

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité :

Dynamique des fluides et énergétique

Thème

***Etude numérique d'un film fluide s'écoulant le long
d'une paroi cylindrique***

Présenté par :

Touati Hanane et Lalioui Messaoud

Soutenu le : 18 /10/2020

Devant le Jury composé de :

DJEMA	Amar	MCB	Président
MEHIDI BOUAM	Nadia	MCA	Examinatrice
DJESSAS NESSAS	Houria	MAA	Rapporteur

Année universitaire 2019/2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

- *Mes chers parents*
- *Mes chers sœurs et frères*
- *A tous mes chers amis*

- *A tous ceux et celles que j'aime de près comme de loin*

Lalioui Messaoud

Dédicace

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

À ma chère sœur, pour son encouragement permanent.

À mon cher frère, pour son appui et son encouragement,

À mon oncle Krimou pour son soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Et bien sûr mon meilleur ami pour son soutien moral.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infailible,

Merci d'être toujours là pour moi.

Touati Hanane.

Remerciement

Dieu merci pour la santé, la volonté, le courage et la détermination qui nous ont accompagnés tout au long de la préparation et l'élaboration de ce travail et qui nous ont permis d'achever ce modeste travail.

Nous estimons à notre humble avis qu'il serait impérieux de souligner que la réalisation de ce présent travail n'est pas un simple fait relevant des efforts personnels, mais par contre, le fruit des efforts de plusieurs personnes qui de près ou de loin ont consenties pour que cette œuvre soit une réalité.

D'emblée nous devons une reconnaissance personnelle très profonde à notre encadreur Madame Djessas Houria pour l'aide compétente qu'elle nous a apporté, pour sa patience et son encouragement. Son regard critique nous a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Que le président et les membres du jury trouvent ici nos vifs remerciements pour avoir accepté de présider et d'examiner notre travail.

On remercie enfin tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réussite de ce travail et qui n'ont pas pu être cités ici.

Enfin, on tient à exprimer toute notre reconnaissance et gratitude à l'administration et à l'ensemble du corps enseignant de l'Université de A. MIRA-BEJAIA pour leurs efforts à nous garantir la continuité et l'aboutissement de ce programme de Master.

Table des matières

Listes des figures.....	- 7 -
Nomenclature.....	- 8 -
Introduction générale.....	- 10 -
CHAPITRE 1 :	- 12 -
Formulation mathématique d'un écoulement axisymétrique	- 12 -
I.1 Introduction :	- 13 -
I.2 Formulation du problème :	- 13 -
I.2.1 Hypothèse de l'étude :	- 14 -
I.2.2 Equation du mouvement :	- 14 -
I.3 Conditions aux limites :	- 16 -
I.3.1 Condition d'adhérence et d'imperméabilité à la paroi :	- 16 -
I.3.2 Condition à l'interface :	- 16 -
I.3.3 Condition cinématique :	- 16 -
I.3.4 Bilan des contraintes normales :	- 16 -
I.3.5 Bilan des contraintes tangentielles :	- 17 -
I.4 Ecoulement de base :	- 18 -
CHAPITRE 2 :	- 19 -
Formes adimensionnelles des équations	- 19 -
II.1 Introduction :	- 20 -
II.2 Echelles caractéristiques :	- 20 -
II.2.1 Ecoulement de base adimensionnée :	- 22 -
II.2.2 Equations du mouvement adimensionné :	- 22 -
CHAPITRE 3 :	- 26 -
Formulation de l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement cylindrique	- 26 -
III.1 Introduction :	- 27 -
III.2 Equations linéarisées :	- 27 -
III.2.1 Equations linéarisées pour les perturbations :	- 27 -
III.2.2 Les conditions aux limites à l'interface non perturbées :	- 29 -
III.3 Equation d'Orr-Sommerfeld	- 31 -
III.3.1 Modes normaux	- 31 -

III.3.2 Fonctions de courant :.....	- 32 -
III.4 Etude numérique :.....	- 35 -
III.4.1 Résultats et discussions :.....	- 38 -
CONCLUSION.....	- 42 -
Références bibliographiques	- 43 -
Résumé	- 45 -

Listes des figures

Fig. I.1 : Schéma représentant l'écoulement axisymétrique d'un film fluide sur un cylindre vertical.

Fig. II.1 : Ecoulement axisymétrique d'un film mince sur un cylindre, limité par $y = 0$ et $y = h(x, t)$.

Figure III. (1) – Coubes de stabilité dans le plan (Re, k) pour une valeur de rayons de courbure de $\frac{1}{\eta} = 0.2$ et de $ka = 6737$.

Figure III. (2) – Coubes de stabilité dans le plan (Re, k) pour une valeur de rayons de courbure de $\frac{1}{\eta} = 0.05$ et de $ka = 6737$.

Figure III. (3) – Superposition des courbes des figures III (1) et (2).

Figure III. (4) et (5) – Coubes de stabilité dans le plan (Re, k) pour deux valeurs de rayons de courbure et de $ka = 6737$. Les valeurs correspondantes de la courbure sont données par $\frac{1}{\eta} (0.2, 0.05)$. [.....Développement asymptotique ; — Orr-Sommerfeld]

Nomenclature

<i>Grandeur</i>	<i>Notation et expression</i>
(r, θ, x)	→ Coordonnées cylindriques
r	→ Coordonnée radiale
θ	→ Coordonnée azimutale
x	→ Coordonnée axiale
\vec{V}	→ Vecteur vitesse
(u, v)	→ Composantes de la vitesse suivant les axes x et r
\vec{g}	→ Accélération gravitationnelle
t	→ Temps
p	→ Pression
p_a	→ Pression atmosphérique
$h(x, t)$	→ Epaisseur du fluide
R_c	→ Rayon du cylindre
\vec{n}	→ Vecteur unitaire normal à l'interface
\vec{t}	→ Vecteur unitaire tangent à l'interface
$\frac{1}{\mathfrak{R}}$	→ Courbure de l'interface
h_N	→ Epaisseur de Nusselt
u_0	→ Vitesse à l'interface

$u(r)$	→ Vitesse de l'écoulement de base
σ	→ Tension superficielle
μ	→ Viscosité dynamique
ν	→ Viscosité cinématique
ρ	→ Masse volumique
λ	→ Longueur d'onde
ω	→ Pulsation de l'onde
Re	→ Nombre de Reynolds
We	→ Nombre de Weber
η	→ Rayon du cylindre adimensionné
$\varepsilon = \frac{h_N}{\lambda}$	→ Paramètre du film onde longue
$\bar{\mathbf{I}}$	→ Tenseur identité
$\bar{\mathbf{T}}$	→ Tenseur des contraintes
$\bar{\mathbf{D}}$	→ Tenseur taux de déformation
∇	→ Opérateur gradient
Δ	→ Laplacien

Introduction générale

Depuis plus d'un siècle, les instabilités hydrodynamiques se révèlent un champ d'étude foisonnant et constamment renouvelé, elles occupent une place de choix en mécanique des fluides. Le sujet est très intéressant et cela a engendré un grand nombre de travaux de recherche, tant du point de vue linéaire, que du point de vue non linéaire et dans diverses géométries [1][2][3][4][5]. Parmi les applications de ces études :

- La recherche fondamentale
- Le domaine industriel, par exemple pour assurer la protection ou renforcer la performance des fils électriques, des fibres optiques et des câbles il est important de contrôler ces instabilités.
- Le domaine environnemental, les écoulements de glaciers et de boues

Notons que la configuration la plus étudiée dans la littérature aussi bien théoriquement depuis les travaux de Kapitza [6] et Yih [7], qu'expérimentalement avec les travaux de Gollub [8], est celle d'un écoulement d'un film mince visqueux sur une plaque verticale ou inclinée, alors que peu d'études sont consacrées au cas où les parois sont courbes.

