

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes

Département de PHYSIQUE

**Mémoire de Master**

**Spécialité: Dynamique des fluides et énergétique**

Thème

***Instabilités tridimensionnelles de deux couches de fluide  
s'écoulant dans un cylindre vertical***

Présenté par

**MEDDOUR Félicia**

**BORDJIHANE Nadjat**

Soutenu le: 15/10/2020

Devant le Jury composé de:

DJEMA	Amar	MCB	Président
DJESSAS	Houria	MAA	Examinatrice
MEHIDI BOUAM	Nadia	MCA	Rapporteur

Année universitaire 2019/2020

## Table des matières

Table des matières.....	2
Dédicaces.....	3
Remerciements .....	4
Liste des symboles.....	5
Introduction générale.....	7

### Chapitre I Les équations gouvernantes et écoulement de base

<b>Introduction</b> .....	10
<b>I .1.</b> Formulation mathématique du problème.....	10
<b>I .2.</b> Etablissement des équations de mouvement .....	11
<b>I .3.</b> Conditions aux limites .....	13
<b>I .3.1.</b> Condition d'adhérence à la paroi du cylindre.....	13
<b>I .3.2.</b> Conditions à l'interface fluide-fluide .....	13
<b>I .3.2.1.</b> Condition cinématique .....	14
<b>I .3.2.2</b> Condition dynamique .....	15
<b>I .3.2.2.1.</b> La continuité des contraintes tangentielles.....	15
<b>I .3.2.2.2.</b> Condition sur les contraintes normales à l'interface .....	16
<b>I .3.2.3</b> Condition sur la continuité des vitesses .....	16
<b>I .4.</b> Ecoulement de base .....	17
<b>Conclusion</b> .....	18

### Chapitre II Equations linéarisées et adimensionnement

<b>Introduction</b> .....	19
<b>II .1.</b> Equations linéarisées .....	19
<b>II .2.</b> L'adimensionnalisation .....	21
<b>II .3.</b> L'objectif de la mise sous forme adimensionnelle des équations .....	22
<b>II .4.</b> Les nombres adimensionnels.....	25
<b>II .5.</b> Modes normaux.....	26
<b>Conclusion</b> .....	28

## **Chapitre III Instabilité aux grandes ondes de l'écoulement annulaire axisymétrique**

<b>Introduction</b> .....	29
<b>III .1. Théorème de Squire</b> .....	29
<b>III .2. Equations approchées</b> .....	30
<b>III .3. Relation de dispersion</b> .....	32
<b>III .3.1. Influence de la viscosité des fluides</b> .....	33
<b>III .3.2. Influence de l'épaisseur des fluides</b> .....	34
<b>III .3.3. Influence de la tension superficielle</b> .....	35
<b>Conclusion</b> .....	36
<b>Conclusion générale</b> .....	37
<b>Bibliographie</b> .....	38
<b>Résumé</b> .....	39

## *Dédicaces*

*Nous dédions ce travail à :*

*Nos très chers parents*

*Nos frères et sœurs*

*Nos proches*

*Et nos amis(es)*

*A vous*

*MADJER*

*Et*

*FADHÈL*

## *Remerciements*

*Nous exprimons nos sincères remerciements et notre profonde gratitude à madame MEHIDI Nadia, pour avoir accepté de diriger ce travail et pour avoir bien voulu nous consacrer son temps.*

*Nos remerciements vont aussi aux membres de jury d'avoir pris le temps d'examiner notre travail.*

*Comme nous tenons aussi à remercier toutes et tous ceux qui nous ont aidé (es) de près ou de loin à réaliser ce modeste travail.*

## Liste des symboles

Célérité de l'onde de surface [ $m \cdot s^{-1}$ ]	.....	$c$
Dérivée particulaire	.....	$\frac{D}{Dt}$
Accélération de la pesanteur [ $m \cdot s^{-2}$ ]	.....	$\mathbf{g}$
Épaisseur du fluide ou interface [ $m$ ]	.....	$h(\theta, x, t)$
Nombre d'onde [ $m$ ]	.....	$k$
Vecteur normal à la surface libre	.....	$\mathbf{n}$
Tenseur des contraintes	.....	$\bar{\bar{T}}$
Tenseur unité	.....	$\bar{\bar{I}}$
Tenseur de taux de déformation	.....	$\bar{\bar{D}}$
La courbure de l'interface	.....	$K$
Pression [ $P$ ]	.....	$p$
Temps [ $s$ ]	.....	$t$
Dérivée partielle par rapport au temps(t)	.....	$\partial_t$
Dérivée partielle par rapport à (x)	.....	$\partial_x$
Dérivée partielle par rapport à (r)	.....	$\partial_r$
Dérivée partielle par rapport à ( $\theta$ )	.....	$\partial_\theta$
Deuxième Dérivée par rapport à (x)	.....	$\partial_{xx}$
Deuxième Dérivée par rapport à (r)	.....	$\partial_{rr}$
Deuxième Dérivée par rapport à ( $\theta$ )	.....	$\partial_{\theta\theta}$
Vecteur tangent	.....	$\mathbf{t}_k$
Vitesse du fluide [ $m \cdot s^{-1}$ ]	.....	$\mathbf{U}_k$
Vitesse de l'écoulement de base [ $m \cdot s^{-1}$ ]	.....	$\mathbf{W}_k$
Composantes du vecteur vitesse [ $m \cdot s^{-1}$ ]	.....	$(u_k, v_k, w_k)$
Coordonnée axiale [ $m$ ]	.....	$x$
Coordonnée radial [ $m$ ]	.....	$r$

Coordonnée azimutal .....	$\theta$
Masse volumique [ $kg \cdot m^{-3}$ ].....	$\rho$
Viscosité dynamique [ $Pa \cdot s$ ].....	$\mu$
Tenseur des contraintes visqueuses .....	$\tau$
Tension de surface [ $N \cdot m^{-1}$ ].....	$\sigma$
Taux d'amplification [ $s^{-1}$ ].....	$\omega$
Longueur d'onde [ $L$ ].....	$\lambda$
Paramètre onde longue.....	$\varepsilon$
Operateur Divergence.....	$\nabla$
Operateur Gradient.....	$\overrightarrow{grad}$
Operateur Laplacien.....	$\Delta$

- **Nombres sans dimensions**

Nombre de Reynolds.....	$R_e$
Nombre de Weber.....	$W_e$
Rapport des viscosités.....	$\mu$
Rapport des épaisseurs.....	$d$
Rapport des masses volumiques.....	$\rho$

Les écoulements multicouches sont le siège d'instabilités aux interfaces. Les études théoriques et expérimentales sur le comportement de l'interface entre deux fluides visqueux en écoulement laminaire montrent qu'il existe deux types d'instabilités qui se manifestent par l'apparition d'ondes de surface:

Le premier type d'instabilité est un mode de cisaillement obtenu pour un nombre d'onde  $k$  fini (ondes de Tollmien Schlichting) et de grands nombres de Reynolds  $Re$ . Ce mode possède des taux d'amplification  $\omega$  très fort et la déstabilisation de ce mode peut conduire à la transition vers la turbulence de l'écoulement.

Le deuxième mode d'instabilité est un mode d'interface avec un faible taux d'amplification, il se déstabilise pour un nombre d'onde  $k$  nul et à de faibles nombres de Reynolds. Sa déstabilisation à un faible taux d'amplification permet de prévoir l'existence d'ondes d'amplitudes finies (qui ne conduisent pas vers la turbulence de l'écoulement).

Les principaux types d'écoulement qui ont été largement étudiés sont les écoulements des films liquides tombants sur un plan incliné avec surface libre ou avec interface. Ils ont été l'objet d'un très grand nombre d'investigations, à travers lesquelles, il a été proposé différentes approches : analytiques, numériques et expérimentales.

L'étude de ces films liquides est toujours d'actualité, on les rencontre dans la nature et dans divers domaines de l'ingénierie à savoir : le revêtement, lubrification, refroidissement, les évaporateurs, les procédés d'enductions ...etc.

Les films liquides tombants ont été étudiés par de nombreux chercheurs, à titre d'exemple : Kapitza et Kapitza (1894,1984) [8] qui ont attiré leur attention par l'expérience sur la dynamique non linéaire à faible nombre de Reynolds. Les premières études de stabilité concernant l'écoulement de film mince de fluide newtonien à une couche s'écoulant sur un plan incliné ont été menées par Benjamin (1957)[10] et Yih (1963)[4], leurs études ont permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité, et d'autres travaux dans le domaine ont été réalisés par Benney en (1966)[5] grâce à des développements asymptotiques aux grandes ondes.

