

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité :
Dynamique des fluides et énergétique

Thème

Instabilité d'un film fluide visqueux sur un plan incliné en présence d'un champ électromagnétique constant

Présentés par :

Dahmani Sabrina

Ider Nessma

Soutenu le : /10/2020 Devant le Jury composé de :

| Nom & Prénom | Grade | Qualité |
|-----------------------|------------|--------------|
| DJEMA AMAR | MCB | Présidente |
| DJESSAS Houria | MAA | Examinatrice |
| MEHIDI Nadia | Professeur | Rapporteur |

Année universitaire 2019/2020

| | |
|---|-----------|
| Notations | 4 |
| Introduction Générale..... | 9 |
| <u>1 Chapitre 1 Equation du mouvement d'un film liquide mince sur un plan incliné...12</u> | |
| 1.1 Introduction | 12 |
| 1.2 Hypothèses générales et mis en équation | 12 |
| 1.3 Géométrie du problème | 12 |
| 1.4 Equations du mouvement | 13 |
| 1.4.1 Conservation de la masse :..... | 13 |
| 1.4.2 Conservation de la quantité de mouvement : | 14 |
| 1.4.3 Condition cinématique a l'interface :..... | 15 |
| 1.4.4 Condition dynamique : | 15 |
| 1.5 Ecoulement de Base :..... | 17 |
| 1.6 Conclusion | 19 |
| 2 Chapitre 2 Analyse dimensionnelle des équations | 20 |
| 2.1 Introduction | 21 |
| 2.2 Mise à l'échelle..... | 21 |
| 2.3 Les nombres adimensionnels..... | 22 |
| 2.4 Equations adimensionnées..... | 23 |
| 2.5 Conclusion | 24 |
| 3 Chapitre 3 Modélisation | 25 |
| 3.1 Introduction | 26 |
| 3.2 Mise en œuvre d'un modèle intégrale | 26 |
| 3.3 Equations moyennées | 29 |
| 3.3.1 Modèle de Shkadov | 30 |
| 3.3.2 Modèle aux résidue pondérés | 31 |
| 3.4 Stabilité linéaire de la surface libre | 32 |
| 3.4.1 Stabilité neutre | 34 |
| 3.4.2 Taux d'amplification | 37 |
| 3.4.3 Influence du champ électrique | 37 |
| 3.4.4 Influence du champ magnétique | 38 |
| 3.4.5 Influence de la tension superficielle | 39 |
| 3.5 Conclusion Générale | 40 |
| Références bibliographiques..... | 42 |

Listes des figures

- Figure 1.1 : Représentation schématique d'un film mince s'écoulant le long d'une plaque inclinée* 14
- FIG 3.1 : Comparaison des modèles développés à travers les courbes de stabilité pour $M = 1.5, E = 0.5, w = 100, \theta = 10^\circ$* 37
- FIG 3.2 : Mise en évidence des Reynolds critiques des modèles développés à travers les obtenus pour $k = 0$. Valeurs des paramètres $M=1.5, E=0.5, w=100, \theta = 10^\circ$* 38
- FIG 3.3 : Courbes de taux d'amplification correspondant au modèle aux résidus pondérés. ω_{imax} . Les courbes montrant l'influence du champ électrique représente le taux d'amplification maximal, donné pour une valeur du nombre d'onde $k_{critique}$. pour : $M=1.5, R=10, w=100, \theta = 10^\circ$* 39
- FIG 3.4 : . Courbes de taux d'amplification correspondant au modèle aux résidus pondérés. ω_{imax} Les courbes montrant l'influence du champ magnétique , représente le taux d'amplification maximal, donné pour une valeur du nombre d'onde $k_{critique}$. Valeurs des paramètres : $E=1.5, R=10, w=100, \theta = 10^\circ$* 40
- FIG 3.5 : Courbes de taux d'amplification correspondant au modèle aux résidus pondérés. ω_{imax} représente le taux d'amplification maximal, donné pour une valeur du nombre d'onde $k_{critique}$. : $E=1.5, M=1.5, R=10, \theta = 10^\circ$* 41

Notations

Symboles Romains

- \vec{V} Vecteur vitesse
- \vec{g} Accélération gravitationnelle
- E_0 Champ électrique
- H_0 Champ magnétique
- \vec{B} Induction magnétique
- \vec{D} Induction électrique
- t Temps
- (x, y) Coordonnées cartésiennes
- (u, v) Composantes de la vitesse suivant les axes x et y
- p_0 Pression atmosphérique
- p Pression
- \vec{n} Vecteur unitaire normal à l'interface
- \vec{t} Vecteur unitaire tangent à l'interface
- $h(x, t)$ Epaisseur du fluide
- h_0 Epaisseur de Nusselt (film uniforme)
- l longueur d'onde
- k Nombre d'onde
- $U(y)$ Vitesse de l'écoulement de base
- U_N Vitesse moyenne

Symboles Grecs

- α Angle d'inclinaison du plan
- μ Viscosité dynamique
- ν Viscosité cinématique
- ρ Masse volumique
- γ Coefficient de tension superficielle
- ω Pulsation de l'onde
- ω_r Pulsation réelle

- ω_i Taux d'amplification de l'onde
- σ Conductivité de fluide

Nombres sans dimension

- R_e Nombre de Reynolds
- R_c Nombre de Reynolds critique
- w Nombre de Weber
- M Nombre de Hartmann
- E Nombre électrique
- ε Paramètre du film onde longue caractéristique

Tenseurs

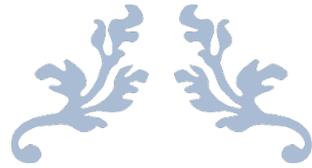
- \bar{I} Tenseur identité
- $\bar{\sigma}$ Tenseur des contraintes visqueuses
- $\bar{\sigma}'$ Tenseur des contraintes
- \bar{D} Tenseur taux de déformation

Opérateurs

- ∇ Opérateur gradient
- Δ Laplacien

Dérivée

- $\frac{D}{Dt}$ Dérivée particulière
- $\frac{\partial}{\partial x}$ Dérivée partielle



Remerciements

*Nous souhaitons manifester nos sincères remerciements à :
Allah le tout puissant, qui nous a guider pour accomplir ce travail.
Nos familles pour leurs compréhensions et pour leurs conseils qu'ils n'ont cessées
denous prodiguer.*

*Nos vifs remerciements accompagnés de toute notre gratitude vont notamment à
nos encadreur Mme **MEHIDI Nadia** de nous avoir encadré, qui nous avoir
aidée à progresser grâce à son conseil, son esprit critique et son soutien tout le
long de la réflexion de cette recherche. Nous espérons être dignes de la
confiance qu'il est place en nous.*

*Nous tenons à remercier les membres de jury Mr. **DJEMA Amar** et Mme
DJESSAS Houria pour nous avoir fait l'honneur d'examiner et d'évaluer notre
travail.*

*À tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué par leurs conseils, leurs
encouragements et leurs amitiés, à l'édification de ce projet.*

*À tous nos chères amis et les étudiants de notre promo nous vous souhait toute la
réussite du mande.*

Dédicaces

À mes très chers parents, qui m'ont faits connaître les portes du s'avoir.

Merci pour votre

générosité, Ouverture d'esprit, votre patience et votre

Endurance

À ma sœur sisia , à mon frère hamou

À ma binôme sabrina ,

À tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de

ce travail

merci

IDERNESSMA

Dédicaces

*À mes très chers parents , source de vie , d'amour, d'espoir et
d'affection.*

À mes chers frères et ma petite sœur , source de joie et de bonheur.

*À tous mes amis et mes camarades de promotion et tout ceux que j'ai
connu durant mon cycle d'étude.*

*À ma chère amie avant d'être binome pour son soutien moral et sa
compréhension tout au long
de ce projet*

Dahmani Sabrina

Introduction Générale

L'étude d'écoulements de films minces sous l'influence de la gravité a de larges implications dans les phénomènes naturels tels que la modélisation du mouvement des océans, des zones côtières, l'écoulement des rivières et de débris lors d'avalanches.

Dans l'industrie, les films minces interviennent dans la limitation de flux ou le transfert de chaleur et de masse, ou pour protéger des surfaces. Ils peuvent être utilisés pour la conception de peintures, le revêtement, évaporateurs à films tombants (agroalimentaire), dans la recherche fondamentale, d'adhésifs ou lors de dépôt de plusieurs couches de pellicules pour des films photographiques [1, 9,10,12]

Ainsi, les instabilités de films mince en écoulement ont suscité de nombreuses études théorique [2,3,4] et expérimentales [9], en raison notamment de leurs applications industrielles, qu'elles y soient désirables ou pas mais aussi pour leur intérêt fondamental.

