **standard map** est une zone de préservation carte chaotique d'un carré de côté 2π .

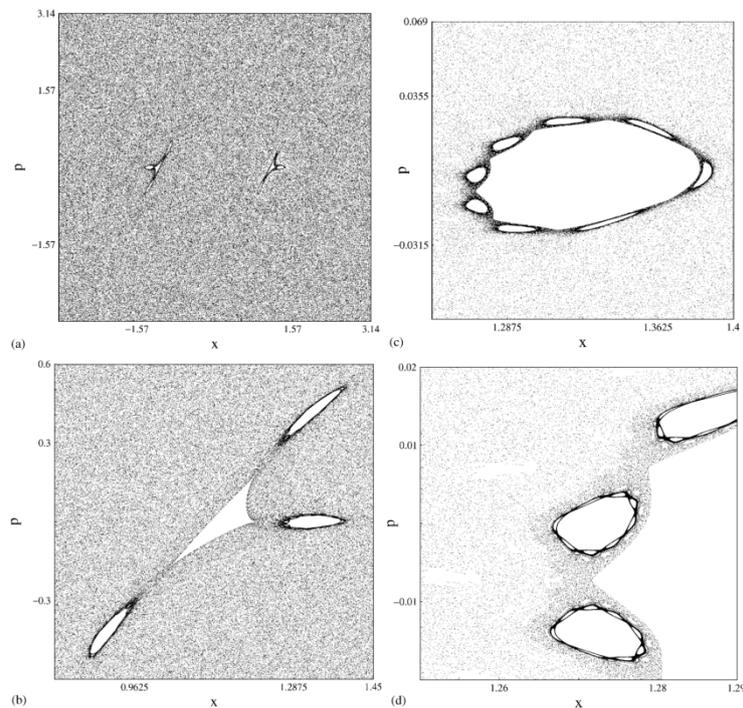


Figure 19 : Hiérarchie des îlots 2-3-8-8-8 dans le cas de la standard map pour $k=6.908745$

Dans le cadre de la figure précédente, il est illustré qu'à chaque zoom sur les ilots, d'autres ilots apparaissent à des différentes échelles, ce qui confirme la présence du caractère multifractal.

Donc, l'évolution des moments permettra la définition des exposants caractéristiques qui traduisent soit la diffusion, la super diffusion et la subdiffusion.

4. Analyse multifractal et formalisme multifractal

La description de la structure géométrique non homogène d'un objet, peut nécessiter plusieurs dimensions fractales; on parle alors de multi- fractalité. Ainsi, à partir d'une structure fractale donnée, on peut extraire des sous-structures fractales de dimension fractale bien définie, en distinguant les ensembles de points présentant les mêmes propriétés d'autosimilarité.

Initialement, les mathématiciens étudiaient des formes géométriques simples. Mais certains mathématiciens ont changé ce point de vue, en travaillant sur des ensembles ou des fonctions irrégulières. Le mouvement brownien par exemple, est irrégulier, mais son irrégularité est la même partout. Les signaux naturels sont multifractals, dont l'irrégularité est différente en différents points.

Suite à des études expérimentales, les physiciens ont mis en évidence l'existence de phénomènes d'intermittence interne dans la turbulence, et ont eu l'idée d'interpréter ces structures en termes d'une hiérarchie de singularités portées par des ensembles fractals ayant des dimensions différentes [22].

- La détermination des singularités est dite **analyse multifractale** ;
- Le calcul des dimensions des ensembles des singularités donne le **spectre des singularités**.
- En ce qui concerne les fonctions, des physiciens ont pu relier ce spectre à des moyennes spatiales extraites de la vitesse d'un écoulement, ces relations sont appelées **formalisme multifractal**.

5. L'intérêt de faire une analyse multifractale

L'analyse multifractale, a pour but d'expliquer les observations effectuées sur des signaux de turbulence, et à fournir de nouveaux outils pour l'analyse et la modélisation de signaux issus de multiples domaines scientifiques. En outre, elle permet l'étude des comportements locaux et des propriétés d'invariance d'échelle des fonctions, des trajectoires de processus stochastique, des ensembles, des signaux.