L'écoulement des films minces des fluides newtoniens et non newtoniens dans des conduites courbes présente un grand intérêt, à causes de leurs multiples applications industrielles dans différents domaines. Une étude pionnière de Kapitza [6] expose les comportements dynamiques dans un film en écoulement sur un cylindre vertical. Il développe dans certaines conditions des instabilités secondaires associées à la dynamique interfaciale pouvant mener au chaos spatio-temporel. La résolution du problème de la stabilité linéaire a été réalisée par Lin et Liu [9] et ont donné une condition nécessaire à la stabilité de la surface libre en termes du nombre de Reynolds, du nombre d'onde et du nombre de Weber.

On sait en effet que la transition d'un écoulement laminaire vers la turbulence est due au caractère instable de l'état laminaire vis-à-vis de certaines classes de perturbations, soit infinitésimales, soit d'amplitude finie, plusieurs instabilités sont ainsi mises en évidence : une instabilité de grandes longueurs d'ondes, une

instabilité de courtes longueurs d'ondes qui se manifestent à l'interface [1][4][7] et une instabilité de cisaillement qui se manifeste tout près de la paroi [3]. En considérant les équations de Navier-Stokes pour un film liquide visqueux et incompressible, Au-delà d'un nombre de Reynolds critique, l'écoulement devient instable. A faible nombre de Reynolds des effets inertiels faibles sont à l'origine de la déformation de la surface libre, pour de grand nombre de Reynolds, les perturbations sont dites ondes de TollmienSchlichting (ondes de cisaillements) et elles se présentent avec un taux d'amplification très important.

L'objectif de notre travail est d'étudier et d'analyser la stabilité linéaire d'un fluide visqueux et newtonien s'écoulant sous l'effet de gravité à l'extérieur d'une paroi cylindrique, en prenant en considération la courbure de la paroi et la tension superficielle du fluide. Nous nous intéressons aux résultats acquis à l'aide d'une étude de stabilité linéaire de type Orr-Sommerfeld, on a choisi de résoudre ce problème par une approche numérique basée sur les matrices Riccati. L'étude menée dans ce mémoire se décompose en trois chapitres, une introduction générale et conclusion.

Le CHAPITRE I, nous présentons les équations qui gouvernent l'écoulement par gravité d'un film mince sur un cylindre vertical, les effets de la tension superficielle sont pris en considération via les conditions aux limites sur les contraintes à l'interface. Une solution à l'équilibre correspondant à l'écoulement de base est ensuite obtenue.

Le CHAPITRE II, est consacré à l'écriture adimensionnelle des équations du mouvement, cela permet de mettre en évidence les grandeurs caractéristiques et de définir les paramètres sans dimension qui régissent les divers effets physiques du problème étudié.

Le CHAPITRE III, traite l'analyse de stabilité linéaire qui conduit à un système de type Orr-Sommerfeld résolu numériquement par la méthode de Riccati.

CHAPITRE 1 :

Formulation mathématique d'un écoulement axisymétrique

I.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à la présentation des équations de Navier-Stokes qui gouvernent l'écoulement d'un fluide visqueux sur un cylindre [10], ainsi que les conditions aux limites de cet écoulements, il est soumis à l'effet des forces de gravité.

I.2 Formulation du problème :

On s'intéresse à l'étude de la stabilité d'un film fluide visqueux, incompressible de viscosité dynamique μ et masse volumique ρ , s'écoulant sous l'effet de la pesanteur \vec{g} sur un cylindre vertical de paroi rigide. (**Fig. I.1**)

Nous nous plaçons dans un repère cylindrique (r, θ, x) , la coordonnée axiale x est selon la direction de l'écoulement, r est la coordonnée radiale et θ est la coordonnée azimutale.

Dans notre étude nous considérons l'écoulement axisymétrique autour du cylindre, la dépendance en θ sera négligée $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ et $w=0$, les variables ne dépendent que des coordonnées x et r .

Le champ de vitesse est défini comme suit $\vec{V} = ue_x + ve_r$.

La surface libre $h(x, t)$ est caractérisée par une pression uniforme P_a (pression atmosphérique).

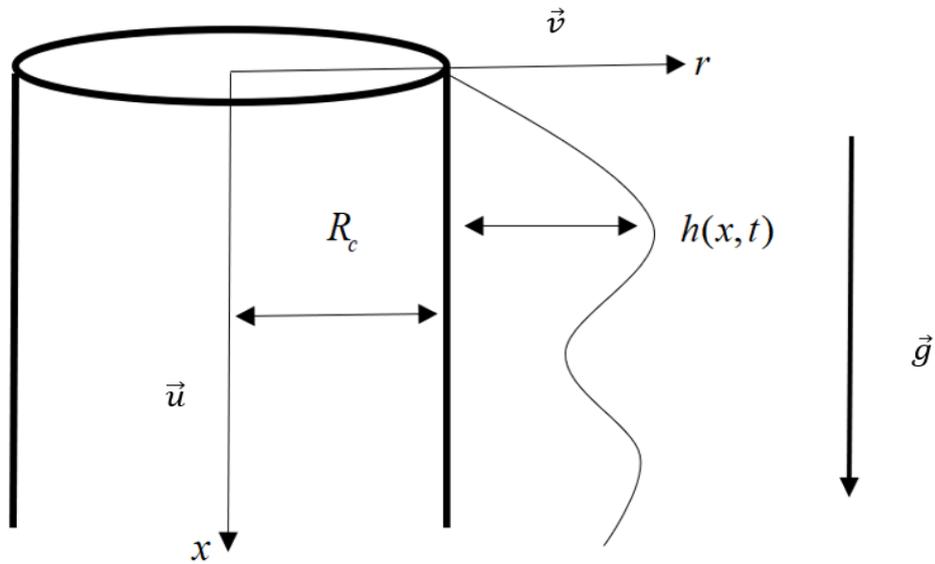


Fig. I.1 : Schéma représentant l'écoulement axisymétrique d'un film fluide sur un cylindre vertical.

I.2.1 Hypothèse de l'étude :

Les hypothèses prises en compte pour cette étude sont :

- Fluide visqueux, newtonien et incompressible.
- Ecoulement laminaire bidimensionnel et isotherme.
- L'air au-dessus du fluide de pression P_a est immobile.
- La hauteur initiale du film liquide est prise uniforme et égale à h_N .
- La tension superficielle σ entre le fluide et l'air sera prise en considération.