Pour comprendre l'effet de la tension superficielle sur l'apparition des instabilités, Hooper[6] et Boyd ont effectué une étude asymptotique aux petites longueurs d'ondes en considérant un écoulement de Couette infini.

Pour le cas d'écoulements en conduite cylindrique, on peut citer les travaux de Hickox[3], ainsi que ceux de Preziosi et al [7].

En effet, Hickox a examiné la stabilité de l'interface dans le cas d'écoulements stratifiés axisymétriques, concentriques. Dans cette étude seule la configuration où le fluide à cœur est moins visqueux que le fluide pariétal  $\mu > 1$  a été pris en compte. Il a traité le problème aux perturbations aux ondes longues, en négligeant la tension superficielle. L'instabilité mise en évidence par Hickox correspond donc à celle donnée par Yih. Comme dans l'étude de Yih, c'est la différence de viscosité qui contrôle la stabilité de l'interface.

Preziosi et al [7] se sont intéressés au cas d'un fluide visqueux (de l'huile) entouré par un fluide moins visqueux (de l'eau) en faible épaisseur s'écoulant dans une conduite circulaire. Ils montrent qu'aux ondes longues, il existe un nombre de Reynolds critique pour lequel l'instabilité due à la tension superficielle est totalement éliminée. Quant aux ondes courtes, ils montrent qu'il existe aussi un nombre de Reynolds au-delà duquel l'écoulement se transforme en émulsion. Ces ondes courtes entraînent la formation de gouttes d'un fluide dans l'autre fluide.

Dans cette présente étude nous allons nous focaliser sur la stabilité de l'interface de deux couches de fluides dans une conduite cylindrique verticale suivant la démarche des films liquides tombant. Nous avons adopté la théorie de la stabilité linéaire.

Ainsi, notre recherche aura pour titre « Instabilités tridimensionnelles de deux couches de fluides s'écoulant dans un cylindre vertical » et qui se subdivise en trois chapitres :

- Le premier chapitre qui s'intitule « Les équations gouvernantes et écoulement de base », est consacré à établir les lois qui gouvernent l'évolution de grandeurs qui permettent de décrire le mouvement de deux couches de fluides visqueux s'écoulant à l'intérieur d'une conduite cylindrique et de déterminer l'écoulement de base (non perturbé) correspondant à un écoulement laminaire complètement développé.
- Le deuxième chapitre, libellé « Equations linéarisées et adimensionnement », consiste à linéariser les équations obtenues dans le chapitre précédent. ceci a permis de simplifier les termes non linéaires dans les équations puis les écrire sous forme adimensionnelle. Par la suite, on cherchera les solutions des équations linéarisées qui sont sous forme de modes normaux.

- « Instabilité aux grandes ondes de l'écoulement annulaire axisymétrique » est le titre du troisième chapitre nous avons décrit brièvement la méthode de résolution du problème et donner les résultats obtenus.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale.

## Introduction

Dans ce chapitre qui s'intitule «les équations gouvernantes et écoulement de base », nous allons commencer par établir les lois qui gouvernent l'évolution de grandeurs qui permettent de décrire le mouvement de deux couches de fluides visqueux s'écoulant à l'intérieur d'une conduite cylindrique. Ces lois sont appelées lois de conservation en mécanique des milieux continus, et sont données par :

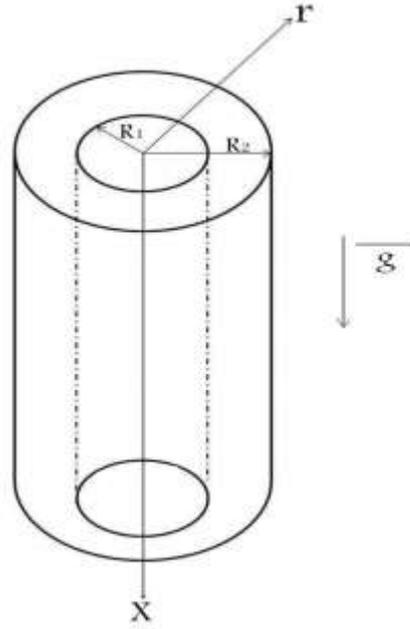
- La loi de conservation de la masse
- La relation fondamentale de la dynamique : conservation de la quantité de mouvement.

On termine par une description de l'écoulement de base correspondant à un écoulement laminaire complètement développé.

### I.1. Formulation mathématique du problème

On considère l'écoulement annulaire de deux couches de fluides concentriques à l'intérieur d'un cylindre vertical de rayon  $R_2$ . L'épaisseur de la couche interne est notée  $R_1$  et celle de la couche pariétale est  $R_2 - R_1$ . Les deux fluides de viscosités et de masses volumiques différentes sont newtoniens, incompressibles et non miscibles. Le premier fluide de viscosité  $\mu_1$  et de masse volumique  $\rho_1$  occupe la région située en  $0 \leq r \leq h(\theta, x, t)$  et le second de viscosité  $\mu_2$  et de masse volumique  $\rho_2$  s'écoule dans la région située en  $h(\theta, x, t) \leq r \leq R_2$ . L'écoulement est contrôlé par la gravité avec  $h(\theta, x, t) = R_1$ . Notons que la tension superficielle  $\sigma$  est prise en considération à travers le saut de la contrainte normale à l'interface entre les deux fluides.

L'écoulement de base est supposé isotherme, stationnaire et parallèle à l'axe des  $x$ . cet écoulement est représenté sur la figure 1, décrit par un système de coordonnées cylindriques.



**Figure 1 : Géométrie de l'écoulement**

## I.2. Etablissement des équations de mouvement

L'étude de l'évolution de cet écoulement est gouvernée par les équations suivantes qui sont :

- ✓ Conservation de la masse, appelée aussi équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_k = 0 \quad (\text{I.1})$$

- ✓ Conservation de la quantité de mouvement, appelée aussi équations de Navier Stokes

$$\rho_k \left[ \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial t} + (\mathbf{U}_k \cdot \nabla) \mathbf{U}_k \right] = -\nabla p_k + \nabla \bar{\tau}_k + \rho_k g \mathbf{e}_x \quad (\text{I.2})$$

Avec  $k = 1, 2$ .

Le vecteur vitesse dans chaque couche est écrit sous la forme  $\mathbf{U}_k = u_k \mathbf{e}_r + v_k \mathbf{e}_\theta + w_k \mathbf{e}_x$ , où  $u_k, v_k$  et  $w_k$  sont les composantes de la vitesse  $\mathbf{U}_k$  suivant les directions radiale, azimutale et axiale.

$\nabla$  Représente l'opérateur de divergence en coordonnées cylindriques appliqué au vecteur vitesse  $\mathbf{U}$  et au tenseur des contraintes visqueuses  $\bar{\tau}$ .

Dans le cas d'un écoulement axisymétrique il existe une symétrie de révolution, et les équations de conservation décrites précédemment et les conditions aux limites associées doivent être exprimées dans le repère de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  avec indépendance des variables par rapport à la coordonnée azimutale  $\theta$ .

Dans tout ce qui suit, l'écoulement et les perturbations de l'écoulement de base sont considérées tridimensionnelles. Il est donc nécessaire de prendre en considération la variation des grandeurs telles que la vitesse et la pression de la coordonnée azimutale  $\theta$ , soit  $\mathbf{U}_k(r, \theta, x)$  et  $p(r, \theta, x)$  dans chaque couche de fluide.

Le but de notre étude est de regarder dans le cas d'une configuration d'écoulement annulaire, si une étude 2D suffit à caractériser la stabilité du problème.

D'un point de vue théorique, Squire (1933) est le premier à proposer une analogie entre les perturbations tridimensionnelles et les perturbations bidimensionnelles. Il a montré dans le cas d'un écoulement de Poiseuille de fluide Newtonien entre deux plaques planes horizontales, qu'en vue d'étudier des instabilités 3D, une simple étude 2D suffisait.

On développe les équations de mouvement en coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r u_k) + \frac{1}{r} \partial_\theta v_k + \partial_x w_k = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\rho_k \left( \partial_t u_k + u_k \partial_r u_k + \frac{v_k}{r} \partial_\theta u_k + w_k \partial_x u_k - \frac{v_k^2}{r} \right) = -\partial_r p_k + \mu_k \left( \nabla^2 u_k - \frac{u_k}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_k \right) \quad (\text{I.4})$$

$$\rho_k \left( \partial_t v_k + u_k \partial_r v_k + \frac{v_k}{r} \partial_\theta v_k + w_k \partial_x v_k + \frac{u_k v_k}{r} \right) = \frac{1}{r} \partial_\theta p_k + \mu_k \left( \nabla^2 v_k + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_k - \frac{v_k}{r^2} \right) \quad (\text{I.5})$$

$$\rho_k \left( \partial_t w_k + u_k \partial_r w_k + \frac{1}{r} v_k \partial_\theta w_k + w_k \partial_x w_k \right) = -\partial_x p_k + \rho_k g + \mu_k (\nabla^2 w_k) \quad (\text{I.6})$$

Où  $\partial$  désigne la dérivée partielle par rapport aux temps et aux coordonnées  $r, \theta$  et  $x$  et  $\nabla^2 = \Delta$  l'opérateur Laplacien.