Historiquement, l'étude du comportement de la surface libre d'un film de fluide visqueux en écoulement sur un plan incliné a débuté avec les travaux de Kapitza (1949) [9]

Benjamin [2] et Yih [14] ont résolu le problème de la stabilité linéaire et donné la valeur du Reynolds critique, qui est égale à $\frac{5}{6} \cot \alpha$, où α est l'inclinaison.

Par la suite Benney en 1966 a trouvé une équation donnant la hauteur du film qui permet de retrouver formellement le critère de stabilité de Benjamin et Yih [2, 14]

.Et leur modèles ne sont cependant valable qu'à de faibles nombres de Reynolds.

D'autres travaux dans le domaine ont été réalisés par Shkadov [13] permet de décrire la dynamique du film à des nombre de Reynolds modérés [11]

Le travail consiste à moyenner les équations bilans de la quantité de mouvement et de la masse sur l'épaisseur du film avec l'hypothèse d'un profil de vitesse parabolique. Le modèle obtenu est un système d'équations décrivant l'évolution de l'épaisseur du film fluide et de débit instantané locale, ce modèle ne prédit pas de façon précise le seuil d'apparition des ondes à la surface du film.

L'influence du champ électrique sur un film liquide mince produit une classe importante de problèmes qui ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs en raison de ses applications pratiques telles que dans les équipements d'énergie nucléaire et les différents systèmes de refroidissement, ou les ondes de surface sont indésirables à l'interface fondue, par conséquent

l'application d'un champ magnétique contrecarre la force d'inertie ,l'instabilité pourrait être évitée pour maintenir l'écoulement régulier [6,7,8] .

la présence d'un champ électromagnétique introduit des effets physiques supplémentaires sur la dynamique des flux tels que la force corporelle due à un courant dans les fluides conducteurs et les contraintes de Maxwell aux interfaces libres ,González et Castellanos ont étudié la stabilité non linéaire d'un film parfaitement conducteur s'écoulant dans un plan incliné en présence d'un champ électromagnétique normal ,ils ont dérivé une équation d'évolution non linéaire dans la limite du petit nombre de Reynolds et concluent à l'effet déstabilisateur du champ électromagnétique dans l'amplitude finie . [7]

L'objectif de ce mémoire est de développer un modèle pouvant décrire les instabilités à surface libre d'un écoulement sur un plan incliné d'un fluide visqueux soumis à l'effet d'un champ électromagnétique ,le problème à résoudre est le problème des équations de Navier-Stokes dans l'hypothèse ondes longues ,il s'agit donc de poser les équations simplifiées , on s'intéresse à la théorie des grandes longueurs d'onde qui conduit à une équation d'évolution des ondes de la surface libre avec une petite amplitude

Les différentes parties de notre travail sont représentées de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, nous modéliserons l'écoulement laminaire d'un film liquide incompressible newtonien soumis à une contrainte de cisaillement à l'interface, nous écrirons les équations générales décrivant l'écoulement étudié et nous calculerons une solution simple indépendante du temps qui définit l'écoulement de base.
- Le second chapitre, nous procédons à une analyse adimensionnelle des équations bidimensionnelles obtenues afin de les simplifier.
- En fin de chapitre trois traite de la modélisation du problème étudié .Nous sommes insistent sur l'approche intégrale couche limite de Shkadov et celle aux résidus pondérés. Nous sommes insistent sur l'étude de stabilité linéaire de deux modèles développés . Nous sommes sélectionné le modèle aux résidus pondérés décrivant un seuil de déclenchement des instabilités de manière exacte.

Chapitre 1
Equation du mouvement d'un film liquide
mince sur un plan incliné

1.1 Introduction

- Le but de ce chapitre est de faire sortir le système d'équation mathématique (les équations de Navier-Stokes), nous permettant d'étudier la stabilité de l'écoulement d'un film liquide le long d'un plan incliné en présence de champ magnétique et on prend en considération les effets de tension superficielle. Les équations à résoudre sont présentées en coordonnées cartésiennes qui sont plus adaptées pour décrire correctement ce problème, dans un repère bidimensionnel (2D).

1.2 Hypothèses générales et mis en équation

On s'intéresse à la résolution d'un problème de dynamique des fluides qui demande à calculer les propriétés de fluide comme la vitesse, la pression, la viscosité dynamique la densité

Dans notre cas d'étude nous considérons les hypothèses suivantes :

- ✓ le fluide est visqueux
- ✓ l'écoulement est laminaire
- ✓ le fluide est newtonien et incompressible

Dans ces conditions les équations générales décrivant cet écoulement sont les équations de Navier –Stokes et les conditions aux limites associées.

1.3 Géométrie du problème

Dans ce travail, nous avons considéré un flux de mince film liquide visqueux d'épaisseur h_0 elle est supposée newtonienne, incompressible sa viscosité dynamique et densité sont respectivement μ et ρ , le long d'un plan d'inclinaison α non conducteur avec l'horizontal sous l'action de la pesanteur en présence d'un champ électromagnétique, la plage d'inclinaison est comprise entre $0 < \alpha \leq \pi/2$. Un système de coordonnées cartésiennes bidimensionnel est introduit de telle sorte que l'axe des x coïncidant avec le plan et dans la direction de l'écoulement, et l'axe des y pointant verticalement vers haut à partir du plan incliné, perpendiculaire à la paroi, la géométrie de l'écoulement est représentée sur la figure (1,1).

Le champ magnétique agit parallèlement à l'axe X et le champ électrique agit normalement au plan (x, y) , l'influence dynamique du débit d'air au dessus de film est ignorée, la position de l'interface est représentée par la équation $y = h(x, t)$ qui fait partie des inconnues du problème.

Les composantes des vitesses en coordonnées cartésiennes sont (u, v) , et de la pression $p(x, y, t)$, la dynamique du fluide est gouvernée par les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites associées.

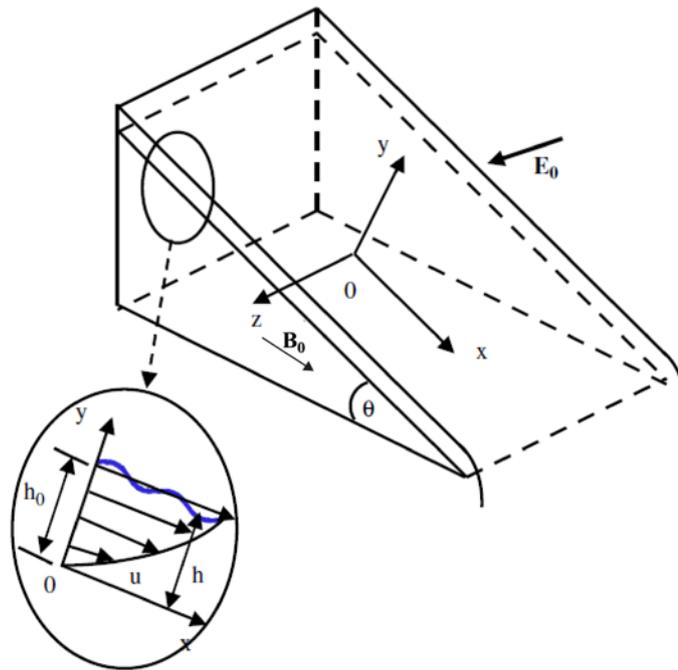


Figure 1.1 : Représentation schématique d'un film mince s'écoulant le long d'une plaque inclinée

1.4 Equations du mouvement

En mécanique des fluides l'équation de bilan de la quantité de mouvement découle du principe fondamental de la dynamique appliqué à un fluide, le champ électromagnétique obéit aux équations de Maxwell.

