

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité : Dynamique des Fluides et Energétique

Thème

Les équations fractionnaires dans les systèmes complexes

Présenté par

Mr. DAHMANI YAHIA

Soutenu le : 10 / 07 /2019

Devant le Jury composé de :

| | | | |
|-----------------------|----------------|-------------------|-------------------|
| MEZIANI OURRAD | Ouerdia | Professeur | Président |
| AMATOUSSE | Nawel | Professeur | Examineur |
| BOUCHARA | Lydia | MCB | Rapporteur |

Année universitaire 2018/2019

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu le tout puissant pour m'avoir donné la force et la patience pour mener à terme ce travail.

Je remercie ma famille qui ma toujours encouragé et soutenu durant toutes mes études.

Je tiens à remercier particulièrement madame **LYDIA BOUCHARA** qui a su guider ce travail par ses conseils avisés et qui a bien voulu m'aider dans la préparation de ce mémoire. Je la remercie également pour ses encouragements et pour toutes les connaissances que j'ai acquises à ses côtés.

Je remercie aussi madame **MEZIANI OURRAD Ouerdia** professeur à l'université de Bejaia pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse mes vifs remerciements à Madame **AMATOUSSE Nawel** professeur à l'Université de Bejaia, pour l'intérêt qu'elle a voulu porter à ce travail en acceptant de l'examiner. Et le précieux soutien de **Mr MEZIANI Bachir** pour son aide et ses conseils.

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance.

A mes chères sœurs.

A ma chère tante et toute ma famille.

A tous mes amis.

Liste des symboles

k : paramètre de contrôle,

P : probabilité dans le cas des variables aléatoires discrètes,

μ : coefficient de transport,

$W(n, m)$: taux de transition dans le cas des variables aléatoires discrètes,

$w(q, y)$: taux de transition dans le cas des variables aléatoires continues,

$A(q)$: saut moyen à partir de la position q ,

$\mathcal{B}(q)$: deuxième moment des sauts à partir de q ,

$\mu(2)$: coefficient de transport pour un ordre $q = 2$,

$\mu(q)$: coefficient caractérisant le moment d'ordre q ,

$\mathcal{U}(q, t)$: concentration du fluide,

$\bar{\mathcal{U}}(q, t)$: concentration moyenne,

$\tilde{\mathcal{U}}(q, t)$: fluctuation,

$M_q(n)$: moments d'ordre q pour un temps n ,

$v_{qi}(n)$: vitesse de phase mono-axiale issue de la i ème condition initiale,

$\rho(q)$: densité de probabilité ,

Table des figures

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure1.1: Les trois types du système dynamique..... | 3 |
| Figure1.6: Structure d'une section Poincaré..... | 7 |
| Figure1.7: L'espace des phases présenté par la section de Poincaré, présentant les différentes structures possibles..... | 8 |
| Figure3.1: L'espace des phases pour $k = 10$.Transport Normal..... | 25 |
| Figure3.2: Densités de probabilité des vitesses moyennes pour les cas : $k= 10$ figure (a) pour différents temps..... | 25 |
| Figure3.3: L'espace des phases pour $k = 1,5$. Transport anormale..... | 26 |
| Figure3.4: Densités de probabilité des vitesses moyennes pour les cas : $k = 1.5$ figure (b) pour différents temps..... | 26 |

Table des matières

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Introduction générale | 1 |
| Chapitre 1: Systèmes dynamiques et équations stochastiques | |
| Introduction..... | 3 |
| 1.1 Les systèmes dynamiques..... | 3 |
| 1.2 Processus stochastique..... | 4 |
| 1.3 Les équations différentielles stochastiques..... | 4 |
| 1.4 Le mouvement Brownien..... | 4 |
| 1.5 Calculs fractionnaires..... | 5 |
| 1.6 Espace des phases | 6 |
| 1.7 La section de Poincaré | 7 |
| 1.8 La variance | 8 |
| 1.9 La moyenne..... | 9 |
| Conclusion | 9 |
| Chapitre 2:Le transport normal et l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) | |
| Introduction..... | 11 |
| 2.1 La diffusion et le phénomène de transport | 11 |
| 2.1.2 Exemple de diffusion dans un milieu gazeu | 11 |
| 2.1.3 Exemple de diffusion dans un milieu liquide | 11 |
| 2.2 Les équations du transport diffusif..... | 11 |
| 2.2.1 Equation Maîtresse | 12 |
| 2.2.3 Equation de Chapman-Kolmogorov | 12 |
| 2.2.4 Equation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) déduite de l'équation maîtresse :..... | 13 |
| 2.2.5 L'équation FPK selon Zaslavsky : | 14 |
| 2.2.6 Les conflits rencontrés entre l'équation FPK et la dynamique | 16 |
| 2.3 Le transport normal..... | 16 |
| Conclusion | 17 |

Chapitre 3:Le transport anormal et l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov fractionnaire (FFPK)

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Introduction..... | 19 |
| 3.1 Cinétique fractionnaire | 19 |
| 3.2 Equation de Fokker-Planck-Kolmogorov fractionnaire (FFPK)..... | 19 |
| 3.3 Evolution des moments (transport)..... | 20 |
| 3.4 Le transport anormal..... | 21 |
| 3.5 Transport anormale dans un milieu poreux | 22 |
| 3.6 Conditions pour l'application de FFPK aux systèmes dynamiques complexes | 23 |
| 3.7 Transport dans le modèle de standard map | 23 |
| 3.8 Résultats et discussions..... | 24 |
| Conclusion | 27 |
| Conclusion général | 28 |
| Références Bibliographique..... | 29 |

Introduction générale

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs. Récemment, une décennie après leur introduction, les équations cinétiques fractionnaires ont attiré beaucoup de scientifiques. Elles sont actuellement, largement étudiées et reconnues comme des outils importants dans la description des processus de transport diffusif. Au cours de ce développement, un certain nombre de travaux a été fait avec l'équation de diffusion fractionnaire (EDF), l'équation de diffusion fractionnaire d'advection (EDFA), et les équations fractionnaires de Fokker-Planck-Kolmogorov (FFPK)[9,12]. Dans notre travail, on étudie les équations fractionnaires dans la physique : on cite ici les équations FPK et FFPK et les phénomènes de transport diffusif, Ce mémoire est composé de trois chapitres:

Dans le premier chapitre nous ferons un rappel sur les systèmes dynamiques [1], les équations stochastiques [3] et le mouvement brownien. Par la suite, nous introduirons l'espace des phases et la section de Poincaré [6,7]. Enfin en donnant quelques notions de base qui nous aiderons à comprendre la suite de ce travail [2,4,5].

Dans le deuxième chapitre nous étudierons la diffusion comme un phénomène de transport, ce qui va nous permettre le rapport existant entre les notions des probabilités et les équations de transport diffusif [8] tels que : l'équation maîtresse, l'équation de Chapman-Kolmogorov, l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK), nous aborderons par la suite le transport normal [13].

Le troisième chapitre consiste en une approche spécifique de la description cinétique de la dynamique chaotique. L'équation dérivée s'appelle le fractionnaire Équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FFPK) ou simplement FKE.[13,14] et on utilise cette équation Pour décrire le transport anormal a l'aide d'évolution des moments avec un exposant qui caractérise le type de transport. A la fin nous présenterons quelques structures différentes qui apparaissent dans l'espace des phases.

Chapitre 1

Systemes dynamiques et equations stochastiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous ferons un rappel sur les systèmes dynamiques, les équations stochastiques et le mouvement brownien. Puis les calculs fractionnaires. Par la suite, nous introduirons l'espace des phases et la section de Poincaré [5,6]. Enfin nous donnerons quelques notions de base qui nous aiderons à comprendre la suite de ce travail [4,2].

1.1 Les systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps[1]. On suppose que l'état d'un système, à un instant donné, peut être représenté par un élément x d'un espace d'état de dimension finie. L'évolution du système est décrite par un système différentiel qu'on écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, \alpha). \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Où x est un vecteur de variables de dimension n , f est un vecteur de fonctions scalaires des variables x de dimension n , α est un vecteur de paramètres de dimension donnée, et t la variable libre du problème. t est souvent le temps, mais cela n'a rien d'obligatoire. x_0 est le vecteur des conditions initiales (valeur de x à $t = 0$). Il peut évoluer dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace des phases considère. On peut distinguer trois types de systèmes dynamiques.

- Déterministe : la dynamique est totalement prévisible, et la trajectoire est bien définie dans l'espace des phases.
- Chaotique : la dynamique est imprévisible à long terme, la trajectoire est complexe dans l'espace des phases, et l'apparition de structures visibles.
- Stochastique : la dynamique est aléatoire. Le système couvre tout l'espace des phases et il n'ya pas de récurrence (la connaissance de la période et du mouvement sur la période n'est pas suffisante pour prédire l'état du système à n'importe quelle époque du futur).

