

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme Master en électrotechnique
Option : Machines électriques

Thème **Modélisation magnétothermique du** **Transformateur monophasé**

Réalisé par :

HAMMOUCHE Karima
CHERFA Marouane

Encadré par :

M^r. ALITOUCHE K

Promotion 2019/2020

Remerciements

Au terme de ce mémoire, nous remercions le Dieu le miséricordieux de nous avoir donné le courage et la patience pour mener au bout ce modeste travail.

Egalement nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre promoteur Mr ALITOUCHE.K, qui nous a fait l'honneur de nous prendre sous sa responsabilité, ainsi que pour ces orientations et précieux conseils, qu'il trouve ici toutes les expressions de notre respect et gratitude.

Nous ne manquerons pas de remercier chaleureusement Mr YOUCFI.R le responsable de hall technologie

Que tous les membres de jury trouvent ici notre plus profonde reconnaissance pour avoir accepté de juger ce travail.

Nos remerciements s'adressent également aux enseignants qui ont contribué à notre formation, et à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à l'achèvement de ce travail

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À ma fabuleuse étoile ma très chère mère.

A mon père : le plus bon de tous les pères.

A mes chers frères.

A mes chères sœurs.

A toute ma famille en général.

A mon binôme Marouane avec qui j'ai partagé ce travail et toute sa famille.

A tous mes amis avec qui j'ai partagé des moments précieux.

A tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, tous cycles confondus, chacun en son nom.

KARIMA HAMMOUCHE

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- La mémoire de mes grands-parents ;*
- Ma grand-mère ;*
- Mes chères parents BRAHIME et NAIMA qui se sont sacrifier tout au long de mes études, pour qui je prie ALLAH de leurs accorder santé et longue vie ;*
- Mes frères YAHIA et ADEL ;*
- OUAHBI qui m'a fait l'espoir ;*
- Ma binôme et toute sa famille ;*
- Mes oncles et mes tantes ;*
- Tous mes amis surtout mon deuxième frère Farès*

Marouane

Liste des figures :

Figure (I.1) :Circuit magnétique à colonne.....	3
Figure (I.2) :Circuit magnétique de forme cuirassée.....	3
Figure (I.3) :Circuit électromagnétique simple.....	5
Figure (I.4) Circuit équivalent du transformateur idéal.....	5
Figure (I.5) :Le transformateur à vide.....	6
Figure (I.6) :Circuit équivalent du transformateur à vide.....	7
Figure (I.7) :Le transformateur en charge.....	7
Figure (I.8) :Circuit équivalent du transformateur idéal.....	8
Figure (I.9) :Essai à vide du transformateur.....	9
Figure (I.10) :Essai en court-circuit du transformateur.....	9
Figure (I.11) :S schéma électrique équivalent d'un transformateur.....	10
Figure (I.12) :Le circuit électrique et magnétique du transformateur.....	11
Figure (I.13) :Le transformateur parfait modifie la forme de l'énergie électrique.....	12
Figure (I.14) :Transformateurs triphasés.....	12
Figure (I.15) :Transformateur à colonnes.....	13
Figure (I.16) :Modélisation d'un transformateur monophasé en basse fréquence sans saturation.....	15
Figure (I.17) :Modélisation d'un transformateur monophasé en basse fréquence avec pertes fer.....	15
Figure(I.18) :Modélisation d'un transformateur monophasé en basse fréquence avec saturation.....	16
Figure(I.19) :Modèle de Kapp du transformateur.....	17
Figure(I.20) :Mise en évidence de l'effet pelliculaire (Courant unitaire imposé).....	19
Figure(I.21) :Mise en évidence de l'effet de proximité (Courant unitaire imposé).....	20
Figure(I.22) :Echanges thermiques dans un transformateur de type sec (Cas général).....	23
Figure (II.1) : Interface entre deux milieux.....	28
Figure (II.2) : Exemples d'éléments d'un maillage éléments finis.....	36
Figure (II.3) : Elément triangulaire linéaire.....	36
Figure (II.4) : Pertes par hystérésis.....	42
Figure (II.5) : Simplification du cycle d'hystérésis.....	43
Figure(II.6) : Cycle d'hystérésis d'un élément élémentaire de Preisach.....	45
Figure (II.7) : Domaine d'évaluation des couples (H_a H_b).....	45
Figure (II.8) : Effet pelliculaire dans un conducteur.....	47

Figure (II.9) : Effet de proximité entre deux conducteurs.....	47
Figure (II.10) : Champ magnétique dans deux conducteurs plats et parallèles parcourus par des courants opposés à faibles et hautes fréquences.	50
Figure (II.11) : Facteur de pertes F_r dépendant de la fréquence et du nombre de couches	51
Figure (II.12) : section de conducteur avec une génération de chaleur interne q et une conductivité thermique isotrope λ	53
Figure (II.13) : Résistance thermique $R_{\theta} \cdot 1000$ par rapport au type de transformateur et aux proportions de la géométrie du transformateur.	54
Figure (II.14) : Présentation du modèle.....	55
Figure (II.15) : Conductances thermiques d'un nœud dans un volume V_i	56
Figure (II.16) : Etapes de modélisation par EF	59
Figure (III.1) : dimensionnement de transformateur monophasé.	62
Figure (III.2) : montre les conditions aux limites imposées sur la surface extérieure du transformateur.	63
Figure (III.3) : Maillage en éléments finis du domaine d'étude.	63
Figure (III.4) : Courbe de flux magnétique en fonction du courant à vide.	64
Figure (III.5) : Répartition de l'induction magnétique dans le transformateur à vide.	64
Figure (III.6) : Courbe de l'induction magnétique en fonction de la longueur (le long de la ligne AB de la figure III.5).	65
Figure (III.7) : Répartition de l'induction magnétique dans le transformateur en charge.	65
Figure (III.8) : Courbe de l'induction magnétique en fonction de la longueur de transformateur dans l'essai en charge (le long de la ligne AB de la figure III.7).	66
Figure (III.9) : montre les conditions aux limites imposées au transformateur.....	67
Figure (III.10) : Répartition de température dans le transformateur (essai à vide).....	68
Figure (III.11) : Courbe de variation de température dans différents zone de transformateur (essai à vide).....	68
Figure (III.12) : Répartition de température dans le transformateur (essai en charge).	69
Figure (III.13) : Courbe de variation de température dans différents zone de transformateur le long de la ligne AB sur la figure III.12 (essai en charge).	70

Liste des tableaux :

Tableau(III.1) : définit les propriétés des matériaux utilisé dans le transformateur..... 62

Tableau (III.2) : Définit les propriétés thermiques des matériaux utilisés dans le transformateur. 66

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les transformateurs et le mode de transfert thermique dans les transformateurs	
I.1.Introduction :.....	2
I.2. Transformateur :.....	2
I.2.1.Constitution de transformateur.....	2
I.2.1.1 Circuit magnétique :	2
I.2.1.2. Circuit électrique :	3
I.2.2.Principe de fonctionnement.....	4
I.2.3.Transformateur parfait.....	5
I.2.2.1. Fonctionnement à vide du transformateur idéal :	6
I.2.3.2. Fonctionnement en charge du transformateur idéal :	7
I.2.4.Transformateur réelle	8
I.2.5.Essais et propriété de transformateur	8
I.2.5.1. Essai à vide :	9
I.2.5.2. Essai en court-circuit :	9
I.3. Type de transformateur :.....	10
I.3.1 Transformateur de puissance.....	10
I.3.2 Transformateur monophasé.....	10
I.3.3. Transformateur triphasé	12
I.3.4. Transformateurs à colonnes	13
I.3.5. Transformateur cuirassée	13
I.3.6. Transformateur de tension.....	14
I.3.7. Transformateur de courant	14
I.4. Modélisation des transformateurs :.....	14
I.4.1. Transformateur monophasé linéaire sans saturation	14
I.4.2 .Transformateur monophasé avec saturation.....	15
I.5.Pertes dans le Transformateur :.....	16
I.5.1.Modèle de Kapp	17
I.5.2.Prise en Compte de la Fréquence	17
I.5.2.1.Inductance de Magnétisation :	18
I.5.2.2.Inductances de Fuite :	18
I.5.2.3.Résistance de Modélisation des Pertes Fer :	18

I.5.2.4.Capacités Parasites :	19
I.5.2.5.Résistances des Enroulements :	19
I.5.3.Pertes dans le Noyau Ferromagnétique	20
I.5.4.Pertes dans la Tôle et la Structure	21
I.5.5.Pertes Diélectriques	21
I.5.6.Pertes dans les Enroulements	21
I.6.Transfert Thermique dans un transformateur :	22
I.6. Synthèse des Différents Echanges.....	22
I.6.2. Equations de Transfert de Chaleur :	22
I.6.2.1.Conduction :	24
I.6.2.2.Convection :	24
I.6.2.3.Rayonnement :	25
I.7.Conclusion :	25

Chapitre II : Modélisation magnétothermique du transformateur

II.1.Introduction :	26
II.2.Domaine magnétique :	26
II.2.1.Equations de Maxwell :	26
II.2.2.Loïs de comportement des matériaux :	27
II.2.3.La loi d'Ohm :	27
II.2.4. Relations de passage :	28
II.2.5.Equations de Maxwell simplifiées :	29
II.2.6. Modèles électromagnétiques :	29
II.2.6.1.Modèle magnétostatique :	29
II.2.6.2.Modèle magnétodynamique :	30
II.2.7.Choix de la variable d'état :	30
II.2.8.Formulation en potentiel vecteur magnétique :	30
II.2.9. Conditions de Jauge :	31
II.2.10.Formulation bidimensionnelle en potentiel vecteur magnétique :	31
II.2.10.1.Formulation 2D cartésien :	32
II.2.10.2.Formulation 2D axisymétrique :	32
II.2.11.Les conditions aux limites :	33
II.3.Méthodes de résolution :	33
II.3.1. Principe de la méthode des éléments finis :	33
II.3.2. Mise en œuvre de la méthode des éléments finis :	34
II.3.2.1.Formulation intégrale :	34
II.3.2.2.Discretisation du domaine d'étude :	35

II.3.2.3.Calcul de la fonction d'approximation :	36
II.3.2.4.Conditions aux limites :	38
III.3.3.Discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) :	38
III.3.3.1.Modèles magnétostatiques :	38
II.3.3.2.Modèle magnétodynamique :	39
II.3.3.3.Modèle électrostatique :	40
II.4.Les Pertes :	41
II.4.1.Les pertes Fer :	41
II.4.1.1.Les pertes par hystérésis :	41
II.4.1.2.Les pertes par courant de Foucault :	44
II.4.1.3.Les modèles de pertes fer.....	44
II.4.2. Les pertes Joules :	46
II.4.2.1.L'effet pelliculaire :	46
II.4.2.2.L'effet de proximité :	47
II.4.2.3.Les modèles de pertes Joules :	48
II.4.2.4.Compte tenu des pertes et de la dissipation thermique :	51
II.5.Domaine thermique :	55
II.5.1.Modelisation thermique :	55
II.5.2.Outils de modélisation thermique :	55
II.5.2.1.Méthode nodale :	55
II.5.2.2.Méthode des éléments finis :	57
II.6.Conclusion :	59

Chapitre III : Simulation numérique de transfert thermique dans un transformateur monophasé

III.1.Introduction :	60
III.2.Présentation de Logiciel FEMM :	60
III.2.1.Langage de programmation LUA :	61
III.3.Description de problème :	61
III.4.Simulation du problème magnétique :	62
III.4.1.Les différents matériaux du transformateur :	62
III.4.2.Définition des conditions aux limites :	63
III.4.3.Maillage en éléments finis du transformateur :	63
III.4.3.Essai à vide :	64
III.4.4.Essai en charge :	65
III.5. Simulation du problème thermique :	66
III.5.1.Les différents matériaux :	66

III.5.2.Définition des conditions aux limites:	67
III.5.2.Essai à vide :	67
III.5.3.Essai en charge :	69
III.5.4.Interprétation des résultats :	70
III.6.Conclusion :	70
Conclusion générale	72

Introduction générale :

L'étude des phénomènes magnétothermiques dans un transformateur a pour but d'évaluer d'une manière précise le comportement des grandeurs globales et le transfert de chaleur.

La distribution de ces grandeurs ainsi le transfert de chaleur est gouverné par un système d'équations aux dérivées partielles qui régit son fonctionnement et qui s'exprime sous la forme de modèle mathématique ou numérique qui permet de le résoudre à l'aide de l'outil informatique en utilisant une méthode de choix propre à la nature du problème recherché.

Ce présent travail, est porté sur l'évaluation du comportement magnétothermique des transformateurs en utilisant la méthode des éléments finis. Ceci nous permettra d'avoir une approche de transfert thermique au niveau du transformateur. La méthode des éléments finis est fortement développée, car elle s'adapte aux études des géométries complexes et non linéaires. Vu sa capacité d'exécution et la disponibilité de logiciels accessibles librement ou commerciaux le traitement pas le biais de cette méthode s'étend à plusieurs domaines.

Notre mémoire est construit comme suite :

Le premier chapitre est consacré à la présentation du transformateur d'une manière générale, en rappelant les différentes relations régissant son fonctionnement, sa constitution ainsi les modes de transfert thermique.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation magnétothermique qui se devise en trois parties essentielles :

La première partie est relative à la modélisation électromagnétique qui se compose des équations de Maxwell, des relations constitutives du milieu. Une mise en perspective des différents modèles des phénomènes électromagnétiques qui en découlent. Ensuite, Nous présentons la méthode des éléments finis appliqué à un modèle électromagnétique.

La deuxième partie a pour objet de déterminer les différentes pertes dans le transformateur.

Dans la troisième partie nous présentons la méthode de modélisation thermique par la méthode nodale, et la méthode des éléments finis que nous allons adapter au problème thermique considéré.

Le troisième chapitre est réservé à la simulation numérique à base de logiciel des éléments finis FEMM :

Des calculs de températures obtenus par la résolution du modèle thermique du transformateur en 2D sont présentés.

Nous terminerons notre étude par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les
transformateurs et le mode de
transfert thermique dans les
transformateurs

I.1.Introduction

Le transformateur est un composant électrique essentiel au fonctionnement dans divers types d'applications: dans les réseaux de transmission électrique, dans la distribution électrique, dans les usines en amont de fours électriques notamment et dans les trains. Chacun répondant à des contraintes et des usages très différents.