1.4.1 Conservation de la masse :

Cette équation est également appelée équation de continuité, sa forme générale est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1,1)$$

L'écoulement est incompressible, l'équation se traduit par une divergence nulle du champ de vitesse \vec{v}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1,2)$$

1.4.2 Conservation de la quantité de mouvement :

Les champs magnétique \vec{B} et électrique \vec{E} appliqués supposés uniforme, sont respectivement dans la direction longitudinale et transversale :

$$\vec{B} = B_0 \vec{i} \quad , \quad \vec{E} = E_0 \vec{k}$$

L'équation de Navier-Stokes dans le cas général :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \vec{\Delta} \vec{v} + \mu_0 \sigma \left(\vec{E} + \mu_0 (\vec{v} \wedge \vec{M}) \right) \wedge \vec{M} \quad (1,3)$$

L'analyse de chaque terme de cette équation :

- ✓ $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: terme d'inertie instationnaire.
- ✓ $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$: terme non linéaire convectif traduit la variation de champ de vitesse en fonction des coordonnées spatiales.
- ✓ $\vec{\nabla} P$: terme dû au champ de pression (force surfacique).
- ✓ $\rho \vec{g}$: les effets de la force de gravité.
- ✓ $\mu \vec{\Delta} \vec{v}$: terme dû à la viscosité du fluide.
- ✓ $\mu_0 \sigma \left(\vec{E} + \mu_0 (\vec{v} \wedge \vec{M}) \right) \wedge \vec{M}$: dû à la force volumique, force de Lorentz exercée par le fluide

Où μ_0 est la perméabilité magnétique, σ la conductivité électrique du fluide et μ est la viscosité dynamique

La projection de l'équation présidant (1,8) en coordonnées cartésiennes a (2D) donne :

Suivant l'axe ox :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin(\alpha) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1,4)$$

Suivant l'axe oy :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos(\alpha) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \sigma (E_0 \cdot M_0 - \quad (1,5)$$

$$\mu_0(v \cdot M_0^2)$$

Condition aux limites :

L'adhérence du fluide a la paroi d'équation $y=0$, s'écrit :

$$u=0, v=0$$

Au niveau de l'interface d'équation $y = h(x, t)$

Nous avons deux types de conditions :

1.4.3 Condition cinématique a l'interface :

Cette condition également appelée condition d'imperméabilité, le faite que les limites du fluide sont imperméable.

Les particules fluide ne peuvent se déplacer que tangentiellement à l'interface fluide, c'est-à-dire que la vitesse normale à l'interface disparu

La fonction qui définit l'interface perturbée est :

$$F(x, y, t) = y - h(x, t) \quad (1,6)$$

La dérivée matérielle s'annule $\frac{dF}{dt} = 0$ ou :

$$\frac{dF}{dt} = v - \frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1,7)$$

Donc

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1,8)$$

1.4.4 Condition dynamique :

1.4.4.1 Continuité des contraintes tangentielles :

La contrainte de cisaillement sur la surface libre doit être supprimée

$$(\bar{\sigma}\vec{n}) \cdot \vec{t} = 0 \quad (1,9)$$

1.4.4.2 Continuité des contraintes normale :

$$(\bar{\sigma}\vec{n}) \cdot \vec{n} - (p_0\vec{n}) \cdot \vec{n} = \gamma \text{div}(\vec{n}) \quad (1,10)$$

avec γ le coefficient de tension superficielle et p_0 la pression de

On va définir les vecteurs tangent (\vec{t}) et normal (\vec{n})

Le vecteur unitaire normal à l'interface est donnée a partir de la relation :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} F}{\|\text{grad} F\|} \quad \text{avec} \quad F(x, y, t) = y - h(x, t)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} F = -\frac{\partial h}{\partial x} \vec{i} + 1 \vec{j} \quad (1,11)$$

$$\|\text{grad} F\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \quad (1,12)$$

Donc

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1,13)$$

Nous avons que les vecteurs normal et tangent sont perpendiculaires, on a donc cette expression pour \vec{t} :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1,14)$$

Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ dans ce cas s'écrit :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} + \bar{\sigma}' \quad \text{Avec} \quad \bar{\sigma}' = 2\mu\bar{D} \quad (1,15)$$

Ou \bar{D} est le tenseur des taux de déformation et \bar{i} matrice identité

$$\bar{D}_{ij} = \bar{D}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1,16)$$

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1,17)$$

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,18)$$

Les deux conditions dynamiques(1,12)et(1,13) s'écrivant comme suite :

$$\frac{2\mu h_x}{1+h_x^2} (v_y - v) + \frac{\mu(1-h_x^2)}{1+h_x^2} (v_y + v_x) = 0 \quad (1,19)$$

$$-P\bar{i} + \frac{2\mu}{1+h_x^2} (h_x v_x + v_y - h_x(v + v_x)) + P_o = \gamma \text{div}(\vec{n}) \quad (1,20)$$

Avec γ est la tension de surface et :

$$\text{div}(\vec{n}) = - \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \quad (1,21)$$

1.5 Ecoulement de Base :

A fin de calculer la solution de base de l'écoulement d'un film mince sur un plan incliné on va

Considérer les hypothèses suivant :

- Ecoulement est stationnaire
- Un profil de vitesse uniforme

-On suppose un régime d'écoulement établi avec :

$$\vec{V} = U(y)\vec{e}_x$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (1,22)$$

L'équation de Navier-stokes (1,9) et (1,10) se réduit :

$$\rho g \sin \alpha + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1,23)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \alpha + \mu \sigma(E_o H_o) = 0 \quad (1,24)$$

En intégrant l'équation(1,28) et (1,29) on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha y + A \quad (1,25)$$

$$U(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \alpha y^2 + Ay + B \quad (1,26)$$

Et :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha + \mu \sigma(E_o H_o) \quad (1,27)$$

$$p(y) = [-\rho g \cos \alpha + \mu \sigma(E_o H_o)]y + C \quad (1,28)$$

La constante C est déterminé à partir de la condition dynamique(1,25), $p = p_0$ en $y = h_0$

La pression est égale la pression atmosphérique à la surface libre

Donc :

$$P_0 = [-\rho g \cos \alpha + \mu \sigma(E_o H_o)]h_0 + C \quad (1,29)$$

$$(1,30)$$

$$C = P + [\rho g \cos \alpha - \mu \sigma(E_o H_o)]h_0$$

$$p(y) = [\rho g \cos \alpha - \mu \sigma(E_o H_o)](h_0 - y) + P. \quad (1,31)$$

Pour trouver les constante A et B on utilise les conditions de non glissement et la condition dynamique tangentielle(1,24)

$$U=0 \quad \text{en } y=0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{h_0} = 0$$

Donc :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{h_0} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha h_0 + A \quad (1, 32)$$

$$A = \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha h_0 \quad (1,33)$$

$$U(y) = \frac{\rho g \sin \alpha h_0^2}{\mu} \left(-\frac{y^2}{2h_0} + \frac{y}{h_0} \right) \quad (1, 34)$$

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé les équations décrivant le problème étudié celui du film visqueux dans un plan incliné en présence d'un champ magnétique ..

En suite du ce chapitre on calcul les solutions uniformes et stationnaire correspondantes qui ont servi de définir les grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

Chapitre 2 Analyse dimensionnelle des équations

2.1 Introduction

L'étude adimensionnelle est permet de déterminer les ordre de grandeur respectifs de chaque terme des équation développés dans le chapitre 1, et pour rendre le système d'équation sans dimension, on va introduire les grandeurs de référence définies précédemment dans les équations du mouvement et les condition aux limites.

Notons qu'il existe une grande variété des échelles de référence dans la littérature, ce qui ne rend pas facile la comparaison de nos résultats avec d'autres auteurs

2.2 Mise à l'échelle

La solution de l'écoulement stationnaire et uniforme, elle met en évidence les grandeurs de référence. en notant L une longueur d'onde caractéristique et l'épaisseur h_0 les échelles de longueurs selon les directions X et Y respectivement, la vitesse moyenne U_N de l'écoulement est prise comme vitesse de référence dans la direction axiale, et a partire de ces échelles, on déduite d'autres grandeurs caractéristique pour le temps, vitesse radiale et la pression.

Nous avant représenté ces grandeurs sous forme d'un tableau, nous mettons en regard les grandeurs avec dimension et les grandeurs sans dimension.

| Grandeurs dimensionnée | Grandeurs de référence | Grandeurs sans dimension |
|------------------------|---------------------------------|---|
| X | $x_{réf} = L$ | $x^* = \frac{x}{x_{réf}} = \frac{x}{L}$ |
| Y | $y_{réf} = h_0$ | $y^* = \frac{y}{y_{réf}} = \frac{y}{h_0}$ |
| T | $t_{réf} = \frac{L}{U_N}$ | $t^* = \frac{t}{t_{réf}} = \frac{t U_N}{L}$ |
| U | $u_{réf} = U_N$ | $u^* = \frac{u}{u_{réf}} = \frac{U}{U_N}$ |
| V | $v_{réf} = U_N \frac{h_0}{L}$ | $v^* = \frac{v}{v_{réf}} = \frac{V}{U_N h_0} L$ |
| P | $p_{réf} = \frac{\mu U_N}{h_0}$ | $p^* = \frac{p}{p_{réf}} = \frac{P h_0}{\mu U_N}$ |

Tableau 2-1. Tableau récapitulatif des différentes grandeurs de référence.