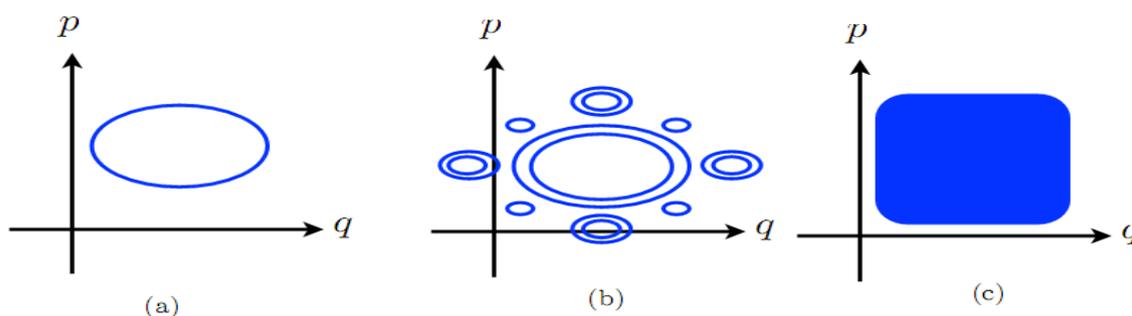


Figure1 : Les trois types du systèmes dynamiques,(a)Déterministe, (b)Chaotique, (c)Stochastique.

1.2 Processus stochastique

Un processus stochastique est une structure mathématique utilisée pour modéliser les différents phénomènes où la prédiction du futur est impossible pour des raisons différentes: soit le système est soumis à une ou plusieurs forces inconnues, ou bien, les forces agissent d'une façon aléatoire [2]. Citons à titre d'exemple:

- Le mouvement d'une particule dans un fluide (mouvement Brownien).
- Le nombre de photons absorbés ou émis par un atome.
- La position d'un piston soumis au choc des molécules d'un gaz.

1.3 Les équations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle [3]. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels que les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Les domaines d'application des EDS sont vastes : physique, biologie, dynamique des populations, écologie, mathématiques financières, traitement du signal, théorie du contrôle... Les équations différentielles stochastiques servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Par exemple, le mouvement d'une particule mésoscopique dans un fluide ou un gaz peut être décrit par une équation de la forme

$$m\ddot{x} = F_{ext} + F_{stoch}. \quad (1.2)$$

Ici F_{ext} décrit une force extérieure déterministe, par exemple la gravité ou une force électromagnétique. F_{stoch} décrit l'effet des collisions erratiques des molécules du fluide avec la particule mésoscopique.

1.4 Le mouvement Brownien

Le mouvement brownien a été observé par le botaniste Robert Brown en 1827, dont le nom a été retenu pour nommer le phénomène. Ce mouvement, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule. Le mouvement brownien permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion.

Les phénomènes stochastiques en générale et la diffusion en particulier ont été largement étudiés autant sur le plan expérimental que théorique les premières études de la diffusion ont commencé avec le mouvement brownien sur la base du modèle probabiliste de la marche aléatoire, proposé par A. Einstein. Cependant, le premier modèle théorique basé sur des considérations purement statistiques fut introduit par P. Langevin, qui a introduit une équation différentielle de premier ordre pour la vitesse de la particule brownienne contenant un terme stochastique.

1.5 Calculs fractionnaires

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Dans cette partie, nous allons présenter quelques rappels sur les dérivées et les intégrales fractionnaires [4,5,8].

1.5.1 Formule de Cauchy pour le calcul de la β ème primitive de $f(q)$

Définissons $f^{(\beta)}(q)$ comme étant la β ème primitive de $f(x)$ avec β un entier positif. Nous pouvons écrire $f(q)$ comme suit

$$\frac{d}{dq} f^{(1)}(q) = \frac{d}{dq} \int_a^q f(y) dy = f(q). \quad (1.3)$$

Il est déduit que pour $\alpha = -\infty$,

$$\frac{d}{dq} f^{(\beta)}(q) = \frac{d}{dq} \frac{1}{(\beta-1)!} \int_{-\infty}^q (q-y)^{\beta-1} f(y) dy = f^{(\beta-1)}(q). \quad (1.4)$$

D'où $f^{(\beta)}(q)$ est bien la β ème primitive de f .

1.5.2 Intégrale de Riemann-Liouville

Riemann réalise que l'équation (1.4) a un sens en remplaçant $\beta!$, qui est de nature discrète, par la fonction Γ

$$\beta! = \Gamma(\beta + 1). \quad (1.5)$$

La fonction Γ étend la factorielle aux valeurs réelles et représente la factorielle généralisée. Mais pour cela, il faut connaître les conditions sous lesquelles la fonction Γ est définie. En effet, Gauss, Wierstrass et Euler proposent des formules donnant une valeur à la fonction Γ . Dans notre travail, nous nous contentons de la fonction Γ telle qu'elle est donnée par la formule d'Euler

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt. \quad (1.6)$$

L'intégrale est convergente pour toute valeur réelle et positive $\beta > 0$. Par conséquent, la fonction $\Gamma(\beta)$ existe si et seulement si $\beta > 0$ et vaut $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(\beta + 1) = \beta\Gamma(\beta)$.

Pour tout réel $\beta > 0$ l'équation (1.4) se réécrit comme suit

$$(I_{\beta} f)(q) = \frac{d}{dq} f^{(\beta)}(q) = \frac{d}{dq} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^q (q-y)^{\beta-1} f(y) dy = f^{(\beta-1)}(q). \quad (1.7)$$

Soit encore

$$(I_{\beta} f)(-q) = \frac{d}{dq} f^{(\beta)}(-q) = \frac{d}{dq} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_q^{+\infty} (y-q)^{\beta-1} f(y) dy = f^{(\beta-1)}(-q). \quad (1.8)$$

La dérivée fractionnaire est définie comme étant l'inverse de l'opérateur I_{β} comme suit

$$\frac{d^{\beta}}{dq^{\beta}} = I_{-\beta}, \quad \frac{d^{-\beta}}{dq^{-\beta}} = I_{\beta}. \quad (1.9)$$

Selon les valeurs positives que peut prendre β , la dérivée fractionnaire prend des valeurs bien précises. En effet, pour $0 < \beta < 1$, nous obtenons les dérivées fractionnaires suivantes

$$\frac{d^\beta(f(q))}{dq^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dq} \int_{-\infty}^q \frac{f(y)dy}{(q-y)^\beta}. \quad (1.10)$$

Et

$$\frac{d^\beta(f(q))}{d(-q)^\beta} = \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dq} \int_q^{+\infty} \frac{f(y)dy}{(y-q)^\beta}. \quad (1.11)$$

Pour un β arbitraire, les dérivées fractionnaires à gauche et à droite, s'expriment comme suit

$$\frac{d^\beta(f(q))}{dq^\beta} = \frac{1}{\Gamma([\beta]-\beta)} \frac{d^{[\beta]}}{dq^{[\beta]}} \int_{-\infty}^q \frac{f(y)dy}{(q-y)^{\beta-[\beta]+1}}. \quad (1.12)$$

$$\frac{d^\beta(f(q))}{d(-q)^\beta} = \frac{-1}{\Gamma([\beta]-\beta)} \frac{d^{[\beta]}}{d(-q)^{[\beta]}} \int_q^{+\infty} \frac{f(y)dy}{(y-q)^{\beta-[\beta]+1}}. \quad (1.13)$$

Où $[\beta]$ est un entier positif de β . Des notations plus générales des dérivées de Riemann Liouville sont données par les équations ci-dessous

$${}_a \mathcal{D}_q^\beta f(q) = \frac{1}{\Gamma([\beta]-\beta)} \left(\frac{d}{dq}\right)^{[\beta]} \int_a^q \frac{f(y)dy}{(q-y)^{\beta-[\beta]+1}}, ([\beta]-1 < \beta < [\beta]) \quad (1.14)$$

$${}_q \mathcal{D}_b^\beta f(q) = \frac{-1}{\Gamma([\beta]-\beta)} \left(-\frac{d}{d(q)}\right)^{[\beta]} \int_a^b \frac{f(y)dy}{(y-q)^{\beta-[\beta]+1}}, ([\beta]-1 < \beta < [\beta]) \quad (1.15)$$

1.5.3 L'approche de Riesz

La dérivée fractionnaire de Riesz est définie par

$$R_x^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha}{d|x|^\alpha} f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^{\alpha+1}} [f(x-y) - 2f(x) + f(x+y)] \quad (1.16)$$

Tel que $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$.

