

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité :
Dynamique des fluides et énergétique

Thème

Caractérisation des instabilités d'un film mince s'écoulant sur une paroi élastique

Présenté par :

BOUDJAADA Abdeslam

BRAHIMI Siham

Soutenu le : 20 /10/2020

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Qualité
MEHIDI Nadia	Professeur	Présidente
DJESSAS Houria	MAA	Examinatrice
DJEMA AMAR	MCB	Rapporteur

Année universitaire 2019/2020

Dédicace

Je tiens en premier lieu à remercier « ALLAH » Dieu le tout puissant de m'avoir guidé et permis la réalisation de ce mémoire

A mon père qui ma tout donner

A ma mère qui par son amour et son affection m'a toujours soutenu.

A mes chères sœurs Nassira, Nora, Samia

Surtout ma sœur Nassira pour leur soutien moral et matériel durant la période de mes études

A mes chers frères Abdelhakim, Djamel, Abdallah et Abderzak

Surtout mon frère mineur Mourad

A tous mes proches et mes camarades de promotion DFE

Je dédie également ce mémoire à tous ceux qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Abdeslam

Remerciements

Nous remercions « ALLAH » Dieu le tout puissant pour nous avoir donné la force et la patience afin de pouvoir réaliser ce modeste travail et de sa bénédiction et protection sur nos capacités physiques et morales.

Nos sincères remerciements à notre encadreur Mr DJEMA Amar, qui a accepté de nous diriger durant ce travail, qui par ses conseils et ses orientations nous a été d'un grand apport dans la finalisation de notre mémoire.

Nous remercions vivement Mme MEHIDI Nadia qui a accepté de présider le jury de notre travail et à Mme DJESSAS Houria de bien juger notre travail.

Nous remercions tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nous ne pourrions clôturer ces remerciements sans retourner vers les êtres les plus chers pour nous dont leur encouragement nous ont permis de continuer nos études et de réussir.

Merci à tous.....

Dédicace

Je dédie ce travail à :

A mes parents

A mes sœurs

A mes chers frères

A ma chère amie Meriem

A tous mes proches et mes camarades de promotion DFE

Je dédie également ce mémoire à tous ceux qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Siham

Remerciements

Nous souhaitons manifester nos sincères remerciements à :

Allah le tout puissant, qui nous a guidé pour accomplir ce travail.

Nos familles pour leurs compréhensions et pour leurs conseils qu'ils n'ont cessés de nous prodiguer.

*Nos vifs remerciements accompagnés de toute notre gratitude vont notamment à notre encadreur Mr. **DJEMA Amar** de nous avoir encadré, de nous avoir aidée à progresser grâce à ses conseils, son esprit critique et son soutien tout le long de la réflexion de cette recherche. Nous espérons être dignes de la confiance qu'il est place en nous.*

*Nous tenons à remercier les membres de jury Mme **MEHIDI Nadia** et Mme **DJESSAS Houria** pour nous avoir fait l'honneur d'examiner et d'évaluer notre travail.*

À tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué par leurs conseils, leurs encouragements et leurs amitiés, à l'édification de ce projet.

À tous nos chères amis et les étudiants de notre promo nous vous souhaitons toute la réussite du monde.

Sommaire

Liste des symboles et abréviations	8
Résumé	9
Introduction	10
Étude biographique	11
Chapitre 1 : Formulation du problème	
1.1. Définition du problème	14
1.2. Les équations gouvernantes	15
1.2.1. Conservation de la masse	15
1.2.2. Le bilan de la quantité de mouvement	16
1.2.3. Equation de conservation de l'énergie (bilan de l'énergie)	17
1.2.4. Conditions aux limites	18
1.3. Écoulement de base	21
1.4. Équations adimensionnées	22
Chapitre 2 : Modèle	
2.1. Equation de la couche limite (élimination de la pression)	25
2.2. Première équation du modèle : introduction au débit local	26
2.3. Deuxième équation du modèle : équation intégrale aux résidus pondérés	27
a. Le traitement de la vitesse	27
b. Le traitement de la température	29
2.4. Troisième équation	30
Chapitre 3 : Stabilité linéaire	
3.1. Linéarisation des équations	33
3.2. Relation de dispersion	33
3.3. Courbes de stabilité	35
Interprétations	37
Conclusion	38
Références Bibliographiques	39
Annexe	41

Liste des symboles et abréviations

Masse volumique	ρ [kg m ⁻³]
vitesse du fluide	v [m s ⁻¹]
Composantes de la vitesse suivant les axes x et y	(u, v)
Coordonnées cartésiennes	(x, y)
Accélération de la pesanteur	g [m s ⁻²]
Tenseur de contrainte	σ
Tenseur identité	I
Tenseur de contrainte visqueuse	τ
viscosité dynamique	μ [Pa s ou kg m ⁻¹ s ⁻¹]
Operateur gradient	grad (∇)
Operateur divergence	<i>div</i>
Operateur Laplace	Δ
Pression	P [Pa]
viscosité cinématique	ν [m ² s ⁻¹]
Dérivée particulaire	$\frac{d}{dt}$
Dérivée partielle	$\frac{\partial}{\partial x}$
Temps	t [s]
Conductivité thermique	λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]
Capacité calorifique	c_p [J kg ⁻¹ K ⁻¹]
Température	T [K]
Densité	ρ_s
Épaisseur	h_s
Coefficient d'amortissement	d_s
Tension du substrat	σ_s
Tenseur de contrainte	\mathcal{T}
Vectrice norme de la surface	\mathbf{n}_s
Courbure moyenne du substrat	$-\nabla \cdot \mathbf{n}_s$

Pression atmosphérique	p_0 [Pa]
Opérateur du gradient de surface	∇_s
Courbure moyenne de la surface libre du liquide	$-\nabla_s \cdot \mathbf{n}$
Normale à l'interface	\mathbf{n}
Coefficient de transfert de chaleur de liquide	h_g [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$]
Température de liquide	T_∞ [K]
Tension superficielle constante	σ_T
Tension superficielle à la température	σ_0
Température à l'interface libre de liquide	T^i [K]
Débit total	Q_0
vitesse moyenne	u_m [m s^{-1}]
Nombre de Marangoni	Ma
Nombre de Prandtl	Pr
Nombre de Biot	Bi
Nombre de Reynolds	R
Nombre de Weber	We
Nombre de tension superficielle	W
Tension superficielle	σ [N m^{-1}]
Longueur caractéristique	L [m]
Diffusivité thermique	α [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
Paramètre ondes longues	ϵ
La longueur d'onde typique	l_0 [m]
Hauteur	h_0 [m]
Potentiel	Φ
Débit local	
Tapez une équation ici.	
Taux l'amplification	ω_i
Figure	Fig

Résumé

Nous étudions la dynamique d'un film liquide mince sur un substrat élastique en présence d'effet thermo-capillaire. Un modèle de trois équations d'évolutions à ondes longues est dérivé pour étudier les effets de la gravité du fluide (G), de l'inertie de l'écoulement du fluide (R) et des contraintes de Marangoni (Ma) sur la dynamique du film liquide et du substrat élastique. Ce dernier est le résultat d'une modélisation par la méthode des résidus pondérés combinée avec hypothèse des grandes ondes. Une analyse linéaire a été effectuée afin d'observer l'effet déstabilisant induit par l'inertie et les contraintes de Marangoni.