L'intérêt et l'originalité de l'analyse multifractale proviennent beaucoup de ses fortes interactions avec les mathématiques (analyse, probabilités,...), et la physique (mécanique des fluides,..). L'analyse multifractale a pour but donc l'étude de fonctions dont la régularité ponctuelle peut varier d'un point à un autre. Ces fonctions possèdent un ensemble de singularités appelé le spectre.

Cette analyse fournit une description locale et globale des singularités d'un signal.

- La description locale est obtenue via *l'exposant de Hölder*. Cela consiste essentiellement à décomposer le signal en sous-ensembles ayant la même régularité.

Plus précisément, on commence par se donner une définition adéquate de la régularité du signal X en un point quelconque t : le plus couramment, on a recours à l'exposant de Hölder ponctuel α .

- La deuxième étape de l'analyse multifractale qui est la description globale, consiste à mesurer la taille des sous-ensembles ainsi obtenus, c'est-à-dire étudier les ensembles. Donc pour obtenir, une description globale (spectre multifractal) de la répartition des singularités de X , il est utile de mesurer les dimensions fractales $f(\alpha)$ de E_α c'est-à-dire estimer le **spectre multifractal** $f(\alpha)$ en fonction de α .

Donc réaliser l'analyse multifractale d'une fonction, c'est déterminer son spectre de singularités.

5.1. Exposant de Hölder

L'analyse multi-fractale a pour but l'étude de fonctions dont la régularité ponctuelle peut varier d'un point à un autre. Les premiers outils pour mesurer la régularité sont : continuité et dérivabilité en un point.

Donc l'analyse multi-fractale d'une fonction bornée $f(x)$ consiste à d'écrire les fluctuations de régularité locale en fonction de x . Cette régularité est mesurée en comparant localement les variations de f à un comportement en loi de puissance : soit $s \in \mathbf{R}$, $f(x_0)$ appartient à $C^s(x_0)$, s'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P , $\deg(P) < s$, tels que :

$$|f(x) - P(x-x_0)| \leq C |x - x_0|^s$$

L'exposant de Hölder est défini comme le supremum de ces s :

$$\alpha_f(x_0) = \sup \{s : f \in C^s(x_0)\}.$$

L'intérêt de considérer P est qu'il permet de rendre compte de singularités d'ordre supérieur, c'est-à-dire dans les dérivées de f : on enlève à f sa partie régulière, pour voir apparaître le comportement singulier.

Dans le cas de mono-fractales, l'exposant de Hölder est unique. Contrairement au dans le cas des multi-fractales, où cet exposant varie de manière erratique avec le temps.

On remarque que, puisque f est bornée, on a toujours $f \in C^0(x_0)$, et donc $\alpha(x_0) \geq 0$. Cet exposant rend compte localement, en x_0 , de la régularité de la texture de l'image.

Par exemple, $\alpha(x_0) \geq 1$ indique que l'image est localement dérivable. A contrario, $0 \leq \alpha < 1$ rend compte du fait que l'image est continue mais non dérivable. Dans ce cas, la proximité de 1 pour α indique que l'image est presque aussi régulière qu'une fonction dérivable, tandis qu'un α proche de 0 traduit une forte irrégularité, proche de la discontinuité.

Il existe une définition équivalente à la précédente sans faire apparaître directement l'espace C^s :

$$\alpha_f(x_0) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\log |f(x_0 + h) - f(x_0)|}{\log |h|}$$

Cette définition est valable si f est non dérivable en x_0 . Dans le cas contraire, il faut lui enlever sa partie régulière. Géométriquement, l'équation précédente signifie que le graphe de la fonction f autour de x_0 s'inscrit dans une enveloppe que l'on peut appeler l'enveloppe Hölderienne (voir la **Figure 20**). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de x_0 tel que le graphe

de f dans ce voisinage soit entièrement inclus dans l'espace défini par les deux courbes qui associent à x respectivement $f(x_0) + C |x - x_0|^{\alpha_f(x_0) - \varepsilon}$ et $f(x_0) - C |x - x_0|^{\alpha_f(x_0) - \varepsilon}$