I.2.2 Equation du mouvement :

L'écoulement satisfait aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Equation de conservation de la masse :

L'écoulement est incompressible, la conservation de la masse s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{I.1})$$

L'équation (I.1), ou équation de continuité écrite en coordonnées cylindriques donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.2})$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

L'écoulement par gravité d'un fluide newtonien visqueux autour d'un cylindre est régi par les équations de Navier-Stokes qui résultent de la conservation de la quantité de mouvement.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{I.3})$$

L'analyse de chaque terme de cette équation permet de mettre en évidence les différentes forces contribuant au mouvement du fluide.

- Le premier terme $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ représente l'accélération dans un écoulement instationnaire $\vec{V}(x, r, t)$.
- Le terme non linéaire convectif $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ traduit la variation du champ de vitesse en fonction des coordonnées spatiales.
- La variation de la pression apparaît dans le terme $\vec{\nabla} p$.
- Les effets des forces de viscosité sont exprimés par $\mu \Delta \vec{V}$.
- Les effets de la gravité apparaissent dans le terme $\rho \vec{g}$.

La projection de l'équation de Navier-Stokes (I.3) dans un système de coordonnées cylindriques [10] donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (\text{I.5})$$

I.3 Conditions aux limites :

I.3.1 Condition d'adhérence et d'imperméabilité à la paroi :

Les conditions aux limites sur la paroi solide du cylindre en $r = R_c$ imposent une vitesse nulle :

$$u = v = 0 \quad \text{Pour} \quad r = R_c \quad (\text{I.6})$$

I.3.2 Condition à l'interface :

Les conditions dynamiques et cinématique à l'interface (air-liquide) sont exprimées en $r = R_c + h(x,t)$. Les conditions dynamiques sont projetées sur un axe tangent et un axe normal à l'interface, ces conditions font intervenir les vecteurs unitaires normal \vec{n} et le vecteur unitaire tangent \vec{t} :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{cases} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{cases} \quad \text{Et} \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{cases} 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases}$$

I.3.3 Condition cinématique :

Cette condition traduit l'imperméabilité de l'interface, On considère l'interface comme une surface matérielle.

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{I.7})$$

I.3.4 Bilan des contraintes normales :

A l'interface on prend en considération les forces de tension superficielle, ce qui engendre une différence entre les contraintes normales, elle se traduit par la relation suivante :

$$\vec{n}(\vec{T} \cdot \vec{n}) - \vec{n}(-p_0 \vec{n}) = \frac{\sigma}{\mathfrak{R}} \quad (\text{I.8})$$

Le développement de cette équation s'écrit :

$$\vec{n} \left(\vec{\bar{T}} \cdot \vec{n} \right) - p_0 = \frac{\sigma}{R} \quad \text{On a : } \vec{\bar{T}} = -p\vec{\bar{I}} + 2\mu\vec{\bar{D}}$$

$$\vec{n} \left(\left(-p\vec{\bar{I}} + 2\mu\vec{\bar{D}} \right) \cdot \vec{n} \right) - p_0 = \frac{\sigma}{\mathfrak{R}}$$

On a $p_0 = p_a$:

$$p - p_a - \frac{2\mu}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)} \left[\frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = -\frac{\sigma}{\mathfrak{R}} \quad (\text{I.9})$$

Où la courbure $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ est donnée par :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{R_c + h} \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \right]$$

I.3.5 Bilan des contraintes tangentielles :

L'équilibre des contraintes tangentielles entre le fluide et l'air considéré immobile se traduit par la relation suivante :

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{\bar{T}} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (\text{I.10})$$

Cette équation devient :

$$2 \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{I.11})$$

I.4 Ecoulement de base :

Pour calculer la solution de base de l'écoulement d'un film mince sur un cylindre vertical, on considère les hypothèses suivantes :

- Ecoulement stationnaire.
- Régime d'écoulement uniforme : hauteur est constante.
- On suppose un régime d'écoulement établi $\rightarrow \vec{v} = u(r)\vec{e}_x$.
- A la paroi, on pose : $u(R_c) = 0$.
- A l'interface $r = R_c + h(x, t)$, on suppose la contrainte de cisaillement égale à zéro

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

En prenant en considération ces hypothèses, les deux équations de Navier-Stokes (I.4) et (I.5) deviennent :

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.13})$$

L'écoulement de base est solution des équations (I.12) et (I.13) pour $h(x, t) = h_N$:

$$u(r) = \frac{\rho g}{4\mu} \left[2(R_c + h_N)^2 \ln\left(\frac{r}{R_c}\right) - (r^2 - R_c^2) \right]$$

$$V(r) = 0 \quad (\text{I.14})$$

$$h(x, t) = h_N$$

$$p - p_a = \frac{\sigma}{R_c + h_N}$$

CHAPITRE 2 :

Formes adimensionnelles des équations

II.1 Introduction :

L'écriture adimensionnelle des équations du mouvement permet de définir les paramètres sans dimension qui régissent les divers effets physiques du problème étudié, comme la viscosité, la pesanteur, la tension superficielle.

Dans ce chapitre nous allons définir les grandeurs de référence pour écrire les équations de Navier-stokes incompressibles et les conditions aux limites associées sans dimensions.

II.2 Echelles caractéristiques :

Pour l'dimensionnement, on utilise les grandeurs de références suivantes :

- λ : Longueur d'onde caractérisant l'évolution de l'écoulement suivant la direction x .
- h_N : Epaisseur de l'écoulement de base.
- u_N : Vitesse à l'interface de l'écoulement de base.
- $v_{réf} = \frac{h_N}{\lambda} u_N$: Echelle des vitesses radiales.
- $t_{réf} = \frac{\lambda}{u_N}$: Temps de référence.
- $p_{réf} = \mu \frac{u_N}{h_N}$: Echelle de pression.

On pose :

$$\varepsilon = \frac{h_N}{\lambda} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad h_N \ll \lambda$$

$$\text{Et} \quad \eta = \frac{R_c}{h_N}$$

✚ Notons que dans tout le document les grandeurs avec dimensions et celles sans dimensions sont notées de la même façon.

Nous dressons toutes ces grandeurs sous forme d'un tableau, nous mettons d'un côté les grandeurs avec dimension et de l'autre les grandeurs sans dimension.

Grandeur dimensionnée	Grandeur de référence	Grandeur sans dimension
x	$x_{réf} = \lambda$	$x^* = \frac{x}{x_{réf}} = \frac{x}{\lambda}$
r	$r_{réf} = h_N$	$r^* = \frac{r}{r_{réf}} = \frac{r}{h_N}$
u	$u_{réf} = u_N$	$u^* = \frac{u}{u_{réf}} = \frac{u}{u_N}$
v	$v_{réf} = \frac{h_N}{\lambda} u_N = \varepsilon u_N$	$v^* = \frac{v}{v_{réf}} = \frac{\lambda v}{h_N u_N}$
t	$t_{réf} = \frac{\lambda}{u_N}$	$t^* = \frac{t}{t_{réf}} = \frac{u_N t}{\lambda}$
p	$p_{réf} = \mu \frac{u_N}{h_N}$	$p^* = \frac{h_N p}{\mu u_N}$

Tableau II-1. Tableau récapitulatif des différentes grandeurs de références

II.2.1 Ecoulement de base adimensionnée :

La solution de base (I.14) s'écrit alors :

$$U(r) = \frac{\eta^2 - r^2 + 2(\eta+1)^2 \ln\left(\frac{r}{\eta}\right)}{2(\eta+1)^2 \ln\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) - (\eta+1)^2 + \eta^2} \quad (\text{II.1})$$

$$V(r) = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$h = 1 \quad (\text{II.3})$$

$$P = We \operatorname{Re} \frac{1}{\eta+1} \quad (\text{II.4})$$

II.2.2 Equations du mouvement adimensionné :

Afin de rendre le système d'équations sans dimension, on va utiliser les grandeurs sans dimension exprimées dans le tableau précédent.