Le transformateur est une machine électrique statique qui transforme des signaux de tensions et de courants de fréquence donnée en signaux de même fréquence mais de valeurs efficaces différentes. Le transformateur est un convertisseur statique à induction qui comporte deux ou plusieurs enroulements fixes, magnétiquement couplés et destiné à la conversion, par l'intermédiaire de l'induction électromagnétique et des paramètres de l'énergie électrique à courant alternative (tension, intensité de courant, fréquence et nombre de phases).

Ce premier chapitre expose une étude théorique détaillée de transformateur ainsi que les différents types, nous verrons, ensuite, les différents modes de transfert thermique dans le transformateur.

I.2. Transformateur

I.2.1. Constitution

I.2.1.1 Circuit magnétique

Le rôle du circuit magnétique est de canaliser le flux magnétique Φ [Wb] et de présenter le minimum de pertes par Hystérésis et par courant de Foucault.

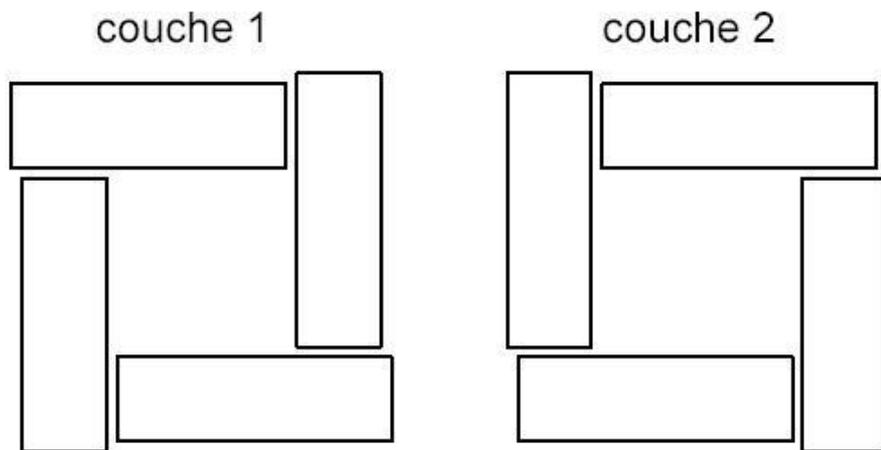
Pour augmenter la perméabilité magnétique et donc la diminution de la f.é.m et du courant nécessaire pour maintenir le flux voulu ; on utilise un acier spéciale : l'acier au silicium (à grains orientés).

Pour diminuer les pertes par courants de Foucault on utilise des tôles isolées les unes des autres (circuit magnétique feuilleté) :

- Par phosphatation
- Par vernis synthétique

Ce circuit peut avoir différentes formes :

Soit à 2 colonnes formées par un empilage de tôles décalées (couche 1 puis couche 2 et ainsi de suite)



Figure(I.1) : Circuit magnétique à colonne.

Soit de forme cuirassée, c'est-à-dire que les enroulements sont placés sur une colonne centrale et le flux magnétique Φ [Wb] se referme par chacun des côtés qui forment la cuirasse

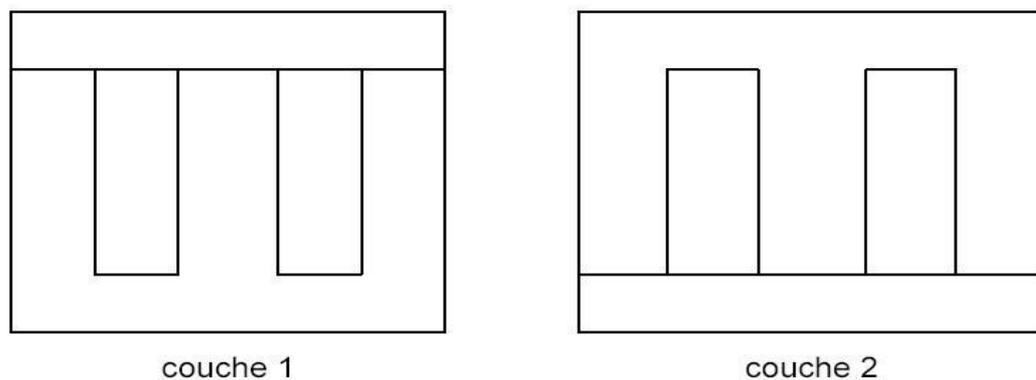


Figure (I.2) : Circuit magnétique de forme cuirassée.

La forme des tôles, selon les dimensions du circuit magnétique, peut être en E, en U, en L, en C ou en I, l'assemblage s'effectuant toujours en croisant les joints.

Le circuit magnétique est constitué de trois colonnes en général alignées et de deux culasses qui assurent la fermeture du circuit [1].

I.2.1.2. Circuit électrique

Pour les transformateurs de base tension et faible puissance, les enroulements primaire et secondaire sont constitués par des bobines en fil de cuivre émaillé, chaque couche étant isolée de la suivante par du papier. Pour les appareils à haute tension et grande puissance, les bobines,

quelquefois fractionnées en galettes, sont constituées par du fil rond ou méplat isolé au carton imprégné et séparées par des isolants tels que fibre, mica, ...etc.

On distingue trois dispositions principales des bobines sur les noyaux :

a-Bobinage concentrique simple

Le bobinage basse tension est enroulé sur le noyau et après isolement et recouvert par le bobinage haut tension.

b-Bobinage concentrique double

La moitié de bobinage basse tension est enroulée sur le noyau et isolée, puis on enroule le bobinage haut tension et on isole et en fin, on termine par la deuxième moitié du bobinage basse tension. Autrement dit, le bobinage haut tension est en sandwich entre les deux moitiés basse tension.

c-Bobinage à galette

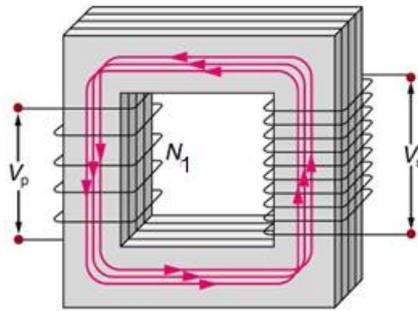
Les bobinages hauts et bas sont fractionnés et constitués par des couronnes ou galettes qui sont enfilées alternativement sur les noyaux.

Parfois, pour les transformateurs à forte intensité, les bobinages sont calés à l'aide de ressorts permettant de légers déplacements dans le cas de fortes actions électrodynamiques.

I.2.2. Principe de fonctionnement d'un transformateur

Le fonctionnement d'un transformateur est basé sur la loi de Faraday, lorsqu'un flux d'induction magnétique variable Φ circule dans le circuit magnétique, il induit dans chacun des enroulements une force électromotrice proportionnelle dans le temps aux taux de changement ($d\Phi/dt$) et au nombre de spire que comporte cet enroulement [2].

Lorsque le primaire est alimenté par une source alternative U_1 , un flux circule dans le circuit magnétique, également alternatif, dont l'amplitude dépend du nombre de spires du primaire et de la tension appliquée. Ce flux induit dans l'enroulement secondaire une tension proportionnelle au nombre de spires du secondaire U_2 . La fermeture du secondaire sur une charge provoque la circulation du courant secondaire I_2 . Le noyau magnétique fournit un chemin de canalisation de flux magnétique comme montré sur la figure (I.3) [2].



Figure(I.3) : Circuit électromagnétique simple [2].

La figure (I.3) montre un simple transformateur de deux enroulements, que le nombre de spires de l'enroulement primaire soit N_1 et tel que le nombre de tours de l'enroulement secondaire soit N_2 [2].

I.2.3. Transformateur idéal

Un transformateur idéal ou parfait est un transformateur virtuel sans aucune perte. Il est utilisé pour modéliser les transformateurs réels. Ces derniers sont considérés comme une association d'un transformateur parfait et de diverses impédances [2].

Le rapport de transformation d'un transformateur est donné par l'équation suivante :

$$\text{Soit: } v_1 i_1 = v_2 i_2 \qquad \text{On tire : } m = \frac{v_{20}}{v_{10}} = \frac{i_{1cc}}{i_{2cc}} \qquad (I.1)$$

Le circuit magnétique équivalent du transformateur idéal est donné sur la Figure (I.4) :

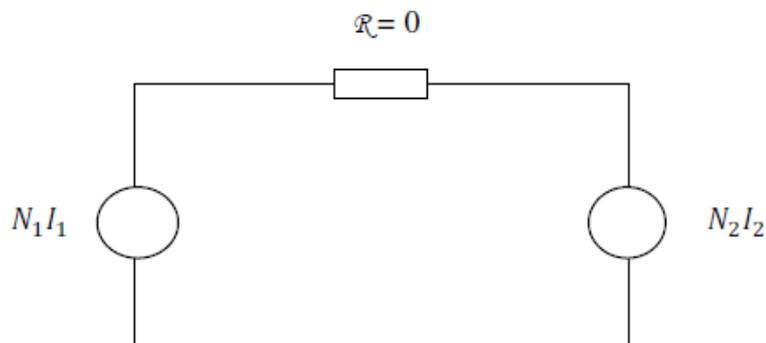


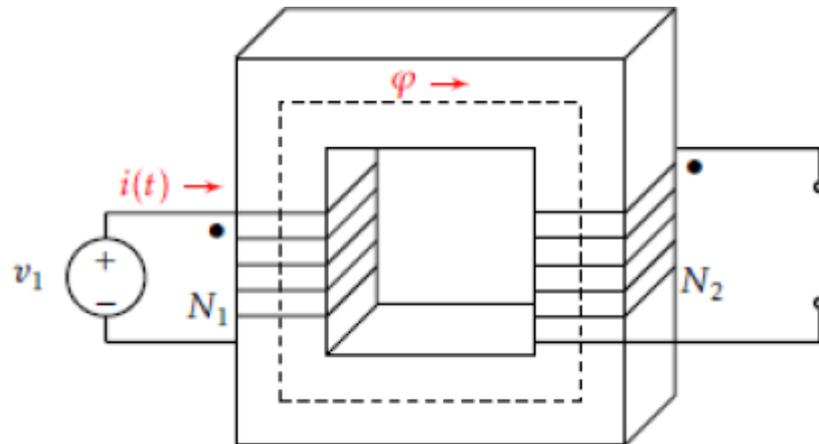
Figure (I.4) : Circuit magnétique équivalent du transformateur idéal.

Selon le circuit précédent, on peut déduire une autre définition du rapport de transformation d'un transformateur en fonction de membre de spire d'enroulement, comme suite :

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = R\phi = 0 \qquad (I.2)$$

I.2.2.1. Fonctionnement à vide du transformateur idéal

Le fonctionnement à vide du transformateur est obtenu lorsqu'on ne branche aucune charge au secondaire. Ceci nous donne le circuit suivant [3] :



Figure(I.5) : Le transformateur à vide.

Dans ce cas, on obtient la relation suivante :

$$v_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \tag{I.3}$$

Qu'on peut réarranger pour obtenir :

$$\varphi = \frac{1}{N_1} \int v_1 dt \tag{I.4}$$

Le Flux magnétique total couplé au secondaire est proportionnel au nombre de tours N_2 :

$$\varphi_{t2} = N_2 \varphi = N_2 \left\{ \frac{1}{N_1} \int v_1 dt \right\} \tag{I.5}$$

La force électromotrice induite dans la bobine secondaire est donnée par la loi de Faraday:

$$e_2 = \frac{d\varphi_{t2}}{dt} = \frac{N_2}{N_1} \frac{d}{dt} \left\{ \int v_1 dt \right\} \tag{I.6}$$

(e_2 représente la tension aux bornes de l'enroulement secondaire). La force électromotrice induite au le primaire est :

$$e_1 = \frac{d\varphi_{t1}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ n_1 \varphi \} = \frac{d}{dt} \left\{ N_1 \frac{1}{N_1} \int v_1 dt \right\} = v_1 \tag{I.7}$$

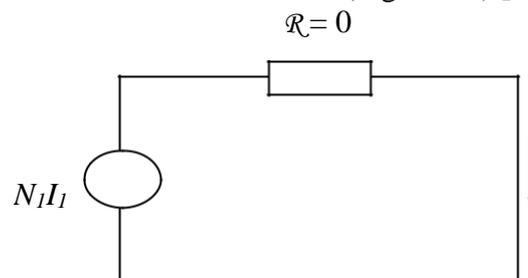
On obtient donc :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{I.8})$$

On définit le rapport de transformation **m** comme étant le rapport du nombre de tours du transformateur. Donc :

$$m = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{I.9})$$

Le circuit équivalent du transformateur à vide est (Figure I.6) [3] :

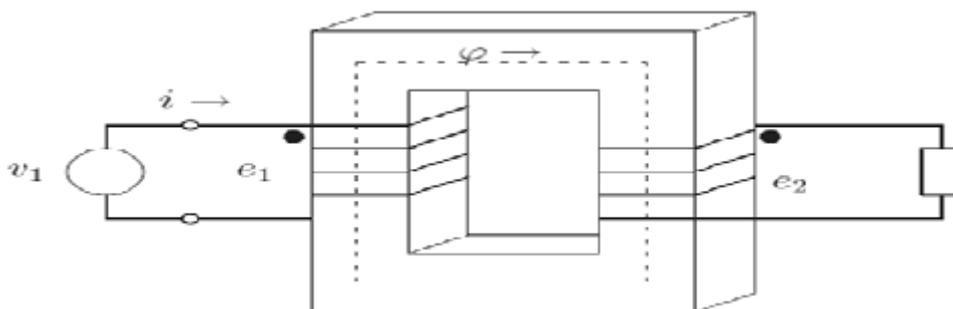


Figure(I.6) : Circuit équivalent du transformateur à vide.

Le flux magnétique φ est différent de zéro mais la force magnétomotrice de la bobine au primaire est nulle, puisque $N_1 I_1 = \mathcal{R} \varphi = 0$. Le courant dans la bobine au primaire est nul.