1.6 Espace des phases

Pour d'écrire l'évolution dynamique d'un système physique il est souvent commode d'en faire une représentation graphique. un point $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ dans un espace à $2n$ dimension appelé espace de phase, ce dernier va nous permettre d'appréhender tout un ensemble de propriétés formelles des systèmes dynamiques, et d'en tirer des interprétations géométriques. En mécanique, quand on a donné la position et l'impulsion initiale d'un objet et qu'on sait quelles sont les forces qui agissent sur lui, on connaît alors la trajectoire ultérieure de l'objet. On parle de déterminisme (en clair, on peut prédire la trajectoire). Cela induit une conséquence importante : imaginons qu'on trace la trajectoire d'un objet dans un plan un peu inhabituel (q, p) . Dans ce plan on a la propriété fondamentale que deux trajectoires ne peuvent pas se croiser. Pourquoi ? Parce que si deux trajectoires se croisent en un point (q_c, p_c) et qu'on prend ce point comme conditions initiales d'un mouvement, on ne sait pas laquelle des deux

trajectoires l'objet prendra. Donc on ne saura pas, en donnant sa position et son impulsion initiale, quelle sera la trajectoire future de l'objet (donc pas de déterminisme).

1.7 La section de Poincaré

Lorsque le nombre de degrés de liberté du système est supérieure à un, l'espace des phases a au moins quatre dimension. La représentation graphique d'une trajectoire dans cet espace multidimensionnel est impossible, et nous aurons recours à une représentation fréquemment utilisée dans l'étude des systèmes dynamiques : la section du Poincaré qui est une coupe de la trajectoire dans l'espace des phases afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec un plan. On passe d'un système à temps continue à un système dynamique à temps discrète. On construit la section de Poincaré en choisissant un plan de l'espace des phases et en y représentant par un point chaque intersection de la trajectoire avec ce plan dans un sens donné. La suite des points de la section de Poincaré de la trajectoire formera une image qui nous renseignera sur la nature du mouvement. Cette méthode est illustrée sur la figure (1.7).

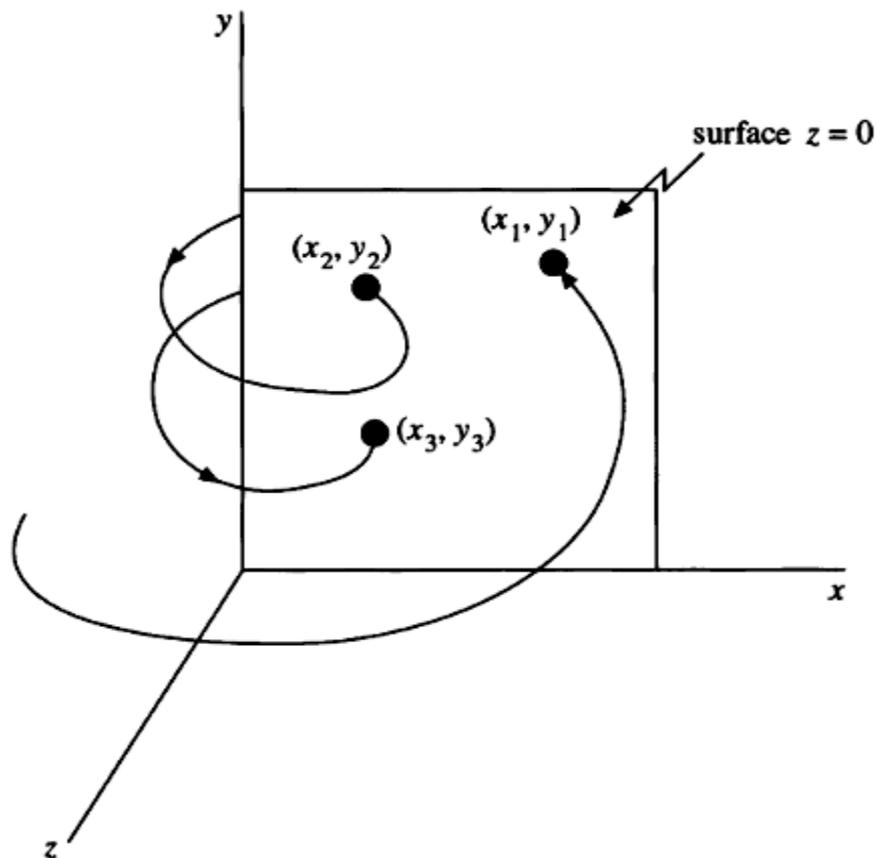


Figure1.6 : structure d'une section poincaré.

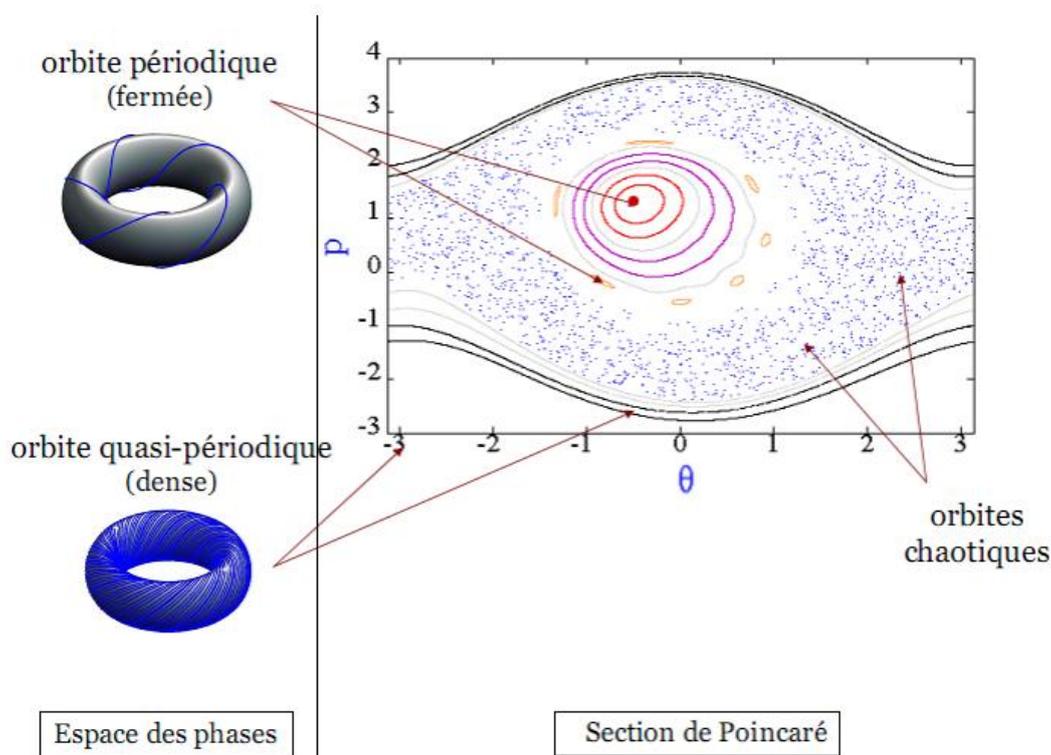


Figure 1.7: L'espace des phases présenté par la section de Poincaré, présentant les différents structures possibles.

Les orbites périodiques sont représentées par un ensemble fini de points. Les orbites chaotiques (quasi-périodique) sont représentées par un ensemble infini de points.

1.8 La variance

En statistique et en théorie des probabilités, la variance est une mesure servant à caractériser la dispersion d'un échantillon ou d'une distribution. Et à partir de laquelle le calcul fractionnaire dépend de la variance.

Pour calculer la variance d'une série statistique ou d'une variable aléatoire, on prend la somme des carrés des écarts à la moyenne divisée par le nombre d'observations :

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1.17)$$

La variance peut aussi s'écrire :

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \quad (1.18)$$

1.9 La moyenne

La moyenne est une mesure statistique caractérisant les éléments d'un ensemble de quantités : elle exprime la grandeur qu'aurait chacun des membres de l'ensemble s'ils étaient tous identiques sans changer la dimension globale de l'ensemble. Il y a plusieurs façons de calculer la moyenne d'un ensemble de valeurs, choisies en fonction de la grandeur physique que représentent ces nombres.

La moyenne ne peut être définie que sur une variable quantitative. La moyenne est la somme des valeurs observées divisée par leur nombre, elle est notée :

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.19)$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini le système dynamique puis ses différents types. Ensuite nous avons parlé sur les processus et les équations stochastiques avec un petit passage sur le mouvement brownien. Par la suite, nous avons introduit l'espace des phases et la section de Poincaré. Enfin nous avons présenté quelques notions de base qui nous aideront à comprendre la suite de ce travail.

Chapitre 2

Le transport normal et l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK)

Introduction

Dans ce chapitre nous étudierons le phénomène de transport, et nous allons comprendre le rapport existant entre les notions des probabilités et les équations de transport diffusif [7] tels que : l'équation maîtresse, l'équation de Chapman-Kolmogorov, l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK), nous aborderons par la suite le transport normal.

2.1 La diffusion et le phénomène de transport

L'étude du transport est fondamentale en mécanique des fluides. La diffusion est une forme de transport très répandue dans la nature, qui correspond à la tendance à l'étalement d'espèces, particules, atomes ou molécules. Suivant le milieu dans lequel se déplacent ces espèces, l'étalement sera plus ou moins grand. Elle est un processus aléatoire dans la nature (ne suit pas nécessairement une particule fluide). A température ambiante le phénomène de diffusion sera très important dans un milieu gazeux, plus faible dans un milieu liquide et pratiquement nul dans un milieu solide. Pour obtenir un phénomène de diffusion dans un solide ou un cristal, il faudra chauffer le matériau à des températures voisines de 1000°C.