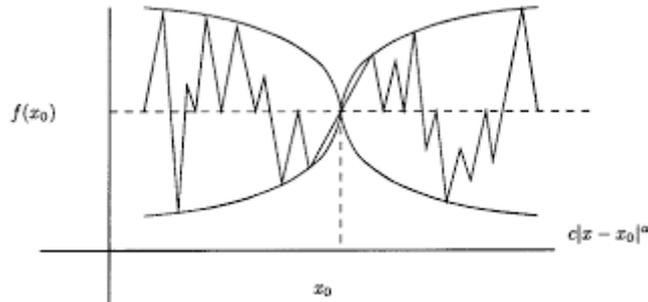


Figure 20 : Enveloppe Hölderienne d'un signal au point x_0

Nous observons que plus $\alpha_f(x_0)$ est grand, plus le signal est lisse. Inversement plus est petit plus le signal est irrégulier en x_0 . De plus, $\alpha_f > 1$ implique que f est dérivable en x_0 , et une fonction discontinue en x_0 est telle que $\alpha_f = 0$. Il s'agit d'une généralisation de la notion de dérivée. Nous disposons alors d'un coefficient donnant une mesure de l'irrégularité, toujours défini et calculable.

Lorsqu'une large gamme d'exposants de Hölder est trouvée, le signal est considéré comme multifractal. Une gamme plus fine d'exposants implique la monofractalité. Dans un processus, la multifractalité est une marque de plus grande complexité par rapport à la monofractalité.

L'information relative à la variabilité de la régularité du champ f , c'est-à-dire sur la fluctuation de α en fonction de x , est ensuite décrite par le spectre multifractal (ou spectre de singularités) $D(\alpha)$. Pour donner sa définition, il est d'abord nécessaire de rappeler celle de la dimension de Hausdorff.

5.2. Dimension de Hausdorff

Le spectre multifractal $D(h)$ est défini comme la dimension de Hausdorff de l'ensemble $A_h \in \mathbb{R}$ des points t où X prend le même exposant de Hölder h , $A_h = \{t, h(t) = h\}$:

$$D(h) = \dim_H \{A_h\}$$

5.3. Spectre multifractal (ou spectre de singularités)

Il est important de trouver la distribution des singularités d'une multifractale f pour analyser ses propriétés. Le spectre de singularité mesure la répartition globale des singularités de régularités lipschitziennes différentes [20].

Les régularités lipschitziennes α ponctuelles correspondent souvent à des valeurs comprises entre -2 et 1 , et dépendent du type de contour :

- Frontière $\alpha = 0$
- Ligne $\alpha = -1$
- Point isolé $\alpha = -2$

Définition : soit S_α l'ensemble de tous les points $t \in \mathbb{R}$ où la régularité lipschitzienne ponctuelle de f vaut α . Le spectre de singularité $D(\alpha)$ de f est la dimension fractale de S_α . Le support $D(\alpha)$ est l'ensemble des α pour lesquels S_α est non vide.

Le spectre de singularité a été défini par Frisch et Parisi pour analyser l'homogénéité des structures fractales qui modélisent la dissipation de l'énergie des fluides turbulents. Il a été ensuite étendu par Arnéodo, Bacry et Muzy aux signaux multifractals.

La définition d'une dimension fractale montre que, si on effectue un recouvrement de support de f par des intervalles disjoints de tailles s , le nombre d'intervalles recoupant S_α est :

$$N_\alpha(s) \sim s^{-D(\alpha)}$$

Le spectre de singularité donne la proportion de singularité de Lipschitz α apparaissant à une échelle s quelconque. Une multifractale est dite homogène si toutes ses singularités ont le même exposant de Lipschitz α_0 , c'est-à-dire que le support $D(\alpha)$ est réduit en point $\{\alpha_0\}$. Les mouvements browniens fractionnaires sont des exemples de multifractales homogènes.