U_N : est la vitesse moyenne de l'écoulement de base définie par :

$$U_N = \frac{1}{h_N} \int_0^{h_N} U(y) dy = \frac{g \sin(\alpha)}{3\nu} h_N^2$$

2.3 Les nombres adimensionnels

Les équations adimensionnée font apparaître les nombres adimensionnels suivants :

- Nombre de Reynolds : caractérise le rapport entre les effets d'inertie et les effets visqueux, on distingue quatre régimes principaux (régime de Stokes, laminaire, transitoire et régime turbulent) correspondant à la valeur de ce nombre adimensionnel.

$$Re = \frac{\rho U_m h}{\mu}$$

- Nombre de Weber : est un nombre sans dimension, correspond au rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle, caractérise l'écoulement de fluide à l'interface du système, défini de manière suivante :

$$We = \frac{\rho U_m^2 h}{\gamma}$$

- Nombre de Hartmann : est un nombre adimensionnel caractérise le mouvement de fluide conducteur en présence de champ magnétique, représente le rapport entre la force de Laplace et les forces visqueuses.

$$M = h_0 B \mu_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

- Nombre électrique : est un nombre sans dimension, qui traite le mouvement de fluide en présence d'un champ électrique, représente le rapport entre les effets magnétique et électrique.

$$E = \frac{E_0}{\mu_0 B_0 U_m}$$

- Le paramètre : ε qui rend compte du caractère ondes longues des modes instables

$$\varepsilon = \frac{h}{L}$$

Les expressions de ces paramètres proviennent de l'analyse adimensionnelle, où U_N est la vitesse moyenne du fluide dans la direction de l'écoulement, L une longueur d'onde caractéristique de l'écoulement et h son épaisseur uniforme.

2.4 Equations adimensionnées

Notons que l'adimensionnalisation varie d'un auteur à un autre, la difficulté rencontrée si l'on veut faire une synthèse bibliographique est donc la variété des échelles de référence choisies, et la mise sous forme adimensionnel de ces équations de mouvement et les conditions aux limites est obtenue à l'aide des variables sans dimension qui nous avons exprimé dans le tableau précédent, le système adimensionné à résoudre s'écrit alors :

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2,1)$$

Équation projeté suivant l'axe X^* :

$$\varepsilon Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \quad (2,2)$$

Équation projeté suivant l'axe Y^* :

$$\varepsilon^2 Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 3 \cot g(\alpha) + \beta M^2 - \varepsilon M^2 v \quad (2,3)$$

Les conditions aux limites :

- Condition cinématique en $y=0$:

$$U(x, 0, t) = 0 \quad (2,4)$$

- Condition cinématique en $y = h(x, t)$:

$$v = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (2,5)$$

- Condition dynamique ; contraintes tangentielles :

$$2\varepsilon^2 h_x (v_y - u_x) + 1 - \varepsilon^2 h_x^2 (v_y + \varepsilon^2 u_x) = 0 \quad (2,6)$$

- Condition dynamique ; contraintes normale :

$$-p + \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} (\varepsilon h_x u_x + v_y - \varepsilon h_x (u_y + \varepsilon^2 v_x)) = WR_e \frac{\varepsilon^2 h_x}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)} \quad (2,7)$$

la solution de système sous forme adimensionnelle :

- le profile de vitesse :

$$U(y) = 3y \left(1 - \frac{1}{2}y\right) \quad (2,8)$$

- la pression :

$$p(y) = \beta M^2 (y - h) + 3 \cot(\alpha) (h - y) - WR_e (h_{xx}) \quad (2,9)$$

2.5 Conclusion

L'écriture des équations obtenues sous forme adimensionnelle à permis de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant le problème, on a procédé une analyse adimensionnelle du système d'équations gouvernant l'écoulement étudié.

Cette technique consiste a faire apparaître des groupements de nombre qui n'ont pas de dimension et pour faciliter l'échange d'information entre des modèles a échelles différentes

Chapitre 3 Modélisation

3.1 Introduction

Dans ce chapitre notre travail consiste à rechercher un modèle simplifié, c'est-à-dire établir les équations les plus simples qui soient capables de rendre compte de l'évolution des ondes longues à la surface libre d'un écoulement visqueux soumis à l'action de forces électromagnétiques. Le modèle est obtenu par une méthode intégrale mise en œuvre par Skhadov en s'inspirant des travaux de Karman et polhausen pour étudier l'évolution de la couche limite laminaire. L'influence des différents paramètres sur les caractéristiques de ces ondes sera étudiée.

3.2 Mise en œuvre d'un modèle intégrale

Dans le cas où les forces de viscosité sont prises en considération, l'hypothèse de grande longueur d'onde impose ε petit devant l'unité. Ce paramètre exprime la variation lente en temps et en espace de la surface libre de l'écoulement. Les équations adimensionnées associées aux conditions aux limites décrivant l'écoulement sont écrites en gardant les termes d'ordre ε^2 . Nous obtenons :

$$\varepsilon R_e \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \quad (3,1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 3\varepsilon B + \varepsilon E M^2 - \varepsilon^2 M^2 V \quad (3,2)$$

On note $B = \cot \theta$

Avec les conditions aux limites en $y = 0$

$$u(x, 0, t) = 0 \quad (3,3)$$

$$v(x, 0, t) = 0 \quad (3,4)$$

Et en $y = h(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) = 4\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t) - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} v(x, y, t) \quad (3,5)$$

$$p(x, y, t) = 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, t) - weR_e \epsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x, t) \quad (3,6)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) + u(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} h(x, t) \quad (3,7)$$

Nous remplaçons le système d'équations précédent décrivant le mouvement du fluide par des équations moyennées sur l'épaisseur du fluide, pour obtenir deux équations d'évolution de la surface libre $h(x, t)$ et du débit $q(x, t)$ [10].

Par suite, on voit que dans le cadre de cette approximation, comme pour la théorie de la couche limite, l'accélération verticale est négligée aux ordres d'approximation. On va donc pouvoir éliminer la pression du problème (3,1).

Ainsi l'intégration de l'équation (3,2) entre y et $h(x, t)$ et la prise en compte de la continuité des contraintes normales (2,1), nous permet de déterminer l'expression de la pression, on trouve:

$$p(x, y, t) = \epsilon^2 \left(v_y|_h + v_y \right) - \epsilon(h - y)[3B + EM^2] + \epsilon^2 M^2 \int_y^h v dy - \epsilon^3 h_{xx} w_e R_e \quad (3,8)$$

Du fait que les ondes observées sont de grandes longueurs devant l'épaisseur du film, il y a donc séparation d'échelles les variables x et y . Cette hypothèse a conduit à négliger le terme d'inertie suivant l'accélération vertical à l'écoulement.

L'expression de la pression (3,8) associée à l'expression (3,7) de la vitesse normale, nous permet d'obtenir une équation fonction de la seule variable $u(x, y, t)$ dite équation de couche limite.

$$R_e \epsilon (u_t + uu_x + vu_y) - 2\epsilon^2 u_{xx} - 3 + 3\epsilon \cot \theta h_x - \epsilon^2 (u_x|_h)_x - u_{yy} - R_e w_e \epsilon^3 h_{xxx} + \epsilon M^2 E h_x + \epsilon^2 M^2 \int_y^h v_x dy = 0 \quad (3,9)$$

La méthode intégrale de couche limite fournit le système d'équations constitué de l'équation précédente (3,9) à laquelle on associe les conditions aux limites de vitesse nulle à la paroi et la continuité de la contrainte tangentielle :

$$\begin{aligned}
R_e \varepsilon (u_t + uu_x + vu_y) - 2\varepsilon^2 u_{xx} - 3 \\
+ 3 \varepsilon \cot \theta h_x - \varepsilon^2 (u_x|_h)_x - u_{yy} - R_e w_e \varepsilon^3 h_{xxx} + \varepsilon M^2 E h_x \\
+ \varepsilon^2 M^2 \int_y^h v_x dy = 0
\end{aligned} \tag{3,10}$$

$$u|_0 = 0 \tag{3,11}$$

$$u_y|_h = \varepsilon^2 (4h_x u_x|_h - v_x|_h) \tag{3,12}$$

Cette démarche fournit de très bons résultats, notamment pour les nombres de Reynolds modérés. Les résultats sont en revanche moins bons tout près du seuil de l'instabilité. La méthode intégrale de couche limite est une des méthodes les plus classiques qui a connue un grand développement, essentiellement dans l'étude de la dynamique des films minces visqueux.