2.1.2 Exemple de diffusion dans un milieu gazeux

Quand on débouche un flacon de parfum dans une pièce, on dit que l'odeur se répand dans la pièce. Que se passe-t-il en réalité ? Le phénomène est essentiellement de nature microscopique:

Les molécules gazeuses "responsables de l'odeur", c'est à dire perçues par nos récepteurs chimiques olfactifs, sont "émises" au niveau de l'embouchure du flacon et, au hasard des chocs intermoléculaires avec celles de l'air, sont transportées de proche en proche dans toute la pièce.

Au niveau macroscopique, le phénomène de diffusion comporte donc nécessairement la notion d'un transport d'une grandeur extensive, les molécules "odorantes" au sein d'un milieu diffusant, dans la pièce ou bien les transferts thermiques des endroits "chauds" vers des endroits "froids". La encore, il s'agit d'un phénomène microscopique avec transport d'énergie d'agitation thermique au hasard de chocs.

2.1.3 Exemple de diffusion et contrôle dans un milieu liquide

Une goutte de colorant agitée dans un verre d'eau illustre la diffusion chaotique des particules dans tout le volume disponible. Ce phénomène est aussi observé dans les accélérateurs de particules ou dans les plasmas de tokamak. Cependant il est possible de contrôler ce chaos en construisant des barrières de transport qui agissent comme des murs immatériels empêchant ou canalisant la diffusion des particules. Ce contrôle est réalisé par une action extérieure associée à un faible coût énergétique.

2.2 Les équations du transport diffusif

Dans le but de déterminer des exposants qui caractérisent le transport on établit des équations de mouvement telles que :

2.2.1 Equation Maître

A chaque réalisation d'une expérience, la mesure est définie par une trajectoire $q(t)$. La probabilité d'occuper l'état q au temps t , sachant qu'au temps t_0 , l'état occupé q_0 est noté $P(q, t; q_0, t_0)$ cette quantité est appelée poids relatif des trajectoires qui passent par le point (q, t) . A supposer des sauts d'un pas, l'état q au temps $t + dt$ peut être atteint de trois façon différentes : OU nous étions $q \pm 1$ en à l'instant t ET nous avons effectué un saut de ± 1 OU nous étions en q à l'instant t et nous n'avons effectué aucun saut. Les OU se traduisent par des sommes de probabilité et les ET se traduisent par leurs produits. Les événements à l'intérieur de chaque probabilité sont indépendants. La probabilité suivante :

$$P(q, t + dt) = P(q+1, t)w^-(q+1)dt + P(q-1, t)w^+(q-1)dt + P(q, t)(1 - (w^+(q) + w^-(q))dt). \quad (2.1)$$

Après le développement $P(q, t + dt)$ à l'ordre 1 en dt

$$\frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = w^+(q-1)P(q-1, t) - w^+(q)P(q, t) + w^-(q+1)P(q+1, t) - w^-(q)P(q, t). \quad (2.2)$$

La variation de probabilité par unité de temps dans l'état q est égale au flux entrant moins le flux sortant. La même balance entre les flux pour une position de départ y quelconque se réécrit comme suit :

$$\frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = \sum_y w(q-y, y)P(q-y, t) - w(q, y)P(q, t). \quad (2.3)$$

Elle est dite équation maître et décrit l'évolution temporelle d'un système [8].

L'équation maître dans le cas continu s'écrit donc comme suit :

$$\frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t} = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \{W(q-y, y)\rho(q-y, t) - W(q, y)\rho(q, t)\} dy. \quad (2.4)$$

C'est une équation intégrale. Cependant, si la densité de probabilité $W(q, y)$ est bien centrée sur q , nous utilisons l'équation de Fokker-Planck.[9]

2.2.3 Equation de Chapman-Kolmogorov

En théorie des probabilités, et plus spécifiquement dans la théorie des processus stochastiques markoviens [8], l'équation de Chapman-Kolmogorov est une égalité qui met en relation les lois jointes de différents points de la trajectoire d'un processus stochastique. Cette équation a été mise en évidence indépendamment par le mathématicien britannique Sidney Chapman et le mathématicien russe Andreï Kolmogorov. L'équation de Chapman-Kolmogorov devient une relation entre les lois de transition lorsque le processus stochastique considéré est markovien, on suppose que

$$\rho(q_3, t_3; q_2, t_2; q_1, t_1) = \rho(q_1, t_1)W(q_3, t_3 | q_2, t_2)W(q_2, t_2 | q_1, t_1). \quad (2.5)$$

La densité de probabilité de transition $W(q, t; q', t')$ d'avoir une particule à une position q à l'instant t si elle était au point q' et à l'instant t' avec $t' \leq t$

$$W(q, t; q', t') = W(q, q'; t - t'). \quad (2.6)$$

et la transition de l'état initial $(q_0, 0)$ à un état quelconque (q, t) prend la valeur $\rho(q, t)$

$$W(q, q_0; t) \equiv \rho(q, t). \quad (2.7)$$

En intégrant l'équation (2.5) par rapport à q_2

$$\begin{aligned} \int dq_2 \rho(q_3, t_3; q_2, t_2; q_1, t_1) &= \rho(q_3, t_3; q_1, t_1) \\ &= \rho(q_1, t_1) \int dq_2 \rho(q_3, t_3 | q_2, t_2) W(q_2, t_2 | q_1, t_1). \\ &= \rho(q_1, t_1) W(q_3, t_3 | q_1, t_1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

En simplifiant par $\rho(q_1, t_1)$, l'équation de Chapman-Kolmogorov est ainsi obtenue

$$W(q_3, t_3 | q_1, t_1) = \int dq_2 W(q_3, t_3 | q_2, t_2) W(q_2, t_2 | q_1, t_1). \quad (2.9)$$

De même, pour la fonction de distribution

$$\rho(q_2, t_2; q_1, t_1) = \rho(q_1, t_1) W(q_2, t_2 | q_1, t_1). \quad (2.10)$$

Intégrée par rapport à q_1 , il est déduit

$$\rho(q_2, t_2) = \int dq_1 \rho(q_1, t_1) W(q_2, t_2 | q_1, t_1). \quad (2.11)$$

L'équation de Chapman-Kolmogorov traduit le fait que tout processus initié en (q_1, t_1) atteint l'état (q_3, t_3) en passant par un état quelconque (q_2, t_2) . L'intégration sur q_2 représente la somme de toutes les façons possibles pour atteindre q_3 au temps t_3 .

2.2.4 Equation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) déduite de l'équation

maîtresse :

L'équation FPK a été obtenue par Fokker (1914), Smolukhowski (1915), Einstein (1905), et Planck (1917). L'idée d'utiliser une équation dite cinétique est basée sur une simple description de la dynamique à la charge de la perte d'informations sur les trajectoires. Landau (1937) et Kolmogorov (1938) ont obtenu l'équation cinétique à l'aide d'un régime spécial et les conditions qui sont importantes pour la compréhension de certains principes de base de la cinétique. Dans la période allant de 1920 à 1930, N. Wiener a défini précisément les conditions sur w pour que les trajectoires stochastiques soient continues [10]. La fonction densité suivante

$$w(q; y, \Delta t), \quad (2.12)$$

représente la densité de probabilité de passage appelée aussi taux de transition de la position q à la position $q + y$ pendant un temps Δt . Pour la mesurer expérimentalement, la collection de N trajectoires passant par q au temps t et aboutissant à $[y, y + dy[$ au temps $t + \Delta t$ est possible. Soit l'équation maîtresse dans le cas où nos variables sont continues :

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{W(q-y, y)\rho(q-y, t) - W(q, y)\rho(q, t)\} dy. \quad (2.13)$$

Le terme entre crochets dans l'équation (2.13) est représenté par \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = W(q-y, y)\rho(q-y, t) - W(q, y)\rho(q, t). \quad (2.14)$$

\mathcal{R} peut être développé à l'ordre deux :

$$\mathcal{R} = \frac{\partial (W(q, y)\rho(q))}{\partial q} (-y) + \frac{\partial^2 (W(q, y)\rho(q))}{\partial q^2} \left(\frac{y^2}{2}\right) + \mathcal{O}(y^3). \quad (2.15)$$

Les fonctions $\mathcal{A}(q)$ et $\mathcal{B}(q)$ sont définies comme suit :

$$\mathcal{A}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} yW(q, y)dy. \quad (2.16)$$

Et

$$\mathcal{B}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2W(q, y)dy. \quad (2.17)$$

La fonction $\mathcal{A}(q)$ représente le saut moyen à partir de la position q et $\mathcal{B}(q)$ le deuxième moment des sauts à partir de q . Il est appelé coefficient de diffusion.