Deux exemples de tracés de spectres de singularités sont présentés ci-après :

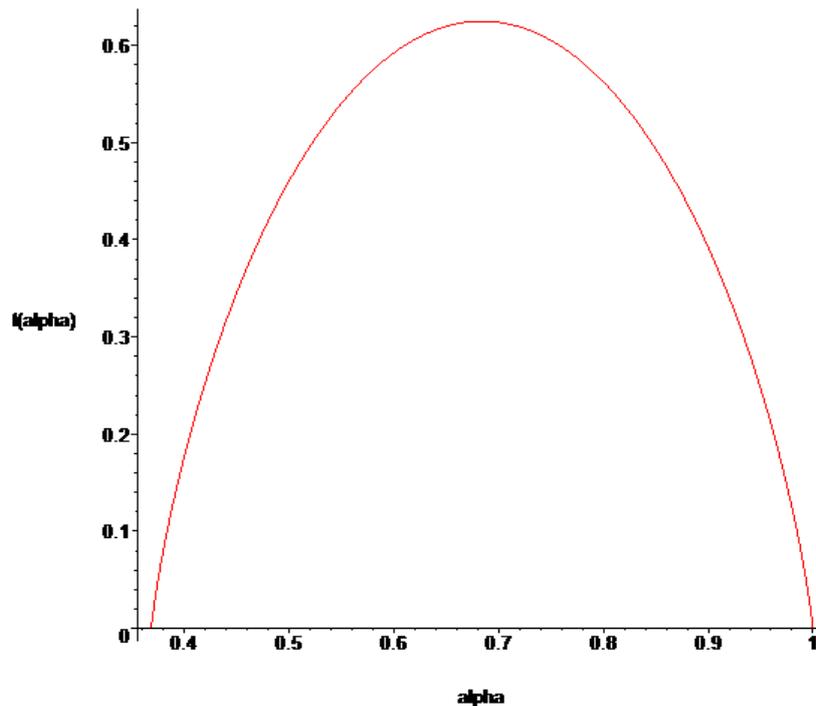


Figure 21 : Le spectre des singularités « $f(\alpha)$ »

Le graphe ci-dessus illustre le spectre des singularités $f(\alpha)$.

- Pour un **monofractal**, les valeurs de $f(\alpha)$ ne changent pas, et la courbe est réduite à un **seul point** ;
- Pour un **multifractal**, la courbe épouse la forme d'une **cloche** (voire **figure 21**), la valeur maximum, située au sommet de la cloche donne la dimension fractale du support. Pour calculer la dimension globale, on trace la droite issue de l'origine et tangente à la courbe.

Quant à la courbe, elle indique les deux limites extrêmes de la variabilité de la fractalité :

- Plus la courbe est **large**, plus les rugosités sont **irrégulières**. Inversement, une courbe **très étroite** signifie que le phénomène étudié est proche d'un **monofractal**.
- Une valeur proche de **1** signifie **peu d'irrégularités**, tandis qu'une valeur proche de **0** signifie une **forte irrégularité**.

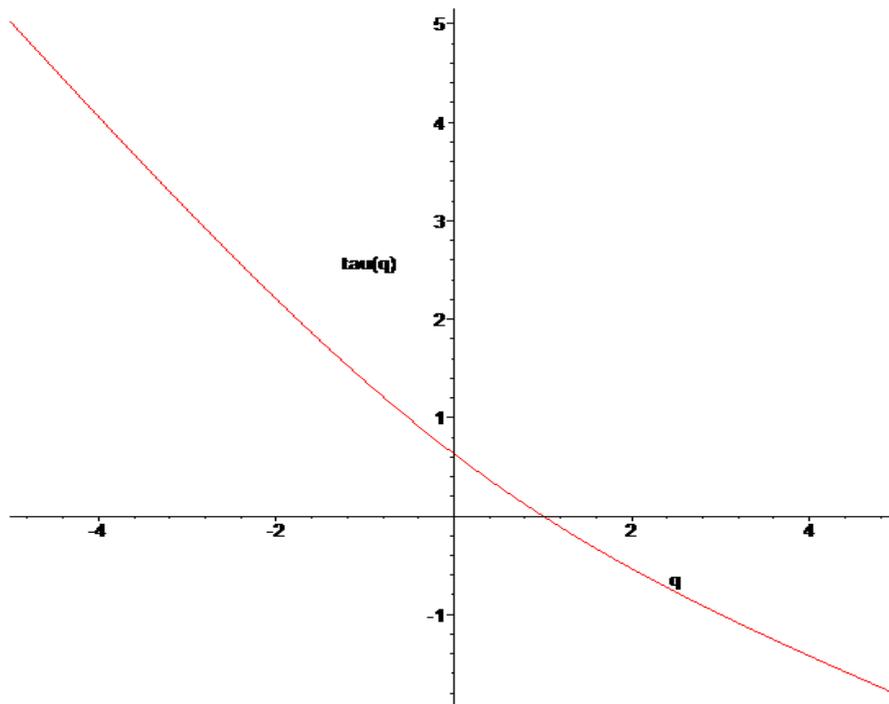


Figure 22 : Le spectre des singularités « tau (q) »

Le spectre indique combien de points du signal, de la série chronologique ou d'une image ont une régularité égale à α .