We study the dynamics of a thin liquid film on an elastic substrate in the presence of a thermocapillary effect. A model of three long wave evolution equations is derived to study the effects of fluid gravity (G), fluid flow inertia (R) and Marangoni stresses (Ma) on the dynamics of the liquid film and the elastic substrate. The latter is the result of modeling by the weighted residual method combined with the large wave hypothesis. A linear analysis was performed to observe the destabilizing effect induced by inertia and Marangoni stresses.

Introduction générale

L'étude de la stabilité des écoulements fluides est l'un des problèmes fondamentaux de la mécanique des fluides, outre les problèmes pratiques que pose cette question aux ingénieurs.

La mécanique des fluides actuelle trouve dans ces questions le problème de la stabilité et /ou de l'instabilité l'un des moteurs de son évolution, qui peut être abordée à travers des modèles simples : écoulement de Couette, de Poiseuille, de Rayleigh Bénard.... La modélisation de ce problème peut concerner plusieurs systèmes. Par exemple un film mince s'écoulant sur une paroi flexible entraîné par la gravité et l'effet thermo-capillaire.

Un substrat élastique ou une paroi compliant est une paroi suffisamment flexible pour se déformer sous l'action des efforts exercés par un écoulement, beaucoup de recherches se sont faites sur l'interaction (fluide/structure) avec plus ou moins de réussite, en effet la connaissance actuelle de ce sujet complexe s'est construit sur beaucoup de travaux [1].

Les écoulements de film mince sur des substrats solides se produisent largement dans les systèmes d'ingénierie et naturels, tel que les processus de ralentissement de flux dans un environnement industriel [2], ainsi que les écoulements de la lave et les courants de gravité en milieux géophysiques [3]. Le film liquide s'écoulant sur une surface solide peut être entraîné par la gravité, la tension superficielle, l'effet thermique. Cette étude a reçu une attention intensive en raison de leur vaste application dans leurs processus de transport de chaleur et /ou de masse, par exemple, les échangeurs de chaleur Condenseurs et évaporateurs à film, et réacteurs à film [4].

Les études expérimentales ont démontré que la dynamique est riche et présente dans de tels systèmes, par exemple, le développement de différents régimes de vagues [5], l'apparition d'une séparation de l'écoulement dans la région capillaire [6], et la formation des états liés en raison de l'interaction des ondes solitaires dans les écoulements forcés [7]. Pour comprendre ces phénomènes non linéaires sans avoir besoin à la simulation numérique directe de l'équation de Navier Stokes, différents modèles d'ordre réduit se sont développés, Par exemple, le modèle de lubrification [8], et le modèle de type Benny sont utilisés pour étudier ce type de flux rampants, qui sont

valables pour un petit nombre de Reynolds [9], le modèle intégrale de couche limite et le modèle intégral de couche limite aux résidus pondérés sont utilisés pour les écoulements de couche minces à des nombres de Reynolds modérés [10].

Cependant la plupart des études précédentes se concentrent sur les écoulements de couches minces sur des substrats rigides, et peu d'entre eux prêtent attention au cas de couches minces sur des substrats élastiques. Où la dynamique du film liquide est étroitement associée à la déformation des substrats. En fait, l'interaction entre fluides et les matériaux élastiques sont présents dans de nombreuses situations qui ont été largement étudiées [11], telles que l'exploration ou la recherche sur l'intrusion du magma sous la croûte terrestre [12], les gouttes de liquide déposées sur un réseau de fibre flexible [13], la déformation des substrats élastiques via une ligne de contact triphasé [14], froissement (rendre ride) d'une feuille mince aux interfaces fluides et l'enveloppement de gouttelettes de liquide avec des feuilles élastiques [15]. Dans le cas des interactions entre des films liquides minces et des substrats élastiques, Halpern et Sroog ont proposé un modèle fluide cohérent pour tenir compte des mécanismes sous-jacents (de base) qui pourraient provoquer l'effondrement des voies respiratoires des poumons et ont montré comment les surfactants pulmonaires affectent l'effondrement des voies respiratoires [16]. Matar a montré que la flexibilité de la paroi améliore l'instabilité du système d'écoulement et suggère une nouvelle voie pour améliorer le transport et le mélange interfaciaux de chaleur et/ou de masse [17]. Récemment, Howell a utilisé la théorie de la lubrification pour étudier le film liquide mince entraîné par la gravité sur une poutre flexible et montré comment la longueur et la rigidité du faisceau déterminent le profil du film liquide et du faisceau flexible [18], Zheng a considéré sa propre solution similaire pour étudier les films liquides visqueux entraînés par flottabilité, qui a montré un excellent accord avec les résultats expérimentaux [19], Peng a considéré la dynamique d'un film liquide viscoélastique tombant sur un substrat flexible, montrant que la viscoélasticité pouvait favoriser la vitesse de déplacement des ondes solitaires [20]. Le chauffage de films liquides minces par le bas introduit un effet supplémentaire, connu sous le nom d'effet thermo capillaire [21]. En pratique ces effets de Marangoni dans les écoulements de couches sont très importants dans certains systèmes non isothermes tels que le revêtement de fibres dans l'industrie [22]. Un nombre considérable d'ouvrages ont porté sur la modélisation de l'écoulement de couche mince sur des substrats solides à effet Marangoni [23], et

certaines d'entre eux ont également examinés l'interaction entre l'instabilité de Marangoni et l'instabilité de cisaillement. Par exemple, Ruyer-Quel a appliqué la stabilité linéaire et l'analyse des ondes non linéaires pour étudier les écoulements de couche minces dans un substrat chauffés uniformément, et pour montrer que l'instabilité du Marangoni et l'instabilité de cisaillement se renforcent mutuellement de manière non triviale [24]. Récemment, Saprykin a également effectué des calculs 2D et 3D pour étudier des films liquides minces sur des substrats topographiques qui sont également chauffée uniformément [25]. Cependant, cette étude considère que le cas des substrats rigides, Les écoulements des films (couches) sur un substrat élastique dans l'environnement non isotherme, qui englobent à la fois les effets de flexibilité des parois et les contraintes de Marangoni, n'ont pas été encore explorés, malgré leur large présence dans divers domaines, par exemple en génie des matériaux, L'effet de Marangoni est introduit pour induire la formation des rides à la surface des matériaux souples [26], et en cosmétiques, ces distributions non uniformes de revêtement cosmétiques sur les peaux douces pourraient également être causées par l'effet Marangoni [27].

Ce travail se compose en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous décrivons l'écoulement d'un film mince d'un liquide newtonien incompressible s'écoulant sur un plan flexible incliné. La mise en équations de notre problème sera effectuée.

Le deuxième chapitre sera consacré à déterminer un modèle d'ordre un composé d'un ensemble d'équations dévolutions. Cette modélisation sera effectuée en utilisant une approche aux résidus pondérés combiné avec l'hypothèse des grandes ondes.

Le dernier chapitre consiste à une étude de stabilité linéaire de l'interface vis-à-vis de perturbations infinitésimales.