En négligeant les termes supérieurs dans (2.13) et en tenant compte de (2.16), (2.17), l'équation est la suivante :

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = \frac{\partial (\mathcal{A}(q)\rho(q,t))}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\mathcal{B}(q)\rho(q,t))}{\partial q^2}. \quad (2.18)$$

Celle-ci représente l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov directement déduite de l'équation maîtresse.

2.2.5 L'équation FPK selon Zaslavsky :

Dans les ouvrages de Zaslavsky[11] ,[12] l'équation FPK est retrouvée en utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov suivante :

$$W(q_3, t \mid q_1, t_1) = \int dq_2 W(q_3, t_3 \mid q_2, t_2) W(q_2, t_2 \mid q_1, t_1). \quad (2.19)$$

Pour $\Delta t = t - t'$ petit dans (2.6) :

$$W(q, q_0 | t + \Delta t) = W(q, q_0; t) + \Delta t \frac{\partial W(q, q_0; t)}{\partial t} + \dots, \quad (2.20)$$

où les termes d'ordre supérieur sont négligés. En réarrangeant les termes dans l'équation (2.20), l'existence de la limite suivante devient possible.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (W(q, q_0; t + \Delta t) - W(q, q_0; t)) = \frac{\partial W(q, q_0; t)}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Soit les sauts dans les temps suivants :

$$t_3 = t + \Delta t, t_1 = t, t_2 = t_3 - t_1 = \Delta t. \quad (2.22)$$

En tenant compte de (2.22) et de (2.6), l'équation (2.19) se réécrit comme suit :

$$W(q, q_0; t + \Delta t) = \int dy W(q, y; \Delta t) \rho(y, t). \quad (2.23)$$

A partir de (2.7) et (2.23), l'équation (2.21) s'obtient ainsi :

$$\frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int dy W(q, y; \Delta t) - \delta(q - y) \rho(y, t). \quad (2.24)$$

Pour des Δt petits

$$W(q, y; \Delta t) = \delta(q - y) + \mathcal{A}(y; \Delta t) \delta'(q - y) + \frac{1}{2} \mathcal{B}(y; \Delta t) \delta''(q - y). \quad (2.25)$$

$$\mathcal{A}(y; \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy (y - q) W(q, y; \Delta t) \equiv \langle\langle \Delta y \rangle\rangle \quad (2.26)$$

$$\mathcal{B}(y; \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (y - q) W(q, y; \Delta t) \equiv \langle\langle (\Delta y)^2 \rangle\rangle \quad (2.27)$$

le terme $W(q, y; \Delta t)$ doit satisfaire les conditions de normalisation

$$\int dx W(q, y; \Delta t) = 1 \quad (2.28)$$

$$\int dy W(q, y; \Delta t) = 1 \quad (2.29)$$

À partir des équations précédentes, on déduit

$$\mathcal{A}(y; \Delta t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{B}(y; \Delta t)}{\partial y} \quad (2.30)$$

avec

$$\langle\langle \Delta y \rangle\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \langle\langle (\Delta y)^2 \rangle\rangle \quad (2.31)$$

En s'assurant que les limites suivantes existent

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle\langle \Delta x \rangle\rangle \equiv \mathcal{A}(q) \quad (2.32)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle\langle (\Delta q)^2 \rangle\rangle \equiv \mathcal{B}(q) \quad (2.33)$$

L'équation de FPK est obtenue en substituant les équations (2.25), (2.27) et (2.31) dans (2.24)

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} (\mathcal{A}(q)\rho(q,t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} (\mathcal{B}(q)\rho(q,t)). \quad (2.34)$$

Elle peut être réécrite en tenant compte de (2.30) et (2.31)

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(D \frac{\partial \rho(q,t)}{\partial q} \right). \quad (2.35)$$

Le coefficient de diffusion est donné

$$D = \mathcal{B} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle\langle (\Delta q)^2 \rangle\rangle}{\Delta t}. \quad (2.36)$$

2.2.6 Les conflits rencontrés entre l'équation FPK et la dynamique

Kolmogorov pose des conditions en se rendant compte que dans (2.36) le coefficient de diffusion D , par conséquent, la vitesse v de la particule peut être infinie quand $\delta t \rightarrow 0$ ce qui est impossible car n'a aucun sens en physique. Un autre conflit réside dans le fait que l'équation FPK satisfaisant la condition initiale $P(q, 0) = \delta(q)$ et qu'à l'origine, pour n'importe quelle valeur de t , la particule a toujours une probabilité non nulle. Pour surmonter ce problème et utiliser l'équation FPK, Kolmogorov estime que nous devons abandonner le fait que $\Delta t \rightarrow 0$ et introduire plutôt un temps minimum $min\Delta t$.

2.3 Le transport normal

Il existe de nombreuses sources liées aux solutions de l'équation FPK (2.35) pour différentes conditions initiales et limites. Notre objectif ici est juste de mentionner quelques propriétés simples de l'équation FPK qui sont importantes pour l'avenir. Laissez-nous simplifier le cas compte tenu de $D = const$, $x \in (-\infty, +\infty)$, et le premier état d'une particule d'être à $q = 0$. La solution de l'équation de FPK

$$\frac{\partial \rho(q,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(D \frac{\partial \rho(q,t)}{\partial q} \right).$$

est alors :

$$\rho(q,t) = (2\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{q^2}{2Dt}\right). \quad (2.37)$$

qui est connue sous le nom d'une distribution gaussienne. Ses moments impairs sont nuls, le deuxième moment est :

$$\langle q^2 \rangle = Dt. \quad (2.38)$$

et les moments les plus élevés sont

$$\langle q^{2m} \rangle = D_m t^m \quad (m=1,2,\dots) \quad (2.39)$$

$D_m=1 = D$ et $D_m > 1$ peut être aisément exprimé à D , mais ils ne dépendent pas de t . Il y a une propriété :

- tous les moments de $\rho(q, t)$ sont finis à la suite de la décroissance exponentielle de ρ pour $q \rightarrow \infty$.

L'évolution des moments $\langle q^{2m} \rangle$ avec le temps sera appelé le transport. la dépendance de (2.37) et (2.38) sera appelé le **transport normal**.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait un petit passage sur le phénomène de transport et la diffusion. Et puis nous avons introduit l'équation maîtresse qui décrit l'évolution temporelle d'un système, cela a permis de déterminer l'équation FPK. La probabilité de transition doit également satisfaire l'équation de Chapman-Kolmogorov. Autrement dit, les informations sur un système quelconque peuvent être retrouvées grâce aux équations cinétiques. Après avoir introduit l'équation FPK, on a donné quelques propriétés simples de cette équation qui sont importantes pour décrire le transport normal [13].

Chapitre 3

Le transport anormal et l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov Fractionnaire (FFPK)

Introduction

Ce chapitre consiste en une approche spécifique de la description cinétique de la dynamique chaotique. L'équation dérivée s'appelle le fractionnaire équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FFPK) ou simplement FKE.[12,13] et on utilise cette équation pour décrire le transport anormal à l'aide d'évolution des moments avec un exposant qui caractérise le type de transport. A la fin nous présenterons quelques structures différentes qui apparaissent dans l'espace des phases.

3.1 Cinétique fractionnaire

L'origine de l'équation cinétique fractionnelle (FFPK), ou simplement fractionnelle la cinétique (FPK) est double. Premièrement, elle est basée sur l'existence de zones uniques dans l'espace de phase qui crée un ensemble de domaines collants. Nous pouvons cartographier la dynamique en considérant seulement des parties de trajectoires dans des domaines collants et en négligeant les parties de trajectoires de leur transition d'un domaine collant à un autre. Dans tel cas nous définissons ainsi un nouveau support de la partie réduite de l'espace de phase. Deuxièmement, le nouveau support basé sur un ensemble de domaines collants est constitué d'une structure fractale ou multifractale, d'une manière générale, dans le temps et dans l'espace de phase. Simultanément. Ces propriétés de dynamique nécessitent une nouvelle approche de la cinétique lorsque les caractéristiques d'échelle de la dynamique dominant les autres et, en outre, pas un modèle universel comme dans le cas des processus gaussiens, mais à la place, sont spécifiés par la topologie d'espace de phase et les caractéristiques correspondantes à des zones singulières.

3.2 Equation de Fokker-Planck-Kolmogorov Fractionnaire (FFPK)

La probabilité de transition $W(q, q_0; t + \Delta t)$ peut être reconsidérée dans le cas d'un espace-temps fractal avec une dimension α dans l'espace et $\bar{\beta}$ dans le temps. La limite considérée dans l'équation (2.21) est réécrite sous forme

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^{\bar{\beta}}} (W(q, q_0; t + \Delta t) - W(q, q_0; t)) = \frac{\partial^{\bar{\beta}} W(q, q_0; t)}{\partial t^{\bar{\beta}}} = \frac{\partial^{\bar{\beta}} \rho(q, t)}{\partial t^{\bar{\beta}}} \quad (0 < \bar{\beta} \leq 1, t \geq 0) \quad (3.1)$$

A présent, l'équation (3.1) peut être réécrite de la manière suivante

$$\frac{\partial^{\bar{\beta}} \rho(q, t)}{\partial t^{\bar{\beta}}} = - \frac{\partial^{\alpha}}{\partial (-q)^{\alpha}} (\mathcal{A}(q) \rho(q, t)) + \frac{\partial_{\alpha_1}}{\partial (-q)^{\alpha_1}} (\mathcal{B}(q) \rho(q, t)), 0 < \alpha < \alpha_1 \leq 2. \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) représente l'équation cinétique fractionnaire ou **FFPK**. Dans l'article [14], nous trouvons l'étude du transport fractionnaire.