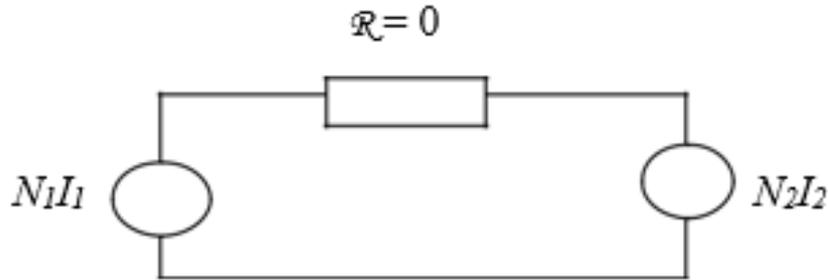
I.2.3.2. Fonctionnement en charge du transformateur idéal

Lorsqu'on branche une charge au secondaire, avec une source sinusoïdale, on obtient le circuit suivant (Figure.I.7) [3].



Figure(I.7) : Transformateur idéal en charge.

On obtient le circuit magnétique équivalent suivant (Figure I.8).



Figure(I.8) : Circuit magnétique équivalent du transformateur idéal.

La réluctance est nulle parce que la perméabilité est infinie. Donc, on obtient [3] :

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \mathcal{R} \varphi = 0 \quad (\text{I.10})$$

D'où on retrouve :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m} \quad (\text{I.11})$$

La puissance instantanée est :

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (\text{I.12})$$

I.2.4. Transformateur réel

A l'inverse du transformateur idéal, le transformateur réel est le siège de diverses pertes. Les pertes dans un transformateur sont divisées en 3 catégories :

- Les pertes dans le circuit magnétique : « pertes fer » ou « pertes à vide ».
- Les pertes dans les enroulements : « pertes cuivre ».
- Les pertes par fuites magnétiques.

La somme des deux dernières est appelée « pertes en charge ».

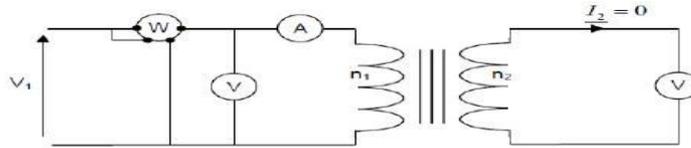
Les premières sont à diviser en pertes par courants de Foucault dans le circuit magnétique et en pertes par hystérésis. Elles augmentent avec la fréquence et la tension. Les pertes cuivre sont les pertes par effet Joule dans les enroulements. Les fuites magnétiques sont dues au fait que la réluctance magnétique du circuit magnétique est finie, une partie du flux est donc perdue. Elles causent également des pertes par courants de Foucault dans les enroulements et la cuve [4].

I.2.5. Essais et propriétés de transformateurs

Les paramètres du schéma équivalent doivent être déterminés par des essais expérimentaux. On peut effectuer des mesures directement sous tensions et courants minimaux. Il est préférable de séparer les essais, ce qui permet de travailler à puissance réduite [5].

1.2.5.1. Essai à vide

La figure (I.9) représente le montage pratique de l'essai à vide du transformateur



Figure(I.9) : Essai à vide du transformateur.

Le secondaire étant à vide ($i_2 = 0$), on mesure $V_1, V_2 = V_{20}, P_0$ et I_0 . On peut déduire :

$$R_C = \frac{V_1^2}{P_0} = \frac{V_1}{I_0 \cdot \cos \varphi_0} \quad (I.13)$$

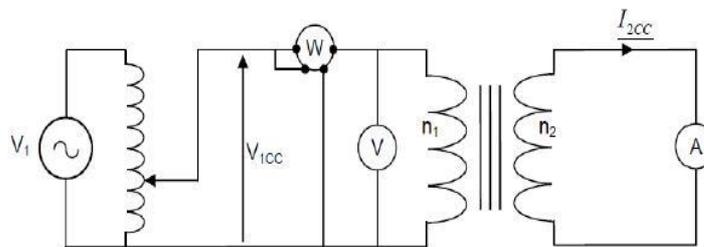
avec :

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{V_1 \cdot I_{10}}$$

$$X_m = \frac{V_1^2}{Q_0} = \frac{V_1^2}{P_0 \cdot \tan \varphi_0} = \frac{V_1}{I_0 \cdot \sin \varphi_0} \quad (I.14)$$

1.2.5.2. Essai en court-circuit

Le secondaire est mis en court-circuit par un ampèremètre ; le primaire doit être alimenté sous une tension réduite V_{1cc} , sinon on risque la destruction du transformateur sous l'effet conjugué des efforts mécaniques dus aux forces de Laplace entre conducteurs et de l'élévation de température due à l'effet Joule (Figure. I.10). On règle généralement V_{1cc} pour obtenir un courant I_{2cc} égal à I_{2N} nominal [5].



Figure(I.10) : Essai en court-circuit du transformateur [5].

On en déduit :

$$R_S = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2} \quad (I.15)$$

$$X_S = L_S \omega = \frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1} V_{1cc}\right)^2 - (R_S I_{2cc})^2}}{I_{2cc}} \quad (I.16)$$

I.3. Type de transformateur

Les transformateurs se différencient selon leur fonctionnement, construction et utilisation

I.3.1 Transformateur de puissance

Un transformateur de puissance est un composant électrique haute-tension essentiel dans l'exploitation des réseaux électriques. Sa définition selon la commission électrotechnique internationale est la suivante : « Appareil statique à deux enroulements ou plus qui, par induction électromagnétique, transforme un système de tension et courant alternatif en un autre système de tension et courant de valeurs généralement différentes, à la même fréquence, dans le but de transmettre la puissance électrique». Sa principale utilité est de réduire les pertes dans les réseaux électriques, il peut être monophasé ou triphasé et recevoir divers couplages : étoile, triangle et zig-zag.

I.3.2 Transformateur monophasé

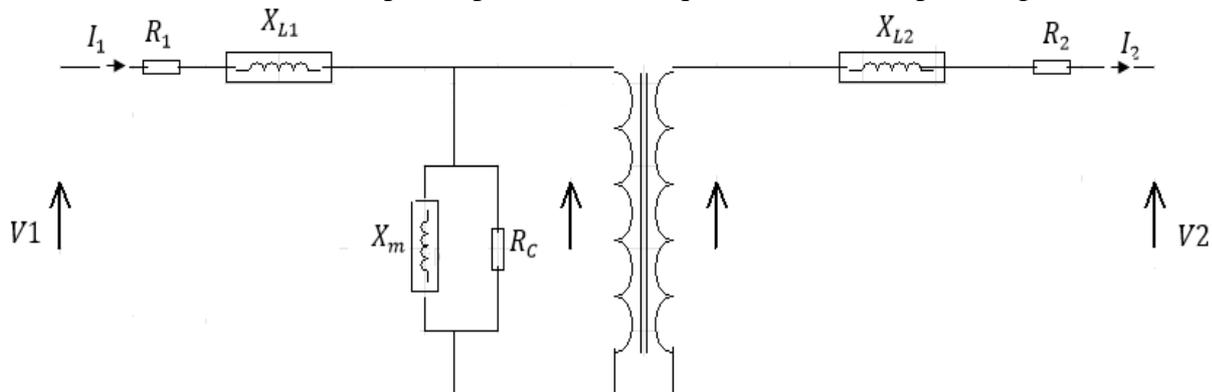
Le transformateur monophasé est constitué :

- d'un circuit magnétique fermé ;
- de deux circuits électriques sans liaison entre eux, enroulés autour du circuit magnétique.

Dans la pratique, les enroulements sont imbriqués l'un dans l'autre pour améliorer le rendement du transformateur.

I.3.2.1. Schéma électrique équivalent :

Un transformateur réel, monophasé, peut être électriquement modélisé par la figure (I.2)



Figure(I.11) : S schéma électrique équivalent d'un transformateur.

Soit une impédance Z soumise à une tension monophasée de valeur efficace

V est traversé par un courant efficace/alors :

CHAPITRE I : Généralités sur les transformateurs et le mode de transfert thermique dans les transformateurs

V et I sont déphasés de φ . $\cos \varphi$ est appelé le facteur de puissance

L'impédance consomme (ou dissipe) une puissance active.

$$P = VI \cos \varphi \quad (\text{W}) \text{ watt}$$

L'impédance consomme une puissance réactive.

$$Q = VI \sin \varphi \quad (\text{VAR}) \text{ Volt Ampère Réactif}$$

On définit une puissance apparente.

$$S = VI \quad \text{de sorte que :}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{VA})$$

Le rapport de transformation est donné par :

$$m = \frac{V_2}{V_1}$$

Si $m > 1$ $V_1 < V_2$ Transformateur élévateur.

Si $m < 1$ $V_1 > V_2$ transformateur abaisseur.

Si $m = 1$ $V_1 = V_2$ Transformateur d'isolement.

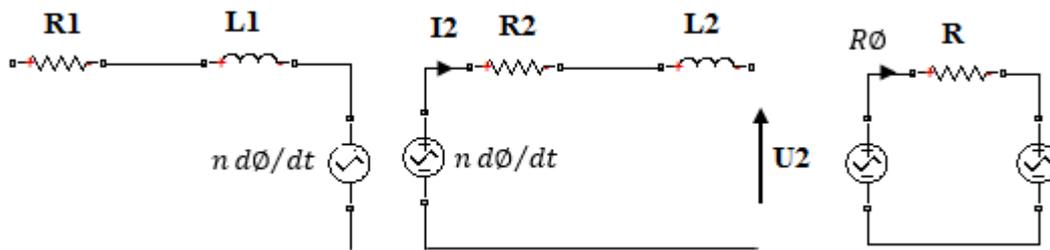
a. Constitution des transformateurs monophasés

Le transformateur en général est constitué de deux parties essentielles :

La partie électrique qui correspond au bobinage.

La partie magnétique qui est constitué par le noyau.

Les deux parties on peut les représenter schématiquement comme le montre la figure(I.12)



Figure(I.12): Les circuits électrique et magnétique du transformateur.

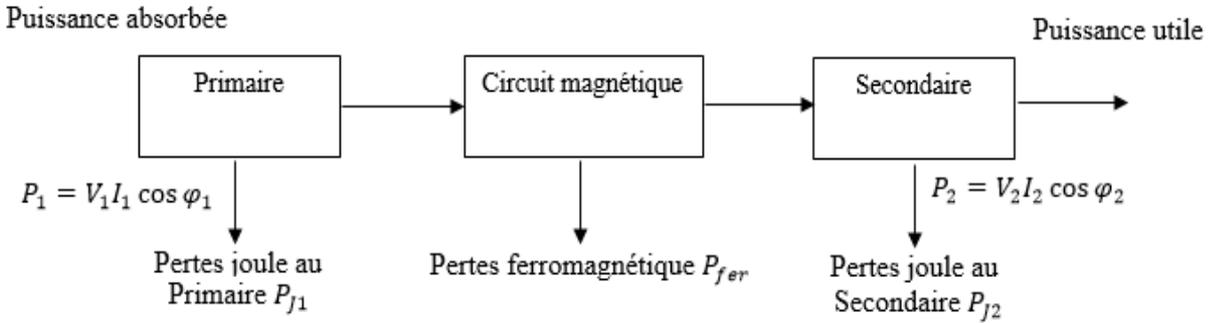
$$U_1 - R_1 I_1 - L_1 dI_1/dt - n_1 d\Phi/dt = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$n_2 d\Phi/dt - R_2 I_2 - L_2 dI_2/dt - U_2 = 0 \quad (\text{I.18})$$

b. Modification de la forme d'énergie

CHAPITRE I : Généralités sur les transformateurs et le mode de transfert thermique dans les transformateurs

Le transformateur parfait modifie la forme de l'énergie électrique et rien d'autre c'est-à-dire pas de conversion énergétique (e. g pas d'échauffement) aucune pertes $\eta = 100\%$
 η : le Rendement comme indiquée dans la figure (I.13)

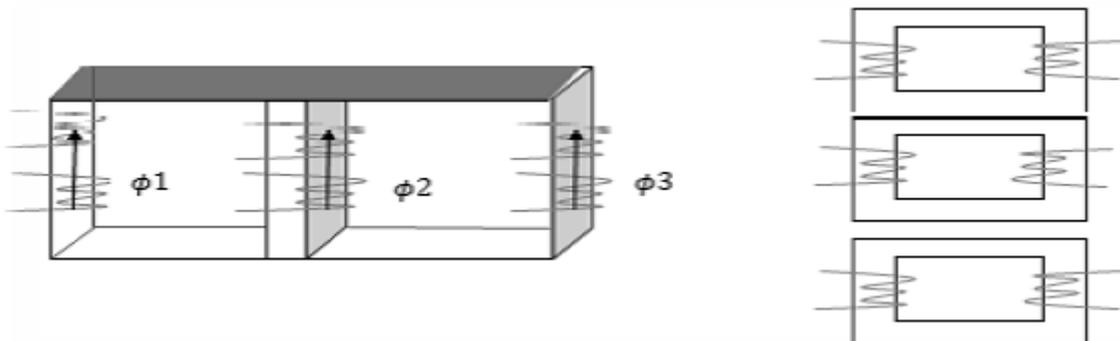


Figure(I.13): Le transformateur modifie la forme de l'énergie électrique.

$$\eta = \frac{P - P_{J1} - P_{J2} - P_{fer}}{P_2} * 100\%$$

I.3.3. Transformateur triphasé

La production et le transport sont une partie importante de la distribution d'énergie électrique et sont réalisées en courant alternatif triphasé et nécessitent donc l'utilisation de transformateurs triphasés. Le circuit magnétique d'un tel transformateur comporte ordinairement trois colonnes disposées dans un même plan. Chaque colonne porte un enroulement primaire et un enroulement secondaire et peut être considérée comme un transformateur monophasé. Les trois enroulements, primaires et secondaires, sont connectés en étoile, en triangle ou en zig-zag de sorte que le transformateur comporte trois bornes primaires et trois bornes secondaires seulement.



Figure(I.14) : Transformateurs triphasés.

I.3.4. Transformateurs à colonnes

Le transformateur à colonnes a deux enroulements concentriques par phase. Ces enroulements sont montés sur un noyau ferromagnétique qui se referme à ses extrémités, via des culasses généralement de sections circulaires dans le but d'assurer une bonne canalisation du flux magnétique. Dans cette technologie, les enroulements qui entourent le circuit magnétique de manière à maximiser le couplage tout en minimisant le volume des conducteurs, est utilisée pour les transformateurs à haute tension et les grandes puissances. Les enroulements peuvent être disposés sur un circuit magnétique comportant trois colonnes ou noyaux, ce type de circuit magnétique est dit à flux forcé.