Les équations du mouvement et les conditions aux limites deviennent :

$$\varepsilon \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + G \quad (\text{II.5})$$

$$\varepsilon^3 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv) + r \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$u = v = 0 \quad \text{en} \quad r = \eta \quad (\text{II.9})$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{en} \quad r = \eta + h(x,t) \quad (\text{II.10})$$

$$P = 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial r} - \varepsilon We Re \left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{\eta + h} \left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \quad \text{en} \quad r = \eta + h(x,t) \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \varepsilon^2 \left[2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad \text{en} \quad r = \eta + h(x,t) \quad (\text{II.12})$$

L'adimensionnement des équations du mouvement fait intervenir cinq paramètres sans dimension :

1. $Re = \frac{\rho u_N h_N}{\mu}$: Nombre de Reynolds.
2. $We = \frac{\sigma}{\rho u_N^2 h_N}$: Nombre de Weber.
3. $G = \frac{g Re h_N}{u_N^2}$: Coefficient mesurant les effets de la gravité.
4. $\varepsilon = \frac{h_N}{\lambda}$: Paramètre onde longue.
5. $\eta = \frac{R_c}{h_N}$: Représente la courbure.

- ✚ Pour simplifier les calculs, nous avons choisi de disposer l'origine du repère au niveau de la paroi du cylindre, nous introduisons donc une nouvelle variable $y = r - R_c$ (**Fig. II.1**) [10]. Avec ce changement de variable la paroi du cylindre est donnée par l'équation $y = 0$ et celle de la surface libre est en $y = h(x, t)$.

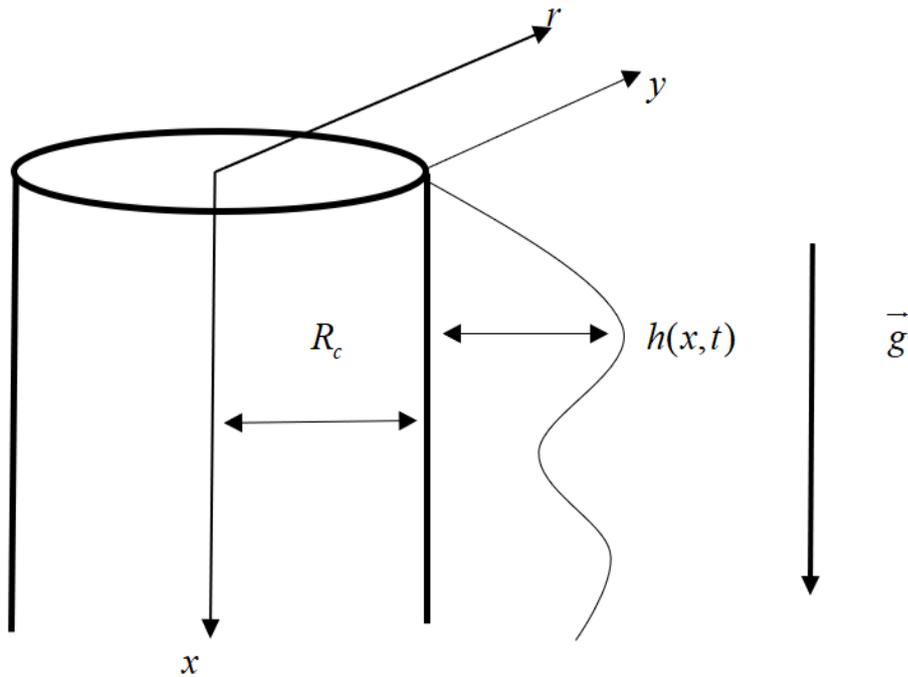


Fig. II.1 : *Ecoulement axisymétrique d'un film mince sur un cylindre, limité par $y = 0$ et $y = h(x, t)$.*

La solution de base s'écrit :

$$\begin{cases} U(r) = \frac{\eta^2 - (\eta + y)^2 + 2(\eta + 1)^2 \ln\left(\frac{\eta + y}{\eta}\right)}{2(\eta + 1)^2 \ln\left(\frac{\eta + 1}{\eta}\right) - (\eta + 1)^2 + \eta^2} \\ V(r) = 0 \\ h = 1 \\ P = WeRe \frac{1}{\eta + 1} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Les équations adimensionnées qui gouvernent L'écoulement

Equation projetée suivant l'axe axial :

$$\varepsilon \text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y+\eta} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G$$

Equation projetée suivant l'axe radial :

$$\varepsilon^3 \text{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{y+\eta} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{(y+\eta)^2} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y+\eta} = 0$$

Condition d'adhérence à la paroi :

$$u = v = 0$$

Condition cinématique à l'interface $y = h(x, t)$:

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$$

Condition normales $y = h(x, t)$:

$$P = 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon \text{We} \text{Re} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{y+\eta} \left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \right]$$

Condition tangentielle $y = h(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon^2 \left[2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

CHAPITRE 3 :

Formulation de l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement cylindrique

III.1 Introduction :

Notre travail dans ce chapitre consiste à linéariser les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites associées. Cette étude nous permettra d'établir l'équation d'Orr-Sommerfeld, puis nous allons la résoudre numériquement par la méthode de Riccati.

III.2 Equations linéarisées :

Les développements effectués dans ce chapitre suivent ceux introduits par Benjamin [11] et Yih [7] pour un écoulement d'un film mince visqueux en écoulement sur un plan incliné. La géométrie cylindrique considérée dans ce travail prend en considération les effets de la courbure et de la tension superficielle.

III.2.1 Equations linéarisées pour les perturbations :

Dans l'état non perturbé l'interface est supposée parfaitement plate. Afin d'étudier la formation des perturbations à la surface libre, nous perturbons l'écoulement de base en lui superposant des perturbations infinitésimales de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, t) = U(y) + \delta \tilde{u}(x, y, t) \\ v(x, y, t) = 0 + \delta \tilde{v}(x, y, t) \\ p(x, y, t) = P + \delta \tilde{p}(x, y, t) \\ h(x, t) = 1 + \delta \tilde{h}(x, t) \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Où $\delta \ll 1$ mesure l'amplitude des perturbations.

On désigne par :

- U : la vitesse relative à l'écoulement de base.
- P : la pression relative à l'écoulement de base.
- \tilde{u} , \tilde{v} : désignent les champs de vitesse dû aux perturbations
- \tilde{p} : désigne le champ de pression dû aux perturbations.
- \tilde{h} : est la déformation de la surface libre.