Il peut être simplifié dans le cas $\alpha_1 = \alpha + 1$

$$\frac{\partial^{\bar{\beta}} \rho(q, t)}{\partial t^{\bar{\beta}}} = - \frac{\partial^{\alpha}}{\partial (-q)^{\alpha}} \left(\mathcal{B} \frac{\partial \rho(q, t)}{\partial q} \right). \quad (3.3)$$

qui transfère dans l'équation de diffusion régulière pour $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}D$.

D'après la dérivation fractionnaire de Riesz, le FFPK correspondant (3.2) prend la forme

$$\frac{\partial^\beta \rho(q,t)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^\alpha}{\partial |q|^\alpha} (\mathcal{A}\rho(q,t)) + \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial |q|^{\alpha_1}} (\mathcal{B}\rho(q,t)) \quad 0 < \alpha < \alpha_1 \leq 2 \quad (3.4)$$

Dans le cas où le terme avec \mathcal{B} peut être négligé, nous avons une version simplifiée de FFPK

$$\frac{\partial^\beta \rho(q,t)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^\alpha}{\partial |q|^\alpha} (\mathcal{A}\rho(q,t)). \quad (3.5)$$

Dans le cas $\beta = 1, \alpha = 2$ c'est une équation de **Transport normale**.

Pour $0 < \beta < 1, \alpha = 2$

$$\frac{\partial^\beta \rho(q,t)}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^2}{\partial q^2} (\mathcal{A}\rho(q,t)). \quad \beta < 1 \quad (3.6)$$

est appelée l'équation du mouvement brownien fractionnaire.

Les paramètres β, α, α_1 seront appelés les exposants critiques. Ils sont soumis à l'évaluation de la dynamique.

3.3 Evolution des moments (transport)

Soit $\rho(q,t)$ une solution pour le FFPK. Les moments sont

$$\langle |q|^\delta \rangle = \int dq |q|^\delta \rho(q,t). \quad (3.7)$$

les observables macroscopiques. Leur dépendance au temps définit le transport, c'est-à-dire l'évolution macroscopique du système.

Il est facile d'obtenir la dépendance temporelle de certains moments si $\mathcal{A} = const$ dans (3.5).

On multiplie l'équation par $|q|^\alpha$ et on intègre-le sur q . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\beta \langle |q|^\alpha \rangle}{\partial t^\beta} &= \mathcal{A} \int dq |q|^\alpha \frac{\partial \rho(q,t)}{\partial |q|^\alpha} \\ &= \mathcal{A} \int dq \rho(q,t) \frac{\partial^\alpha}{\partial |q|^\alpha} |q|^\alpha = \mathcal{A} \Gamma(1+\alpha). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Après intégration de (3.8) sur t^β , on obtient

$$\langle |q|^\alpha \rangle = \mathcal{A} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\beta)} t^\beta. \quad (3.9)$$

Pour le cas de la solution pour FFPK l'évolution des moments est donnée par

$$\langle |q| \rangle \sim t^{\beta/\alpha} = t^{\mu/2} \quad (3.10)$$

Pour le second moment,

$$\langle |q|^2 \rangle \sim t^\mu \quad (3.11)$$

où μ représente le coefficient de transport. Il est relié avec les autres coefficients par la relation suivante

$$\mu = \frac{2\beta}{\alpha} \quad (3.12)$$

Pour le transport **normal**, il devrait être $\mu = 1$.

Pour le cas
$$\mu = \frac{2\beta}{\alpha} > 1 \quad (3.13)$$

Et le cas

$$\mu = \frac{2\beta}{\alpha} < 1 \quad (3.14)$$

Sera appelé le transport **anormal**.

3.4 Le transport anormal

La diffusion anormale est connue depuis 1926[15]. Dans la théorie du transport, elle a été étudiée depuis les années 1960. Une approche alternative de la diffusion anormale est l'utilisation d'équations différentielles fractionnaires[16]. Cette approche semble bien adaptée pour tenir compte des effets de mémoire qui semblent s'observés dans de nombreux systèmes complexes. Pour décrire le transport anormal avec un champ de force extérieure, Metzler et Klafter [16] ont introduit à la suite de Zaslavsky[12],[17], une version fractionnaire de l'équation de Fokker-Planck (FFPK).

Il ya de nombreux phénomènes de diffusion qui présentent des anomalies, le transport dans ce cas est dit anormal. Pour se rendre compte de ce type de diffusions, la variance d'une expérience donnée est calculée. On déduit qu'elle n'évolue pas linéairement dans le temps.

$$\langle (q - q_0)^2 \rangle(t) = D_\mu t^\mu \quad (3.15)$$

Avec $\mu \neq 1$. Lorsque, pour $\mu < 1$, il s'agit d'une subdiffusion.

Et pour $\mu > 1$, c'est une superdiffusion.

Les processus dans ce cas sont décrits par une équation maîtresse

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(q, t) = \int dy \int_0^t dt' w(y, q; t-t') \rho(y, t'). \quad (3.16)$$

Sous certaines conditions, la diffusion **anormale** peut être décrite par l'équation **FFPK**[18]

$$\frac{\partial^{\bar{\nu}}}{\partial t^{\bar{\nu}}} \rho(q,t) = D_{\bar{\nu},\mu} \frac{\partial^{2\mu}}{\partial q^{2\mu}} \rho(q,t). \quad (3.17)$$

où $\bar{\nu}$ et μ sont des nombres réels, $D_{\bar{\nu},\mu}$ est le coefficient de diffusion. et les opérateurs différentiels dans les deux membres de l'équation (3.17) sont les opérateurs de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville. Pour $\bar{\nu} = \mu = 1$, l'équation de la diffusion **normale** est retrouvée. Dans cette approche, les dérivations ordinaires par rapport au temps et à l'espace dans l'équation (2.35) de la diffusion normale sont remplacées par des dérivations fractionnaires.

En effet, une dispersion plus rapide que prédite (superdiffusion) est observée par les modèles usuels alors que dans d'autres cas, elle peut être plus lente (subdiffusion). La première s'observe lorsque les déplacements des particules peuvent être anormalement grands. Ces déplacements appelés vols de Lévy, donnent lieu à une dynamique non gaussienne et une dispersion plus rapide. Dans le cas de la subdiffusion, les temps d'attente entre deux déplacements peuvent être anormalement longs. Cela donne lieu à une dynamique non markovienne et une dispersion plus lente.

3.5 Transport anormale dans un milieu poreux

La diffusion d'un scalaire passif (un colorant par exemple) convecté par un fluide dans un milieu poreux aléatoire a été étudiée [19]. La concentration du colorant dans une colonne poreuse est prise comme fonction du temps. Par exemple un lit de sphères où la porosité est irrégulière. L'équation utilisée est la suivante

$$\varepsilon \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^2}. \quad (3.18)$$

Avec $\varepsilon = \mathbf{S}_{vide}/\mathbf{S}_{total}$ où \mathbf{S}_{vide} représente la surface vide du fluide, \mathbf{S}_{total} est la surface totale et \mathcal{U} représente la concentration du fluide qui passe à travers un milieu poreux. Elle représente l'équation de la diffusion pour $\varepsilon = cste$. Dans le cas où $\varepsilon = \varepsilon(q) = \bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}(q)$, la concentration dans ce cas s'écrit :

$$\mathcal{U}(q,t) = \bar{\mathcal{U}}(q,t) + \tilde{\mathcal{U}}(q,t). \quad (3.19)$$

Avec $\bar{\mathcal{U}}(q,t) = \langle \mathcal{U}(q,t) \rangle$ représente la concentration moyenne et $\tilde{\mathcal{U}}(q,t)$ est la fluctuation correspondante avec $\langle \tilde{\mathcal{U}}(q,t) \rangle = 0$. L'équation (3.18) se met sous la forme d'une équation cinétique fractionnaire suivante

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial \langle \mathcal{U}(q,t) \rangle}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \langle \mathcal{U}(q,t) \rangle}{\partial q^2} + \frac{a_0^2}{4\tilde{\nu}\sqrt{\tilde{\varepsilon}D}} \frac{\partial^{3/2} \tilde{\varepsilon}}{\partial t^{3/2}}. \quad (3.20)$$

où a_0 est une constante et $\tilde{\nu}$ représente le nombre de saut. L'équation trouvée est différente de l'équation de la diffusion par un terme supplémentaire de diffusion temporelle : terme de dérivée fractionnaire en temps.