Figure(I.15) : Transformateur à colonnes.

I.3.5. Transformateur cuirassée

C'est un transformateur où le circuit magnétique entoure complètement l'enroulement des deux côtés la cuve assure le serrage de l'ensemble et le transformateur ainsi constitué est alors assuré d'une excellence rigidité mécanique associée à une grande compacité. Ces transformateurs sont utilisés principalement au sein des réseaux de transport et de répartition, où les surtensions transitoires sont fréquentes, pour cette raison, des écrans sont utilisés afin de réduire les contraintes liées aux champs électriques dans les bobinages.

I.3.6. Transformateur de tension

Les transformateurs de tension sont utilisés sur les lignes à haute tension pour alimenter des appareils de mesure (voltmètre, wattmètre,...etc.) ou de protection (relais). Ils servent à isoler ces appareils de la haute tension et les alimenter à des tensions appropriées. Le rapport de transformation est choisi de façon que la tension secondaire soit d'une centaine de volts, ce qui permet l'utilisation d'instruments de fabrication courante pour la mesure de tension élevées. Le primaire des TT est branché en parallèle avec le circuit dont on veut connaître la tension. Leur construction diffère très peu de celle des transformateurs conventionnels de puissance. Cependant, leur puissance nominale est généralement faible (inférieure à 500 VA). Les transformateurs de tension installés sur les lignes HT sont toujours raccordés entre une ligne et le neutre. Cela élimine la nécessité d'utiliser deux grosses bornes de porcelaine, une des deux extrémités de l'enroulement étant reliée à la terre [5].

I.3.7. Transformateur de courant

Un transformateur de courant est un appareil de mesure de courants électriques. Il s'adapte avec le courant élevé circulant dans un circuit électrique (jusqu' à quelques milliers d'ampères) et l'ampèremètre, qui lui est prévu pour mesurer des courants de l'ordre de l'Ampère.

I.4. Modélisation des transformateurs

Comme pour tout composant d'un réseau électrique, sa modélisation dépend du type de phénomènes à étudier, c'est-à-dire de la gamme de fréquences concernée.

Il est connu que l'impédance des composantes inductives augmente avec la fréquence, alors que, inversement, l'impédance des composantes capacitatives diminue avec la fréquence :

$$Z_l = \omega * L$$

$$Z_c = 1/\omega * c$$

Ainsi, avec l'augmentation de la fréquence ω considérée, l'importance des composantes inductives s'amenuise et celle des composantes capacitatives croît. Autrement dit, à basse fréquence, Z_c est très grand, le composant capacitif peut être considéré comme un circuit ouvert.

I.4.1. Transformateur monophasé linéaire sans saturation

Un transformateur présente un comportement non linéaire dû principalement à la caractéristique de l'inductance. Lorsque le fonctionnement du transformateur se situe dans la zone linéaire de cette caractéristique, alors la modélisation devient simple. Celle-ci se traduit par un schéma équivalent où l'on représente ses impédances linéaires et son rapport de transformation m .

CHAPITRE I : Généralités sur les transformateurs et le mode de transfert thermique dans les transformateurs

L'impédance linéaire est composée, pour chaque enroulement, d'une inductance modélisant le flux magnétique de fuite et d'une résistance modélisant les pertes par effet Joule et les pertes supplémentaires [6]. Il faut aussi ajouter une branche parallèle pour représenter l'inductance de magnétisation. On a donc le schéma classique de la figure (I.16)

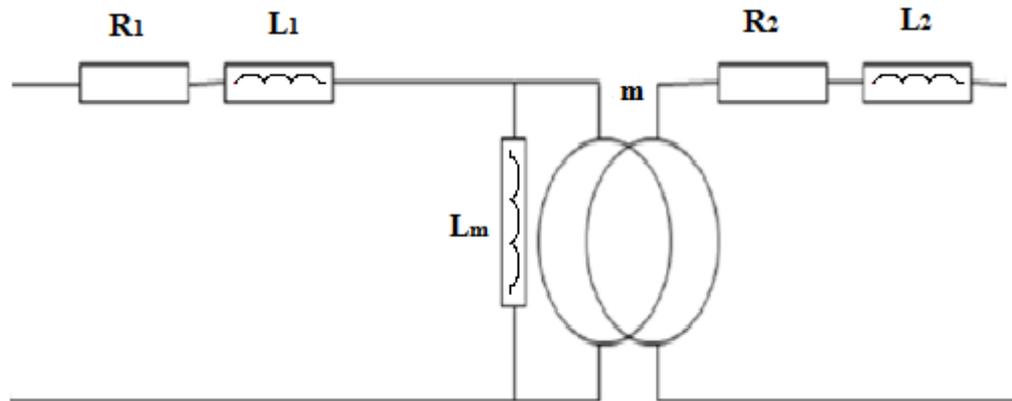


Figure (I.16) : Modélisation d'un transformateur monophasé en basse fréquence sans saturation.

Il existe éventuellement des pertes à vide, nous pouvons les représenter au moyen d'une résistance R_m en parallèle [7] :

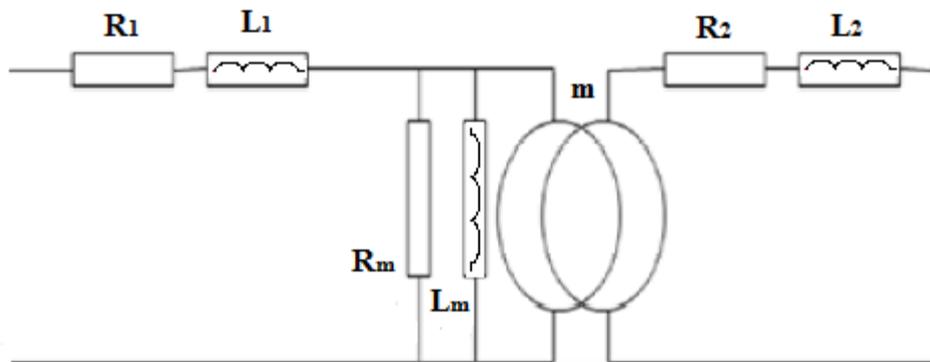


Figure (I.17) : Modélisation d'un transformateur monophasé en basse fréquence avec pertes fer, Sans saturation.

I.4.2 .Transformateur monophasé avec saturation :

L'enclenchement et le ré-enclenchement avec flux rémanent font que la zone de fonctionnement non-linéaire du transformateur est sollicitée.

La caractéristique de saturation donnée par une courbe du flux dans le noyau en fonction du courant magnétisant est représentée par une inductance non-linéaire (Figure.I.17) [7].

Notons que l'inductance non linéaire peut être placée indifféremment côté primaire ou côté secondaire tant que le rapport de transformation est respecté.

CHAPITRE I : Généralités sur les transformateurs et le mode de transfert thermique dans les transformateurs

Ce modèle étant le circuit de base, pour disposer d'un modèle général adapté à tous les phénomènes qui peuvent apparaître dans l'étude dans ces conditions.

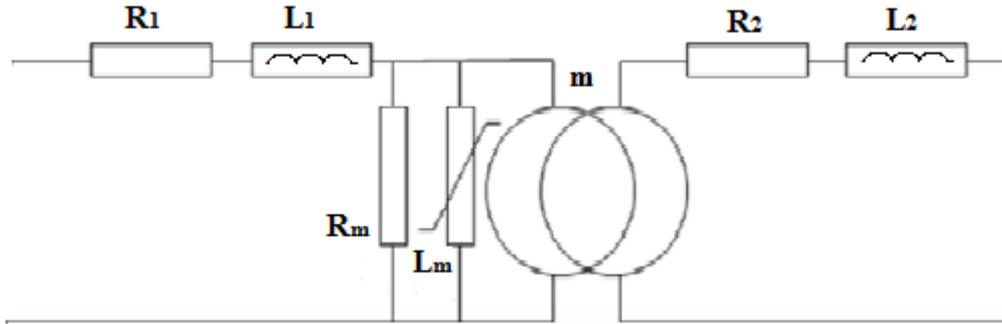


Figure (I.18) : Modélisation d'un transformateur monophasé en basse fréquence avec saturation [7].

A partir de ce modèle, il est possible de retrouver la forme du courant d'appel par un calcul analytique. Soient V_p , V_s les tensions au primaire et au secondaire, i le courant au primaire et φ le flux traversant la bobine. Quand le transformateur est alimenté du côté primaire avec côté secondaire à vide, soit $V_p = V_m(\sin \omega t + \theta_0)$ avec ω la pulsation angulaire, V_m la tension de source nominale en valeur crête et θ_0 la phase initiale, l'équation décrivant le comportement du noyau saturable est [7] :

$$V_p = R_1 i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (I.19)$$

$$V_p = R_1 i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + \frac{d\varphi(t)}{di} \frac{di(t)}{dt}$$

Dans le cas où la résistance de magnétisation est très grande, le courant dans le noyau du transformateur peut être approximé par le courant au primaire i . $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ peut être ainsi représenté par une inductance égale à la pente de la fonction $\varphi(i)$. L'équation (I.20) peut être réécrite comme :

$$V_p = R_1 i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_{noyau}(\varphi) \frac{di(t)}{dt} \quad (I.20)$$

$$L_{noyau}(\varphi) = \begin{cases} L_m & \text{pour } t \leq t_s \\ L_s & \text{pour } t \geq t_s \end{cases} \quad (I.21)$$

I.5. Pertes dans le Transformateur :

Les pertes sont classées de diverses manières. Il est en effet possible de les distinguer selon le mode de fonctionnement ou le domaine physique dans lequel ils sont impliqués. Dans un premier temps, on parle des pertes à vides et en charges. En deuxième temps, il est possible de distinguer les

CHAPITRE I : Généralités sur les transformateurs et le mode de transfert thermique dans les transformateurs

"pertes fer" dans le noyau ferromagnétique et les "pertes cuivre" dans les enroulements. A celles-ci il faut rajouter les "pertes vagabondes ou parasites" localisées dans la tôle, les brides de serrage et les autres parties métalliques de la structure, mais également les pertes dans les matériaux diélectriques souvent négligeables.

I.5.1 Modèle de Kapp

Pour bien comprendre le fonctionnement du transformateur, il est nécessaire de représenter schématiquement le processus électromagnétique du transformateur à travers le modèle Kapp. Il s'agit d'un modèle microscopique qui reflète un comportement simplifié, des défauts physiques et des pertes internes.

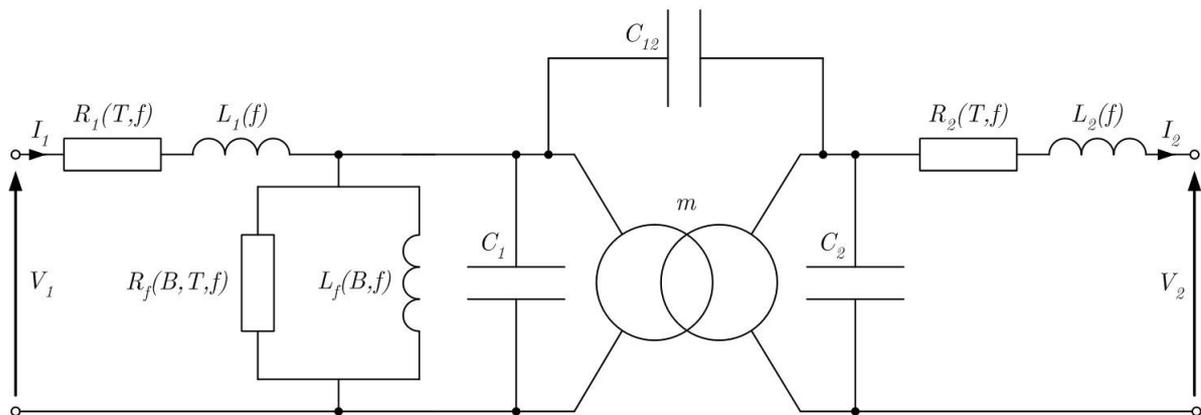


Figure (I.19) : Modèle de Kapp du transformateur.

Le fonctionnement idéalisé est retranscrit à travers un transformateur parfait caractérisé par son rapport de transformation m supposé constant. Les différents essais à vide, en court-circuit, en opposition et en charge permettent l'évaluation des différents éléments passifs du modèle. Ce modèle fonctionne correctement dans le cas d'un transformateur alimentant des charges linéaires.

I.5.2. Prise en compte de la fréquence

Bien que le modèle Kapp simplifie la complexité de la compréhension du fonctionnement du transformateur mais aussi masque en réalité des phénomènes plus complexes et comme tout modèle souffre d'hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses sont nécessaires à l'élaboration du modèle mais conduisent cependant à des paramètres de représentation trop idéalisés pour les différentes applications industrielles actuelles.

C'est ainsi, que l'influence de la fréquence f et de la température T sur les différentes composantes du transformateur est mal prise en compte au travers des éléments passifs du modèle Kapp. La non linéarité du circuit magnétique est elle aussi omise. Pourtant celle-ci est à l'origine d'une des plus anciennes sources de pollution harmonique des réseaux électriques et se traduit par la déformation du courant de magnétisation.

I.5.2.1. Inductance de magnétisation

L'inductance magnétisante L_f est uniquement fonction de la tension d'excitation imposée dans le cas de charges linéaires. En présence de grandeurs non sinusoïdales, L_f est également fonction de la fréquence. Pour des fréquences moyennes (quelques kHz) associées à des profondeurs de pénétration du même ordre de grandeur que les dimensions du circuit magnétique, l'induction B diminue avec l'augmentation de la fréquence.

A quelques dizaines de kHz, la section effective du noyau ferromagnétique diminue et provoque des saturations locales importantes. En très haute fréquence, le circuit magnétique se retrouve "blindé" par les courants induits siégeant dans son épaisseur superficielle. Les lignes de champ ne pénètrent alors plus dans le noyau diminuant ainsi le couplage et donc le rapport de transformation m .