La première étape consiste à développer le champ de vitesse longitudinal $u(x, y, t)$ sur un ensemble de fonctions test $f_i(y)$ vérifiant les conditions aux limites. On présente alors la vitesse sous la forme :

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^N a_i(x, t) f_i(y/h) \tag{3,13}$$

Cette forme de profil de vitesse est de la forme de l'écoulement de base, c'est-à-dire de forme polynomiale et s'inspire des travaux de Shkadov [10].

A partir de l'équation de continuité on détermine la composante $v(x, y, t)$:

$$v(x, y, t) = \sum_i \frac{\partial a_i(x, t)}{\partial x} \int_0^y f_i(y/h) \tag{3,14}$$

La résolution du système d'équations (3,14) à l'ordre zéro en ε et l'introduction du débit à travers la relation suivante :

$$q(x, t) = \int_0^{h(x,t)} u(x, y, t) dy \quad (3,15)$$

Ces étapes de calcul permettent d'exprimer le profil de vitesse en fonction du débit $q(x, t)$:

$$q(x, t) = \int_0^{h(x,t)} u(x, y, t) dy \quad (3,16)$$

$$u(x, y, t) = \frac{3q(x, t)}{h(x, t)} \left[\frac{y}{h(x, t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)^2 \right] \quad (3,17)$$

Soit :

$$f_i(y/h) = f_i = \left(\frac{y}{(hx, t)} \right)^{(i+1)} - \frac{(i+1) \left(\frac{y}{(hx, t)} \right)^{(i+2)}}{i+2} \quad (3,18)$$

Et en particulier :

$$f_0(y/h) = \left[\frac{y}{h(x, t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)^2 \right] \quad (3,19)$$

3.3 Equations moyennées

La méthode intégrale de couche limite est une des méthodes les plus classiques qui a connue un grand développement, essentiellement dans l'étude de la dynamique des films minces visqueux. Nous proposons de développer le modèle de Skhadov pour l'écoulement d'un film mince soumis à l'action de force da gravité et de force électromagnétique. Nous proposons

également une amélioration de ce modèle, en développant un modèle basé sur une méthode aux résidus pondérés .

3.3.1 Modèle de Shkadov

L'équation dite de couche limite (3,9) associée à l'expression de la vitesse (3,17) intégrée sur l'épaisseur du film fluide permettent de trouver une relation reliant l'épaisseur de la couche $h(x, t)$ et le débit $q(x, t)$.

$$\int_0^h \left\{ R_e \varepsilon (u_t + uu_x + vu_y) - 2\varepsilon^2 u_{xx} - 3 \right. \\ \left. + 3 \varepsilon \cot \theta h_x - \varepsilon (u_x|_h)_x - u_{yy} - R_e w_e \varepsilon^3 h_{xxx} + \varepsilon M^2 E h_x \right. \\ \left. + \varepsilon^2 M^2 \int_y^h v_x dy \right\} dy = 0 \quad (3,20)$$

On obtient :

$$\left(\frac{3q q_x}{10h} + \frac{q_t}{3} - \frac{q h_t}{2h} - \frac{2q^2 h_x}{5h^2} - \frac{w h_{xxx}}{3} \right) \varepsilon R_e + \left(B h_x h - \frac{M E h_x h}{3} \right) \varepsilon + \frac{q}{h^2} - h = 0 \quad (3,21)$$

$$\left(-\frac{11}{120} M^2 h^2 q_{xx} - \frac{1}{30} M^2 h q_x h_x + \frac{3}{20} M^2 q h_x^2 + \frac{3}{20} M^2 h q h_{xx} - \frac{7}{6} q_{xx} + 3 \frac{q_x h_x}{h} \right. \\ \left. - 3 \frac{q h_x^2}{h^2} + \frac{3 q h_{xx}}{2h} \right) \varepsilon^2 \\ + \left(\frac{1}{3} \left(\frac{9 q q_x}{10h} - \frac{6 q^2 h_x}{5h^2} + q_t - \frac{3 q h_t}{2h} - w h_{xxx} h \right) R_e + \frac{1}{3} M^2 E h_x h \right. \\ \left. + B h_x h \right) \varepsilon - h + \frac{q}{h^2} = 0 \quad (3,22)$$

L'équation (3.22) correspond à l'équation d'évolution de la surface libre $h(x, t)$ et du débit $q(x, t)$.

La deuxième équation est obtenue à partir de la définition du débit $q(x, t) = \int_0^{h(x,t)} u(x, y, t) dy$, de l'intégration sur y de l'équation de continuité (2.1), cela nous permet

de réécrire la condition cinématique (2.6) Sous la forme intégrale:

$$h_t + q_x = 0 \quad (3,23)$$

Les deux équations (3.17) et (3.23) constituent le modèle développé décrivant les premières instabilités de grande longueur d'onde se développant à la surface libre de l'écoulement étudié.

Le modèle de Skhadov donnés par les relations (3.21) et (3 ,23) décrit correctement le comportement de l'écoulement à des nombres de Reynolds modérés ; mais il ne donne pas le seuil exacte de déclenchement des instabilités de grandes longueurs d'onde

3.3.2 Modèle aux résidus pondérés

Nous proposons dans ce qui suit, une amélioration du modèle de Skhadov , réalisé dans une approche développée par Ruyer Quil et Manneville [16]. Cette approche consiste à combiner un développement du profil longitudinal des vitesses avec une méthode aux résidus pondérés. Le profil des vitesses est donné par :

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) \quad (3,24)$$

La méthode de Galerkin permet d'éviter l'évaluation des corrections $u_1(x, y, t)$ d'ordre ε si les fonctions poids w_i sont correctement choisies et L'élimination de la variable d'espace correspondant à la direction y se fait en écrivant le résidus correspondant à la fonction poids $w_0 = f_0$ appliqué à l'équation de couche limite (3.20) . Notons que les fonctions poids sont prises égales aux fonctions tests dans la méthode de Galerkin.

L'équation d'évolution est obtenue après l'annulation de ce résidus. Soit :

$$\int_0^h \left\{ R_e \varepsilon (u_t + uu_x + vv_y) - 2\varepsilon^2 u_{xx} - 3 \right. \\ \left. + 3 \cot \theta h_x - (u_x|_h)_x - u_{yy} - R_e w_e \varepsilon^3 h_{xxx} - \varepsilon M E h_x \right. \\ \left. + \int_y^h v_x dy \right\} w_0 dy = 0 \quad (3,25)$$

On obtient une équation cohérente à l'ordre ε :

$$\left(-\frac{18q^2 h_x}{35h^2} - \frac{23q h_t}{40h} + \frac{111q q_x}{280h} - \frac{h w h_{xxx}}{3} + \frac{2q_t}{5} \right) \varepsilon R_e \quad (3,26)$$

$$+ \left(h B h_x - \frac{h M E h_x}{3} \right) \varepsilon + \frac{q}{h^2} - h = 0$$

$$q_x + h_t = 0$$

On obtient un système d'équations simplifié, qui garde un caractère non linéaire dans les deux approches. La différence réside dans les coefficients des termes d'ordre ε . L'approche aux résidus pondérés de Galerkin est cohérente à l'ordre un en ε . Notons que cette approche est une amélioration du modèle de Shkadov, le modèle de Shkadov utilise une fonction poids uniforme, soit $w_0 = 1$.

3.4 Stabilité linéaire de la surface libre

La mise en œuvre de la méthode intégrale et des résidus pondérés nous ont permis de réduire l'étude des équations d'évolution du problème représenté par les équations de Navier-Stokes en le ramenant à la recherche de l'évolution de la surface libre $h(x, t)$ et du débit $q(x, t)$. Les équations obtenues sont non linéaires et pour simplifier le problème on va procéder à une étude de la stabilité linéaire, nous conduisant à une relation de dispersion.

A partir de l'équation d'évolution (3,13) et (3,16) on obtient en posant $h(x, t) = 1 + h_1(x, t)$ et $q(x, t) = 1 + q_1(x, t)$ et en négligeant les termes quadratiques un système d'équations linéaires.