3.6 Conditions d'application de l'équation FFPK aux systèmes dynamiques complexes

Si nous voulons rester proches des applications spécifiques de l'équation FFPK aux systèmes dynamiques complexes, des restrictions liées à la nature physique et à l'origine de l'équation FFPK devrait être imposée. Laissez-nous faire quelques commentaires sur certaines contraintes.

En considérant un système physique, il est impératif de se plier aux exigences imposées par la nature elle même.

1- L'espace-temps doit être fini (q_{\min}, q_{\max}) , (t_{\min}, t_{\max}) pour pouvoir calculer des moments à valeurs finies.

2- La solution $P(q, t)$ est une probabilité, par conséquent, elle doit être positive :

$$0 \leq P(q, t) \leq 1. \quad (3.21)$$

3- Pour des fenêtres de l'espace-temps différentes, il existe de nombreux comportements asymptotiques.

4- L'évolution des moments définis des exposants caractéristiques bien précis.

5- La distribution $P(q, t)$ n'est pas seulement définie par les conditions initiales mais aussi par le type de dérivée utilisée dans FFPK.

3.7 Transport dans le modèle de standard map

Dans notre travail nous avons choisi d'utiliser la standard map pour tester une méthode permettant d'extraire facilement des exposants caractéristiques, conduisant ainsi a un meilleur diagnostic de la nature de transport [7,8 ,20].

On se limite à l'application préservant les aires dans l'espace des phases à deux dimensions, dépendant d'un seul paramètre non négatif k , le paramètre de stochasticité (ou de perturbation) qui sert à contrôler la dynamique. Pour des conditions initiales, c'est-à-dire pour i donné, la position et l'impulsion après n périodes sont données respectivement par $q_i(n)$ et $p_i(n)$. Ses propriétés seront illustrées par un cas spécifique bien connu sous le nom de : La Standard map. Elle est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} q_i(n+1) = q_i(n) + p_i(n). \\ p_i(n+1) = p_i(n) + k \sin q_i(n). \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour résoudre ces équations, pour différentes valeurs du paramètre de perturbation k , nous avons pris des conditions initiales aléatoires sur un cercle ou sur un carré choisis dans une zone chaotique pour éviter qu'il y ait un comportement balistique. Pour chaque condition initiale (q_0, p_0) , nous générons, en utilisant l'équation (3.22) le couple (q_i, p_i) . Nous avons ensuite tracé ces résultats pour des valeurs de : $k = 10$ (figure 3.1), $k = 1,5$ (figure 3.3).

Ces résultats sont exploités pour faire des analyses statistiques et étudier le transport.

3.8 Résultats et discussions

Pour étudier le transport, nous avons choisi comme observable la vitesse mono-axiale. Dans cette partie, nous donnerons les caractéristiques du transport du système (3.22) pour des temps différents dont les moments d'ordre q sont donnés comme suit

$$M_q(n) = \left\langle \left| v_{qi}(n) - \langle v_{qi}(n) \rangle \right|^q \right\rangle \sim t^{\mu(q)}. \quad (3.23)$$

où $v_{qi}(n)$ représente la vitesse de phase mono-axiale de la trajectoire. L'exposant du second ordre $\mu(2)$ caractérise le transport anormal et diffusif.

Nous donnerons les moyennes des vitesses sur des temps différents en considérant les systèmes pour des valeurs de k différentes : $k = 1, 5$ (voir figure 3.1) et $k = 10$ (voir figure 3.3). Les distributions des v_q sont données dans les figures (3.2) et (3.4) pour des moyennes sur des temps différents.

Pour $k=10$:

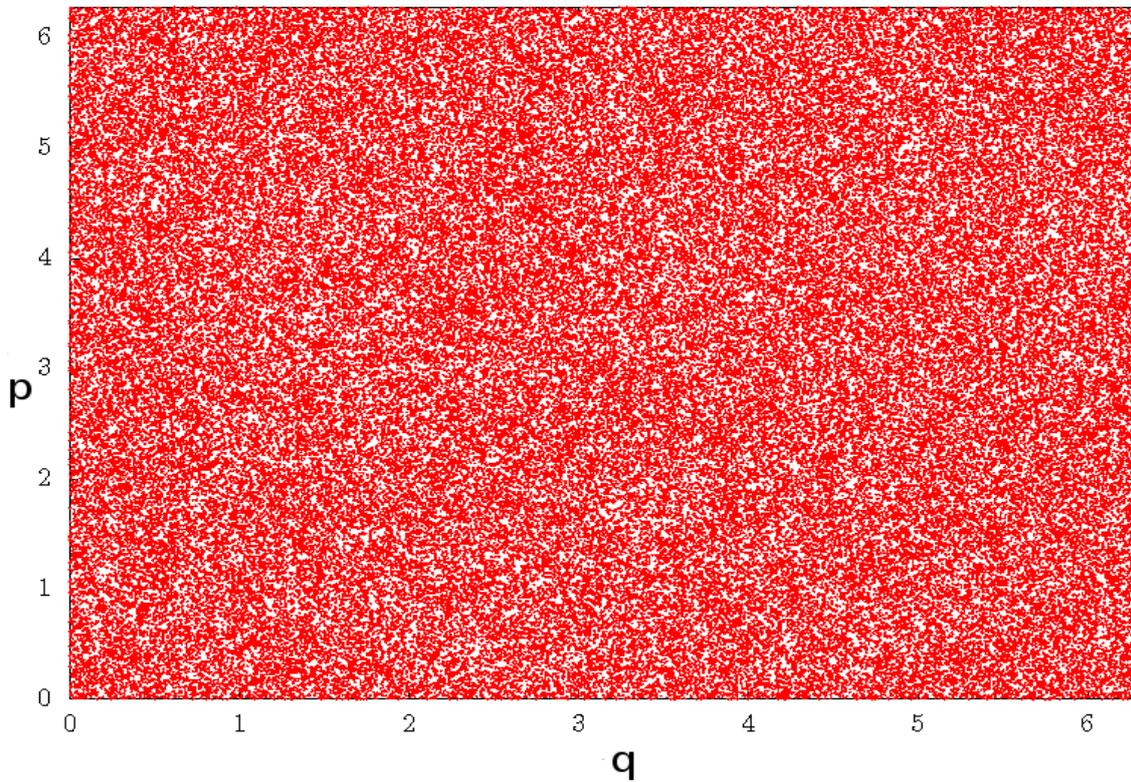


Figure 3.1: L'espace des phases pour $k = 10$.Transport Normal.

Nous observons un espace des phases chaotique.

Le transport est normal (diffusif) avec $\mu(2) = 1$ qui correspond à $k = 10$ figure (3.1).

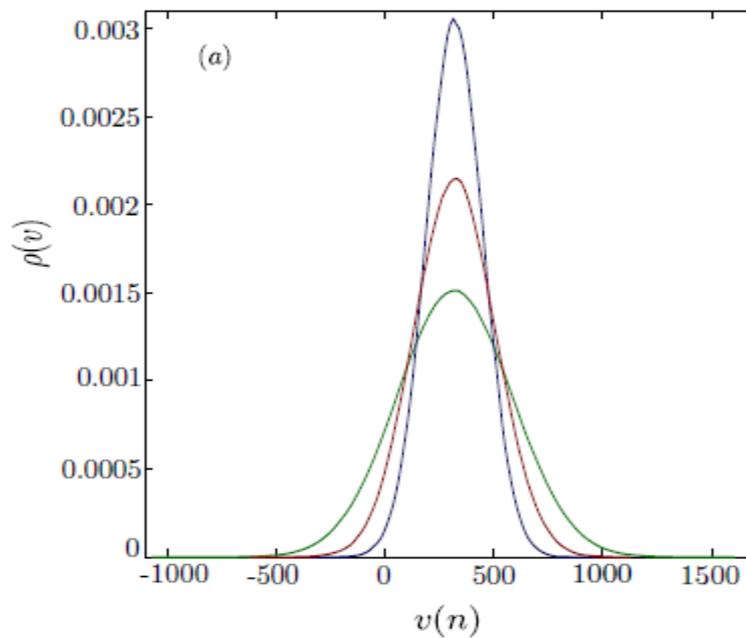


Figure 3.2 :Densités de probabilité des vitesses moyennes pour les cas : $k = 10$ figure (a) pour différents temps

Pour $k=1.5$:

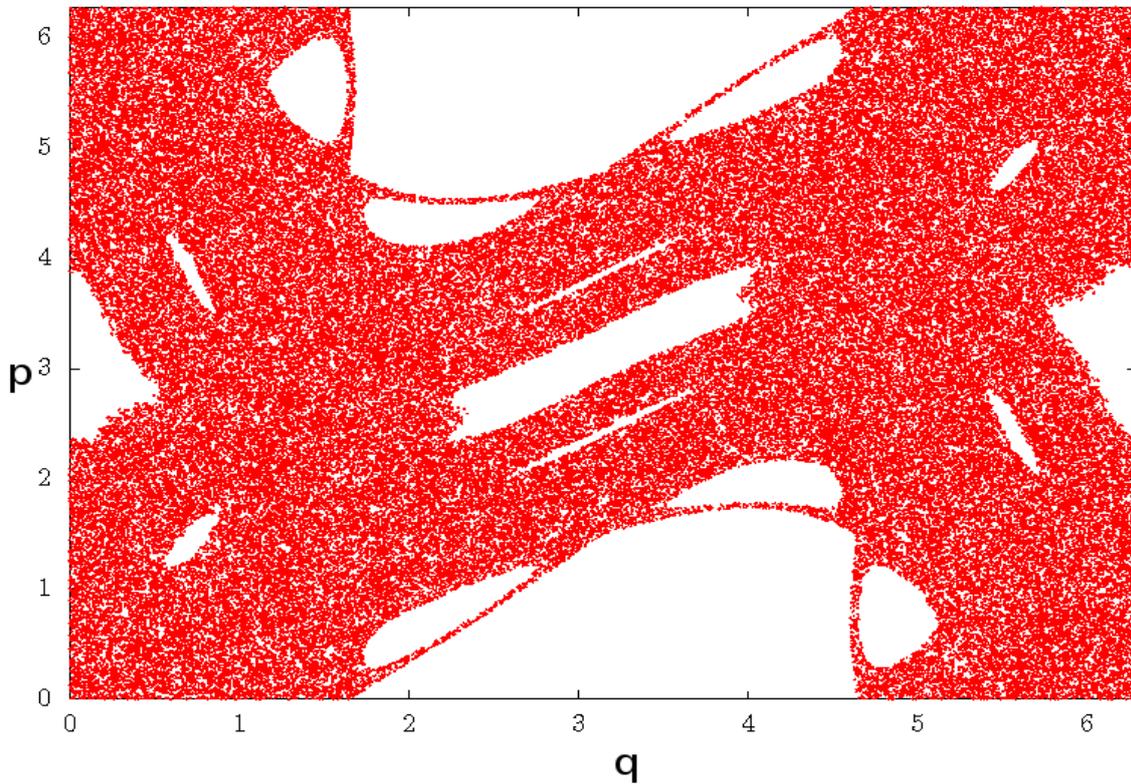


Figure 3.3 :L'espace des phases pour $k = 1,5$. Transport anormale.

Nous observons un espace des phases mixte et qu'il présente moins de zones chaotiques que dans la figure (3.1).

Le transport est anormal (superdiffusif) avec $\mu(2)>1$ qui correspond à $k = 1,5$ figure (3.3).

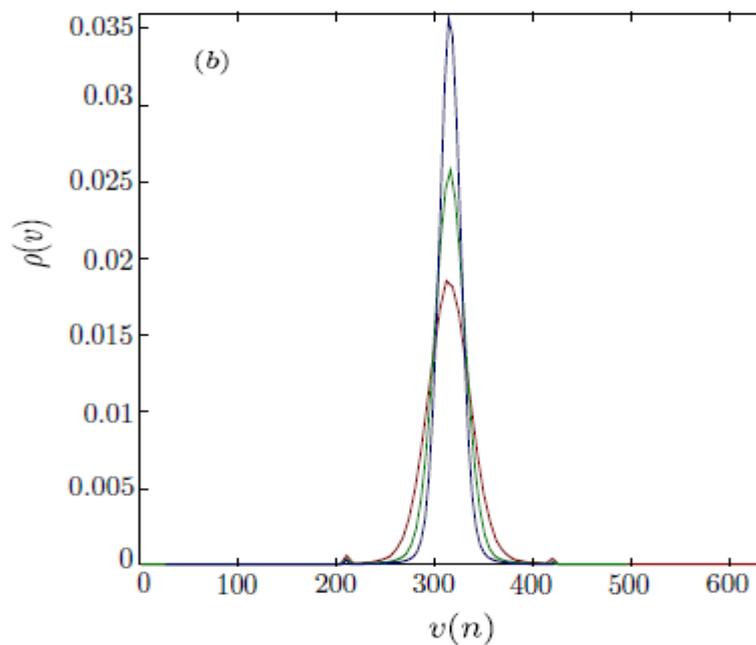


Figure 3.4 : Densités de probabilité des vitesses moyennes pour les cas : $k = 1,5$ figure (b) pour différents temps

Contrairement au cas (3.2) le cas (3.4) présente des pics secondaires. Dans le cas de fortes perturbations où ($k = 10$), le transport est normal, ou bien à la présence de pics secondaires ($k=1.5$), dans nos distributions des vitesses moyennes, là le transport est anormal.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'équation fractionnaire de Fokker-Planck-Kolmogorov FFPK. Celle-ci représente la généralisation de l'équation FPK. Ensuite on a trouvé l'évolution des moments définit des exposants caractéristiques bien précis traduisant ainsi soit le transport normal ou le transport anormal. Par la suite nous avons, plus précisément, étudiés le phénomène de transport anormale dans les systèmes complexes, par exemple les milieux poreux. Finalement, nous avons présentés quelques structures différentes qui apparaissent dans l'espace des phases a l'aide de la standard map.

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié le transport diffusif où nous avons discuté de la cinétique du système dynamique complexe. Pour bien comprendre cette cinétique, nous avons étudié de près les équations FPK et FFPK. Après avoir introduit l'équation maitresse qui décrit l'évolution temporelle d'un système, cela a permis de déterminer l'équation FPK. Cette dernière est une équation différentielle linéaire que la densité de probabilité de transition d'un processus markovien doit satisfaire. .Autrement dit, le processus peut être vu comme une diffusion normale en présence éventuellement de forces extérieures. La probabilité de transition doit également satisfaire l'équation de Chapman-Kolmogorov. en d'autres termes, les informations sur un système quelconque peuvent être retrouvées grâce aux équations cinétiques.

Le type et la structure de l'équation cinétique adéquate dépendent du choix de l'espace considéré et du processus aléatoire qu'il soit ou non markovien. En effet, le lien entre une description géométrique fractale ou multifractale et une description statistique, en utilisant les moments, laissent apparaitre, sous certaines conditions, l'équation FFPK. Celle-ci représente la généralisation de l'équation FPK. Par la suite, l'évolution des moments définit des exposants caractéristiques bien précis traduisant ainsi soit la diffusion, la superdiffusion ou la subdiffusion. Finalement, nous avons présenté quelques structures différentes qui apparaissent dans l'espace des phases à l'aide de la standard map. Cette présentation cinétique conduit soit à une statistique gaussienne dans le cas de fortes perturbations où $k=10$, le transport est normal, ou bien dans le cas de faibles perturbations où $k=1.5$, le transport est anormal.

Références bibliographiques

- [1] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Ency. Math, Camb. Univ. Press, 1995.
- [2] A. Papoulis, probability, Random variables, and Stochastic processes, McGraw-Hill, New York, (1991).
- [3] Introduction aux équations différentielles stochastiques , Nils Berglund , Janvier 2005.
- [4] A. A. Kilbas, H.M. Srisvastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, North-Holland, 2006. (Cité pages 12 et 14.)
- [5] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley Sons, Inc., New York, 1993.
- [6] Ainouz B , Ourrad Meziani O , Le transport anormal dans les systèmes hamiltoniens , Mémoire de magister , Université A.MIRA de Béjaia, 2012
- [7] Kebbab Y, Ourrad Meziani O. Etude du chaos des systèmes hamiltoniens par la standard map, Mémoire de magister, Université de Bejaia ; 2010.
- [8] Lydia Bouchara, phénomènes de collage et transport dans les systèmes hamitoliens, Thèse de Doctorat, Université A.MIRA de Béjaia, 2016
- [9] Risken H. The Fokker Planck equation, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg ; 1989.
- [10] Wiener N. Generalized harmonic analysis, Acta mathematica, Springer ; 1930.
- [11] Zaslavsky GM. The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems, Imperial College Press ; 2007.
- [12] Zaslavsky GM. Hamiltonian chaos and fractional dynamics, Oxford University Press ; 2005.
- [13] G. M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. Phys. Rep., 371 :641, 2002.
- [14] Leoncini X, Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Evidence of fractional transport in point vortex flow, Chaos, Solitons and Fract 2004 ;19 :259-273.
- [15] L.F. Richardson. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 110(756) :709–737, 1926.

- [16] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339(1) :1–77, 2000.
- [17] GM Zaslavsky, M. Edelman, and BA Niyazov. Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of hamiltonian chaotic dynamics. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(1) :159–181, 1997.
- [18] Escande DF, Sattin F. When can Fokker-Plank equation describe anomalous or chaotic transport ?, *Phys Rev Lett* 2007 ;99 :185005.
- [19] Ourrad O, Erochenkova G, Lima R. Mean value and fluctuations in a model of diffusion in porous media, *Chaos* 2006 ;16 :033128.
- [20] LydiaBouchara ,OuerdiaOurrad ,SandroVaienti,XavierLeoncini , Anomalous transport and observable average in the standard map