Remarque : les deux graphes représentatifs du spectre des singularités (**figure 21**) et (**figure 22**) sont obtenus en utilisant le programme « MAPLE ».

Section 2 : Champs d'application des fractales

1. Les domaines d'application des fractales

Les fractales jouent un rôle important dans plusieurs domaines, parmi lesquels on trouve :

- En électronique, car les parasites existants sur les lignes de transmission ont un caractère fractal et ce quelque soit l'échelle de temps. En outre, cette notion permet d'étudier plus en profondeur ce problème et de permettre par la suite une meilleure transmission. Sans oublier que c'est ce caractère itinérant de ces parasites, que Mandelbrot a observé lorsqu'il était chez IBM, où il a constaté l'existence des « fractales ».

- En infographie, puisque la nature est formée d'objets fractals et que ceux-ci se programment simplement, il suffit d'utiliser cette notion pour créer des paysages réalistes.
- En biologie, le dépistage du cancer du sein se fait en observant la texture du noyau des cellules. Or, la géométrie fractale permet, entre autres, de quantifier l'irrégularité d'une figure. Ainsi, elle offre des critères objectifs permettant de poser un diagnostic qui reposait, jusqu'à maintenant, sur le seul jugement du pathologiste.
- En finance, le graphe représentant le cours d'un actif en bourse est de nature fractale. En effet, la rentabilité périodique possède une invariance d'échelle. Ainsi, pour obtenir la volatilité d'un titre sur un an, les acteurs du marché multiplient sa volatilité sur un mois par un certain coefficient.
- En géologie, les fractales sont utilisées pour la recherche de nappes de pétrole.
- En géographie, où la notion fractale est applicable aux reliefs côtiers. La côte est considérée comme une fractale car sa longueur varie selon l'altitude à laquelle elle est mesurée. Ainsi, l'utilisation d'un outil de mesure de plus en plus précis, permet de constater des distances de plus en plus grandes. Ce principe affirme que la longueur de la côte est infinie, et fractale.
- En chimie, elles ont permis la fabrication des aérogels.
- Un autre domaine où les fractales ont été beaucoup utilisées est l'étude de la percolation, c'est-à-dire de la manière dont un liquide s'infiltré dans un substrat poreux, le sol généralement.

2. Apport des fractales à la science moderne

Les fractales interviennent dans beaucoup de théories scientifiques et technologiques modernes, par exemple la Théorie du chaos. Les travaux sur les fractales ont permis de comprendre les clefs de la modélisation de nombreux phénomènes de la nature.

Des chercheurs de l'université d'Utrecht (Pays-Bas) se sont posés la question des comportements quantiques qui pourraient apparaître à l'échelle des électrons. Ils sont parvenus à confiner des électrons dans une forme fractale. Plus exactement, dans un triangle de Sierpinski. Ils ont construit cette structure en déposant des molécules de monoxyde de

carbone sur un substrat de cuivre grâce à la pointe d'un microscope à effet tunnel. Dans le substrat de cuivre, les électrons circulent librement, tandis que les molécules de monoxyde de carbone jouent le rôle de barrières. Avec une disposition astucieuse des molécules où les plus proches sont distantes de seulement 1,1 nanomètre, les chercheurs ont dessiné un triangle de Sierpinski de rang 3 [23].

Conclusion

En guise de conclusion de ce troisième chapitre, il ya lieu de déduire que le formalisme multifractal est une méthode qui permet d'estimer le spectre de singularités d'une fonction à partir de quantités globales qui sont numériquement calculables.