En substituant ces expressions dans les équations de Navier-Stokes adimensionnelles et les conditions aux limites associées et en linéarisant, on obtient :

$$\text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{d\bar{U}(y)}{dy} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y+\eta)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \quad (\text{III.2})$$

$$\text{Re} \left(\frac{d\tilde{v}}{dt} + U(y) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y+\eta)} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{\tilde{v}}{(y+\eta)^2} \right) \quad (\text{III.3})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\tilde{v}}{y+\eta} = 0 \quad (\text{III.4})$$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{en} \quad y=0 \quad (\text{III.5})$$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad \text{en} \quad y=1+\delta \tilde{h}(x,t) \quad (\text{III.6})$$

$$P + \tilde{p} = 2 \left(\delta \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \delta \tilde{h} \frac{\partial U(1)}{\partial y} \right) - We \text{Re} \left(\delta \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} - \frac{1}{\eta+1+\delta \tilde{h}} \right) \quad \text{en} \quad y=1+\delta \tilde{h}(x,t) \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{dU}{dy} + \delta \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{en} \quad y=1+\delta \tilde{h}(x,t) \quad (\text{III.8})$$

III.2.2 Les conditions aux limites à l'interface non perturbées :

Les grandeurs intervenant dans les conditions aux limites à l'interface comme la vitesse et la pression des perturbations sont évaluées en $y = 1 + \delta\tilde{h}(x, t)$. On peut évaluer ces variables en $y = 1$ par un développement limité [11]. Au premier ordre les grandeurs sont exprimées en $y = 1$ et non en $y = 1 + \delta\tilde{h}(x, t)$, soit :

$$\begin{cases} U(1 + \delta\tilde{h}) = U(1) + \delta\tilde{h} \frac{\partial U(1)}{\partial y} \\ P(1 + \delta\tilde{h}) = P(1) + \delta\tilde{h} \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

$$\begin{cases} \tilde{u}(1 + \delta\tilde{h}) = \tilde{u}(1) + \delta\tilde{h} \frac{\partial \tilde{u}(1)}{\partial y} \\ \tilde{v}(1 + \delta\tilde{h}) = \tilde{v}(1) + \delta\tilde{h} \frac{\partial \tilde{v}(1)}{\partial y} \\ \tilde{p}(1 + \delta\tilde{h}) = \tilde{p}(1) + \delta\tilde{h} \frac{\partial \tilde{p}(1)}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Après substitution par les développements précédent dans les équations du mouvement et en tenant compte de l'hypothèse $U(1) = 1$, on obtient :

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U(1) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (\text{III.11})$$

$$\tilde{h} \frac{d^2 \bar{U}(1)}{dy^2} + \frac{\partial \tilde{u}(1)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}(1)}{\partial x} = 0 \quad \text{en } y = 1 \quad (\text{III.12})$$

$$\tilde{p} = 2 \frac{d\tilde{v}(1)}{dy} - WeRe \left(\frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} - \frac{\tilde{h}}{(\eta + 1)^2} \right) \quad \text{en } y = 1 \quad (\text{III.13})$$

Les équations linéarisées sont résumées dans le tableau suivant :

Equations pour le fluide $0 < y < h(x,t)$

$$\text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{U}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{d\bar{U}(y)}{dy} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y+\eta)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)$$

$$\text{Re} \left(\frac{d\tilde{v}}{dt} + \bar{U}(y) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{(y+\eta)} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{\tilde{v}}{(y+\eta)^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\tilde{v}}{y+\eta} = 0$$

Conditions à la paroi $y=0$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0$$

Conditions à l'interface $y=1$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U(1) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$$

$$\frac{d\bar{U}(1)}{dy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0$$

$$\tilde{p} = 2 \frac{d\tilde{v}}{dy} - We \text{Re} \left(\frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^3} - \frac{\tilde{h}}{(\eta+1)^2} \right)$$

III.3 Equation d'Orr-Sommerfeld

L'équation d'Orr-Sommerfeld en mécanique des fluides est une équation aux valeurs propres décrivant l'évolution de perturbations infinitésimales dans un écoulement parallèle visqueux.

III.3.1 Modes normaux

Toutes les équations gouvernant l'écoulement sont linéaires, cela nous permet d'introduire les solutions de ce problème sous forme de modes normaux, en introduisant la transformée de Fourier des perturbations sous forme :

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, y, t) = \hat{u}(y) e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{v}(x, y, t) = \hat{v}(y) e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{p}(x, y, t) = \hat{p}(y) e^{ik(x-ct)} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Dans le cadre de notre étude, on s'intéresse à la stabilité temporelle, on pose :

Le vecteur d'onde k réel et on résout le problème linéaire pour une valeur complexe de la célérité c . Soit $\omega = kc$ où ω désigne la pulsation complexe de la perturbation.

$\omega = \omega_r + i\omega_i$, Le signe de la partie imaginaire de la pulsation influe sur la stabilité de l'écoulement :

- $\omega_i < 0$: dans ce cas les perturbations sont amorties, on dit alors que l'écoulement est linéairement stable.
- $\omega_i > 0$: dans ce cas les perturbations sont amplifiées et l'écoulement devient linéairement instable.
- $\omega_i = 0$: la stabilité n'est ni amortie ni amplifiée, on dit que la stabilité de l'écoulement est neutre ou marginale.

Le mouvement de la surface libre est une onde sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ se propageant à la célérité c .

III.3.2 Fonctions de courant :

L'écoulement étant bidimensionnel et incompressible, cela nous permet d'introduire les perturbations des vitesses \tilde{u} et \tilde{v} par des fonctions de courant $\psi(x, y, t)$, telle que :

$$\tilde{u} = -\frac{1}{(\eta + y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{III.15})$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{(\eta + y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{III.16})$$

L'avantage est de faire apparaître qu'une fonction ψ au lieu de deux \tilde{u} et \tilde{v} , elle permet de simplifier le problème en ramenant l'étude du champ de vitesse du fluide incompressible à un champ scalaire [7,12]. C'est ainsi que le problème a été résolu par [13] sans tenir compte des effets de tension superficielle.

Et on pose :

$$\begin{cases} \psi(x, y, t) = \hat{\psi}(y)e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{p}(x, y, t) = \hat{p}(y)e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{h}(x, t) = \hat{h}e^{ik(x-ct)} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

L'équation de continuité est satisfaite, après substitution des perturbations de vitesse par les fonctions de courant dans les équations de Navier-Stokes (III.2) et (III.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y+\eta} \frac{d^3 \hat{\psi}}{dy^3} - \frac{1}{(y+\eta)^2} \frac{d^2 \hat{\psi}}{dy^2} + \frac{1}{(y+\eta)^3} \frac{d \hat{\psi}}{dy} - k^2 \frac{1}{y+\eta} \frac{d \hat{\psi}}{dy} + ik \text{Re} \frac{1}{y+\eta} \left(c \frac{d \hat{\psi}}{dy} - U(1) \frac{d \hat{\psi}}{dy} + \right. \\ \left. \hat{\psi} \frac{dU(1)}{dy} \right) + i \hat{p}(y)k = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$$-ik \frac{1}{y+\eta} \frac{d^2 \hat{\psi}}{dy^2} + ik \frac{1}{(y+\eta)^2} \frac{d \hat{\psi}}{dy} + \frac{ik^3 \hat{\psi}}{y+\eta} + k^2 \text{Re} \left(-\frac{\hat{\psi}U(1)}{y+\eta} + \frac{c \hat{\psi}}{y+\eta} \right) + \frac{d \hat{p}(y)}{dy} = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$\hat{\psi} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\frac{d\hat{\psi}}{dy} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{III.21})$$