Chapitre 1 :

Formulation du problème

Chapitre 1 : Formulation du problème

1.1. Définition du problème :

On s'intéresse à étudier la dynamique d'un film liquide mince newtonien incompressible s'écoulant sur une paroi flexible, inclinée, chauffée et imperméable comme indiqué dans la fig.1.1. Un système de coordonnées bidimensionnel est utilisé pour décrire la dynamique de ce film. L'orientation du repère est la suivante : x est la direction de l'écoulement, y est la direction perpendiculaire au plan incliné, h est l'épaisseur du film et β désigne l'angle que forme l'axe x avec l'horizontal, $\beta = 0$ correspond donc à un plan horizontal (fig.1.1).

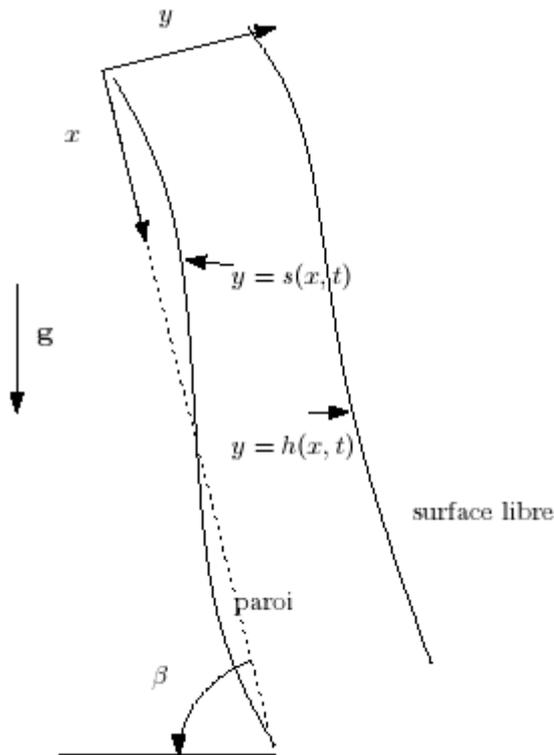


Fig.1.1 : Ecoulement d'un film mince sur une paroi inclinée flexible chauffée imperméable

On considère les hypothèses suivantes :

- La géométrie du système est supposée infinie dans la direction x .
- On néglige toute circulation d'air au-dessus du film.
- Le milieu considéré est homogène et isotrope.
- L'écoulement est non isotherme.

- La température de l'air est supposée constante et égale à T_a .
- La pression de l'air est supposée constante est égale à P_a .

1.2. Les équations gouvernantes :

Les équations régissant la dynamique d'un fluide en écoulement résultent de l'application des lois fondamentales de la physique classique. ces lois qui s'expriment par des relations universelles entre les paramètres qui décrivent la cinématique des milieux (pression, vitesse, accélération) et d'autres paramètres décrivant les phénomènes exerçant une influence sur le comportement de ces milieux (force, charges électriques, flux de température) ces lois sont appelées lois de bilan ou lois de conservation.

1.2.1. Conservation de la masse :

La conservation de la masse exprime le principe fondamental de la cinétique et se traduit par la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

Pour caractériser un milieu incompressible, on prend ρ constant fluide.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Celui-ci vérifie la relation :

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Où : $\mathbf{v} = u.\mathbf{e}_x + v.\mathbf{e}_y$

Avec :

u et v : Composantes de la vitesse suivant les axes x et y

La relation (1.1) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

L'équation (1.2) est appelée équation de continuité.

1.2.2. Le bilan de la quantité de mouvement :

L'équation de conservation de la quantité de mouvement traduit le principe fondamental de la dynamique, ce bilan exprime la variation de la quantité de mouvement par unité de volume comme la somme des efforts volumique et surfaciques appliquées sur le système.

$$\rho \frac{D \mathbf{v}}{D t} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (1.4)$$

Avec : $\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$

$\boldsymbol{\sigma}$: Tenseur des contraintes de cauchy donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

Où :

\mathbf{I} : Le tenseur identité.

$\boldsymbol{\tau}$: Le tenseur des contraintes visqueuses donné par :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

μ : La viscosité dynamique

Le tenseur des déformations \mathbf{D} est donné par :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

La projection sur les axes en coordonnées cartésiennes s'écrit :

Suivant (x) :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho g \sin \beta \quad (1.5)$$

Suivant (y) :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho g \cos \beta \quad (1.5)$$

$$\text{Avec : } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Les forces agissant sur le fluide en écoulement sont :

- Forces de gravité liées au poids du fluide.
- Forces de pression.
- Forces de frottement causées par la viscosité.
- Forces dues à la tension de surface.
- Forces d'inertie due à la variation de la vitesse.

1.2.3. Equation de conservation de l'énergie (bilan de l'énergie) :

Si l'on néglige les transferts thermiques par rayonnement ainsi que le terme de dissipation visqueuse qui traduit une production de chaleur due à la viscosité du fluide, l'équation régissant les transferts de chaleur au sein du fluide qu'on rappelle incompressible s'écrit :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T \right) = \lambda \Delta T \quad (1.6)$$

Où :

λ : La conductivité thermique.

c_p : Capacité calorifique.

Pour :

$$K = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Donc l'équation d'énergie devienne :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T \right) = K \Delta T \quad (1.6)$$

C'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = K \Delta T \quad (1.7)$$

1.2.4. Conditions aux limites :

En $y = s(x, t)$:

Les conditions aux limites seront données en supposant que :

a. Condition de non glissement donnée par :

$$u = 0 \quad (1.8)$$

b. Condition cinématique :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = v \quad (1.9)$$

c. Les contraintes thermiques dans le substrat sont négligeables en raison du chauffage uniforme. Dans les expériences reportées dans la littérature, la température sur la paroi du substrat peut être maintenue constante et imposée comme :

$$T = T_w \quad (1.10)$$

d.

- Le substrat flexible est suffisamment mince, de sorte que la tension agit uniformément sur l'épaisseur du substrat [26].
- L'inertie du substrat est négligée en raison de son mouvement lent.
- L'équilibre des contraintes normales sur le substrat donné :

$$\frac{\rho_s h_s d_s}{1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2} s_t = -\sigma_s \cdot \nabla \mathbf{n}_s + \mathbf{n}_s \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_s \quad (1.11)$$

- ρ_s : La densité du solide.
- h_s : L'épaisseur du solide.
- d_s : Le coefficient d'amortissement.
- σ_s : La tension entre le solide et le fluide dont on néglige la variation par rapport à la température.

- $\mathbf{n}_s = \frac{\left(-\frac{\partial s}{\partial x}, 1\right)^t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}}$: Le vecteur normal à la surface.
- $-\nabla_s \cdot \mathbf{n}_s$: La courbure moyenne du substrat.

En réalité, l'équation (1.10) est une équation à membrane forcée simplifiée qui couple la force de rappel du substrat à la normale imposée par le fluide extérieur, et l'équilibre des forces néglige les contraintes de flexion.

Ce modèle a été largement appliqué pour étudier la dynamique des films liquides à l'intérieure des tubes flexibles, ainsi que la stabilité des flux de couches minces sur des pentes flexibles.

En $y = h(x, t)$:

a. Condition cinématique :

$$v = h_t + u h_x \quad (1.12)$$

b. Condition dynamique :

À l'interface, l'équilibre des forces superficielles provenant des efforts de cisaillement dus à la viscosité, des forces de pression, des forces thermocapillaires, ainsi que les forces de la tension superficielle se traduit par :

$$(p_0 - p) \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} - \sigma (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \nabla_s \sigma = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

Où :

p_0 : Désigne la pression atmosphérique.