I.5.2.2. Inductances de fuite

Les flux de fuite sont principalement déterminés entre les enroulements primaire et secondaire du transformateur. Communément divisés entre ces deux bobinages, ils sont caractérisés par les inductances L_1 (pour l'enroulement primaire) et L_2 (pour l'enroulement secondaire)

I.5.2.3. Résistance de modélisation des pertes fer

Pour un transformateur de puissance, les pertes fer sont provoquées principalement par deux phénomènes :

- Les cycles d'hystérésis liés à la nature du matériau ferromagnétique employé
- les courants de Foucault siégeant dans les tôles

Pour de faibles fréquences, ces pertes sont définies par la formule semi empirique suivante :

$$P_f = P_h + P_{cf} = K_h v_f f \widehat{B}^S + K_{cf} v_f e_t f^2 \widehat{B}^2 \quad (I.22)$$

Avec :

- K_h et K_f : dépendent des particularités de fabrication du noyau mais également de la fréquence et de la valeur de l'induction
- Les coefficients v_f et e_t : représentent respectivement le volume du noyau et l'épaisseur des tôles ferromagnétiques
- S : l'exposant de Steinmetz

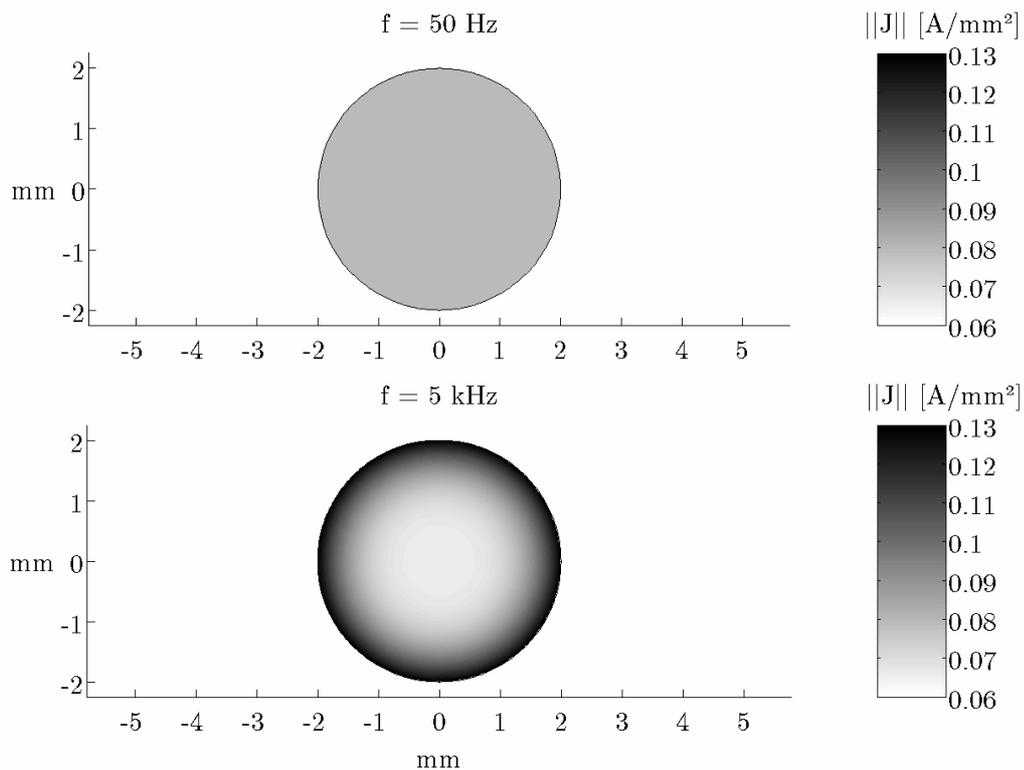
I.5.2.4. Capacités parasites

Les capacités parasites apparaissent à des fréquences élevées entre les spires, les enroulements et le noyau et entre les enroulements primaires et secondaires.

I.5.2.5. Résistances des enroulements

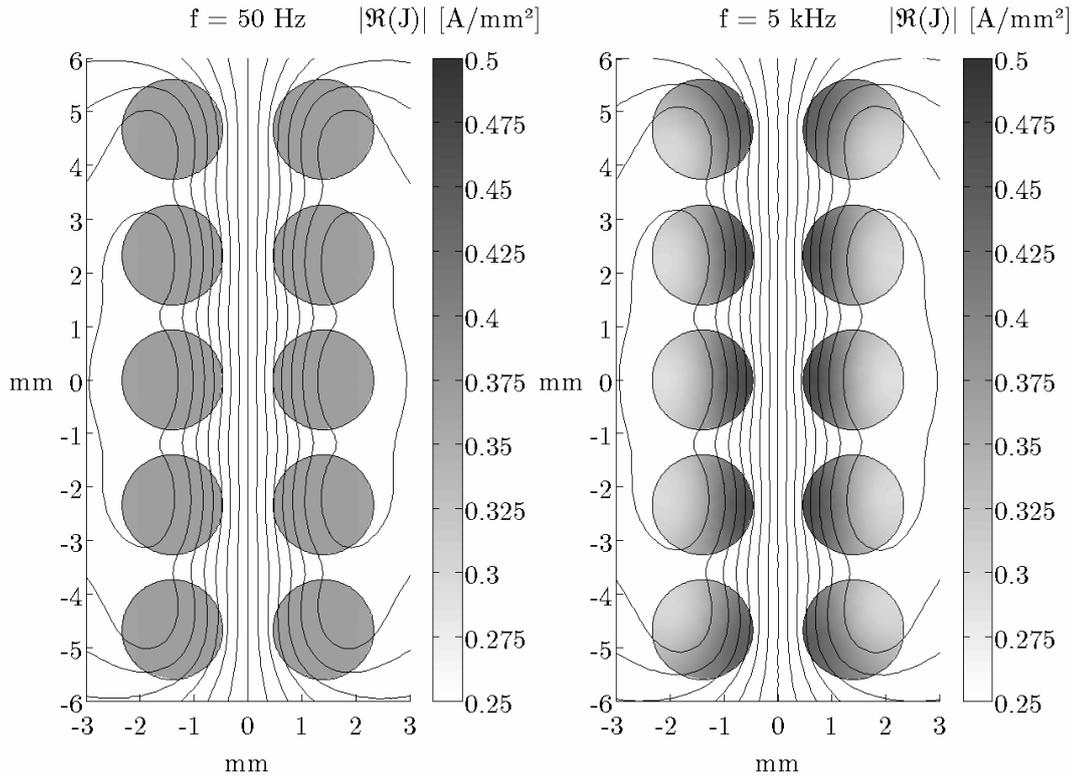
Les résistances R_1 et R_2 sont respectivement celles des enroulements primaire et secondaire et dépendent de la répartition de la densité de courant dans le conducteur. En effet, la densité de courant n'est uniformément répartie sur la section du conducteur qu'en basse fréquence. Lorsque le courant est à fréquence plus élevée, la densité de courant dans une section droite du conducteur n'est plus uniforme. L'effet pelliculaire est un effet "propre" du conducteur sur lui-même. Il est le fruit d'une contre-réaction née de la présence des courants induits et se caractérise par une profondeur de pénétration encore dénommée épaisseur de peau δ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (I.23)$$



Figure(I.20) : Mise en évidence de l'effet pelliculaire (Courant unitaire imposé).

L'effet de proximité dépend fortement du type de conducteurs utilisés et de leur nombre ainsi que de leur agencement.



Figure(I.21) : Mise en évidence de l'effet de proximité (Courant unitaire imposé).

L'augmentation des pertes crée un échauffement supplémentaire qui par un effet d'avalanche peut provoquer la destruction du transformateur si elle n'est pas maîtrisée.

$$P_J = \sum_{h=1}^h R_1(h) I_1^2(h) + \sum_{h=1}^h R_2(h) I_2^2(h) \quad (I.24)$$

La présence du noyau ferromagnétique modifie cependant le trajet des lignes de champ et par conséquent vient rajouter un effet mutuel sur les conducteurs.

I.5.3. Pertes dans le noyau ferromagnétique

La modélisation des pertes fer relève de phénomènes physiques complexes, où de multiples paramètres interviennent. L'essai à vide à la fréquence nominale permet la détermination des pertes fer, alors qu'un essai à fréquence variable est un moyen simplifié de séparer chacune des deux composantes (I.21).

Les caractéristiques de ses pertes sont:

- En présence d'harmoniques de tension ces pertes augmentent logiquement
- L'augmentation de l'induction magnétique augmente la surface du cycle d'hystérésis du matériau, ainsi que les pertes par courants de Foucault.
- En régime nominal et linéaire, les pertes fer restent faibles vis-à-vis des pertes dans les enroulements.

I.5.4. Pertes dans la Tôle et la Structure :

Chaque fois que la puissance du transformateur augmente, les pertes parasites augmentent également, alors que leur rapport aux autres pertes en charge lui diminue. Cette dépendance et ce rapport peuvent être approchés par des fonctions polynomiales respectivement d'ordre deux et d'ordre fractionnaire.

La distribution des lignes de champs dans l'air est fortement dépendante des caractéristiques de conception du transformateur.

Ces pertes sont concentrées dans les plaques et les tirants de maintien du circuit magnétique à proximité des têtes de bobines et donc soumis à des flux de fuite importants. L'utilisation de l'impédance de surface couplée à une formulation scalaire en trois dimensions permet une bonne évaluation des densités de courant induites.

La cuve est un composant du transformateur qui est sensible à ces phénomènes de courant induits à proximité des endroits restreints, comme ceux des passages de conducteurs. Des formulations analytiques peuvent alors être envisagées afin de déterminer le sur échauffement local.

La perméabilité relative ainsi que la conductivité des matériaux hôtes ont une importance majeure sur l'amplitude de ces pertes.

I.5.5. Pertes diélectriques

Les pertes diélectriques sont pour la plupart du temps négligeables par rapport aux autres pertes. Ces pertes sont dues à des courants de déplacement dans les isolants et sont calculables à partir de l'expression (I.25). Le facteur de dissipation $\tan \delta \{10^{-4} \text{ à } 10^{-2}\}$ est donné par le fabricant du diélectrique employé :

$$P_{di} = V^2 C \omega \tan \delta \quad (\text{I.25})$$

Les pertes diélectriques peuvent être modélisées par un réseau de résistances et de condensateurs en cascade et en parallèle.

I.5.6. Pertes dans les enroulements

Les pertes dans les enroulements, qui sont principalement responsables de l'échauffement dans le système sinusoïdal, deviennent plus importantes dans le cas de la fourniture de charges non linéaires. Les effets pelliculaire et de proximité font augmenter la résistance et peut être modélisée au travers d'une composante résistive dépendante de la fréquence et de la température

Les pertes dans les transformateurs varient entre 20% de la puissance nominale pour les petites puissances et 1% voire moins pour les transformateurs de puissances. Cependant, l'alimentation des enroulements avec une charge non linéaire augmente ces pertes de quelques pourcents. Le rendement est alors dégradé et leur impact sur l'échauffement nécessite un refroidissement approprié du transformateur.

I.6. Transfert thermique dans un transformateur

Pour une classe d'isolation donnée, la température du point chaud limite la puissance du transformateur. Il est donc important d'évaluer cette température le plus précisément possible et donc pour cela d'étudier les modes de refroidissement intervenant.

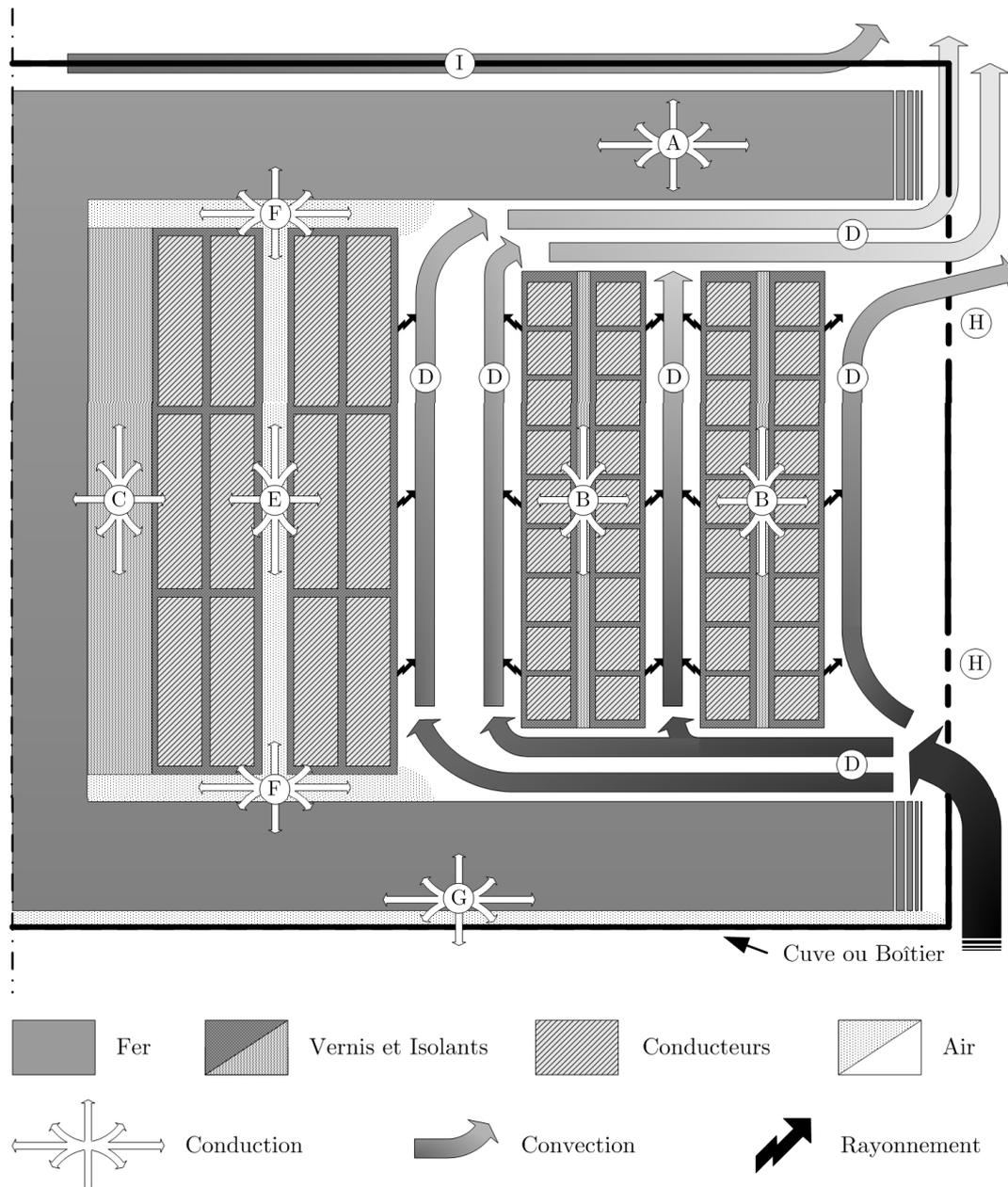
I.6.1. Synthèse des différents échanges

Les différents échanges thermiques s'effectuent par conduction, convection ou rayonnement et diffèrent sensiblement selon la gamme et le type de transformateur. La figure (I.22) illustre de manière générique, les contraintes de refroidissement associées à des transformateurs de type sec. Ce schéma synoptique est en toute rigueur différent pour chaque transformateur selon sa géométrie, les matériaux employés et ses diverses autres spécificités. Il permet cependant de localiser les différents échanges et de mieux cerner les problèmes de refroidissement et de modélisation liés aux détails conceptuels.