La condition cinématique devient :

$$\hat{\psi}(1) = \hat{h}(\eta + 1)(c - U(1)) \quad \text{en } y = 1 \quad (\text{III.22})$$

La continuité des contraintes tangentielles est :

$$\frac{1}{1+\eta} \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} - \frac{1}{(1+\eta)^2} \frac{d\hat{\psi}}{dy} + \frac{k^2\hat{\psi}}{1+\eta} + \hat{h} \frac{dU}{dy^2} = 0 \quad \text{en } y = 1 \quad (\text{III.23})$$

La continuité des contraintes normales s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\eta} \frac{d^3\hat{\psi}}{dy^3} - \frac{1}{(1+\eta)^2} \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} + \frac{1}{(1+\eta)^3} \frac{d\hat{\psi}}{dy} + ikc \operatorname{Re} \frac{1}{1+\eta} \frac{d\hat{\psi}}{dy} - ik\operatorname{Re}U \frac{1}{1+\eta} \frac{d\hat{\psi}}{dy} + \\ ik\operatorname{Re}\hat{\psi} \frac{1}{1+\eta} \frac{dU}{dy} - 3k^2 \frac{1}{1+\eta} \frac{d\hat{\psi}}{dy} - ik\operatorname{Re}We\hat{h} \left(-\frac{k^2}{1+\eta} + \frac{1}{(1+\eta)^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

En $y = 1$

(III.24)

En faisant une dérivée croisée des équations (III.18) et (III.19) projetée sur l'axe x et y , la pression sera éliminée. Cela nous permet d'obtenir l'équation d'Orr-Sommerfeld :

$$\begin{aligned} \frac{d^4\hat{\psi}}{dy^4} - 2 \frac{1}{y+\eta} \frac{d^3\hat{\psi}}{dy^3} + 3 \frac{1}{(y+\eta)^2} \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} - 3 \frac{1}{(y+\eta)^3} \frac{d\hat{\psi}}{dy} - 2k^2 \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} + ik\operatorname{Re} \left(c \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} - U \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} + \hat{\psi} \frac{d^2U}{dy^2} \right) \\ + ik\operatorname{Re} (U(1) - c) \frac{1}{y+\eta} \frac{d\hat{\psi}}{dy} - ik\operatorname{Re} \hat{\psi} \frac{1}{y+\eta} \frac{dU}{dy} + 2k^2 \frac{1}{y+\eta} \frac{d\hat{\psi}}{dy} + i\operatorname{Re} k^3 \hat{\psi} (U(1) - c) + \hat{\psi} k^4 = 0 \end{aligned}$$

(III.25)

La condition cinématique (III.22) nous permet de déterminer l'amplitude \hat{h} de l'interface :

$$\hat{h} = \frac{\hat{\psi}(1)}{(\eta+1)(c-U(1))} \quad (\text{III.26})$$

La condition sur les contraintes tangentielles devient :

$$\frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} - \frac{1}{(1+\eta)} \frac{d\hat{\psi}}{dy} + \hat{\psi}(1) \frac{1}{c-U(1)} \frac{d^2U}{dy^2} + \hat{\psi}k^2 = 0 \quad (\text{III.27})$$

La pression intervient également dans la condition dynamique normale à l'interface d'où elle est éliminé en dérivant puis en remplaçant les gradients de pression à l'aide des équations de Navier-Stokes.

La condition sur les contraintes normales devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\eta} \frac{d^3\hat{\psi}}{dy^3} + \frac{1}{(1+\eta)^2} \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2} + \frac{1}{(1+\eta)^3} \frac{d\hat{\psi}}{dy} - 3k^2 \frac{1}{1+\eta} \frac{d\hat{\psi}}{dy} + ik\text{Re}(U-c) \frac{1}{1+\eta} \frac{d\hat{\psi}}{dy} + ik\text{Re}\hat{\psi} \frac{1}{1+\eta} \frac{dU}{dy} \\ + 2k^2 \frac{\hat{\psi}}{(1+\eta)^2} - ik\text{Re}We\hat{\psi} \left(\frac{1}{(c-U(1))} \left(\frac{1}{(1+\eta)^3} - \frac{k^2}{1+\eta} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

III.4 Etude numérique :

Cette partie est consacré à la description de la méthode numérique utilisée pour résoudre le problème aux valeurs propres formés par l'équation (III.25). Ce problème peut être résolu numériquement sans hypothèses restrictives sur le nombre de Reynolds ou sur la longueur d'onde des perturbations. La méthode utilisée pour résoudre ce problème est celle de Riccati qui a été donnée initialement par Scott [14]. Davey [15] a montré son efficacité dans le cas de la résolution de l'écoulement de Poiseuille. L'idée de base de cette méthode est de transformer le problème linéaire aux valeurs propres en un problème non linéaire avec conditions initiales.

On considère le système d'Orr-Sommerfeld (III.25), réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\psi}' \\ \hat{\psi}'' \\ \hat{\psi}''' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\psi}' \\ \hat{\psi}'' \\ \hat{\psi}''' \end{pmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Où :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{ikReU'}{\eta + y} - ikReU'' - ik^3ReU - ik^3cRe - k^4 \\ \beta &= -\frac{ikReU}{\eta + y} - \frac{ikRec}{\eta + y} - \frac{2k^2}{\eta + y} + \frac{3}{(\eta + y)^3} \\ \gamma &= ikReU + Recik - \frac{3}{(\eta + y)^2} + 2k^2 \\ \theta &= \frac{2}{\eta + y} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

$$X = \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\psi}' \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \hat{\psi}'' \\ \hat{\psi}''' \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} X' = AX + BY \\ Y' = CX + DY \end{cases}$$

Introduisant maintenant, la matrice de Riccati \mathcal{R} à travers la transformation :

$$X = \mathcal{R}Y \quad (\text{III.32})$$

En dérivant l'équation (III.32) et en utilisant les équations (III.31), il s'ensuit que \mathcal{R} satisfait l'équation différentielle matricielle non linéaire du premier ordre, appelée équation de Riccati, suivante :

$$\mathcal{R}' = A\mathcal{R} + B - \mathcal{R}C\mathcal{R} - \mathcal{R}D \quad (\text{III.33})$$

Nous résolvons le problème aux valeurs initiales (III.33) par le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre :

En $y = 0$:

$$X = \begin{pmatrix} \hat{\psi}(0) \\ \hat{\psi}'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \mathcal{R}Y \Rightarrow \mathcal{R}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y = 0 \quad (\text{III.34})$$

$$Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{R} = O_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R' = A\mathcal{R} + B - \mathcal{R}C\mathcal{R} - \mathcal{R}D$$

$$R(0) = O_M$$

En $y = 1$:

$$\tilde{A}X + \tilde{B}Y = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{U''}{U-c} - k^2 & \frac{1}{1+\eta} \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\psi}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}'' \\ \hat{\psi}''' \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{III.35})$$

$$\lambda_1 = -3k^2 + \frac{2k^2}{1+\eta} + We \frac{Rik}{c-U} \left(k^2 - \frac{1}{(1+\eta)^2} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(1+\eta)^2} + ikRc - ikRU$$

$$\tilde{A}X + \tilde{B}Y = 0 \Leftrightarrow \tilde{A}\mathcal{R}Y + \tilde{B}Y = O_{R^2}$$

$$(\tilde{A}\mathcal{R} + \tilde{B})Y = O_{R^2}$$

$$\text{Det}(\tilde{A}\mathcal{R} + \tilde{B}) = 0 \quad \text{car } y \neq O_R^2 \quad (\text{III.36})$$

III.4.1 Résultats et discussions :

On étudie la stabilité temporelle vis-à-vis d'une perturbation d'un nombre d'onde k réel et ω complexe. Les résultats sont présentés sous forme de diagramme de stabilité marginale dans le plan nombre de Reynolds et nombre d'onde. Nous allons regarder l'influence du paramètre de la courbure η , les autres paramètres comme le nombre de Weber We sont fixes.