∇_s : L'opérateur du gradient de surface.

$(-\nabla_s \cdot \mathbf{n})$: La courbure moyenne de la surface libre du liquide.

Sur l'interface libre du liquide $y = s(x, t)$, la contrainte d'équilibre s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \nabla_s \sigma - \sigma (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, 1\right)^t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \quad \text{Est la normale à l'interface.}$$

Donc :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} = -\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Alors :

$$-\nabla_s \cdot \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Est la courbure moyenne de la surface libre du liquide.

c. Condition thermiques :

Le bilan thermique est régi par la loi de refroidissement de Newton :

$$-\lambda \nabla \cdot T \cdot \mathbf{n} = h_g (T - T_\infty) \quad (1.14)$$

Où :

λ : La conductivité thermique du liquide.

h_g : Le coefficient de transfert de chaleur de liquide.

T_∞ : La température ambiante loin de l'interface libre de liquide, choisie comme température de référence T_0 .

d. Approximation de Boussinesq:

Pour modéliser l'effet Marangoni sur l'interface libre de liquide, on suppose une relation constitutive linéaire pour la tension superficielle σ , donnée par :

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma_T (T^i - T_0) \quad (1.15)$$

σ_T : La tension superficielle constante.

σ_0 : La tension superficielle à la température T_0

T^i : La température à l'interface libre de liquide.

Pour la plupart des liquides, σ_T est positive, ou leur tension superficielle diminue de manière monotone avec l'augmentation de la température.

1.3. Écoulement de base :

Lorsque l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire :

La vitesse et les autres variables ne dépendent plus du temps. Il y a alors identité entre trajectoire, ligne d'émission et ligne de courant, les systèmes référentiels devenant identiques.

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Et que le film à une épaisseur constante $h = h_0$ et le substrat est sans déformation, ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

La température à la paroi est supposée uniforme et est donnée par :

$$T = T_w$$

Alors la solution du système (1.4)-(1.10) dépend que de la variable y et est donnée par :

$$u_b = \frac{\rho g \sin \beta}{2\mu} (2h_0 y - y^2) \quad (1.16)$$

$$v_b = 0 \quad (1.17)$$

$$p_b = p_a - \rho g \cos \beta (y - h_0) \quad (1.18)$$

$$T_b = T_w - h_g \frac{T_w - T_a}{\lambda + h_g h_0} y \quad (1.19)$$

Cette solution donne lieu à un débit total établi à l'entrée de l'écoulement :

$$Q_0 = \int_0^{h_0} u_b(y) dy = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho g \sin \beta}{\mu} \right) h_0^3$$

Cela nous permet de définir une vitesse moyenne :

$$u_m = \frac{Q_0}{h_0} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho g \sin \beta}{\mu} \right) h_0^2$$

1.4. Équations adimensionnées :

On choisit comme vitesse caractéristique la vitesse moyennée u_m . On fait alors intervenir deux échelles d'espace : la longueur d'onde typique l_0 , pour les directions longitudinales, et la hauteur $h_0 = \epsilon l_0$ pour la direction normale. L'introduction du petit paramètre ϵ vient du fait que les ondes observées sont à grandes longueurs d'ondes et à petites amplitudes.

Ainsi, les échelles caractéristiques sont $l_0, h_0, h_0/u_m$ et $\mu u_m/\epsilon h_0$ pour x et y , le temps t et la pression p , respectivement. A partir de ces échelles caractéristiques, on trouve les variables adimensionnelles suivantes :

$$\hat{x} = x/l_0$$

$$\hat{y} = y/h_0$$

$$\hat{u} = u/u_m$$

$$\hat{v} = v/\epsilon u_m$$

$$\hat{t} = t u_m/l_0$$

$$\hat{p} = \epsilon(p - p_a)h_0/(\mu u_m)$$

$$\hat{T} = (T - T_a)/(T_w - T_a)$$

En utilisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement et les conditions aux limites s'écrivent (en omettant le symbole "hat").

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.20)$$

$$R\epsilon(u_t + uu_x + vv_y) + p_x = 3 + u_{yy} + \epsilon^2 u_{xx} \quad (1.21)$$

$$R\epsilon^3(v_t + uv_x + vv_y) + p_y = -3\epsilon \cot \beta + \epsilon v_{yy} + \epsilon^3 v_{xx} \quad (1.22)$$

$$RPr \epsilon(T_t + uT_x + vT_y) = \epsilon^2 T_{xx} + T_{yy} \quad (1.23)$$

Avec les conditions aux limites :

En $y = s(x, t)$:

$$u = 0 \quad (1.24)$$

$$v = s_t \quad (1.25)$$

$$T = 1 \quad (1.26)$$

$$B_s s_t + p - P_w = \frac{2(\epsilon^3 s_x^2 u_x - \epsilon s_x (u_y + \epsilon^2 v_x) + \epsilon v_y)}{(1 + \epsilon^2 s_x^2)} + \epsilon W_s \frac{s_{xx}}{(1 + \epsilon^2 s_x^2)^{3/2}} \quad (1.27)$$

A la surface libre $y = h(x, t)$:

$$v = h_t + u h_x \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} (u_y + \epsilon^2 v_x)(1 - \epsilon^2 h_x^2) - 4u_x h_x \\ = -2RMa\epsilon(1 + \epsilon^2 h_x^2)^{1/2}(T_x \\ + h_x T_y) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$p - \frac{2(\epsilon^3 h_x^2 u_x - \epsilon h_x (u_y + \epsilon^2 v_x) + \epsilon v_y)}{(1 + \epsilon^2 h_x^2)} = -\epsilon(W - \epsilon RMaT) \frac{h_{xx}}{(1 + \epsilon^2 h_x^2)^{3/2}} \quad (1.30)$$

$$T_y + BiT = \epsilon^2 h_x T_x \quad (1.31)$$

Avec :

- $\epsilon = \frac{h_0}{l_0}$ Paramètre d'ondes.
- $B_s = \frac{\rho_s h_s}{\rho h_0 u_m^2}$
- $W_s = \epsilon^2 R W e_s$ Le nombre de tension superficielle, tel que $W e_s = \rho h_0 u_m^2 / \sigma$ qui est le nombre de Weber.
- $R = \rho h_0 u_m / \mu$ Le nombre de Reynolds.
- $W = \epsilon^2 R W e$ Le nombre de tension superficielle.
- $W e = \rho h_0 u_m^2 / \sigma$ Le nombre de Weber.
- $Ma = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{l_0 \Delta T}{\eta \alpha}$ Le nombre de Marangoni.
- $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ Le nombre de Prandtl.
- $Bi = h \frac{l_0}{\lambda_b}$ Le nombre de Biot.
- La solution de base sans dimension est :

$$\begin{aligned} h &= 1 \\ s &= 0 \\ u_b &= \frac{3}{2}(1 - (1 - y)^2) \\ v_b &= 0 \\ p_b &= \epsilon \cot(\beta)(1 - y) \end{aligned}$$

$$T_b = 1 - \frac{Bi y}{1 + Bi h_0}$$

Chapitre 2 : Modèle

Chapitre 2 : Modèle

On veut chercher un modèle à l'ordre un.