La surface libre et le débit peuvent s'écrire sous la forme :

$$h(x, t) = 1 + H_0 e^{i(kx)} e^{-i(\omega_r + i\omega_i)t} \quad (3,27)$$

$$q(x, t) = 1 + Q_0 e^{i(kx)} e^{-i(\omega_r + i\omega_i)t} \quad (3,28)$$

$H_0 e^{ik(x-ct)}$ et $Q_0 e^{ik(x-ct)}$ sont les perturbations de la surface libre et du débit et ω_r , k , Q_0 et H_0 sont des réels.

représente le taux de croissance ω_i indique par son signe si les perturbations de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ sont stables ($\omega_i < 0$) ou instables ($\omega_i > 0$). On aboutit à une relation de dispersion pour chaque modèle (3,27) et (3,28) qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\mathfrak{D}(k, \omega, R_e, w_e M, E) = 0 \quad (3,29)$$

Cette relation exprime le lien entre le coefficient d'amplification ω des perturbations et le nombre d'onde k .

A la criticalité, on obtient, en posant la pulsation ω sous la forme $\omega = a_1 k + a_2 k^2 + \mathcal{O}(k^3)$ dans la relation de dispersion (3,29) ; puis la résolution successive aux différents ordres donne :

$$a_1 = 3 \quad (3,30)$$

$$a_2 = -\frac{1}{3}EM^2 - B + \frac{6}{5}R \quad (3,31)$$

- La vitesse de propagation critique est réelle donnée par a_1 : Ce coefficient donne la vitesse des ondes à la surface libre qui est égale au triple de la vitesse moyenne.

$$c_r = 3$$

- La condition de stabilité marginale est donnée en posant $a_2 = 0$. Ce coefficient permet de retrouver le nombre de Reynolds critique. Soit :

-

$$R_c = \left(\frac{5}{6} \cot \theta + \frac{5}{18} EM^2 \right)$$

Notons que le modèle de Shkadov représenté par l'équation (3,21) donne:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= -\frac{1}{3}EM^2 - B + R \\ R_c &= \left(\cot \theta - \frac{1}{3}EM \right) \end{aligned} \quad (3,32)$$

Le modèle aux résidus pondérés nous permet de retrouver le nombre de Reynolds de manière exacte. Sans l'action du champ électromagnétique, la relation (3,25) donne le nombre de

Reynolds classique $R_c = 5/6 \cot \theta$, obtenu par Benjamin et Yih . pour l'écoulement d'un film mince soumis aux seules forces de gravité,

3.4.1 Stabilité neutre

La stabilité neutre est obtenue, en posant $\omega_i = 0$ dans la relation de dispersion (3,29) de chaque modèle développé correspondant aux équations (3,21) et (3,25). La courbe de stabilité neutre sépare les régions aux dessous de la courbe où les perturbations sont amplifiées ($\omega_i > 0$) des régions aux dessus de la courbe où elles sont amorties ($\omega_i < 0$) . En particulier, la courbe de stabilité neutre montre l'existence d'un nombre de Reynolds critique R_{ec} obtenu pour $k = 0$, en dessous duquel toutes les perturbations sont amorties.

La comparaison des modèles développés plus haut est mise en évidence à travers la figure 3.1 où sont données les courbes de stabilité neutre dans le plan (R_e, k) calculées suivant les modèles basés sur la théorie des résidus pondérés et le modèle intégrale couche limite de Shkadov dans le cas de notre étude. On constate que les deux théories conduisent à des résultats voisins pour des nombres de Reynolds modérés. En revanche les résultats du modèle intégrale de Shkadov ne prédit pas le seuil de stabilité des ondes de manière précise. Le modèle aux résidus pondérés est une amélioration du modèle précédent, il donne le seuil de stabilité représenté par le Reynolds critique de manière exacte. Ce résultat est mis en évidence sur la figure 3.2.

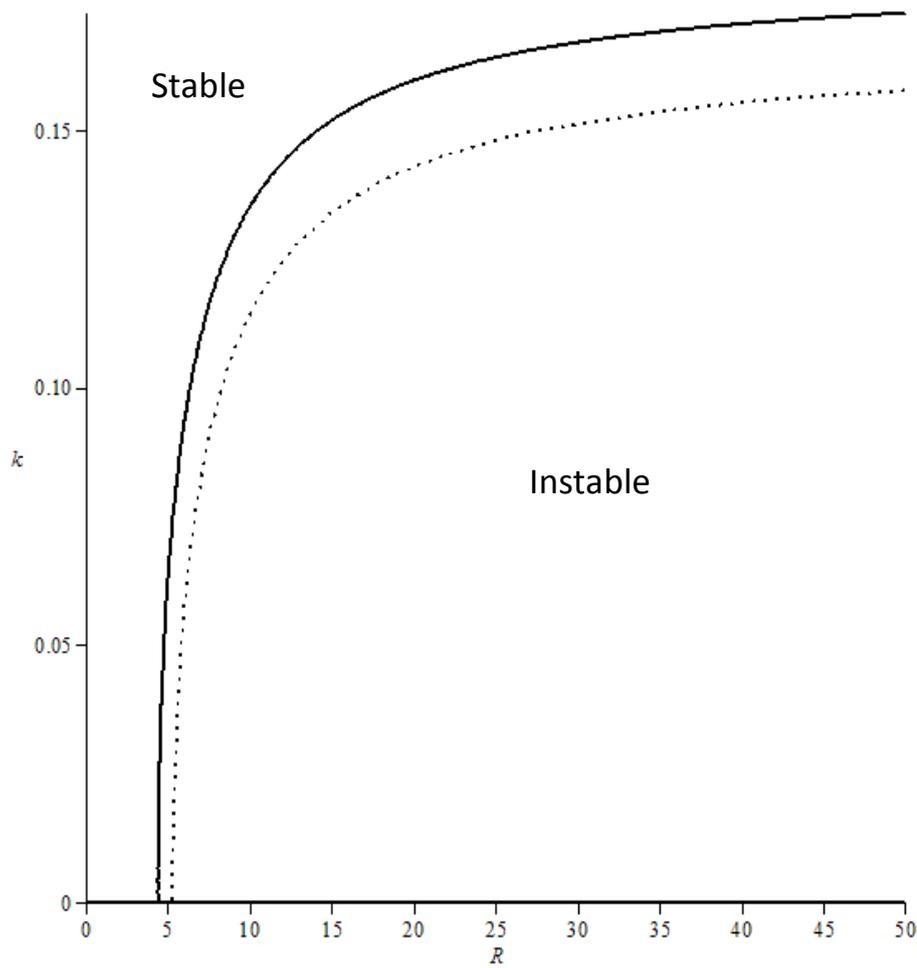


Fig.3.1. Comparaison des modèles développés à travers les courbes de stabilité pour :

$$M=1.5, E=0.5, w=100, \theta = 10^\circ$$

_____ *Modèle aux résidus pondérés*

..... *Modèle de Skhadov*

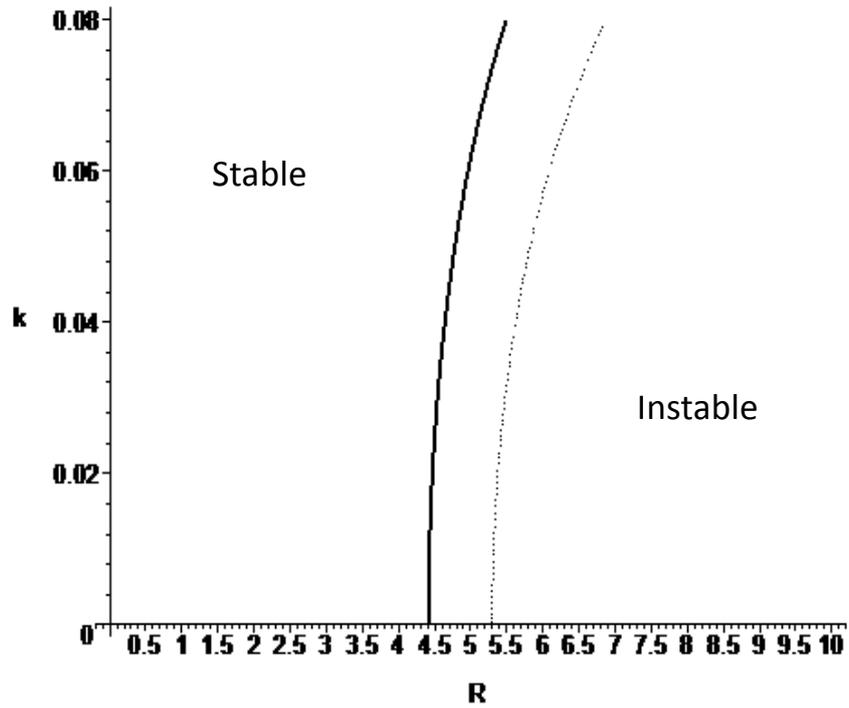


Fig.3.2. Mise en évidence des Reynolds critiques des modèles développés pour $k = 0$.