Aux équations (I.3-I.6) il faut adjoindre les conditions aux limites.

### I.3. Conditions aux limites

Les équations de Navier-Stokes fournissent un ensemble d'équations différentielles auquel il convient d'adjoindre les conditions aux limites adéquates. Ces conditions sont :

#### I.3.1. Condition d'adhérence à la paroi du cylindre

Sur une paroi la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la paroi, en particulier la vitesse est nulle pour une paroi immobile.

Donc la vitesse du fluide  $\mathbf{U}_2$  à la paroi est nulle,

$$\mathbf{U}_2 = 0 \quad \text{en } r = R_2 \quad (\text{I.7})$$

#### I.3.2. Conditions à l'interface fluide-fluide

Les conditions à l'interface sont de deux types : une condition sur les contraintes appelées également conditions dynamiques et une condition cinématique qui traduit l'imperméabilité de l'interface. On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers cette interface ni de gradient de concentration.

Avant de détailler ces différentes conditions à l'interface, il est indispensable de définir les vecteurs unitaires tangents  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  et la normale extérieure à l'interface  $\mathbf{n}$ . L'interface est définie géométriquement par une courbe dont l'équation est :

$$f(x, r, \theta, t) = r - h(\theta, x, t)$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  est par définition donné l'expression suivante :

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}f}}{|\overrightarrow{\text{grad}f}|}$$

On obtient :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}h_\theta\right)^2 + (h_x)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{r}h_\theta \\ -h_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_x)^2}} \begin{pmatrix} h_x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}h_\theta\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{r}h_\theta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \partial_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{e}_\theta + \partial_x \mathbf{e}_x$$

### I.3.2.1 Condition cinématique

Condition cinématique dite aussi équation de non miscibilité reflète le fait que les limites du fluide sont imperméables. L'interface se déplace à la même vitesse que les éléments de fluide placés à son contact.

D'où :

$$f(x, r, \theta, t) = r - h(\theta, x, t) = 0$$

La dérivée matérielle s'annule :  $\frac{Df}{Dt} = 0$ .

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{U}_k \cdot \nabla$$

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u_k \partial_r + \frac{1}{r} v_k \partial_\theta + w_k \partial_x$$

Alors :

$$u_k = h_t + \frac{1}{r} v_k h_\theta + w_k h_x \tag{I.8}$$

Cette condition traduit l'absence de transfert de masse à l'interface.

### I.3.2.2 Condition dynamique

Dans le cas le plus simple la pression  $p$  sur une surface libre est égale à la pression atmosphérique, mais en réalité les contraintes de pression et de viscosité mises en jeu décrivent la continuité des contraintes tangentielles d'une part et le saut subi par les contraintes normales d'autre part.

**I.3.2.2.1. La continuité des contraintes tangentielles** s'écrit comme suit :

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (I.9)$$

$$\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (I.10)$$

Avec  $\mathbf{T}_k$  le tenseur des contraintes dans chaque fluide :

$$\bar{\mathbf{T}} = -p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\tau}}$$

Ou :

$\bar{\mathbf{I}}$  Le tenseur unité

$\bar{\mathbf{T}}$  Le tenseur des contraintes

$\bar{\boldsymbol{\tau}}$  Le tenseur des contraintes visqueuses

Pour un fluide newtonien le tenseur des contraintes visqueuses est de la forme qui suit :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\bar{\mathbf{D}}$$

Avec  $\bar{\mathbf{D}}$  le tenseurs de taux de déformation qui a l'expression suivante

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{U} + (\overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{U})^T)$$

On développe le tenseur des contraintes visqueuses en coordonnées cylindriques, on obtient le résultat suivant :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rx} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta x} \\ \tau_{xr} & \tau_{x\theta} & \tau_{xx} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\tau_{rr} = 2\mu u_r$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu\left(\frac{1}{r}v_\theta + \frac{u}{r}\right)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu w_x$$

$$\tau_{rx} = \tau_{xr} = \mu(w_r + u_x)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left(\frac{1}{r}(u_\theta - v) + v_r\right)$$

$$\tau_{x\theta} = \tau_{\theta x} = \mu\left(v_x + \frac{1}{r}w_\theta\right)$$

### I.3.2.2.2. Condition sur les contraintes normales à l'interface

A l'interface, il existe une différence de pression entre les deux fluides à cause de la présence de la tension superficielle

Les contraintes normales obéissent à la relation suivante :

$$n \cdot T_1 \cdot n - n \cdot T_2 \cdot n = \sigma K \quad (\text{I. 11})$$

Soit  $K = -\text{div}n$

$$K = \frac{1 - h_{\theta\theta} - h_{xx}}{r\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}h_\theta\right)^2 + (h_x)^2}} + \frac{h_\theta^2 + h_\theta^2 h_{\theta\theta} + h_x^2 h_{xx}}{r^3\left(1 + \left(\frac{1}{r}h_\theta\right)^2 + (h_x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

### I.3.2.3. Condition sur la continuité des vitesses

Le vecteur vitesse est continu à la traversée de l'interface, cette condition est imposée par la viscosité de l'écoulement.

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 \quad (\text{I. 12})$$

## I.4. Ecoulement de base

Afin de calculer la solution à l'équilibre considérant les hypothèses suivantes,

Lorsque l'écoulement est stationnaire et uniforme  $h(\theta, x, t) = R_i$  la vitesse de l'écoulement se réduit à la composante axiale, qui est fonction uniquement de la composante radiale  $r$ . Un régime permanent uniforme est établi où il y a équilibre entre forces visqueuses et force motrice qui est représentée par la gravité.

On pose ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0, u = v = 0$ ).

Les équations de Navier Stokes se réduisent alors en :

### Fluide 1

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$-\rho_1 g = \mu_1 (w_{1rr} + \frac{1}{r} w_{1r}) \quad (\text{I.14})$$

### Fluide 2

$$\frac{\partial p_2}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$-\rho_2 g = \mu_2 (w_{2rr} + \frac{1}{r} w_{2r}) \quad (\text{I.16})$$

Les équations (I.13) et (I.15) montrent que la pression ne dépend pas de  $r$ .

les solutions auront les expressions suivantes :

$$0 \leq r \leq R_1 \quad W_1(r) = \frac{-\rho_1 g}{4\mu_1} r^2 + \frac{\rho_2 g}{4\mu_2} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_1^2}{2\mu_2} g (\rho_2 - \rho_1) \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\rho_1 g}{4\mu_1} R_1^2 \quad (\text{I.17})$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 \quad W_2(r) = \frac{-\rho_2 g}{4\mu_2} r^2 + g \frac{R_1^2}{2\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) \ln r - \frac{\rho_2 g}{4\mu_2} R_2^2 - g \frac{R_1^2}{2\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) \ln R_2 \quad (\text{I.18})$$

La vitesse le long de l'axe de symétrie est donnée par :

$$W_1(0) = \frac{\rho_2 g}{4\mu_2} (R_2^2 - R_1^2) + g \frac{R_1^2}{2\mu_1} (\rho_2 - \rho_1) \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\rho_1 g}{4\mu_1} R_1^2 \quad (\text{I.19})$$

$$W_i(0) = \rho_1 g \frac{R_1^2}{4\mu_2} \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right) + 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right\}$$

$$W_i(0) = \rho_1 g \frac{R_1^2}{4\mu_2} [\mu - \rho(1 - d^2) + 2\mu(1 - \rho) \ln d] \quad (I.20)$$

Cette solution met en évidence deux échelles caractéristiques du problème étudié, qui sont l'épaisseur  $R_1$  du fluide 1 et la vitesse  $W_1(0)$  du fluide 1. On obtient :

$$W_1(r^*) = \frac{w_1(r)}{w_1(0)} = \alpha_1 r^{*2} + b_1 \quad (I.21)$$

$$W_2(r^*) = \frac{w_2(r)}{w_1(0)} = \alpha_2 r^{*2} + b_2 \ln r^* + c_2 \quad (I.22)$$

Avec :

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{[\mu - \rho(1 - d^2) + 2\mu(1 - \rho) \ln d]}$$

$$\alpha_2 = \frac{-\rho}{[\mu - \rho(1 - d^2) + 2\mu(1 - \rho) \ln d]}$$

$$b_2 = \frac{-2(1 - \rho)}{[\mu - \rho(1 - d^2) + 2\mu(1 - \rho) \ln d]}$$

$$c_2 = \frac{\rho d^2 + 2(1 - \rho) \ln d}{[\mu - \rho(1 - d^2) + 2\mu(1 - \rho) \ln d]}$$

$$b_1 = 1$$

On pose :

$$r^* = \frac{r}{R_1}, \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{ et } d = \frac{R_2}{R_1}$$

On remarque que l'écoulement de base dépend des rapports des viscosités  $\mu$ , des densités  $\rho$  et des épaisseurs  $d$  des deux couches de fluides.