Les équations de N-S, équation de température et les conditions aux limites jusqu'à l'ordre un sont données comme suite :

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.1)$$

$$Re(u_t + uu_x + vv_y) + p_x = 3 + u_{yy} \quad (2.2)$$

$$p_y = -3\epsilon \cot \beta \quad (2.3)$$

$$Pr Re(T_t + uT_x + vT_y) = T_{yy} \quad (2.4)$$

En $y = s$:

$$u = 0 \quad (2.5)$$

$$v = s_t \quad (2.6)$$

$$T = 1 \quad (2.7)$$

$$B_s s_t + p - P_w = -2\epsilon(s_x u_{0y} + u_{0x}) + \epsilon W_s s_{xx} \quad (2.8)$$

En $y = h$:

$$v = h_t + u h_x \quad (2.9)$$

$$u_y = -2\epsilon RMa(T|_{y=h})_x \quad (2.10)$$

$$p = 2\epsilon(v_y - h_x u_y) - \epsilon W h_{xx} \quad (2.11)$$

$$T_x + h_x T_y = 0 \quad (2.12)$$

2.1. Equation de la couche limite (élimination de la pression) :

En vertu de la condition (2.11) et en intégrant l'équation (2.3) entre y et h , l'expression de la pression s'écrit :

$$p(x, y, t) = -\epsilon W h_{xx} + 2u_x + \epsilon 3 \cot \beta (h - y) \quad (2.13)$$

En remplaçant dans (2.2), on aboutit à l'équation de la couche limite suivante :

$$u_{yy} - R\epsilon(u_t + uu_x + vu_y) + Wh_{xxx} + 3(1 - \cot(\beta)h_x) = 0$$

Donc le système bidimensionnel à l'ordre un est :

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.14)$$

$$u_{yy} - R\epsilon(u_t + uu_x + vu_y) + Wh_{xxx} + 3(1 - \cot(\theta)h_x) = 0 \quad (2.15)$$

$$Pr R\epsilon(T_t + uT_x + vT_y) = T_{yy} \quad (2.16)$$

En $y = s$:

$$u = 0 \quad (2.17)$$

$$v = s_t \quad (2.18)$$

$$T = 1 \quad (2.19)$$

$$B_s s_t + p - P_w = -2\epsilon(s_x u_y + u_x) + \epsilon W_s s_{xx} \quad (2.20)$$

En $y = h$:

$$v = h_t + u h_x \quad (2.21)$$

$$u_y = -2\epsilon RMa(T|_{y=h})_x \quad (2.22)$$

$$T_x + h_x T_y = 0 \quad (2.23)$$

2.2. Première équation du modèle : introduction du débit local

On définit le débit local par :

$$q = \int_s^h u \, dy$$

En intégrant l'équation de continuité par rapport à y sur l'intervalle $[s, h]$, on aura :

$$\begin{aligned} \int_s^h (u_x + v_y) dy &= \int_s^h u_x dy + v(h) - v(s) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^h u dy \right) + u(s)s_x - u(h)h_x + v(h) - v(s) \\ &= q_x + h_t - s_t = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la condition cinématique à la surface libre et la condition à la paroi, l'équation de continuité peut être écrite sous une forme intégrale suivante :

$$(h - s)_t + q_x = 0 \quad (2.24)$$

L'équation (2.24) constitue la première équation de notre modèle.

2.3. Deuxième équation du modèle : équation intégrale aux résidus pondérés

Jusqu'à l'ordre $o(\epsilon)$, l'expression de u et T sont données par :

$$u(x, y, t) = u_0^* + \epsilon u_1^* + o(\epsilon) \quad (2.25)$$

$$T(x, y, t) = T_0^* + \epsilon T_1^* + o(\epsilon) \quad (2.26)$$

Où u_1^* et T_1^* sont les corrections au premier ordre du terme principal u_0^* et T_0^* respectivement.

a. Le traitement de la vitesse :

Pour construire la deuxième équation de notre modèle à l'ordre un, premièrement on cherche la solution d'ordre zéro. En effet, l'introduction de l'expression (2.25) dans le système (2.15), (2.17) et (2.22), et en collectant ordre par ordre, l'ordre zéro est donné par :

$$u_{0yy}^* + 3 = 0 \quad (2.27)$$

$$u_0^*(s) = 0 \quad (2.28)$$

$$u_{0y}^*(h) = 0 \quad (2.29)$$

L'intégration du système (2.27)-(2.29), u_0^* prend forme :

$$u_0^* = a_0(x, t) (1 - z^2)$$

$$\text{Où : } z = 1 - \frac{y-s}{h-s}$$

Par suite, le profil de vitesse est donné par :

$$u = a_0(x, t) f_0(z) + \epsilon u_1^* \quad (2.30)$$

$$f_0(z) = 1 - z^2.$$

On introduisant la notion du débit dans l'expression (2.30), u peut s'écrire comme suit :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (2.31)$$

$$u_0 = \frac{3}{2} \frac{q}{h-s} f_0(z)$$

$$u_1 = u_1^* - \left(\frac{3}{2} \int_0^1 u_1^* dz \right) f_0(z)$$

Notons que u_0 et u_1 sont tels que :

$$\int_s^h u_0 dy = q \text{ et } \int_s^h u_1 dy = 0 \quad (2.32)$$

On note : $u_0 = a_1 f_0(z)$ c'est-à-dire : $a_1 = \frac{3}{2} \frac{q}{h-s}$

En multipliant l'équation de couche limite (2.15) par une fonction poids, notée G , et en intégrant entre s et h , on obtient :

$$G = -\frac{(h-s)^2}{2} (1-z^2) = -\frac{(h-s)^2}{2} f_0$$

$$\int_s^h G(z) \{u_{yy} - R\epsilon(u_{0t} + u_0 u_x + v_0 u_{0y}) + W h_{xxx} + 3(1 - \cot(\theta) h_x)\} dy = 0 \quad (2.33)$$

On utilisant l'équation de continuité l'expression de v_0 peut être calculée comme suite :

$$v_0 = v(s) - \int_s^y u_{0x} dy = s_t - \int_s^y u_{0x} dy$$

On remarque que le terme visqueux u_{yy} est le seul où la correction doit être tenue en compte. Pour pouvoir simplifier la correction d'ordre un dans (2.33), deux intégrations par parties sont nécessaires.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_s^h G(y) u_{yy} dy &= [u_y G]_s^h - \int_s^h u_y G_y dy \\ &= [u_y G]_s^h - [u G_y]_s^h + \int_s^h u G_{yy} dy \\ &= u_y(h)G(h) - u_y(s)G(s) - u(h)G_y(h) + u(s)G_y(s) + \int_s^h u G_{yy} dy \end{aligned} \quad (2.34)$$

En utilisant les conditions aux limites (2.17) et (2.22), on obtient :

$$\int_s^h G(y)u_{yy}dy = -2\epsilon RMa(T_0|_{y=h})_x G(h) - u_y(s)G(s) - u(h)G_y(h) + \int_s^h uG_{yy}dy \quad (2.35)$$