Quant aux domaines d'application des fractales, ceux-ci ne cessent de se multiplier et se diversifier davantage.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

En guise de conclusion sur ce fascinant sujet des fractals, il convient de dire que c'est seulement depuis la parution des travaux de Benoît Mandelbrot que l'intérêt de la conformation fractale est bien perçue. En effet, ses travaux ont permis entre autres, de rationaliser des formes qui semblaient avant irrationnelles. Il a prouvé que les fractals sont des formes géométriques basées sur une autosimilarité et une fragmentation infinie, elles avaient pour une aire ou un volume limité, un périmètre infini offrant donc une surface de contact immensément grande.

Il a été démontré à travers ce mémoire, que au cœur de ses préoccupations, figurait l'incapacité pour la géométrie classique, de modéliser et de concevoir la rugosité ou la fragmentation des objets fractal.

En outre, l'introduction de la géométrie fractale a permis la description et l'analyse d'objets fragmentés et à structure invariante par changement d'échelle. Cette géométrie semble être un outil adapté car, grâce à la notion de dimension non entière, elle permet de décrire à différents niveaux d'échelles, des formes plus complexes que celles de la géométrie euclidienne.

Une caractéristique importante d'un objet fractal a été présentée, à savoir la dimension fractale. Ce concept a permis d'expliquer des formes qui semblaient d'autant plus inexplicables qu'elles n'étaient régies par aucune loi. Les côtes, les nuages, les montagnes ..., Sont les exemples les plus illustratifs, et leur mathématisation a permis d'élargir encore la connaissance de l'univers... d'où, la notion de longueur n'a aucun sens pour une structure fractale, c'est davantage la notion de dimension fractale, qui devient la caractéristique véritablement pertinente.

A travers le présent mémoire, il a été dévoilé également l'une des caractéristiques la plus générale des fractales, est le fait que l'opération de leur élaboration est à la base de nombreuses itérations simples et que la complexité finale est liée au nombre élevé de ces itérations successives. Il est par conséquent, très important de pouvoir reconnaître cette opération élémentaire dans la mesure où elle permet d'expliquer ce qui se passe dans l'évolution du phénomène global.

Conclusion Générale

Au cours de ce mémoire, il a été présenté les principaux résultats en matières de structures fractales, notamment la courbe triadique de Von Koch, la courbe de Hilbert, l'ensemble triadique de Cantor, l'ensemble de Mandelbrot, triangle de Sierpinski, l'ensemble de Julia, le mouvement brownien.....

L'approche fractale pour l'étude des systèmes complexes a fait ses preuves en mathématiques (analyse d'ensembles irréguliers ou de mesures singulières), et en physique (description de phénomènes fortement non linéaires). Mais c'est dans le domaine du traitement du signal que les progrès récents ont pu être appliqués. En particulier, grâce à l'analyse multifractale.

En effet, l'analyse multifractale introduite par des physiciens, pour rendre compte des phénomènes apparaissant en turbulence, qui s'est ensuite étendue pour d'autres domaines. Cette analyse fournit une description à la fois locale et globale des singularités d'un signal: la première est obtenue via l'exposant de Hölder, et la seconde grâce aux spectres multifractals.

Certaines des structures fractales (triangle de Sierpinski) et graphes (spectres de singularités) ont été présentés par l'application du programme MAPLE, afin de mieux les visualiser et les assimiler, ce qui a permis d'apporter l'aspect pratique au présent mémoire.

En terminant, il y a lieu de dire que les fractales ont mis beaucoup de temps pour gagner de l'attention et l'explication la plus probable réside dans la complexité des figures concernées, ce qui rend leur visualisation difficile. Cependant, depuis la contribution de Mandelbrot, elles ont acquis une véritable notoriété et ont fait l'objet de beaucoup de recherches. Leur étude a apporté une vision nouvelle de l'environnement.

De nombreuses applications des fractales ont été découvertes, et ce dans de différents domaines, à titre d'illustration : en électronique, en infographie, en biologie, en finances....

Relativement une science nouvelle, la géométrie fractale réserve-t-elle encore de nouvelles applications ? Et quelles sont ses perspectives d'innovation pour l'avenir ?