## Conclusion

En conclusion, nous pourrions dire que dans ce chapitre, à partir des équations de Navier Stokes, les conditions aux limites, nous avons pu déduire le calcul de l'écoulement de base qui a permis à son tour de définir les grandeurs caractéristiques de l'écoulement et qui vont être abordées dans le second chapitre.

## Introduction

Notre objectif dans ce 2ème chapitre, intitulé « les équations linéarisées et adimensionnement », consiste à étudier l'instabilité d'un écoulement annulaire de deux couches de fluide concentriques à l'intérieur d'un cylindre vertical de rayon  $R_2$  et pour ce nous allons procéder ainsi :

La première étape consiste à linéariser les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées puis nous allons les adimensionnées.

Dans la dernière étape, on introduit les solutions des équations linéarisées qui sont sous forme de modes normaux.

### II.1. Equations linéarisées

Dans le calcul de l'écoulement de base au chapitre précédent, nous avons supposé que la surface libre est indéformable (écoulement uniforme). Nous introduisons ici des perturbations de cet écoulement de base où apparaissent de petites perturbations de la surface libre. On s'intéresse à la géométrie cylindrique qui prend en considération les effets de la courbure où la tension superficielle joue un rôle important.

Avant de linéariser les équations du mouvement et les conditions aux limites rappelant l'état de base de cet écoulement :

$$u_k = 0, v_k = 0, w_k = W_k(r), p_k = P, h = R_1$$

Dans l'état non perturbé l'interface est supposée parfaitement plate.

Nous perturbons l'écoulement de base en lui superposant des petites perturbations de la forme suivante :

$$u_k = 0 + \tilde{u}_k$$

$$v_k = 0 + \tilde{v}_k$$

$$w_k = W_k(r) + \tilde{w}_k$$

$$p_k = P + \tilde{P}_k$$

$$h = R_1 + \tilde{h}$$

En substituant ces expressions dans les équations gouvernantes (I.3) – (I.6) et les conditions aux limites associées (I.7) – (I.12) puis négliger tous les termes quadratiques, on obtient les équations linéarisées.

L'équation de conservation de la masse pour un écoulement perturbé :

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}_k + \frac{1}{r} \tilde{u}_k + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{v}_k + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}_k = 0 \quad (II.1)$$

Equations de la conservation de la quantité de mouvement :

### Fluide 1

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_1 + W_1 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{P}_1 + \frac{1}{\rho_1} \mu_1 (\nabla^2 \tilde{u}_1 + \frac{1}{r^2} \tilde{v}_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_1) \quad (II.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}_1 + W_1 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}_1 = -\frac{1}{\rho_1 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{P}_1 + \frac{1}{\rho_1} \mu_1 (\nabla^2 \tilde{v}_1 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_1 - \frac{1}{r^2} \tilde{v}_1) \quad (II.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}_1 + \tilde{u}_1 \frac{\partial}{\partial r} W_1 + W_1 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{P}_1 + g + \frac{1}{\rho_1} \mu_1 \nabla^2 \tilde{w}_1 \quad (II.4)$$

### Fluide 2

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_2 + W_2 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{P}_2 + \frac{1}{\rho_2} \mu_2 (\nabla^2 \tilde{u}_2 + \frac{1}{r^2} \tilde{v}_2 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_2) \quad (II.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}_2 + W_2 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}_2 = -\frac{1}{\rho_2 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{P}_2 + \frac{1}{\rho_2} \mu_2 (\nabla^2 \tilde{v}_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u}_2 - \frac{1}{r^2} \tilde{v}_2) \quad (II.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}_2 + \tilde{u}_2 \frac{\partial}{\partial r} W_2 + W_2 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{P}_2 + g + \frac{1}{\rho_2} \mu_2 \nabla^2 \tilde{w}_2 \quad (II.7)$$

Passant maintenant à la linéarisation des conditions aux limites :

### Condition d'adhérence

$$U_2 = 0 \text{ en } r = R_2 \text{ c'est-à-dire } \tilde{u}_2 = \tilde{v}_2 = \tilde{w}_2 = 0$$

A l'interface en  $r = R_1$  on constate que :

**La condition cinématique** reste inchangée

$$\tilde{u}_k = \tilde{h}_t + W_k \tilde{h}_x \quad (\text{II. 8})$$

### Les conditions dynamiques

$$\mu_1(\tilde{w}_{1r} + W'_1 + \tilde{u}_{1x}) - \mu_2(\tilde{w}_{2r} + W'_2 + \tilde{u}_{2x}) = 0 \quad (\text{II. 9})$$

$$\mu_1\left(\frac{1}{r}(\tilde{u}_{1\theta} - \tilde{v}_1) + \tilde{v}_{1r}\right) - \mu_2\left(\frac{1}{r}(\tilde{u}_{2\theta} - \tilde{v}_2) + \tilde{v}_{2r}\right) = 0 \quad (\text{II. 10})$$

$$\tilde{P}_2 - \tilde{P}_1 + 2\mu_1\tilde{v}_{1r} - 2\mu_2\tilde{v}_{2r} = \frac{\sigma}{R_1^2}(\tilde{h}_{\theta\theta} + R_1^2\tilde{h}_{xx} + \tilde{h}) \quad (\text{II. 11})$$

Continuité des vitesses :  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$

C'est-à-dire

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2, \tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$$

$$W_1(r) + \tilde{w}_1 = W_2(r) + \tilde{w}_2 \quad (\text{II. 12})$$

## II.2.L'adimensionnalisation

Cette technique consiste à faire apparaître des groupements de paramètres qui n'ont pas de dimension dans toutes les équations. Elle est très utilisée en mécanique des fluides, car les équations à résoudre sont complexes (dérivées partielles, non-linéarité, ...). Selon la valeur des groupements de paramètres, il est possible de déterminer les effets prépondérants dans le phénomène traité et ainsi de ne résoudre que les parties correspondantes dans les équations.

### Formes adimensionnelles des équations 3D

L'adimensionnement des équations est obtenu en prenant en compte la géométrie du problème ainsi que les paramètres du fluide interne qui sont la viscosité  $\mu$  et la densité  $\rho$ . Les grandeurs caractéristiques relatives à la géométrie de l'écoulement sont  $R$  le rayon intérieur de cylindre et  $W_i(0)$  la composante de la vitesse axiale le long de l'axe de symétrie (l'axe de cylindre) qui est considérée finie sur cet axe en  $r=0$ .

$$W_1(0) = \frac{\rho_1 g R_1^2}{4\mu_2} [\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho) \ln d]$$

### II.3. L'objectif de la mise sous forme adimensionnelle des équations

Cette opération nous permet

- de réduire des variables dimensionnelles sous la forme de groupes sans dimension pourvus d'un sens physique

- de négliger les termes peu importants et donc de simplifier le problème,

Une analyse dimensionnelle sera effectuée en choisissant les grandeurs adéquates du problème.

Pour cela on fait le choix des grandeurs de références suivantes :

<i>Grandeurs de références</i>	<i>Grandeurs associées</i>
$x_{ref}$	$\lambda$
$r_{ref}$	$R_1$
$u_{ref}$	$\frac{R_1 W_1(0)}{\lambda}$
$v_{ref}$	$\frac{R_1 W_1(0)}{\lambda}$
$w_{ref}$	$W_1(0)$
$t_{ref}$	$\frac{\lambda}{W_1(0)}$
$p_{ref}$	$\mu_1 \frac{W_1(0)}{R_1^2} \lambda$

Où  $\lambda$  est associée à une longueur d'onde caractéristique donnée dans la direction de l'écoulement.