À présent, on peut montrer que la correction u_1 peut être éliminée du calcul par un simple choix d'une fonction poids adéquate G , telle que :

$$G|_{y=s} = 0, \quad G_y|_{y=h} = 0, \quad G_{yy} = 1 \quad (2.36)$$

Donc G prend forme :

$$G = -\frac{(h-s)^2}{2}(1-z^2) = -\frac{(h-s)^2}{2}f_0$$

D'où (2.35) est réduite à :

$$\int_s^h G(y)u_{yy}dy = \epsilon RMa(h-s)^2(T_0|_{y=h})_x + q$$

Ainsi, l'équation (2.34) prend forme :

$$q - (h-s)^3 \left\{ 1 + \epsilon \left(\frac{W}{3} h_{xxx} - h_x \cot \beta \right) \right\} + \epsilon R \frac{2}{15} (h-s)^2 \left\{ q_t + \frac{17}{7} \frac{qq_x}{(h-s)} - \frac{9}{7} \frac{q^2(h-s)_x}{(h-s)^2} \right\} = -\epsilon RMa(h-s)^2(T_0|_{y=h})_x \quad (2.36)$$

Il reste à déterminer T_0 la température à l'ordre zéro.

b. Le traitement de la température :

On a :

$$T(x, y, t) = T_0^* + \epsilon T_1^* + o(\epsilon) \quad (2.37)$$

L'ordre zéro est donné par :

$$T_{0yy}^* = 0 \quad (2.38)$$

$$T_0^*(s) = 1 \quad (2.39)$$

$$(T_{0y}^* + BiT_0^*)|_{y=h} = 0 \quad (2.40)$$

L'intégration de l'équation (2.38), et avec les deux conditions aux limites (2.39) et (2.40), la solution est donnée par :

$$T_0(x, y, t) = 1 - \frac{Bi(h-s)(1-z)}{1+Bi(h-s)} \quad (2.41)$$

Comme dans l'équation (2.36) on a besoin de la température à l'ordre zéro, alors le modèle à l'ordre un est donné par :

$$3 \frac{q}{(h-s)^2} - (h-s)\{3 + \epsilon(Wh_{xxx} - 3h_x \cot \beta)\} + \epsilon R \frac{2}{5} \left\{ q_t + \frac{17}{7} \frac{qq_x}{(h-s)} - \frac{9}{7} \frac{q^2(h-s)_x}{(h-s)^2} \right\} = \frac{\epsilon}{2} \frac{MaBi(h-s)_x}{(1+Bi(h-s))^2} \quad (2.42)$$

2.4. Troisième équation :

Soit la condition normale à l'interface s :

$$B_s s_t + p - P_w = -2\epsilon(s_x u_{0y} + u_{0x}) + \epsilon W_s s_{xx} \quad (2.43)$$

Si on remplace par la valeur de la pression (2.13) dans la condition normale (2.43) On obtient :

$$B_s s_t = -2\epsilon(s_x u_{0y} + u_{0x}) - \epsilon Wh_{xx} + 3\epsilon \cot \beta (h-s) + \epsilon W_s s_{xx} \quad (2.44)$$

Comme :

$$u_0 = \frac{3}{2} \frac{q}{d} f_0(z) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}(s) = -3 \frac{q}{(h-s)^2} s_x \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}(h) = 3 \frac{q}{(h-s)^2} \quad (3.41)$$

L'équation d'évolution de l'interface entre le solide et le liquide est la suivante :

$$B_s s_t - \epsilon Wh_{xx} + 3\epsilon \cot \beta (h-y) + \epsilon W_s s_{xx} \quad (3.42)$$

Le système de notre modèle est donné par les trois relations suivantes :

$$(h - s)_t + q_x = 0$$

$$3 \frac{q}{(h - s)^2} - (h - s) \{3 + \epsilon (Wh_{xxx} - 3h_x \cot \beta)\} \\ + \epsilon R \frac{2}{5} \left\{ q_t + \frac{17}{7} \frac{qq_x}{(h - s)} - \frac{9}{7} \frac{q^2 (h - s)_x}{(h - s)^2} \right\} = \frac{\epsilon}{2} \frac{MaBi(h - s)_x}{(1 + Bi(h - s))^2}$$

$$B_s s_t = -\epsilon Wh_{xx} + 3\epsilon \cot \beta (h - s) + \epsilon W_s s_{xx}$$

Chapitre 3 : Stabilité linéaire

Chapitre 3 : Stabilité linéaire

Dans ce chapitre, notre travail consiste à étudier la stabilité linéaire de l'écoulement par rapport à la solution de base en utilisant le modèle à trois équations développé dans le chapitre précédent.

3.1. Linéarisation des équations :

On pose :

$$h = 1 + H(x, t), s = 0 + S(x, t), q = 1 + Q(x, t) \quad (3.1)$$

$H(x, t)$, $S(x, t)$ et $Q(x, t)$ sont des perturbations

La solution de référence (de base) est donnée par :

$$h = 1, \quad s = 0, \quad q = 1$$

En injectant l'expression (3.1) dans les équations de notre modèle et en tenant compte que des termes linéaire, on obtient le système linéaire suivant :

$$(H - S)_t + Q_x = 0 \quad (3.2)$$

$$RQ_t = R \left(\frac{9}{7} (H - S)_x - \frac{17}{7} Q_x \right) - \frac{5}{2} \left(Q - 3(H - S) - \frac{W}{3} H_{xxx} + \cot\beta H_x \right) \quad (3.3)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{MaBi(H - S)_x}{(1 + Bi)^2}$$

$$B_s S_t + WH_{xx} - 3D \cot(\beta) - W_s S_{xx} = 0 \quad (3.4)$$

3.2. Relation de dispersion :

On définit les modes normaux sous la forme :

$$H = Ae^{i(\alpha x - \omega t)}, S = Be^{i(\alpha x - \omega t)}, Q = Ce^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (3.5)$$

Où, A, B et C sont des amplitudes des perturbations initiales, $\alpha \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde.

$\omega = c\alpha \in \mathbb{C}$ Est la fréquence, c étant la célérité complexe. Sa partie réelle représente la vitesse phase et sa partie imaginaire représente le taux d'amplification des perturbations.

En substituant ces perturbations (3.5) dans les équations (3.2), (3.3) et (3.4), on obtient un système de trois équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} \omega A - \omega B + C\alpha = 0 \\ \frac{5}{6}i\alpha \left(W\alpha^2 + 3 \cot \beta - \frac{54}{35}R - \frac{3}{5} \frac{MaBi}{(1+Bi)^2} - 9 \right) A + \left(i\alpha \left(\frac{9}{7}R + \frac{1}{2} \frac{MaBi}{(1+Bi)^2} \right) + \frac{15}{2} \right) B \\ \quad + \left(i\alpha \left(\frac{17}{7} - \frac{\omega}{\alpha} \right) R + \frac{5}{2} \right) C = 0 \\ -(W\alpha^2 + 3 \cot \beta)A + (W_s\alpha^2 - iB_s\omega + 3 \cot \beta)B = 0 \end{cases}$$