Références bibliographiques



Bibliographie

- [1] citations.webescence.com/citations/Benoit-Mandelbrot.
- [2] CLAUDIA SECRIERU, Applications de l'analyse fractale dans le cas de ruptures dynamiques, Paris, 2009.
- [3] CLAUDIA SECRIERU, Applications de l'analyse fractale dans le cas de ruptures dynamiques, Paris, 2009.
- [4] DIAGO QUEIROS-CONDE, JEAN CHALINE, JACQUES DUBOIS, « Le monde des fractales », ellipses, 2015.
- [5] Frankhauser, 2003.
- [6] PHILIPPE ETCHECOPAR et CEGEP DE RIMOUSKI, « Quelques éléments sur la théorie du chaos ».
- [7] HERVE P.ZWIRN, « Les systèmes complexes », Amazon, France, 2006.
- [8] GEORGES LEPICARD, « Théorie des systèmes complexes »
- [9] images.search.yahoo.com/yhs/search?p=tableau+dimension+topologique.
- [10] fr.wikipedia.org/wiki/Dimenleion_fractal
- [11] Villemin.gerard.free.fr
- [12] Mourad Ben Slimane, « Étude du formalisme multifractal pour les fonctions », 1996.
- [13] JEAN-FRANÇOIS GOUYET, « Physique et structures fractales. Préface de Benoît Mandelbrot », 2016.
- [14] JEAN-PIERRE DEMAILLY, « Ensembles fractals, mesure et dimension », 2012.
- [15] fr.science-questions.org
- [16] BEKHALED KELTOUMA et KHEDIM ZINEB, « le formalisme multifractal dans le traitement des images médicales », Université Abou Bakr Belkaïd de Tlemcen, 2015.
- [17] Benoît Mandelbrot, « Les objets fractals Forme, hasard et dimension », champs sciences, 2010.
- [18] BOUCHARA LYDIA, « Phénomènes de collage et transport dans les systèmes hamiltoniens », Bejaia, 2016.
- [19] LYDIA BOUCHARA, OUERDIA OURRAD, SANDRO VAIENTI, XAVIER LEONCINI, « Chaos, Solitons and Fractals », Elsevier, 2015.
- [20] BOUCHARA LYDIA, « Phénomènes de collage et transport dans les systèmes hamiltoniens », Bejaia, 2016.
- [21] LYDIA BOUCHARA, OUERDIA OURRAD, XAVIER LEONCINI. « Multifractal transport in the standard map », AIP Conf Proc ,2012.

- [22] MOURAD BEN SLIMANE, « Étude du formalisme multifractal pour les fonctions ».
- [23] www.futura-sciences.com/sciences/actualites/physique-fractale.

Résumé

La géométrie fractale a été longtemps déconsidérée, mais depuis les résultats de Benoît Mandelbrot, elle a pris de l'ampleur et une importance primordiale ayant conduit à beaucoup de recherches, ces dernières ont permis de comprendre les formes géométriques complexes et irrégulières et à mieux connaître certaines structures qui semblaient au premier abord dépourvus de logique.

En effet, la notion fractale a pour but de désigner des ensembles possédant des propriétés géométriques particulières, la similitude interne et l'invariance par changement d'échelle. Quant à la dimension fractale, elle mesure le degré d'irrégularité d'un objet fractal et plusieurs méthodes ont été mises en évidence pour la calculer.

Les fractales permettent aujourd'hui de nombreuses avancées scientifiques dans divers domaines telles que la médecine, la géologie, la technologie, la physique et bien d'autres. Relativement une science nouvelle, la géométrie fractale réserve-t-elle encore de nouvelles applications ? Et quelles sont ses perspectives d'innovation pour l'avenir ?

Abstract

Fractal geometry has long been discredited, but since the results of Benoît Mandelbrot, it has gained momentum and a primordial importance that has led to a lot of research, the latter have made it possible to understand the complex and irregular geometrical shapes and to know better some structures that at first seemed devoid of logic.

Indeed, the notion of fractal aims to designate sets with particular geometric properties, internal similarity and invariance by scaling. As for the fractal dimension, it measures the degree of irregularity of a fractal object and several methods have been highlighted to calculate it.

Fractals today allow many scientific advances in various fields such as medicine, geology, technology, physics and many others. Relatively new science, does fractal geometry still have new applications? And what are his prospects for innovation for the future?