Dans le cas de l'hypothèse de grandes longueurs d'onde, on introduit le paramètre

$\varepsilon = \frac{R_1}{\lambda}$ , ce paramètre traduit le fait que les couches de fluides sont minces et dans ce cas la hauteur de l'écoulement est faible devant son étalement. Ceci nous autorise à prendre  $\varepsilon \ll 1$  qui correspond à ce qu'on appelle l'hypothèse de grande longueur d'onde.

La mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées est obtenue à l'aide des variables adimensionnelles suivantes :

Variabes adimensionnelles	Expressions des variables adimensionnelles
$W^* = \frac{w}{w_{ref}}$	$\frac{w}{W_1(0)}$
$r^* = \frac{r}{r_{ref}}$	$\frac{r}{R_1}$
$x^* = \frac{x}{x_{ref}}$	$\frac{x}{\lambda}$
$u^* = \frac{u}{u_{ref}}$	$\frac{u\lambda}{R_1 W_1(0)}$
$\theta^*$	$\theta$
$v^* = \frac{v}{v_{ref}}$	$\frac{v\lambda}{R_1 W_1(0)}$
$t^* = \frac{t}{t_{ref}}$	$\frac{t W_1(0)}{\lambda}$
$p^* = \frac{p}{p_{ref}}$	$\frac{p R_1^2}{\mu_1 W_1(0) \lambda}$

Après substitution et quelques opérations simples, on trouve les équations adimensionnelles. Dans ce qui suit, afin de ne pas encombrer l'écriture des équations, nous adoptons la même notation pour les grandeurs avec dimension et celles sans dimension.

Le système d'équations adimensionnées est donné par :

L'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial r} u_k + \frac{1}{r} u_k + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_k + \frac{\partial}{\partial x} w_k = 0 \quad (II.13)$$

Equations de la conservation de la quantité de mouvement :

**Fluide 1:**  $0 < R < h$  :

$$R_e \varepsilon^3 \left( \frac{\partial}{\partial t} u_1 + W_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial r} p_1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 - \frac{1}{r^2} u_1 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} u_1 \right) \quad (II.14)$$

$$R_e \varepsilon^3 \left( \frac{\partial}{\partial t} v_1 + W_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} p_1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1 - \frac{1}{r^2} v_1 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} u_1 \right) \quad (II.15)$$

$$R_e \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} w_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial r} W_1 + W_1 \frac{\partial}{\partial x} w_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial x} p_1 + G + \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} w_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1 \right) \quad (II.16)$$

**Fluide 2:**  $h < R < d$

$$R_e \varepsilon^3 \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} u_2 + W_2 \frac{\partial}{\partial x} u_2 \right) = -\frac{\partial}{\partial r} p_2 + \mu \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2 - \frac{1}{r^2} u_2 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} u_2 \right) \quad (II.17)$$

$$R_e \varepsilon^3 \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} v_2 + W_2 \frac{\partial}{\partial x} v_2 \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} p_2 + \mu \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v_2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_2 - \frac{1}{r^2} v_2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} u_2 \right) \quad (II.18)$$

$$R_e \varepsilon \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} w_2 + W_2 \frac{\partial}{\partial x} w_2 + u_2 \frac{\partial}{\partial r} W_2 \right) = -\frac{\partial}{\partial x} p_2 + G + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} w_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_2 \right) \quad (II.19)$$

## Les conditions aux limites

Condition d'adhérence à la paroi

$$u_2(d) = v_2(d) = w_2(d) = 0 \quad \text{en } R=d$$

Vitesse finie en  $R = 0$  pour le fluide 1

Conditions aux limites à l'interface fluide-fluide en  $R = h(x, t)$

Condition de saut cinématique à l'interface

$$u_k = h_t + W_k h_x \quad (\text{II. 20})$$

Conditions dynamiques

Continuité des vitesses

$$u_1 = u_2, v_1 = v_2, w_1 = w_2$$

Continuité des contraintes normales

$$P_2 - P_1 + 2\varepsilon^2(v_{1r} - \mu v_{2r}) = \varepsilon We(h_{\theta\theta} + R_1^2 h_{xx} + h) \quad (\text{II. 21})$$

Continuité des contraintes tangentielles

$$(2w_{1r} + u_{1x}) - \mu(2w_{2r} + u_{2x}) = 0 \quad (\text{II. 22})$$

$$\frac{1}{r}(u_{1\theta} - v_1) + v_{1r} - \mu\left(\frac{1}{r}(u_{2\theta} - v_2) + v_{2r}\right) = 0 \quad (\text{II. 23})$$

## II.4. Nombres adimensionnels

Les équations et conditions aux limites de l'écoulement ont fait apparaître les nombres adimensionnés suivants :

- le paramètre  $\varepsilon$ , qui traduit le fait que les couches fluide sont minces et dans ce cas la hauteur de l'écoulement est faible devant son étalement.

$$\varepsilon = \frac{R_1}{\lambda}$$

- le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent). Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

$$R_e = \frac{\rho_1 W_1(0) R_l}{\mu_1}$$

- le nombre de Weber est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface du système. Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de tension superficielle :

$$w_e = \frac{\sigma}{R_1 \rho_1 W_1(0)^2}$$

- le nombre de Kapitza [8] est un nombre sans dimension, il représente le rapport entre le nombre de Weber et le nombre de Reynolds. Il fait apparaître les caractéristiques des fluides (viscosité, tension superficielle, l'épaisseur).

$$J = \frac{W_e}{R_e}$$

- le rapport de la viscosité, de la masse volumique et des épaisseurs des couches fluides qui sont respectivement :

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{ et } d = \frac{R_2}{R_1} b \nu$$

$$G = \frac{g R_1^2 \rho_1}{W_1(0) \mu_1} \quad \text{Coefficient mesurant les effets de la gravité.}$$

## II.5. Modes normaux

La forme linéaire des d'équations précédentes permet de rechercher la solution sous la forme de modes normaux

$$\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{P}\}(r, \theta, x, t) = \{i\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{P}\}(r) e^{(in\theta + ik(x-ct))}$$

Avec

$i\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{P}$  les amplitudes des perturbations

$k$  et  $n$  sont les composantes du vecteur d'onde.

$c$  La vitesse complexe de l'onde

En injectant les solutions qui sont sous forme de modes normaux dans les équations perturbées ainsi qu'aux conditions aux limites on obtient :

$$k\hat{w}_k + \hat{u}'_k + \frac{1}{r}\hat{u}_k + \frac{n}{r}\hat{v}_k = 0 \quad (\text{II. 24})$$

### Fluide 1

$$k(W_1 - c)\hat{u}_1 = \hat{P}_1' - \frac{i}{Re} \left[ \hat{u}_1'' + \frac{1}{r}\hat{u}_1' - \left( k^2 + \frac{n^2+1}{r^2} \right) \hat{u}_1 - \frac{2n}{r^2} \hat{v}_1 \right] \quad (\text{II. 25})$$

$$k(W_1 - c)\hat{v}_1 = -\frac{n}{r}\hat{P}_1 - \frac{i}{Re} \left[ \hat{v}_1'' + \frac{1}{r}\hat{v}_1' - \left( k^2 + \frac{n^2+1}{r^2} \right) \hat{v}_1 - \frac{2n}{r^2} \hat{u}_1 \right] \quad (\text{II. 26})$$

$$k(W_1 - c)\hat{w}_1 + \hat{u}_1 W_1' = -k\hat{P}_1' - \frac{i}{Re} \left[ \hat{w}_1'' + \frac{1}{r}\hat{w}_1' - \left( k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \hat{w}_1 \right] \quad (\text{II. 27})$$

### Fluide 2

$$k(W_2 - c)\hat{u}_2 = \hat{P}_2' - \frac{\rho}{\mu} \frac{i}{Re} \left[ \hat{u}_2'' + \frac{1}{r}\hat{u}_2' - \left( k^2 + \frac{n^2+1}{r^2} \right) \hat{u}_2 - \frac{2n}{r^2} \hat{v}_2 \right] \quad (\text{II. 28})$$

$$k(W_2 - c)\hat{v}_2 = -\frac{n}{r}\hat{P}_2 - \frac{\rho}{\mu} \frac{i}{Re} \left[ \hat{v}_2'' + \frac{1}{r}\hat{v}_2' - \left( k^2 + \frac{n^2+1}{r^2} \right) \hat{v}_2 - \frac{2n}{r^2} \hat{u}_2 \right] \quad (\text{II. 29})$$

$$k(W_2 - c)\hat{w}_2 + \hat{u}_2 W_2' = -k\hat{P}_2' - \frac{\rho}{\mu} \frac{i}{Re} \left[ \hat{w}_2'' + \frac{1}{r}\hat{w}_2' - \left( k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \hat{w}_2 \right] \quad (\text{II. 30})$$