Tout d'abord, les transferts de chaleur par conduction interviennent majoritairement dans le noyau ferromagnétique, les enroulements ainsi que les diverses parties métalliques ou isolantes. Les propriétés conductrices dans ces différents milieux hétérogènes sont anisotropes. Le noyau ferromagnétique (**A**) feuilleté présente une bonne conductivité thermique dans le sens du laminage et plus faible pour sa direction transversale. Les conducteurs (cuivre ou aluminium) (**B**) sont quant à eux généralement imprégnés, voire complètement noyés dans une résine de maintien diélectrique. Celle-ci est chargée (Silice) pour améliorer sa conductivité thermique, mais reste globalement isolante. Le vernis/émail entourant les fils réduit lui aussi les échanges. L'emploi de canaux de ventilation est donc bien souvent nécessaire à un refroidissement efficace.

CHAPITRE I : Généralités sur les transformateurs et le mode de transfert thermique dans les transformateurs

Dans ces zones (D), l'air devient le vecteur de diffusion permettant d'extraire par convection les calories engendrées. Pour les espaces "minces", la circulation de l'air est rendu difficile par sa viscosité. Par conséquent et à moins d'utiliser des systèmes de ventilation forcée, l'extraction des déperditions est atténuée. L'air devient alors très isolant ce qui a pour conséquence l'augmentation de la température des enroulements. Ces effets néfastes, peuvent intervenir entre des couches d'enroulements trop proches (E), entre les enroulements et le noyau (F), ou encore entre le noyau ou les bobinages et la tôle du boîtier (G). Cette même tôle (I), atténue de plus l'écoulement global à l'intérieur du transformateur et ce malgré l'utilisation d'ouïes de refroidissement (H)



Figure(I.22) : Echanges thermiques dans un transformateur de type sec (Cas général).

L'utilisation des lois mathématiques et des corrélations expérimentales régissant ces phénomènes, ainsi que la prise en compte des conditions aux limites du domaine de modélisation permet le calcul de la distribution de la température [8].

I.6.2. Equations de transfert de chaleur

Compte tenu de la plage de température dans laquelle se situe le point de fonctionnement du transformateur, les échanges thermiques sont principalement dus aux phénomènes de conduction et de convection, contrairement, le rayonnement n'est alors significatif que pour des points chauds mais intervient mathématiquement dans la formulation des conditions aux limites.

I.6.2.1. Conduction

La conduction correspond à un transfert de chaleur, par un flux de puissance φ_{cd} , entre deux points d'un solide soumis à un gradient de température T non nul. L'équation de Fourier régit ce phénomène :

$$\varphi_{cd} = -\lambda \nabla T \quad (I.27)$$

λ : représente la conductivité thermique et peut être scalaire, vectorielle, ou tensorielle. Le bilan énergétique local est donné par l'équation aux dérivées suivantes :

$$\nabla \cdot \varphi_{cd} + \rho = m_v C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.28)$$

ρ est la densité volumique de perte dans le matériau, m_v la masse volumique et C_p la chaleur massique à pression constante.

Cette équation exprime la relation entre la chaleur générée par les pertes dans le matériau et l'élévation de température résultante.

Nous considérerons par la suite que les charges ne sont pas intermittentes et nous nous intéresserons donc uniquement à la solution de l'équation en régime permanent, obtenue à l'équilibre thermique du transformateur (température maximale). L'équation à résoudre devient alors :

$$-\nabla \cdot \varphi_{cd} = \rho \quad (I.29)$$

Cette équation doit être complétée par les conditions aux limites qui sont dans notre cas dues à la convection et au rayonnement.

I.6.2.2. Convection

La convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec mouvement de matière.

Le flux de chaleur transmis par convection, entre une paroi et un fluide peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi_{cv} = h_{cv}(T_r - T_\infty) \cdot n \quad (I.30)$$

Où n est la normale unitaire à l'interface, T_Γ la température à la surface d'échange, T_∞ la température ambiante du fluide loin de cette surface et h_{cv} le coefficient d'échange convectif obtenu par des formulations semi-empiriques.

On définira de la même façon que précédemment la résistance thermique de surface par :

$$R_{th} = \frac{1}{h_{cv}.n} \quad (I.31)$$

Dans nos études thermiques, nous nous sommes limités à des transformateurs secs refroidis par une convection naturelle. Dans ce cas, le mouvement vertical ascendant de l'air provient de la variation de la masse volumique en fonction de la température.

I.6.2.3. Rayonnement

Le rayonnement est un échange d'énergie par ondes électromagnétiques, considéré du point de vue thermique comme un flux de chaleur φ_{ray} . La longueur d'onde de ce rayonnement se situe dans les spectres des infrarouges. L'équation caractéristique est donnée par la loi :

$$\varphi_{ray} = C_\Gamma \varepsilon_\Gamma \sigma_{SB} (T_\Gamma^4 - T_\infty^4).n \quad (I.32)$$

Avec :

σ_{SB} : Constante de Stephan-Boltzmann

ε_Γ : Emissivité.

C_Γ : Facteur de vue

Pour les faibles et moyennes températures, l'équation de rayonnement peut également s'écrire en fonction d'un terme différentiel identique à celui de l'équation de convection (I.30). Un coefficient d'échange global à l'interface h_Γ peut alors être employé, tenant compte à la fois des phénomènes de convection et de rayonnement :

$$\varphi_\Gamma = \varphi_{cv} + \varphi_{ray} = h_\Gamma (T_\Gamma - T_\infty).n, \text{ avec } h_\Gamma = h_{cv} + C_\Gamma \varepsilon_\Gamma \sigma_{SB} (T_\Gamma - T_\infty)(T_\Gamma^2 + T_\infty^2) \quad (I.33)$$

I.7. Conclusion

Ce chapitre avait pour but de rappeler quelques généralités et notions de base sur les transformateurs : définition, principe de fonctionnement, nous avons vu la méthode pour calculer les paramètres du modèle à partir de l'essai à vide et celui en court-circuit, constitution, les différents types, ainsi que la modélisation électrique énergétique du transformateur. Ensuite, nous avons présenté les modes de transfert thermique dans les transformateurs.

Chapitre II

Modélisation
magnétothermique du
transformateur

II.1.Introduction

Le deuxième chapitre nous permettra de présenter les outils mathématiques et de modélisation utilisés (magnétique et thermique) pour traduire l'interaction entre les ondes électromagnétiques et les différents échanges de chaleur ainsi que les pertes entre celles-ci.

Différentes formulations ont été élaborées dans la littérature pour résoudre ces équations. Parmi ces formulations, nous exposerons celles qui sont les mieux adaptées à la modélisation magnétique des transformateurs.

Puis nous présenterons de manière synthétique les différents échanges de chaleur intervenant dans un transformateur ainsi que les lois qui s'y réfèrent. Leur résolution utilisera la méthode des éléments finis, via un logiciel d'accès libre FEMM qui est de structure modulaire et traite séparément les problèmes magnétiques et thermiques.

II.2.Domaine magnétique

II.2.1.Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell permettent une distribution en temps et en position des champs magnétiques et électriques

$$\text{Loi de Maxwell – Gauss} \quad \text{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \iint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \rho \, dv = Q_i \quad (\text{II. 1})$$

$$\text{Loi de Maxwell – Faraday} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II. 2})$$

$$\text{Loi de conservation de flux} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II. 3})$$

$$\text{Loi de Maxwell – Ampère} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{ds} \quad (\text{II. 4})$$

- **Champs**

$\vec{B}(T)$ Induction magnétique ;

$\vec{H}(A \cdot m^{-1})$ Champ magnétique ;

$\vec{D}(C \cdot m^{-2})$ Induction électrique ;

$\vec{E}(V \cdot m^{-1})$ Champ électrique ;

- **Densités**

$\vec{J}(A \cdot m^{-2})$ Densité de courant de conduction ;

$\vec{\rho}(C \cdot m^{-3})$ Densité de charges volumique ;

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(A \cdot m^{-2})$ Densité de courant de déplacement ;

• **Matériaux**

μ (H/m)	Perméabilité magnétique absolue ;
σ (S/m)	Conductivité électrique ;
ε (F/m)	Permittivité magnétique absolue ;

• **Autre**

Q_i (C)	Charge continue dans le volume ;
ds (m ²)	Elément de surface ;
dl (m)	Elément de longueur ;
dV (m ³)	Elément de volume ;

Ces équations sont associées aux relations constitutives des matériaux qui sont en général, anisotropes ou non linéaires

II.2.2.Lois de comportement des matériaux

Une relation constitutive est un rapport entre deux grandeurs physiques décrivant localement le comportement des grandeurs électromagnétiques dans un matériau donné. Elles sont données dans le cas le plus général.

Dans un milieu

$$\text{diélectrique} \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & \text{milieu linéaire isotrope} & \text{(II. 5)} \\ \vec{D} = \|\varepsilon(x, y, z)\| \vec{E} & \text{milieu linéaire anisotrop} & \text{(II. 6)} \\ \vec{D} = \varepsilon(\vec{E}) \vec{E} & \text{milieu non linéaire isotrope} & \text{(II. 7)} \end{cases}$$

Dans un milieu

$$\text{magnétique} \begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r & \text{linéaire isotrope} & \text{(II. 8)} \\ \vec{B} = \|\mu(x, y, z)\| \vec{H} + \vec{B}_r & \text{linéaire anisotrope} & \text{(II. 9)} \\ \vec{B} = \mu(\vec{H}) \vec{H} + \vec{B}_r & \text{non linéaire isotrope} & \text{(II. 10)} \end{cases}$$

ε [F/m] : Permittivité électrique absolue

μ [H/m] : Perméabilité magnétique absolue

\vec{B}_r [Tesla] : Induction rémanente

II.2.3.La loi d'Ohm

C'est la loi exprimant, dans un milieu conducteur la densité de courant \vec{J} en fonction du champ électrique \vec{E} , la loi s'applique à tout milieu présentant une conductivité électrique.

$$\begin{cases} \vec{J}_c = \sigma \vec{E} & \text{milieu conducteur} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{cases} \vec{J}_c = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s & \text{milieu conducteur avec source} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Avec : $\vec{J}_s [A/m^2]$ Densité de courant source

II.2.4.Relations de passage

Les champs électriques et magnétiques des différents milieux sont liés à l'interface par des relations de continuité. Soient deux milieux Γ_1 et Γ_2 , et soit n_{12} le vecteur normal à la surface dirigé du milieu Γ_1 vers le milieu Γ_2 . (Figure II.1)[9].

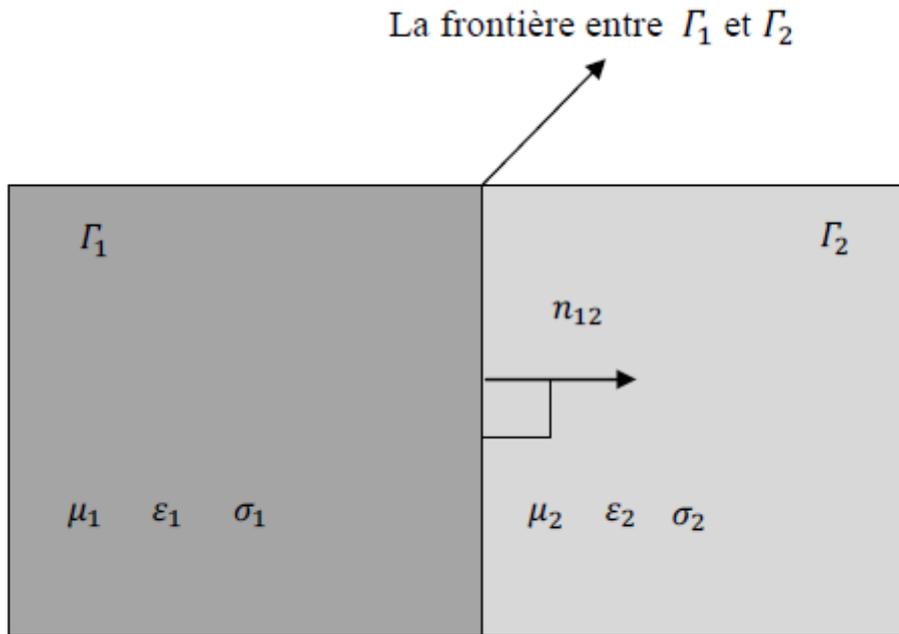


Figure (II.1) : Interface entre deux milieux [7].

La discontinuité du milieu de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} due aux densités de courants surfaciques \vec{K}_s

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n} = \vec{K}_s \quad (\text{II.13})$$

La conservation de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E}

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.14})$$

La discontinuité de la composante du déplacement électrique \vec{D} due aux charges surfaciques ρ_s

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_s \quad (\text{II.15})$$

La conservation de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B}

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.16})$$

II.2.5. Equations de Maxwell simplifiées

Les hypothèses simplificatrices généralement posées dans le traitement des équations de modélisations des problèmes Electrotechniques sont :

- Dans le domaine de l'électrotechnique, les fréquences de travail sont inférieures aux radios fréquences qui sont de l'ordre 10^{12} Hz, ce qui nous permet de négliger les courants de déplacement $\vec{J}_D = \partial \vec{D} / \partial t$ devant les courants de conduction \vec{J}_C dans l'équation (II. 4), le système est dit quasi-stationnaire.
- Les charges d'espace dans les conducteurs sont négligées dans l'équation (II. 1), ainsi pour les conducteurs le rapport (ϵ/σ) est très faible, de l'ordre de $10^{-18} S^{-1}$. Ce qui est négligeable devant celui qu'on considère pour les fréquences inférieures à 10^{12} Hz.