En éliminant les amplitudes, on obtient la relation de dispersion pour notre modèle :

$$D(\alpha, \omega) = 0 \quad (3.6)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & 42IB_sR\omega + \left(42(W - W_s)R\alpha^2 - 102IB_sR\alpha - 105Bs \right) \omega^2 + \frac{1}{(Bi+1)^2} \left(102I \left(\right. \right. \\ & - \frac{35}{34}Bs\alpha(Bi+1)^2 \cot(\beta) - \frac{35}{102}BsW(Bi+1)^2\alpha^3 + I(Bi+1)^2(W - W_s)R\alpha^2 \\ & + \left(\left(\frac{9}{17}BsR - \frac{35}{34}Ws + \frac{35}{34}W \right) Bi^2 + \left(\left(\frac{18}{17}R + \frac{7}{34}Ma \right) Bs - \frac{35}{17}Ws \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{35}{17}W \right) Bi + \frac{9}{17}BsR - \frac{35}{34}Ws + \frac{35}{34}W \right) \alpha - \frac{105}{34}IB_s(Bi+1)^2 \left. \right) \alpha \omega \\ & + \frac{1}{(Bi+1)^2} \left(102I \left(-\frac{35}{34}Bs\alpha(Bi+1)^2 \cot(\beta) - \frac{35}{102}BsW(Bi+1)^2\alpha^3 \right. \right. \\ & + I(Bi+1)^2(W - W_s)R\alpha^2 + \left(\left(\frac{9}{17}BsR - \frac{35}{34}Ws + \frac{35}{34}W \right) Bi^2 + \left(\left(\frac{18}{17}R \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{7}{34}Ma \right) Bs - \frac{35}{17}Ws + \frac{35}{17}W \right) Bi + \frac{9}{17}BsR - \frac{35}{34}Ws + \frac{35}{34}W \left. \right) \alpha \\ & \left. - \frac{105}{34}IB_s(Bi+1)^2 \right) \alpha \left. \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3. Courbes de stabilité :

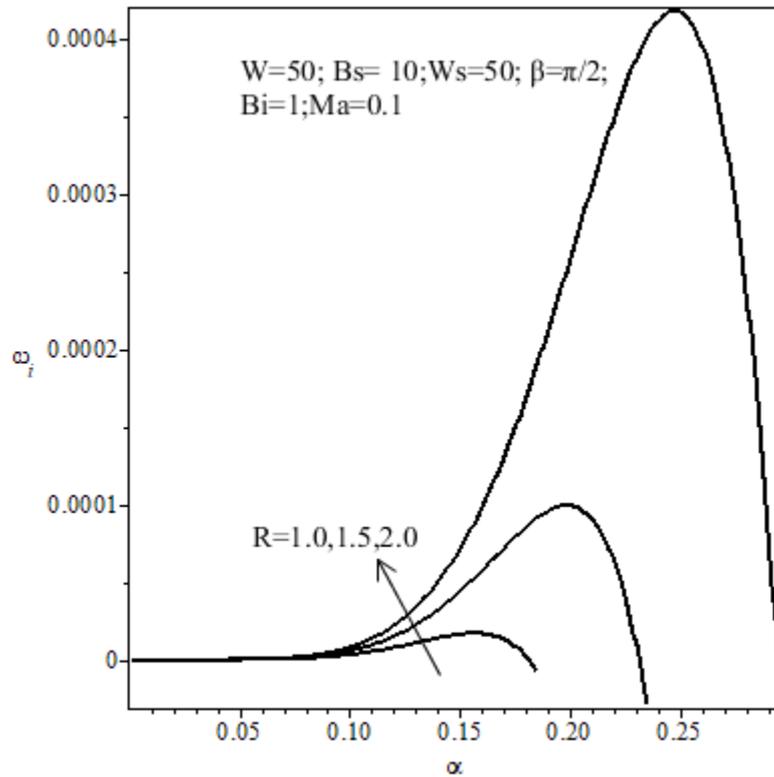


Fig.3.1 : Les courbes du taux l'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour différentes valeurs du nombre de Reynolds R .

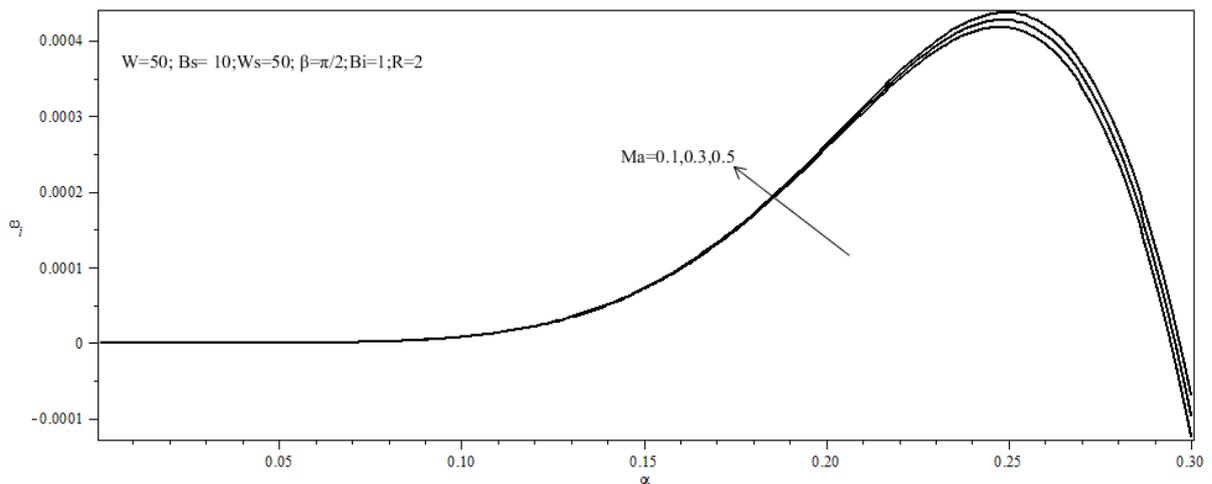


Fig.3.2 : Les courbes du taux l'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour différentes valeurs du nombre Marangoni Ma .

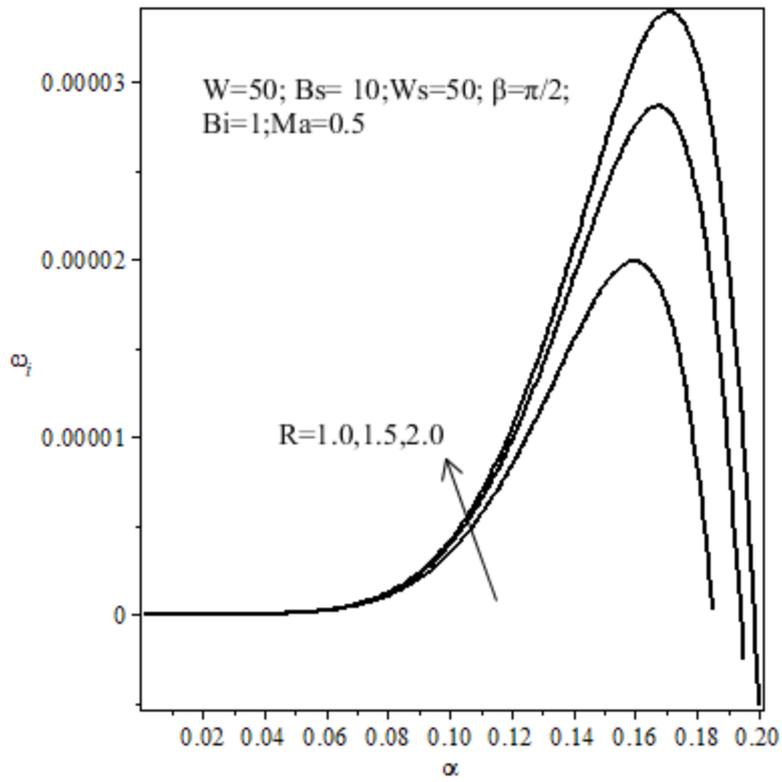


Fig.3.3 : Les courbes du taux l'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour differentes valeurs du nombre de Reynolds R .