Valeurs des paramètres :

$$M=1.5, E=0.5, w=100, \theta = 10^\circ$$

————— *Modèle aux résidus pondérés*

..... *Modèle de Skhadov*

3.4.2 Taux d'amplification

Les courbes des taux d'amplification, obtenues à l'aide du modèle aux résidus pondérés, sont représentées sur les figures 3.3, 3.4 et 3.5. Ces courbes sont représentées dans le plan (ω, k) , Ces courbes sont obtenues analytiquement en résolvant la relation de dispersion (3,29) et mettent en évidence plusieurs caractéristiques de l'instabilité par rapport au nombre d'onde k :

- Les perturbations augmentent et atteignent un seuil maximal, le nombre d'onde correspondant est voisin de $k = 0.1$, il atteint des valeurs plus grandes $k = 0.2$ lorsqu'on augmente la tension superficielle.
- Puis le taux d'amplification décroît et atteint une valeur nulle $\omega_i = 0$ atteinte pour $k = 0$, cette valeur correspond à la stabilité neutre.
- La gamme de nombre d'onde pour lesquels apparaît l'instabilité varie avec les paramètres du problème.

3.4.3 Influence du champ électrique

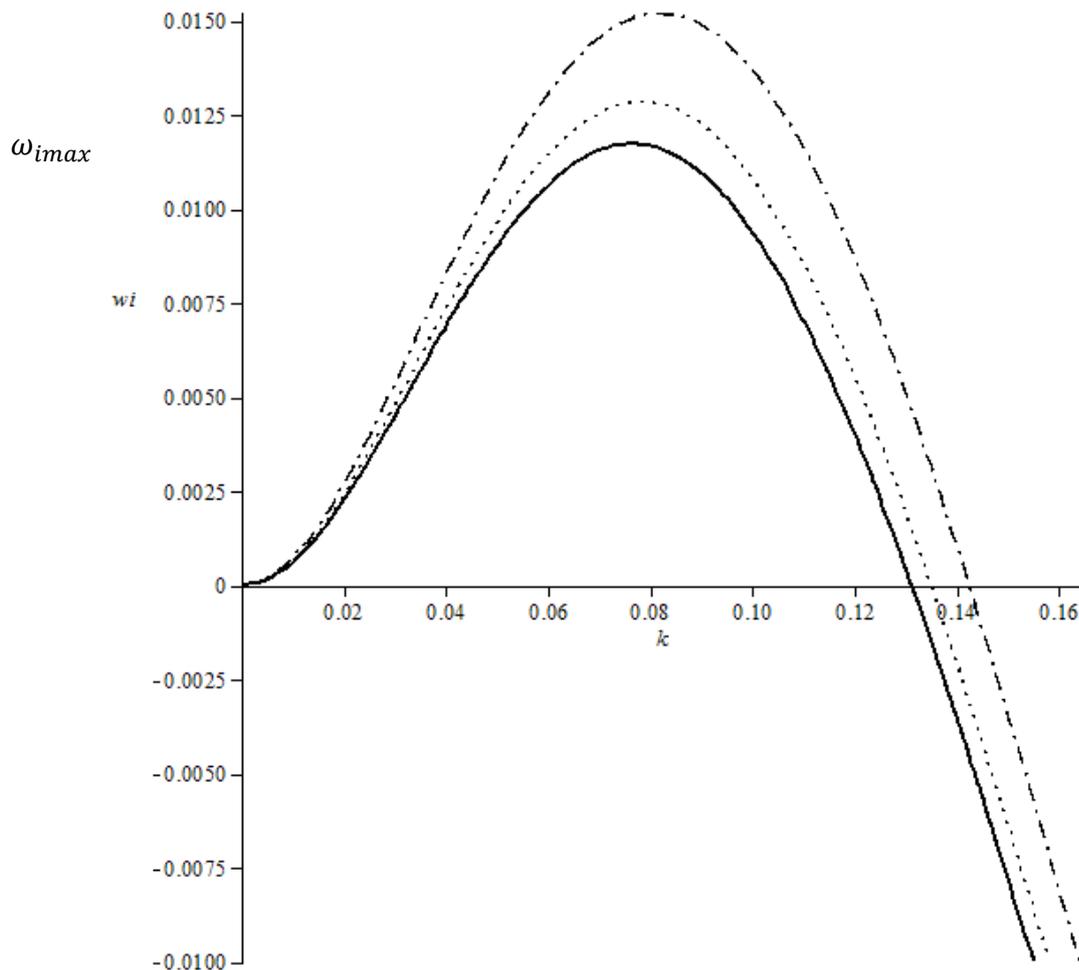


Fig.3.3. Courbes de taux d'amplification correspondant au modèle aux résidus pondérés. ω_{imax} représente le taux d'amplification maximal, donné pour une valeur du nombre d'onde $k_{critique}$ pour :

$$M=1.5, R=10, w=100, \theta = 10^\circ$$

3.4.4 Influence du champ magnétique

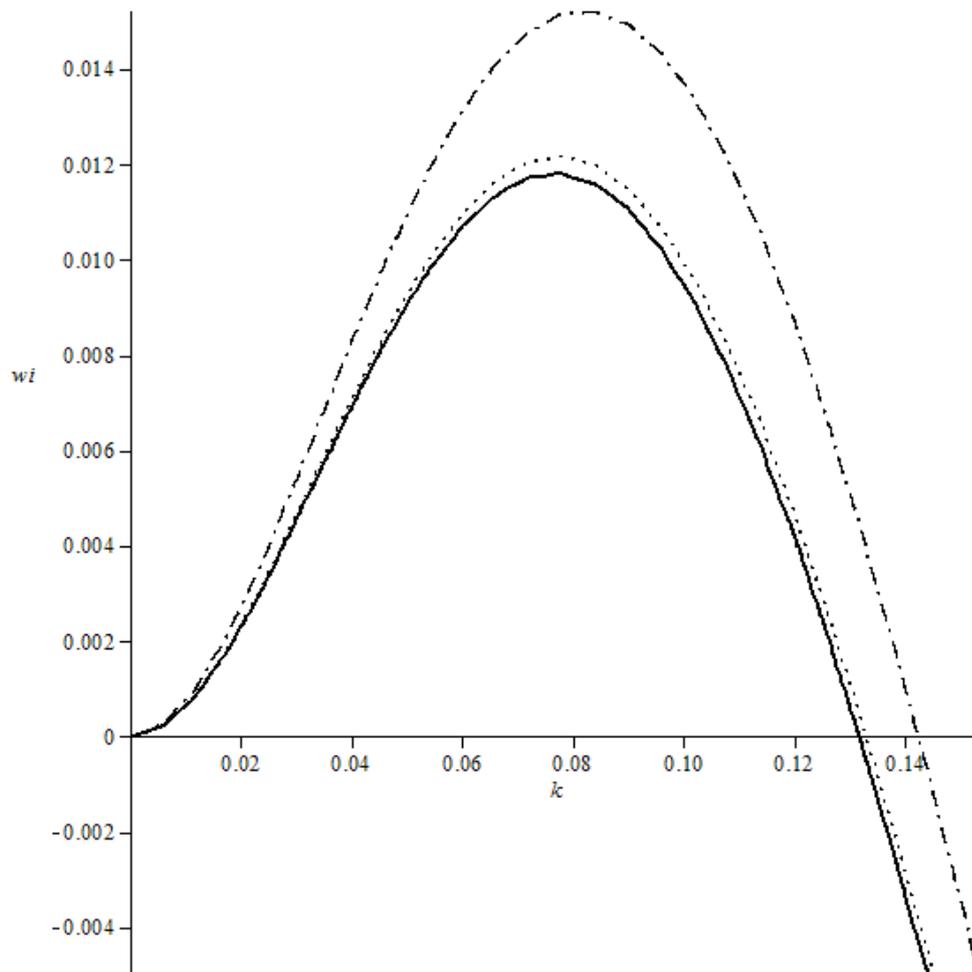


Fig.3.4. Courbes de taux d'amplification correspondant au modèle aux résidus pondérés. $w_{i\max}$ représente le taux d'amplification maximal, donné pour une valeur du nombre d'ond k_{critique} pour : $E=1.5$, $R=10$, $w=100$, $\theta = 10^\circ$

3.4.5 Influence de la tension superficielle

Dans cette étude la tension superficielle a un rôle stabilisant (figure 3.5). La tension de surface provoque donc un décroissement du taux d'amplification, cet effet est plus important dans la gamme des grands nombres d'onde correspondant aux ondes de plus petites longueurs d'onde. Ainsi la tension superficielle diminue le taux d'amplification maximal et le nombre d'onde critique correspondant.