-Condition d'adhérence à la paroi

$$\hat{u}_2(d) = \hat{v}_2(d) = \hat{w}_2(d) = 0 \quad \text{En } R=d$$

Vitesse finie en  $R = 0$  pour le fluide 1

$$\hat{u}_1(0) = \hat{v}_1(0) = \hat{w}_1(0) \text{ Finie}$$

À l'interface on a

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + W_k \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{h} = \tilde{u}_k = i\hat{u}(r)e^{(in\theta + ik(x-ct))}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + W_k \frac{\partial}{\partial x} \right) = k(W - c)$$

Donc

$$\tilde{h} = \frac{i\hat{u}(r)}{k(W-c)} e^{(in\theta + ik(x-ct))}$$

La condition cinématique devient :

$$\frac{kc\hat{u}_k(r)}{k(W_k-c)} - \frac{k\hat{u}_k(r)}{k(W_k-c)} = i\hat{u}_k(r) \quad (\text{II. 31})$$

La continuité des vitesses

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_2, \hat{v}_1 = \hat{v}_2$$

$$\hat{w}_1 + \frac{W_1'\hat{u}_1}{k(W_1-c)} = \hat{w}_2 + \frac{W_2'\hat{u}_2}{k(W_2-c)} \quad (\text{II. 32})$$

La continuité des contraintes tangentielles est exprimée par :

$$\hat{w}_1' - k\hat{u}_1 + \frac{W_1''\hat{u}_1}{\alpha(W_1-c)} = \mu(\hat{w}_2' - k\hat{u}_2 + \frac{W_2''\hat{u}_2}{k(W_2-c)}) \quad (\text{II. 33})$$

$$\hat{v}_1' - \hat{v}_1 - n\hat{u}_1 = \mu(\hat{v}_2' - \hat{v}_2 - n\hat{u}_2) \quad (\text{II. 34})$$

La continuité des contraintes normales est donnée par l'expression suivante :

$$\left(-\hat{P}_1 + \frac{2i}{Re}\hat{u}'_1\right) - \left(-\rho\hat{P}_2 + \frac{2i\mu}{Re}\hat{u}'_2\right) = \frac{\sigma}{\rho_1 R_1 W(0)^2} \left(-\frac{k\hat{u}}{(W-c)} + (n^2 - 1)\frac{\hat{u}}{k(W-c)}\right) \quad (\text{II. 35})$$

## Conclusion

Pour finir, nous avons pu déduire que grâce à la linéarisation : les équations sont plus simples.

On peut dire que les solutions des équations linéarisées, sous forme de mode normaux, nous ont permis l'obtention d'un système d'équation avec des inconnus qui va être traité dans le chapitre qui suit.

## Introduction

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la stabilité linéaire d'un écoulement annulaire de deux couches de fluides newtoniens. Pour cela nous avons choisi une méthode aux perturbations semblable à celle développée par Benney [5] pour l'étude d'un écoulement d'un fluide visqueux s'écoulant sur un plan incliné. Cette étude permet de déterminer l'élévation de l'interface, elle a aussi comme avantage de donner le seuil du déclenchement de l'instabilité de manière exacte. Après avoir rappelé le théorème de Squire [9] et sa généralisation à des écoulements sur des parois courbes, nous donnerons les résultats de stabilité linéaire dans la continuité du mémoire de fin d'étude de Boukouras [2].

### III.1. Théorème de Squire

La stabilité des écoulements plans parallèles possède une propriété intéressante énoncée par le théorème de Squire [9]. Ce théorème s'applique aussi bien pour les écoulements non visqueux que pour les écoulements visqueux présentant une surface libre. Dans le cas où le problème étudié, comme c'est le cas dans notre travail est de déterminer une condition d'instabilité, alors le théorème de Squire nous permet par un changement de variables de réduire le problème tridimensionnel initial décrit aux chapitres I et II à un problème bidimensionnel.

#### *Enoncé du théorème de Squire :*

*À toute perturbation instable dans un écoulement visqueux correspond une perturbation bidimensionnelle plus instable.*

En effet, si l'écoulement est instable à tout mode  $(k, \omega)$  tridimensionnel de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de composantes  $(k, n)$  et de taux de croissance temporel  $\omega_i$  peut être associé un mode  $(k_1, \omega_1)$  bidimensionnel plus instable, de vecteur d'onde  $(k_1, 0)$ , avec [9] :

$$(k_1, 0) = \sqrt{k^2 + n^2}$$

De taux d'amplification temporel :

$$\omega_{1i} = \omega_i \frac{\sqrt{k^2 + n^2}}{k}$$

Donc  $\omega_{1i} \geq \omega_i$

Par conséquent, l'étude de la stabilité de l'écoulement sera obtenue en considérant seulement les perturbations bidimensionnelles axisymétriques. On va donc poser dans les équations du mouvement (II.13)-(II.19) et les conditions aux limites (II.20)-(II.23) toutes les dérivées par rapport à la variable  $\theta$  nulles ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ) ainsi que la composante azimutale de la vitesse  $v = 0$ .

### III.2. Equations approchées

L'hypothèse de grande longueur d'onde impose d'avoir  $\varepsilon \ll 1$  et en faisant l'hypothèse  $\varepsilon R_e = \mathcal{O}(1)$  et  $\varepsilon^2 w_e = \mathcal{O}(1)$  et pour être cohérent à cet ordre d'approximation, on peut quantifier les effets de la viscosité et de la tension superficielle pour qu'ils puissent être pris en considération dans cette modélisation.

Ce qui conduit finalement à cet ordre, aux équations approchées :

#### Fluide1

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (III.1)$$

$$R_e \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} w_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial r} W_1 + W_1 \frac{\partial}{\partial x} w_1 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} p_1 + G + \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_1 \right) \quad (III.2)$$

$$0 = - \frac{\partial}{\partial r} p_1 \quad (III.3)$$

#### Fluide2

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{u_2}{r} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (III.4)$$

$$R_e \varepsilon \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} w^2 + W^2 \frac{\partial}{\partial x} w^2 + u^2 \frac{\partial}{\partial r} W^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x} p_2 + G + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} w_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w_2 \right) \quad (III.5)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial r} p_2 \quad (III.6)$$

### Conditions aux limites

- condition d'adhérence à la paroi

$$u_2(d) = w_2(d) = 0 \quad \text{En } R=d$$

Vitesse finie en  $R = 0$  pour le fluide 1

- Conditions aux limites à l'interface fluide-fluide en  $R = h(x, t)$

-La condition de saut cinématique à l'interface

$$u_k = h_t + W_k h_x$$

Conditions dynamiques

Continuité des contraintes normales

$$P_2 - P_1 = \varepsilon We (R_1^2 h_{xx} + h)$$

Continuité des contraintes tangentielles

$$(2w_{1r} + u_{1x}) - \mu(2w_{2r} + u_{2x}) = 0$$

*Continuité des vitesses*

$$u_1 = u_2, w_1 = w_2$$

Les champs de vitesses et de pressions peuvent être exprimés sous forme d'une série asymptotique en  $\varepsilon$ .

### Fluide 1

$$w_1(r, x, t) = w_1^{(0)}(r, x, t) + \varepsilon w_1^{(1)}(r, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$u_1(r, x, t) = u_1^{(0)}(r, x, t) + \varepsilon u_1^{(1)}(r, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$p_1(r, x, t) = p_1^{(0)}(r, x, t) + \varepsilon p_1^{(1)}(r, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

## Fluide 2

$$w_2(r, x, t) = w_2^{(0)}(r, x, t) + \varepsilon w_2^{(1)}(r, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$u_2(r, x, t) = u_2^{(0)}(r, x, t) + \varepsilon u_2^{(1)}(r, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$p_2(r, x, t) = p_2^{(0)}(r, x, t) + \varepsilon p_2^{(1)}(r, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Nous n'entreprendrons pas la résolution asymptotique de ces équations car la démarche a été largement décrite et nous enverrons le lecteur intéressé au mémoire [2] ; on y trouve la résolution détaillée et les références nécessaires. Nous donnons ici l'équation décrivant l'élévation de l'interface, exprimée à partir de la condition cinématique. Cette équation se met sous la forme suivante :

$$h_t + W_k h_x - u_k = 0 \quad (III.7)$$

Pour linéariser cette équation, on a supposé que la perturbation initiale est petite, le mouvement qui en résulte reste petit au cours du temps, ce qui doit être vérifiée par la solution du problème linéarisé.