En considérant les hypothèses simplificatrices précédentes, les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme suivante :

$$\text{div} \vec{D} = 0 \tag{II.17}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{II.18}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \tag{II.19}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \tag{II.20}$$

II.2.6. Modèles électromagnétiques

Sur la base des équations de Maxwell simplifiées (II.17-20) relatives au domaine de l'électrotechnique nous définirons les modèles magnétostatique et magnétodynamique.

II.2.6.1. Modèle magnétostatique

Dans le cas de la magnétostatique, on suppose que le champ magnétique est produit par des sources de courant indépendantes du temps. Le terme $\partial \vec{B} / \partial t$ est nul et les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} sont découplés.

Le système d'équations régissant les phénomènes magnétostatiques s'écrit :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \tag{II.19}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_s \tag{II.21}$$

A ce système, on peut ajouter la loi de comportement des matériaux magnétiques (II. 8), ainsi que les conditions aux limites.

II.2.6.2. Modèle magnétodynamique

Dans le cas magnétodynamique, les sources de tension ou de courant varient en fonction du temps, cela veut dire que les courants induits résultants feront le couplage du champ électrique et magnétique. Le système d'équations régissant les phénomènes magnétodynamiques s'écrit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.18})$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{II.20})$$

Il faut ajouter à ce système les lois de comportement des matériaux électriques (II. 5) et magnétiques (II. 8) et les conditions aux limites.

II.2.7. Choix de la variable d'état

Pour traiter les équations magnétostatique et magnétodynamique différentes formulations mathématiques du problème peuvent être obtenues, soit en utilisant les champs magnétiques ou électriques comme variables principales, ou en introduisant de nouvelles variables que sont les potentiels électriques ou magnétiques. A chacune de ces grandeurs magnétiques et électriques correspond une équation aux dérivées partielles.

Les formulations en champs présentent un inconvénient majeur, qui est la discontinuité aux interfaces et l'utilisation d'éléments d'arrêtes dans la discrétisation. De plus les vecteurs ont généralement trois composantes, augmentant par-là le nombre d'inconnues, ce qui entraîne un temps de résolution plus important. Pour remédier à ces inconvénients on fait appel aux potentiels vecteur/scalaire électriques ou magnétiques.

Il existe plusieurs types de potentiels, parmi lesquels, on peut citer le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique. La résolution des équations en potentiel vecteur magnétique, s'avère être particulièrement intéressante dans des configurations axisymétriques, car seule la composante azimutale est non nulle. La condition de Jauge de continuité qui assure l'unicité du potentiel vecteur magnétique A est naturellement vérifiée [9] [10].

II.2.8. Formulation en potentiel vecteur magnétique

Cette formulation est basée sur l'existence d'un potentiel vecteur magnétique \vec{A} issu de l'équation (II. 3), tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (\text{II.22})$$

La combinaison des équations (II. 2) et (II. 22) conduit à :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.23})$$

La relation (II. 26) nous permet de déduire qu'il existe un potentiel électrique scalaire V tel que :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{(\text{grad}v)} \quad (\text{II.24})$$

À partir des équations (II. 4), (II. 25) et (II. 27) nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = \begin{cases} -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\sigma \text{grad}v} & \text{Equation magnétodynamique} \quad (\text{II. 25}) \\ -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & \text{Equation magnétodynamique sans source} \quad (\text{II. 26}) \\ -\overrightarrow{\sigma \text{grad}v} & \text{Equation magnétostatique avec source} \quad (\text{II. 27}) \\ 0 & \text{Equation magnétostatique sans source} \quad (\text{II. 28}) \end{cases}$$

L'équation (II. 25) représente la formulation magnétodynamique en terme de \vec{A} tenant compte du terme source

II.2.9. Conditions de Jauge

Les champs électromagnétiques définis par l'ensemble des équations de Maxwell ne sont pas uniques. En effet les champs à divergence sont définis à un rotationnel près et les champs à rotationnel sont définis à un gradient près. Il convient donc d'imposer une condition supplémentaire afin d'assurer l'unicité de la solution issue de la résolution du système d'équations (II.25)-(II.28). Cette condition, appelée condition de Jauge est généralement exprimée sous deux formes [7].

$$\text{div}(A) = 0 \quad \text{jauge de Coulomb} \quad (\text{II.29})$$

$$\text{div}(A) + K \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{jauge de Lorentz} \quad (\text{II.30})$$

II.2.10. Formulation bidimensionnelle en potentiel vecteur magnétique

Le terme à gauche de l'équation (II. 25) s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}(v \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = -\overrightarrow{\text{div}}(v \overrightarrow{\text{grad}} \vec{A}) + \overrightarrow{\text{grad}}(v \overrightarrow{\text{div}} \vec{A}) \\ v = \frac{1}{\mu} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

En adoptant la condition de Jauge de Coulomb donnée par (II. 29), l'équation (II. 31) devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(v \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = -\overrightarrow{\text{div}}(v \overrightarrow{\text{grad}} \vec{A}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \quad (\text{II.32})$$

Si on considère que la source est harmonique sinusoïdale l'équation (II. 32) s'écrit :

$$-\overrightarrow{div}(v\overrightarrow{grad}\vec{A}) + \sigma j\omega\vec{A} = \vec{J}_s \quad (\text{II.33})$$

II.2.10.1. Formulation 2D cartésien

Dans le cas d'un problème 2D cartésien (x, y), le potentiel vecteur magnétique \vec{A} et la densité de courant \vec{J} n'ayant qu'une seule composante suivant oz. Ces derniers sont de la forme :

$$\vec{A} = (0,0,A_z) \quad \text{Et} \quad \vec{J} = (0,0,J_{sz})$$

En coordonnées cartésiennes, nous avons :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_i & \vec{e}_j & \vec{e}_k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{II.34})$$

$\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$: Vecteur unitaire

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial y} \right] \vec{e}_i + \left[-\frac{\partial(A_z)}{\partial x} \right] \vec{e}_j \quad (\text{II.35})$$

$$\overrightarrow{rot}(v\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial(A_z)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(v \cdot \frac{\partial(A_z)}{\partial y} \right) \right] \vec{e}_z \quad (\text{II.36})$$

L'équation (II. 33) devient :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\sigma \cdot j \cdot \omega \cdot A_z + J_{sz} \quad (\text{II.37})$$

II.2.10.2. Formulation 2D axisymétrique

Dans le cas d'un problème 2D axisymétrique(r, z), le potentiel vecteur magnétique \vec{A} et la densité de courant \vec{J} n'ayant qu'une seule composante azimutale.

$$\vec{A} = (0, A_\theta, 0) \quad \text{Et} \quad \vec{J} = (0, J_{s\theta}, 0)$$

En coordonnées cylindriques axisymétriques nous avons :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \frac{1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\theta & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II.38})$$

$$\overrightarrow{rot}(v\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(v \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_\theta \quad (\text{II.39})$$

L'équation (II. 33) devient :

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(v \cdot \frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial r A_{\theta}}{\partial r} \right) = -\sigma \cdot j \cdot \omega \cdot A_{\theta} + J_{s\theta} \quad (\text{II.40})$$

II.2.11. Les conditions aux limites

Le champ A à la frontière du domaine satisfait principalement deux relations simples. Le champ peut être soit de valeur connue, soit normal à la surface, ce qui se traduit par :

$$A|_{\Gamma} = A_0 \quad \text{condition de Dirichlet} \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{\partial A}{\partial n}|_{\Gamma} = A_0 \quad \text{condition de Neumann} \quad (\text{II.42})$$

Les conditions de Dirichlet et de Neumann sont dites homogènes si les valeurs imposées A_0 sont nulles. Elles sont dites non homogènes dans le cas contraire.

II.3. Méthodes de résolution

II.3.1. Principe de la méthode des éléments finis

Le principe de l'analyse par éléments finis est de rechercher une solution approchée de la solution exacte de la distribution d'une grandeur physique sur un domaine régi par un système d'équations aux dérivées partielles. Pour cela le domaine est divisé en sous-domaines que l'on appelle éléments. Les éléments sont des ensembles de points appelés nœuds qui contiennent une représentation mathématique des échanges d'énergie et une fonction d'interpolation du champ à l'intérieur de l'élément et entre ses nœuds. Le champ global calculé est alors déterminé par un nombre fini de valeurs du champ aux nœuds. Les inconnues en chacun des nœuds sont appelées variables nodales [11].

Une analyse par éléments finis comporte les étapes suivantes [11] :

- Choix du domaine d'étude.
- Discrétisation (maillage) du domaine en éléments et nœuds.
- Calcul des matrices et des vecteurs associés à chaque élément.
- Assemblage des matrices et vecteurs de chaque élément pour construire le système d'équations global.
- Introduction des conditions aux limites et des charges dans le système d'équations global.
- Résolution du système d'équations algébrique obtenu.

II.3.2. Mise en œuvre de la méthode des éléments finis

II.3.2.1. Formulation intégrale

La méthode des éléments finis ne permet pas l'utilisation directe de l'équation aux dérivées partielles sous sa forme différentielle. Cette équation doit être écrite sous une forme intégrale [12], c'est la formulation intégrale. Cette formulation est fréquemment utilisée sous deux formes :

- Variationnelle.
- Résidus pondérés (ou projective).

II.3.2.1.1. Formulation variationnelle

La formulation variationnelle nécessite au préalable la connaissance de la fonctionnelle d'énergie du domaine à étudier. Cette fonctionnelle est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale définie par [11] :

$$F(A) = \int_{\Omega} L. d\Omega \quad (\text{II.43})$$

L : est la fonction de Lagrange résultant de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

Ω : domaine de résolution.

Dans le cas d'un phénomène magnéto-statique, cette fonction L est donnée par :

$$L = \int_0^B \frac{1}{\mu} \cdot b db - JA \quad (\text{II.44})$$

La fonctionnelle d'énergie devient alors :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \frac{1}{\mu} \cdot b db - JA \right] d\Omega \quad (\text{II.45})$$

Avec :

μ [H/m]: Perméabilité magnétique

B [T]: Module de l'induction magnétique

J [A/m²]: Densité de courant

A [T.m] : Potentiel vecteur magnétique

b [T] : Induction magnétique

La résolution de ce problème consiste à minimiser la fonctionnelle d'énergie $F(A)$. Cette minimisation est effectuée par le principe de Rayleigh-Ritz qui consiste à écrire :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{II.46})$$

A_i : Inconnu au nœud i du domaine.

II.3.2.1.2. Formulation projective

Cette formulation est plus employée en lieu et place de l'approche variationnelle, car elle ne nécessite pas la connaissance au préalable de l'énergie du système qui est dans la plupart des cas difficile à déterminer. Le principe de la méthode projective est basé sur un théorème applicable dans un espace d'Hilbert, qui stipule que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace [13]. L'orthogonalité de deux fonctions f et g se traduit par :

$$\int_{\Omega} f \cdot g d\Omega = 0 \quad (\text{II.47})$$

On définit le résidu :

$$R_i = L(A) - f \quad (\text{II.48})$$

L : Opérateur différentiel.

f : Terme source.

A : Inconnu du problème.

L'expression (II.47) devient :

$$\int_{\Omega} R_i \cdot \Phi_i d\Omega = 0 \quad (\text{II.49})$$

Φ_i : Fonction de projection (ou de pondération).

Les valeurs de A qui permettent d'annuler l'intégrale sont solutions du système algébrique obtenu. Le choix des fonctions de projection permet de définir plusieurs méthodes, parmi elles on cite [9] :

- La méthode de collocation par points : elle utilise la fonction de Dirac comme fonction de pondération.
- La méthode de GALERKINE.

II.3.2.2. Discrétisation du domaine d'étude

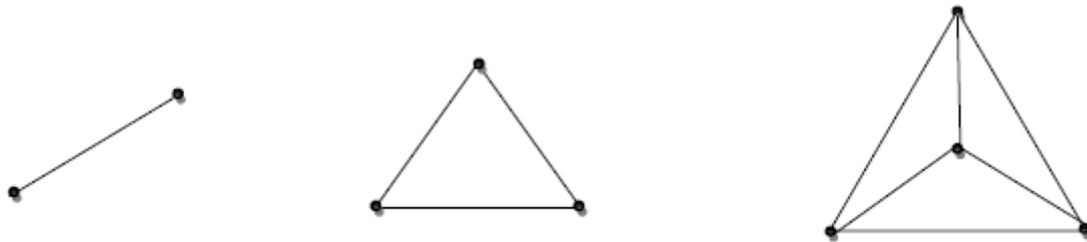
Cette étape consiste à mailler le domaine d'étude en un nombre fini d'éléments appelés sous domaines. Ce maillage doit satisfaire aux conditions suivantes [13] :

- La somme de tous les éléments doit former le domaine d'étude.

- Les éléments assemblés ne peuvent avoir en commun que des sommets (nœuds) ou des segments situés sur leurs frontières.
- Dans le cas des frontières géométriquement complexes on doit diminuer la taille du maillage pour éviter un écart d'erreur plus important.

Les éléments finis classiques employés dans la plupart des cas pour discrétiser un domaine d'étude quelconque, représentés sur la figure (II.2), sont les suivants :

- A une dimension : un élément droit.
- A deux dimensions : un triangle.
- A trois dimensions : un tétraèdre.



Elément droit

Elément triangulaire

Elément tétraédrique

Figure (II.2) : Exemples d'éléments linéaires d'un maillage éléments finis.