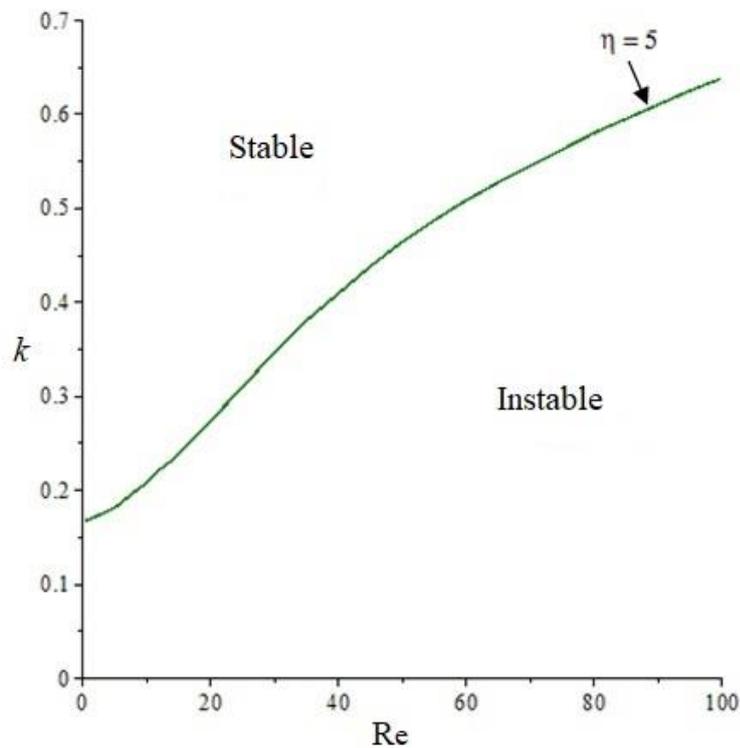


Figure III. (1) – Coubes de stabilité dans le plan (Re, k) pour une valeur de rayons de courbure de $\frac{1}{\eta} = 0.2$ et de $ka = 6737$.

La figure (1) montre que l'augmentation du nombre de Reynolds augmente les zones instables.

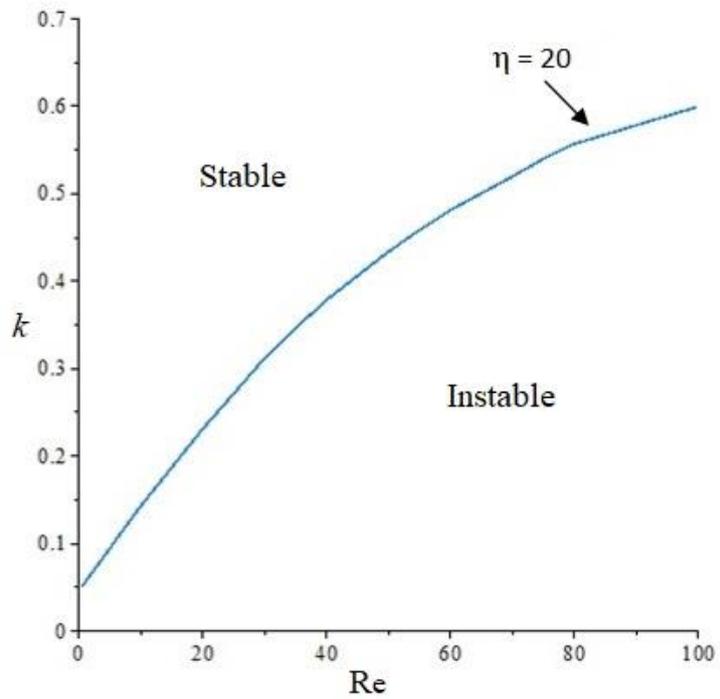


Figure III. (2) – Coubes de stabilité dans le plan (Re, k) pour une valeur de rayons de courbure de $\frac{1}{\eta} = 0.05$ et de $ka = 6737$.

On peut voir sur la figure (2) que plus le nombre de Reynolds est augmenté, plus l'instabilité augmentera.

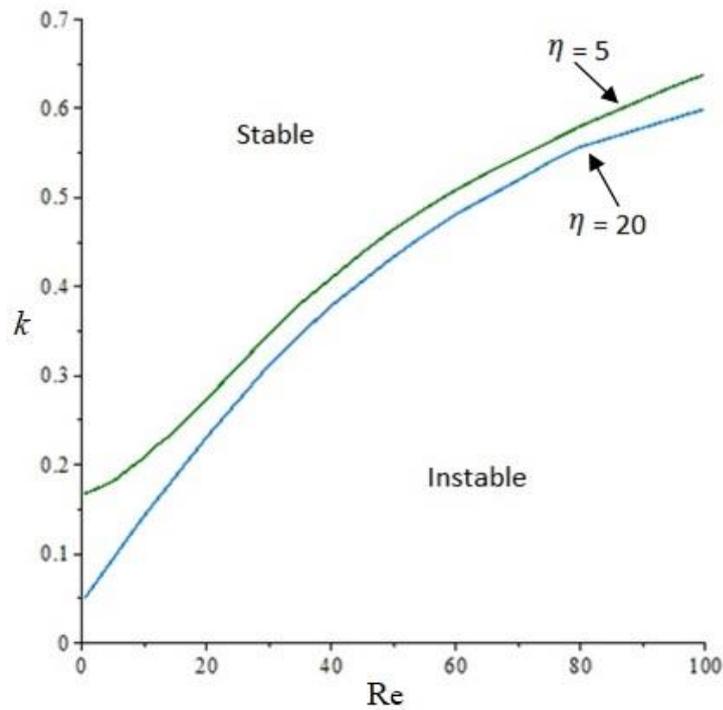


Figure III. (3) – Superposition des courbes des figures III (1) et (2).

La figure (3) montre que l'effet de la courbure sur la stabilité de l'écoulement est très important. Veuillez noter que l'augmentation de la courbure augmente considérablement les zones instables, tout en réduisant les zones de stabilité. Le nombre d'onde d'apparition de cette instabilité augmente fortement lorsque la courbure augmente.