### III.3. Relation de dispersion

La linéarisation de l'équation (III.7) autorise la recherche de solution de la perturbation de l'interface sous forme :

$$H_0(x, t) = A e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (III.8)$$

La linéarisation de l'équation et la substitution de la perturbation par (III.8) donne une relation de dispersion

$$\mathcal{D}(k_1, \omega_{i1}, R_e, w_e, \rho, \mu, d) = 0 \quad (III.9)$$

Par suite il existe des solutions sous forme d'ondes pour lesquelles la pulsation  $\omega$  dépend du nombre d'onde  $k$  et se propagent avec la vitesse de phase  $c = \omega_{i1}/k_1$ .

Nous étudions dans cette section la stabilité temporelle de l'écoulement de base vis-à-vis d'une perturbation de nombre d'onde  $k_1$  réel et de la pulsation  $\omega$  complexe.

Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 montrent l'influence des paramètres de l'écoulement sur la déstabilisation de l'interface entre deux couches de fluides de même densité  $\rho = 1$ . Cette influence est mise en évidence à travers le tracé du taux d'amplification en fonction du nombre d'onde. Les régions où  $\omega_{i1} > 0$  correspondent à un écoulement instable et celle où  $\omega_{i1} < 0$  correspondent à un écoulement stable. Remarquons que les courbes représentées sur ces figures sont obtenues analytiquement.

### III.3.1. Influence de la viscosité des fluides

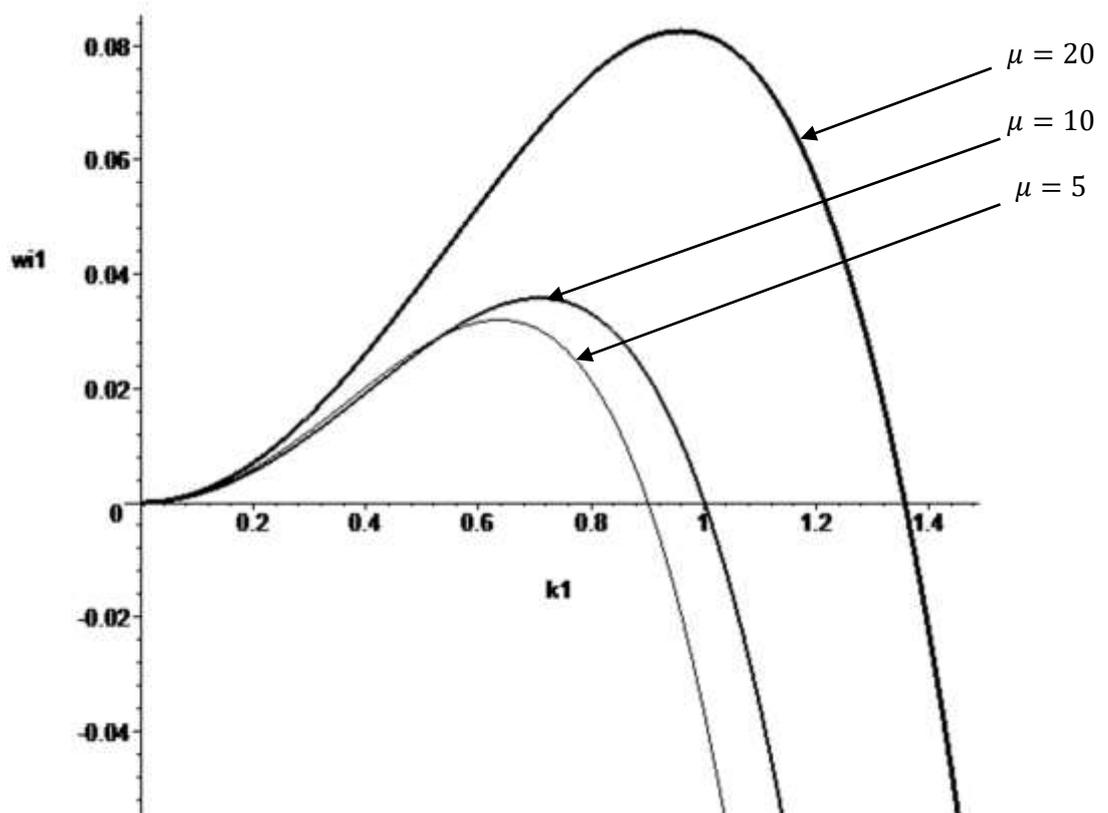


Figure 3.1 : Taux d'amplification temporel  $\omega_{i1}$  de l'instabilité de l'interface de deux couches de fluides, en fonction du nombre d'onde  $k_1$  de la perturbation.  $R_e = 50$ ,  $h_0 = 0.5$ ,  $J = 900$ .

Dans la gamme des paramètres représentés sur la figure 3.1 l'écoulement peut être stable ou instable. Plus en augmente la valeur du rapport des viscosités plus l'écoulement devient instable pour les petites perturbations de l'écoulement de base. Le nombre d'onde pour lequel le taux d'amplification est maximum augmente quand on augmente le rapport des viscosités. Le taux d'amplification maximum augmente quand on augmente le rapport des viscosités. De même plus le rapport des viscosités  $\mu$  est élevé, plus la gamme des nombres d'ondes pour lesquels apparait l'instabilité est large.

### III.3.2. Influence de l'épaisseur des fluides

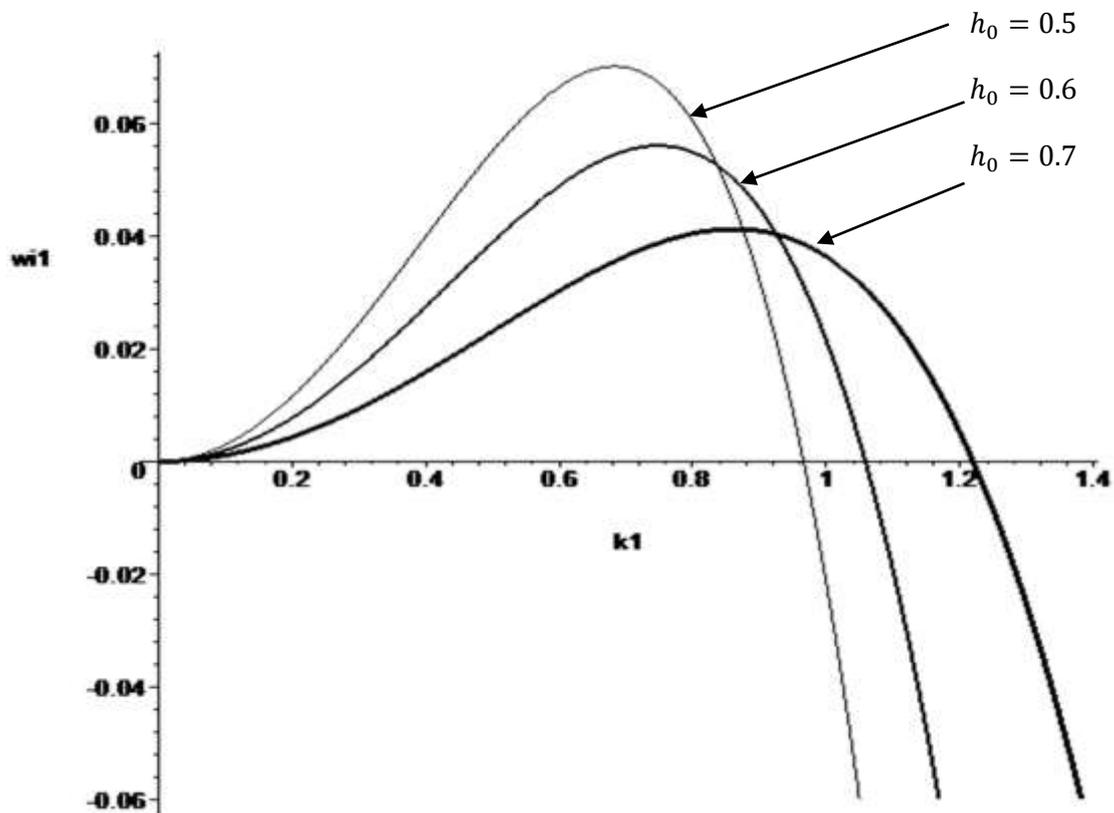


Figure 3.2 : Taux d'amplification temporel  $\omega_{i1}$  de l'instabilité de l'interface de deux couches de fluides, en fonction du nombre d'onde  $k_1$  de la perturbation.  $Re = 30$ ,  $\mu = 5$ ,  $J = 900$ .