Interprétations :

On obtient donc les courbes de dispersion du taux d'amplification $\omega_i(\alpha)$ qui montrent les effets de l'inertie représenté par le nombre de Reynolds R et thermocapillaire Ma sur la stabilité linéaire, comme illustré sur les Fig.3.1 et Fig.3.2, respectivement. Nous observons que le taux de croissance effectif maximal (ω_i) et nombre d'onde de critique (k_c) augmente avec l'augmentation de R et Ma , ce qui indique les rôles déstabilisateurs de l'inertie et des effets de Marangoni.

Conclusion :

Dans ce travail, nous avons étudié le comportement dynamique des couches minces, qui s'écoule sur un substrat flexible chauffé uniformément. En utilisant l'hypothèse des grandes ondes, un modèle simplifié de la membrane a été donné, et en la combinant à l'approche des résidus pondérés, on dérive un ensemble d'équations d'évolutions aux dérivées partielles pour décrire l'évolution spatio-temporelle des films liquides minces, et le profil de la déflexion de la paroi avec la considération d'effet thermocapillaire. Une étude de stabilité linéaire a été effectuée et on a mis en évidence l'effet déstabilisant de l'inertie de Marangoni.

Références Bibliographiques

- [1] Introduction à la mécanique théorique des fluides, Pierre-Antoine Bois, préface de Paul German.
- [2] S. J. Weinstein and K. J. Ruschak, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 36, 29 (2004).
- [3] R. W. Griffiths, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 32, 477 (2000).
- [4] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M. G. Velarde, *Falling Liquid Films*, Vol. 176 (Springer Science & Business Media, Berlin, (2011).
- [5] P. L. Kapitza and S. Kapitza, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 19, 105 Q (1949).
- [6] G. F. Dietze, F. Al-Sibai, and R. Kneer, *J. Fluid Mech.* 637, 73 (2009).
- [7] C. Duprat, F. Giorgiutti-Dauphiné, D. Tseluiko, S. Saprykin, and S. Kalliadasis, *Phys. Rev. Lett.* 103, 234501 (2009).
- [8] O. Reynolds, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 177, 157 (1886).
- [9] V. Y. Shkadov, *Fluid Dyn.* 2, 29 (1967).
- [10] C. Ruyer-Quil and P. Manneville, *Eur. Phys. J. B* 15, 357 (2000).
- [11] J. Bico, É. Reyssat, and B. Roman, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 50 (2018).
- [12] A. Bungler and A. Cruden, *J. Geophys. Res.* 116 (2011).
- [13] C. Duprat, S. Protiere, A. Beebe, and H. Stone, *Nature* 482, 510 (2012).
- [14] E. R. Jerison, Y. Xu, L. A. Wilen, and E. R. Dufresne, *Phys. Rev. Lett.* 106, 186103 (2011).
- [15] D. Kumar, J. D. Paulsen, T. P. Russell, and N. Menon, *Science* 359, 775 (2018).
- [16] D. Halpern and J. Grotberg, *J. Fluid Mech.* 244, 615 (1992).
- [17] O. K. Matar and S. Kumar, *SIAM J. Appl. Math.* 64, 2144 (2004).
- [18] P. Howell, J. Robinson, and H. Stone, *J. Fluid Mech.* 732, 190 (2013).
- [19] Z. Zheng, I. M. Griffiths, and H. A. Stone, *J. Fluid Mech.* 784, 443 (2015).
- [20] J. Peng, Y.-J. Zhang and W.-L. Zhuge, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 210, 85 (2014).

- [21] L. Scriven and C. Sternling, *J. Fluid Mech.* 19, 321 (1964).
- [22] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M. G. Velarde, *Falling Liquid Films*, Vol. 176 (Springer Science & Business Media, Berlin, (2011).
- [23] S. Sreenivasan and S. Lin, *Int. J. Heat Mass Transfer* 21, 1517 (1978).
- [24] S. Saprykin, P. M. J. Trevelyan, R. J. Koopmans.
- [25] C. Ruyer-Quil, B. Scheid, S. Kalliadasis, M. G. Velarde.
- [26] S. Yang, K. Khare, and P.-C. Lin, *Adv. Funct. Mater.* 20, 2550 (2010).
- [27] M. Kobayashi, W. Zavadski, W. Kalriess, I. Smith
- [28] Youchuang Chao and Zijing Ding, Thermocapillary thin-film flows on a compliant substrate, *PHYSICAL REVIEW E* 00, 003100 (2019).

Annexe

Le nombre de Marangoni (Ma) :

Est un nombre sans dimension, utilisé en mécanique des fluides, évaluant l'intensité du phénomène de convection à l'interface liquide-gaz (aussi appelé phénomène de thermo capillarité).

Le nombre de Marangoni peut ainsi être évalué par la formule suivante :

$$Ma = - \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{L_c \Delta T}{\eta \alpha}$$

Avec :

L_c : La longueur caractéristique du système (m)

$\frac{\partial \sigma}{\partial T}$: La dépendance de la tension superficielle avec la température ($\text{N m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

α : La diffusivité thermique du liquide ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)

η : La viscosité dynamique du liquide (Pa s)

ΔT : La différence de température (K)

La présence du signe négatif (-) permet d'obtenir un nombre adimensionnel, Ma positif du fait de la décroissance, généralement constatée, de la tension superficielle avec la température (les autres grandeurs étant strictement positives).

Le nombre de Prandtl (Pr) :

Est un nombre sans dimension, qui égale au rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique) et celle de la chaleur (diffusivité thermique).

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Avec :

ν : La viscosité cinématique

α : La diffusivité thermique, qui s'exprime toutes deux en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Une définition équivalente est :

$$Pr = \mu \frac{c_p}{\lambda}$$

Avec :

μ : La viscosité dynamique ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)

λ : La conductivité thermique ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

c_p : La capacité thermique massique à pression constante ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)

Le nombre de Biot (Bi) :

Est un nombre sans dimension utilisé dans les calculs de transfert thermique en phase transitoire.

Il compare les résistances au transfert thermique à l'intérieur et à la surface d'un corps.

$$Bi = h \frac{L_c}{\lambda_b}$$

Avec :

h : Coefficient global de transfert thermique ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$)

L_c : Longueur caractéristique (m)

λ_b : Conductivité thermique du corps ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

Le nombre de Reynolds (Re) :

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

$$Re = \frac{\rho U L_c}{\mu}$$

Avec :

ρ : La masse volumique du fluide (kg m^{-3})

U : La vitesse caractéristique du fluide (m s^{-1})

L_c : Dimension caractéristique (diamètre) (m)

μ : La viscosité dynamique du fluide (Pa s ou $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)

Le nombre de Weber (We) :

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface d'un système multiphasique. Il correspond au rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle.

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$$

Avec :

ρ : La masse volumique du fluide (kg m^{-3})

U : La vitesse caractéristique du fluide (m s^{-1})

L : La longueur caractéristique (m)

σ : La tension superficielle (N m^{-1})