On fait une comparaison entre la méthode numérique et le développement asymptotique :

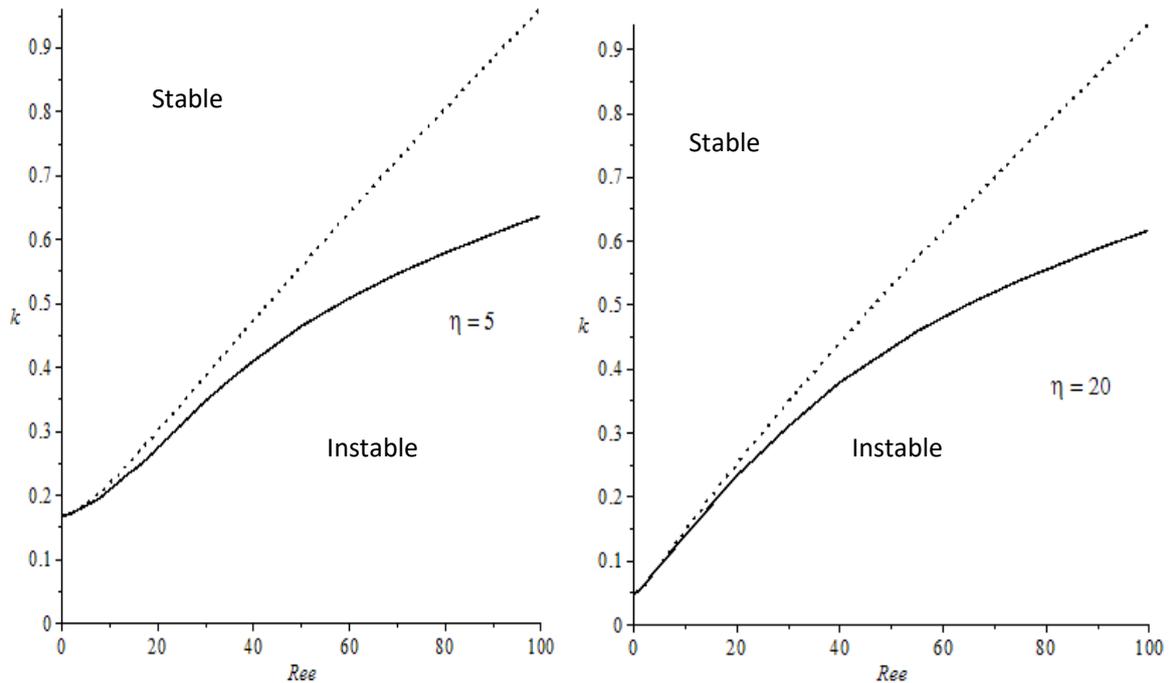


Figure III. (4) et (5) – Courbes de stabilité dans le plan (Re, k) pour deux valeurs de rayons de courbure et de $ka = 6737$. Les valeurs correspondantes de la courbure sont données par $\frac{1}{\eta}$ (0.2, 0.05). [...Développement asymptotique ; — Orr-Sommerfeld]

Les figures (4) et (5) montrent que l'écart entre les courbes obtenues par la méthode numérique et celle trouvée par un développement asymptotique réalisée par Djessas [16] et Halitim [17] aux grandes ondes devient important quand le nombre de Reynolds augmente.

CONCLUSION

Nous avons étudié la stabilité d'un film fluide visqueux s'écoulant par gravité sur un cylindre vertical, l'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressibles en prenant en considération la faible épaisseur de la couche du fluide. Cette étude nous a permis d'établir l'équation d'Orr-Sommerfeld à l'aide de la méthode de petites perturbations.

Dans la présente étude nous nous sommes intéressés à une approche pleinement numérique, nous avons résolu les équations d'Orr-Sommerfeld en adoptant la méthode de Riccati. Cette approche aboutit au même seuil critique de la stabilité après développement asymptotiques aux grandes longueurs d'ondes nous avons obtenu des résultats similaires à ceux trouvés dans la littérature.

Références bibliographiques

- [1] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatousse, Linear stability of a two-layer film flow down an inclined channel: A second-order weighted residual approach, *Phys. Fluids* 19 (2007).
- [2] Duprat, C. Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale, *Fluid Dynamics*. Université Pierre et Marie Curie - Paris (2009).
- [3] Floryan, J.M. Davis, S.H. and Kelly, R.E. Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane, *Phys. Fluids* 30 (4), 983 (1987).
- [4] A. Oron, S. H. Davis, and S. G. Bankoff, Long-scale evolution of liquid films, *Rev.Mod. Physics* 69, n° 3 (1997).
- [5] A. Oron, S. H. Davis et S. G. Bankoff, Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev.Mod. Phys.*, 69(3) :931–980, (1997).
- [6] Kapitza P. L. and Kapitza S. P., Wave flow of thin layers of a viscous fluid, *Zh. Eksp. Teor.Fiz* 19, pp105–120, (1949)
- [7] Yih, C.-S., Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids* 6 : 321-34, (1963).
- [8] Gollub, J.P. Liu, J. Paul, J.D. Measurements of the primary instability of film flow, *J. Fluid Mech.* 250 (1993) 69–101.
- [9] S.P. Lin, W.C. Liu, Instability of film coating of wires and tubes *AICHE Journal* 21(1975) 775–782
- [10] Ndoumbe, S. Lusseyran, F. Izrar, B. Contribution à la modélisation d'un film annulaire tombant, *C. R. Mécanique* 331 pp 173–178, (2003).
- [11] Leblanc, S. Hydrodynamique, problèmes corrigés. EDP Sciences. ISBN 978-2-7598-0525-9, (2010).
- [12] Drazin P.G. and Reid W.H. *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, (1981).
- [13] Yih, C.-S., (1967). Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid Mech.* 27, 337-352.
- [14] M.R. SCOTT. An initial value method for the eigenvalue problem for systems of ordinary differential equations. *J. Comput. Phys.*, (12) :334–347, 1973.

- [15] A. Davey. On the numerical solution of difficult boundary-value problems. *J.Comp. Phys.*, 35 :36–47, 1980.
- [16] Djessas.H, Mehidi.N, Boubalou.N and Djema.A, Etude numérique de l'instabilité 24ème congrès Français de mécanique (26-30) août (2019) Brest.
- [17] HALITIM.M, Etude théorique d'un écoulement de film liquide sur un cylindre, mémoire de master, (2018).

Résumé

Dans cette étude nous montrons que l'écoulement d'un film mince visqueux sur une paroi courbe conduit à une déstabilisation de l'interface liquide-gaz, le mouvement du fluide est généré par la gravité et la tension superficielle. L'essentiel du travail concerne l'analyse de la stabilité de la surface libre à l'aide d'une formulation de type Orr-Sommerfeld, et les conditions aux limites associées obtenues à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse. Résoudre le problème de stabilité revient à résoudre l'ensemble de ces équations. Nous nous sommes intéressés à une approche pleinement numérique, cette approche aboutit au même seuil critique de la stabilité après développement asymptotiques aux grandes longueurs d'ondes, nous avons obtenu des résultats similaires à ceux trouvés dans la littérature.

Abstract

In this study we show that the flow of a thin viscous film on a curved wall leads to a destabilization of the liquid-gas interface, the movement of the fluid is generated by gravity and surface tension. Most of the work concerns the analysis of the stability of the free surface using an Orr-Sommerfeld type formulation, and the associated boundary conditions obtained from the conservation equations of momentum and mass. Solving the stability problem comes down to solving all of these equations. We were interested in a fully digital approach, this approach leads to the same critical threshold of stability after asymptotic development at long wavelengths, we obtained results similar to those found in the literature.