La lecture de la figure 3.2 montre que pour  $\mu = 5$ , augmenter l'épaisseur  $h_0$  du fluide à cœur fait décroître la perturbation. Dans cette configuration le nombre d'onde de la perturbation la

plus instable correspondant à un taux d'amplification maximum augmente tandis que le taux d'amplification lui diminue

### III.3.3. Influence de la tension superficielle

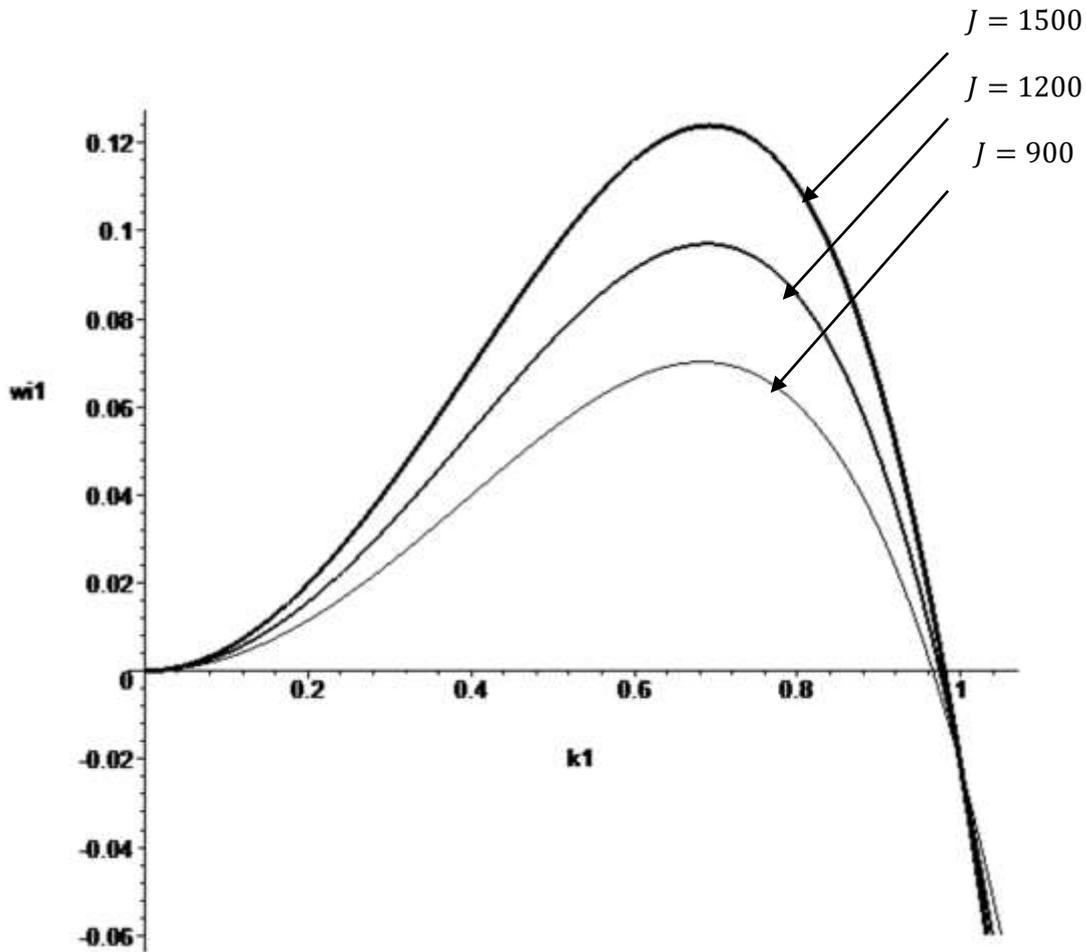


Figure 3.3 : Taux d'amplification temporel  $\omega_{i1}$  de l'instabilité de l'interface de deux couches de fluides, en fonction du nombre d'onde  $k_1$  de la perturbation.  $R_e = 30$ ,  $h_0 = 0.5$ ,  $\mu = 5$ .

La figure 3.3 présente le taux d'amplification des ondes. Ces résultats montrent que la tension superficielle augmente le taux de croissance des ondes de grande longueur d'onde, par conséquent, on peut conclure au fait que la tension superficielle joue un rôle déstabilisant dans le cas de l'écoulement annulaire de deux couches de fluides. Notons que ce résultat est conforme à ceux de la littérature [7]. Le nombre d'onde dont le taux d'amplification est

Maximum n'est pas modifié par la variation de la tension superficielle. L'augmentation de la tension superficielle augmente la largeur de la bande des nombres d'onde instables.

## **Conclusion**

Pour achever ce chapitre, nous pouvons dire que l'étude de la stabilité est obtenue en considérant les perturbations bidimensionnelles tout en s'appuyant sur le théorème de SQUIRE.

En effet, nous avons soumis l'écoulement à de petites perturbations, puis nous avons effectué une analyse de la stabilité linéaire, ce qui nous a permis de déterminer le taux d'amplification en fonction de nombre d'ondes  $k$  et les courbes de la stabilité qui montrent l'influence des paramètres de l'écoulement sur la déstabilisation de l'interface entre deux couches de fluides de la même densité.

Nous avons abordé dans ce mémoire de fin de cycle une étude de la stabilité linéaire d'un écoulement annulaire de deux couches de fluides newtoniens.

Le but de ce travail est de formuler un modèle à une équation décrivant l'évolution de l'interface à partir d'un développement asymptotique. Cette formulation est obtenue dans une configuration annulaire d'un écoulement de deux couches de fluides visqueux en écoulement 2D vertical.

Notre étude est basée sur les développements asymptotiques appliqués aux écoulements de films liquides minces permettent de déterminer de manière précise les conditions critiques du déclenchement de leurs instabilités.

Afin répondre à la problématique posée dans ce travail, nous avons subdivisé cette thèse en deux parties :

Dans la première partie, nous avons établi les équations de Navier-Stokes générales décrivant la dynamique de deux couches de fluides concentriques s'écoulant à l'intérieur d'un cylindre vertical. À partir de ces équations et à l'aide des conditions aux limites associées, nous avons pu calculer l'écoulement de base en considérant aussi les hypothèses suivantes : écoulement stationnaire, parallèle, incompressible.

Par la suite, nous avons linéarisé les équations obtenues afin de simplifier les termes non linéaires puis on les a adimensionnés, cela nous a permis de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant le problème.

Nous avons cherché les solutions des équations linéarisées, qui sont sous forme de modes normaux.

Dans la deuxième partie de cette thèse, le théorème de SQUIRE nous a autorisé, au lieu de faire une étude 3D, on s'est limité à une étude 2D pour avoir les résultats. Nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire puis déterminé les courbes de stabilité et le taux d'amplification des ondes en fonction du nombre d'onde  $k$ .

- [1]BOUAMAR Naima, Etude de l'écoulement annulaire de deux couches de fluides dans une conduite cylindrique, Juillet 2019.
- [2] BOUKORRAS Sarra, Etude de la stabilité d'écoulements gravitaires de films liquides, Juin 2015.
- [3] C. E., Hickox, Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow, *Phys. Fluids* 14, 1971.
- [4]C.-S. Yih, Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid Mech.* 27, 337-352, 1963.
- [5]D. J. Benney, Long waves on liquid films, *J. Math. Phys*45 (1966), 150–155.
- [6] Hooper, A. P., Boyd, W. G. C., Shear Flow Instability At The Interface Between Two Viscous Fluids, *J. Fluid. Mech.*, 128, 507, 1983.5.
- [7]L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, *J. Fluid Mech.* 201, 1989...
- [8] P. L. Kapitza and S. P. Kapitza, Wave flow of thin layers of a viscous fluid, *Zh. Eksp. Teor.Fiz*19 (1949), 105–120.
- [9]SQUIRE.H.B. 1933 On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. *Proc. R. Soc. Lond. A* 142, 621-628.
- [10] T.B. Benjamin, Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*2, 554-573, 1957.

## **Résumé**

Notre étude sur « instabilités tridimensionnelles de deux couches de fluides s'écoulant dans un cylindre vertical » est basée sur les développements asymptotiques appliqués aux écoulements de fluides liquides minces faits par Benney permettant de déterminer d'une manière précise les conditions du déclenchement de l'instabilité. Nous avons obtenu une relation de dispersion analytique en fonction de taux d'amplification et le nombre d'ondes et nous avons déterminé également l'influence des paramètres des fluides sur l'évolution d'instabilité grandes ondes.

## **Abstract**

Our study of "three-dimensional instabilities of two layers of fluids flowing into a vertical cylinder" is based on asymptotic developments applied to Benney's flow of thin liquid fluids to determine precisely the conditions of the onset of instability. We obtained an analytical dispersion relationship based on amplification rates and the number of waves, and we also determined the influence of fluid parameters on the evolution of high-wave instability.