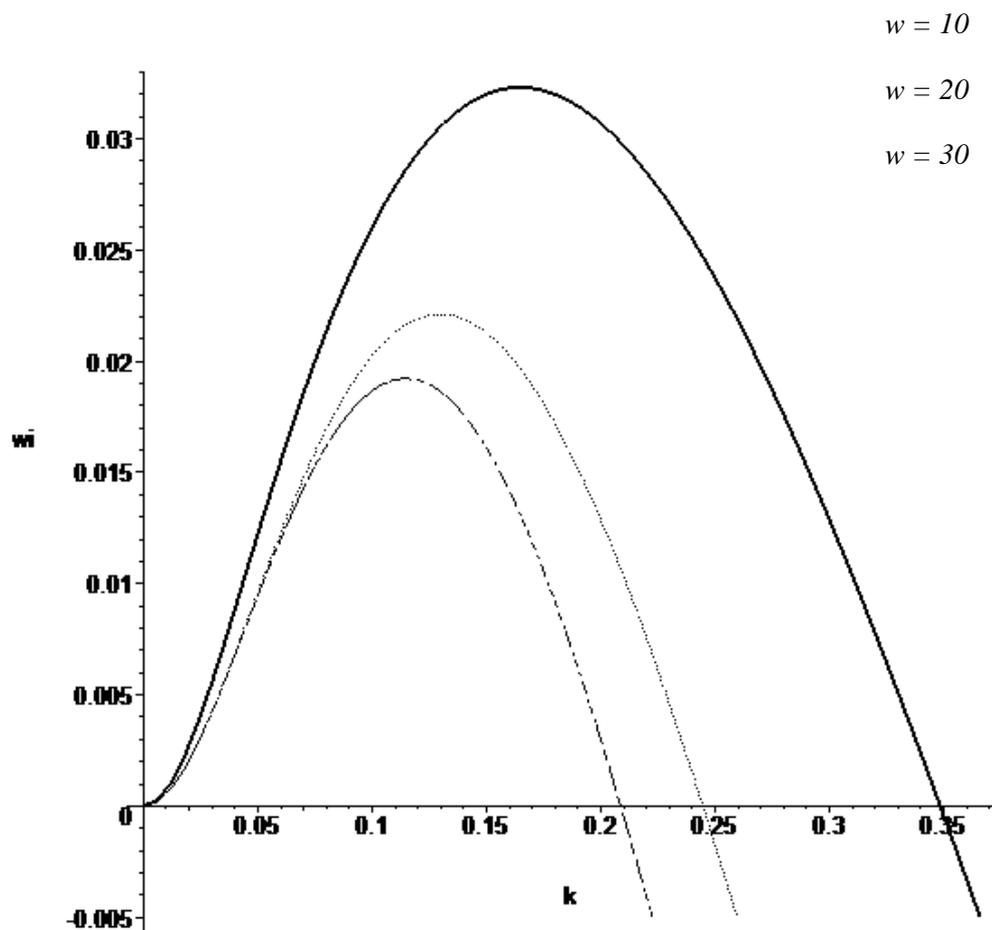


Fig.3.5. Courbes de taux d'amplification correspondant au modèle aux résidus pondérés. $\omega_{i,max}$ représente le taux d'amplification maximal, donné pour une valeur du nombre d'onde $k_{critique}$. pour : $E=1.5$, $M=1.5$, $R=10$, $\theta = 10^\circ$

3.5 Conclusion

Nous avons effectué une analyse linéaire basée sur l'hypothèse de perturbations infinitésimales pour négliger les termes non-linéaires des équations d'amplitudes des perturbations. L'analyse linéaire est donc valable au seuil de déclenchement de l'instabilité. Le modèle aux résidus pondérés nous a permis de déterminer le Reynolds critique du déclenchement de l'instabilité de manière exacte. Notons que lorsque les amplitudes des perturbations deviennent finies, les effets non linéaires doivent être pris en considérations.

Conclusion Générale

On s'intéresse dans ce mémoire à la résolution de la stabilité linéaire d'un film mince liquide s'écoulant par gravité sur un plan incliné en présence d'un champ électromagnétique, un des objectifs est de linéariser les équations de Navier Stokes simplifiée et de déterminer la condition critique du déclenchement de l'instabilité, cette formulation est obtenue dans une configuration plan bidimensionnelle

En raison des effets des forces de gravité et de Lorentz, viscosité, de tension superficielles; nous avons exposé les équations de Navier Stokes gouvernant l'écoulement d'un fluide Newtonien, incompressible, visqueux, nous avons par la suite écrit ce système sous forme adimensionnelle, choix de grandeurs de référence cela nous a permis de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant le problème, ces développements sont faits autour d'un petit paramètre ε , appelé paramètre onde longue.

Ensuite nous avons élaboré un modèle analytique basé sur une méthode intégrale aux grandes longueurs d'onde pour écrire l'instabilité d'un film mince s'écoulant à surface libre sur un plan incliné, l'étude nous a permis d'aboutir à deux équations aux dérivées partielles, où les inconnus sont la hauteur de la surface libre $h(x, t)$ et le débit $q(x, t)$, cette méthode nous a permis de déterminer la relation de dispersion analytique et de préciser de manière exacte le nombre de Reynolds critique.

Une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement a été faite l'objet de la méthode intégrale de cette analyse qui nous a permis d'étudier l'effet des champs électrique et magnétique via le tracé de courbes de stabilité marginale, l'influence des deux champs sur le taux d'amplification des perturbations a également été examinée. et l'influence des différents paramètres sur la stabilité de l'interface.

Références bibliographiques

- [1] Amaouche.M ,Mehidi,N,Amatousse,N.An accurate modeling of thin film flows down an incline for inertia dominated régimes , Eur. J.Mech ,B/Fluides,24,1,49-70,(2005).
- [2]T.B.Benjamin,Wave formation in laminair flow down a inclined plane .J.Fluid Mech.2,554-573,1957
- [3] D.J.Benney, Long waves on liquid films,j.Math.Phys45(1966),150-155.
- [4]Chang H-C, Demekhin,E.A.Complex wave Dynamics on Thin Films .Elsevier Science,Amsterdam. ISBN 0444 50970 4,(2002).
- [5] Instabilés hydrodynamique ,François CHarru , P (168-190) .
- [6] Mehayech,A, Instabilités d'interfaces dans les écoulements gravitaires est controles (2019)
- [7] Lamia Bourdache, Modelés faiblement non-linéaires en électrodynamique des filmes minces
- [8] Kadry Zakaria,Yasser Gamiel,Viscous flowing film instability down an inclind plan in the presence of constant electromagnetic field ,(2013).
- [9]P.L Kapitza, & S.PKapitza,Wave flow of thinlayers of viscousfluid.Zh.Ekps.Teor.Fiz
- [10] Leblanc,S.Hydrodynamique,probleme corrigés.EDP Sciences. ISBN 978-2-7598-0525-9 ,(2010).
- [11] Lee,J;-J,and Mei,C.C..Staionary waves on an inclined sheet of viscous fluide at high Reynolds and moderate Webers numbers .J;Fluide Mech 307,PP 191-229,(1999).
- [12] Ruyer-Quil, C. Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné, these Ph.D., Ecole Polytechnique, (1999).
- [13] Shkadov, V.Ya., Wave fow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity.Izv.Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi.Gaza 2: 43-51, (1967).
- [14] yih,C.S ,Stability of liquide flow down an inclined plan . Phys.Fluids6:321-34,(1963)

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de la stabilité linéaire de la surface libre d'un film de fluide non électroducteur se mouvant sur un plan incliné soumis à un champ électromagnétique pour les petits nombres de Reynolds à modérés. et une modélisation par l'approche intégrale aux résidus pondérés sous l'hypothèse des grandes ondes a été considérée.

Mots clés : stabilité linéaire ; film de fluide ; modélisation.