II.3.2.3. Calcul de la fonction d'approximation

La méthode des éléments finis repose sur la recherche d'une fonction globale représentant les phénomènes étudiés en tout point du domaine d'étude. Elle sera construite par parties sur chacun de ces éléments. Etant donné le maillage qui nous concerne est de type triangulaire linéaire, on considère l'élément suivant [13] :

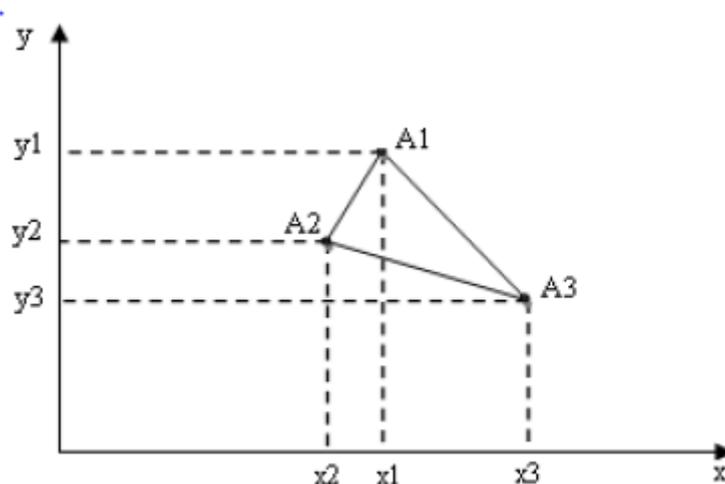


Figure (II.3) : Elément triangulaire linéaire.

La fonction d'interpolation associée à cet élément est de la forme :

$$A(x, y) = ax + by + c \quad (\text{II.50})$$

Cette équation peut se mettre sous forme matricielle comme suit :

$$A(x, y) = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

L'application aux trois nœuds A_1, A_2 et A_3 de l'équation (II.50) nous amène à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

Les coefficients a, b, c se déduisent alors comme suit :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{II.53})$$

Cette équation nous permettra d'écrire (II.51) sous la forme suivante :

$$A(x, y) = [\phi_1(x, y)\phi_2(x, y)\phi_3(x, y)] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

Avec ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont les fonctions de formes :

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{2S} [(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y)]$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{2S} [(y_1 - y_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(y_3 - y)]$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{2S} [(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_3)(y_3 - y)]$$

S : Aire du triangle décrit par les sommets de l'élément.

L'équation (II.54) est la fonction d'approximation associée à l'élément triangulaire décrite en fonction des valeurs des inconnus en chacun des sommets ou nœuds de cet élément. Les fonctions des éléments doivent remplir ces deux conditions :

- Continuité sur l'élément.
- Continuité entre les différents éléments.

La fonction d'approximation globale sur le domaine complet, contenant **N** nœuds, est alors la somme de toutes les fonctions relatives aux éléments. L'inconnu s'exprime comme suit :

$$A = \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot A_j \quad (\text{II.55})$$

A_j : Valeur de l'inconnu au nœud j.

ϕ_j : Fonction de forme au nœud j.

II.3.2.4. Conditions aux limites

Les différents cas associés aux conditions aux limites sont les suivants [13] :

a) Condition de type DIRICHLET

On peut connaître la valeur de la grandeur sur une frontière ou l'évaluer théoriquement selon le dispositif étudié ainsi que la précision recherchée.

$$\Phi = \Phi_0$$

$$\Phi_0 = \text{Cste}$$

b) Condition de type NEUMANN

Dans certains cas, on peut estimer la variation du phénomène suivant la normale (cas des plans de symétrie).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \Phi_0$$

c) Condition mixte (ou ROBIN)

$$a \frac{\partial \Phi}{\partial n} + b\Phi = c$$

a, b, c : sont des constant

III.3.3. Discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP)

La résolution des équations aux dérivées partielles qui décrivent les modèles magnétostatiques et magnétodynamiques par la méthode des éléments finis, présentés au chapitre précédent, revient à appliquer la méthode projective de **GALERKINE** :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \text{EDP} \, dV = 0 \quad (\text{II.56})$$

III.3.3.1. Modèles magnétostatiques

Le model magnétostatique est représenté en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \right] dx \cdot dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot j_{sz} dx dy \quad (\text{II.57})$$

L'application du théorème de Green à l'équation (II.57) permet à la fois d'évacuer les dérivées d'ordre deux de son premier terme et d'explicitier les conditions aux limites :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \right] dx dy = \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left[- \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{II.58})$$

Dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet $A = 0$ ou de type Neumann $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ (dite condition Neumann homogène), le terme sur la frontière s'annule. L'équation (II.57) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] dx \cdot dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot j_{sz} dx dy \quad (\text{II.59})$$

Sachant que le potentiel vecteur magnétique A_z peut-être discrétisé sous la forme $A = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot A_{zj}$ pour tous les nœuds du domaine d'étude.

Cela nous amène à écrire l'équation (II.59) comme suit :

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right] A_{zj} dx \cdot dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot j_{sz} dx dy \quad (\text{II.60})$$

i, j Varient de 1 à N .

On obtient, en finalité, un système algébrique matriciel à résoudre :

$$[M][A] = [J] \quad (\text{II.61})$$

Où :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right] dx dy$$

$$J_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot j_{sz} dx dy$$

$[A]$: Inconnu du domaine d'étude.

II.3.3.2. Modèle magnétodynamique

Le seul changement qui interviendra dans ce cas est la prise en compte de la variation du potentiel vecteur magnétique par rapport au temps. En adoptant la même démarche que dans le cas du modèle magnétostatique, nous aboutissons à la formulation éléments finis des équations magnétodynamiques transitoires en coordonnées cartésiennes [13] :

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right] A_{zj} dx \cdot dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \alpha_j \sigma A_z dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot j_{sz} dx dy \quad (\text{II.62})$$

i, j Varient de 1 à N .

Le système algébrique à résoudre relatif à ce cas est :

$$[M][A] + j\omega[L][A] = [J] \quad (\text{II.63})$$

Où :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right] dx dy$$

$$J_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot j_{sz} dx dy$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i \alpha_j dx dy$$

II.3.3.3. Modèle électrostatique

Le model électrostatique est représenté en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \frac{\rho}{\varepsilon} dx dy \quad (\text{II.64})$$

$\rho[\Omega \cdot m]$: Résistivité électrique

$\varepsilon[F/m]$: Permittivité électrique

$V[V]$: Potentiel scalaire électrique

L'application du théorème de Green à l'équation (II.64) permet à la fois d'évacuer les dérivées d'ordre deux de son premier terme et d'explicitier les conditions aux limites :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{II.65})$$

Dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet $V = Cste$ ou de type Neumann

$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ (Dite condition Neumann homogène), le terme sur la frontière s'annule. L'équation

(II.64) devient :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \frac{\rho}{\varepsilon} dx dy \quad (\text{II.66})$$

Sachant que le potentiel scalaire électrique V peut être discrétisé sous la forme $V = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot V_j$ pour tous les nœuds du domaine d'étude. Cela nous amène à écrire l'équation (II.66) comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right] V_j dx \cdot dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \frac{\rho}{\varepsilon} dx dy \quad (\text{II.67})$$

i, j Varient de 1 à N .

On obtient en finalité un système algébrique matriciel à résoudre :

$$[M][V] = [\gamma] \quad (\text{II.68})$$

Où :

$$\gamma = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right] dx dy$$

$$\gamma_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \gamma dx dy$$

[V] : Inconnu du domaine d'étude.

II.4. Les Pertes

Les composants magnétiques sont soumis à deux types de pertes : les pertes Joules et les pertes fer. Les premières se développent dans les bobinages à cause de la résistivité électrique non négligeable des conducteurs et des courants induits. Les secondes sont générées dans le circuit magnétique dues au phénomène d'hystérésis et des courants induits dans le matériau. La description des types de pertes est donnée dans les paragraphes suivants et des modèles permettant leurs estimations sont présentés.

II.4.1. Les pertes Fer

Les pertes par hystérésis et les pertes par courants de Foucault sont deux types différents de pertes fer qui sont générées dans le circuit magnétique d'un transformateur ou d'une inductance. Ces deux types de pertes coexistent dans le circuit magnétique et dépendent principalement des caractéristiques du matériau, de la fréquence d'utilisation et de la valeur d'induction employée.

II.4.1.1. Les pertes par hystérésis

Les pertes par hystérésis représentent la puissance nécessaire à l'aimantation cyclique alternative du fer qui se dissipe en chaleur. Les pertes sont directement liées à l'évolution irréversible de la structure cristalline du matériau constituant les tôles. En effet, l'organisation de la matière en domaine de Weiss se modifie sous l'effet de variation en intensité et/ou en direction du champ magnétique. Les pertes engendrées sont proportionnelles à l'aire du cycle d'hystérésis, au nombre de cycles d'aimantation par seconde et sont indépendantes de l'épaisseur de la tôle. La figure (II.4) illustre les pertes par hystérésis. Dans un premier temps, le champ \mathbf{H} augmente de zéro jusqu'à une valeur crête stockant ainsi de l'énergie. Quand le champ magnétique diminue pour revenir à l'état nul, l'énergie est restituée. Mais la figure montre que cette énergie est plus faible que l'énergie emmagasinée. La différence des deux surfaces représente les pertes par hystérésis [14].

Dans le cas d'un transformateur, ou d'une inductance, alimenté en alternatif, le cycle d'hystérésis est parcouru autant de fois par seconde que la fréquence d'alimentation.

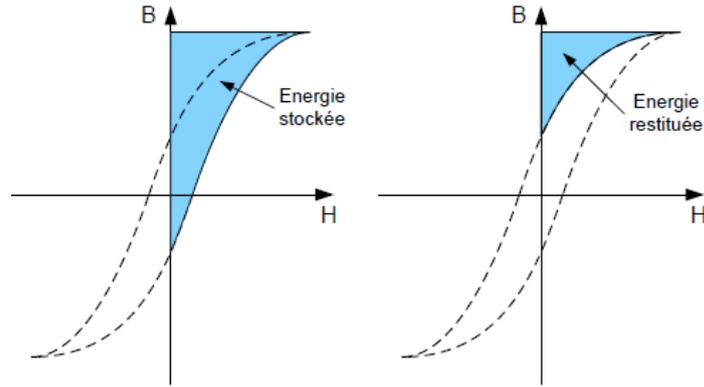


Figure (II.4) : Pertes par hystérésis.

Par exemple, le calcul des pertes par hystérésis dans le cas d'une inductance peut s'obtenir de la façon suivante

$$\begin{aligned} \varphi &= S_C \cdot B \\ U &= N \cdot S_C \frac{dB(t)}{dt} \\ i &= \frac{H \cdot l_c}{N} \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

Avec :

U : Tension d'alimentation sinusoïdale

i : Courant d'alimentation sinusoïdale

B : Induction magnétique

H : Champ magnétique

φ : Flux magnétique

S_C : Section magnétique

l_c : Longueur du circuit magnétique

V_C : Volume du circuit magnétique

N : nombre de spires

L'énergie délivrée au circuit magnétique noté W_H durant un cycle complet de l'hystérésis s'écrit :

$$W_H = \int_0^T i \cdot U \cdot dt = \int_0^T i \cdot N \cdot d\varphi = \oint H l_c S_C dB = V \oint H dB \quad (\text{II.70})$$

Ainsi les pertes peuvent s'écrire :

$$P_H = \frac{W_H}{T} = V \cdot f \cdot \oint H dB \quad (\text{II.71})$$

Et les pertes volumiques, notées P_h :

$$P_h = \frac{P_H}{V_C} = f \cdot \oint H dB \quad (\text{II.72})$$

Les pertes par hystérésis sont donc proportionnelles à l'aire comprise dans la courbe $\mathbf{B(H)}$ et f la fréquence de fonctionnement. De même, plus l'induction de fonctionnement sera grande, plus le cycle hystérésis sera volumineux [14].

L'utilisation d'un matériau ferromagnétique dur produit beaucoup plus de pertes par hystérésis qu'un matériau doux. C'est pourquoi seuls ces derniers sont utilisés dans les inductances et transformateurs [14].

En prenant comme simplification que le cycle d'hystérésis est rectangulaire (figure (II.5)), on obtient :

$$P_h = f \cdot \oint H dB = \frac{4}{\mu_r \mu_0} \cdot f \cdot B_{max}^2 \quad (\text{II.73})$$

Dans le cas d'un parallélogramme, les pertes volumiques s'écrivent :

$$P_h = f \cdot \oint H dB = \frac{4}{\mu_r \mu_0} \cdot f \cdot B_{max}^2 \cdot \sin \alpha \quad (\text{II.74})$$

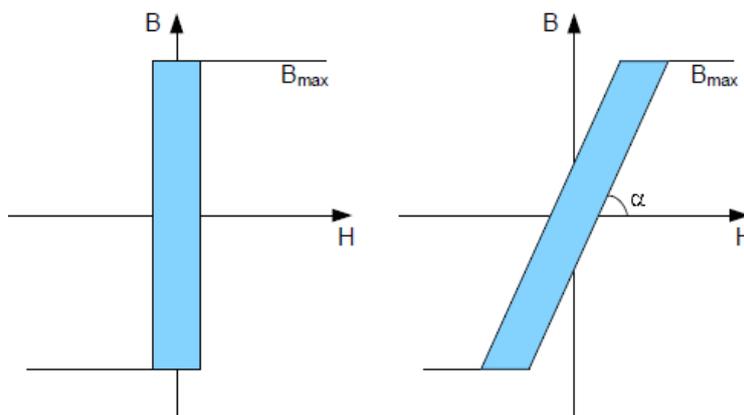


Figure (II.5) : Simplification du cycle d'hystérésis.

II.4.1.2. Les pertes par courant de Foucault

Les pertes par courant de Foucault dépendent de la fréquence et de la résistivité du matériau magnétique. A haute fréquence, des courants induits se créent dans le matériau magnétique. Dans ce cas, le flux magnétique n'est plus uniforme dans la section magnétique. Afin de limiter ces pertes, l'augmentation de la résistivité électrique peut être une solution. Cette augmentation de résistivité provient, par exemple dans les poudres de fer, de l'adjonction de résine. Celle-ci isole les grains des autres, réduisant ainsi la création de courants induits. Les tôles magnétiques quant à elles, sont composées d'un mélange de fer et de Silicium pour augmenter la résistivité du fer pure. Une seconde possibilité est de laminer le circuit magnétique. Cette solution est retenue sur les circuits magnétiques en tôle. Les tôles ont une épaisseur comprise entre 0.23 et 1mm. Le choix de l'épaisseur de la tôle dépend ainsi de la profondeur de peau et donc de la fréquence d'utilisation [14].

La lamination du circuit magnétique a cependant un coût non négligeable et l'on favorise généralement des tôles épaisses si les pertes le permettent.

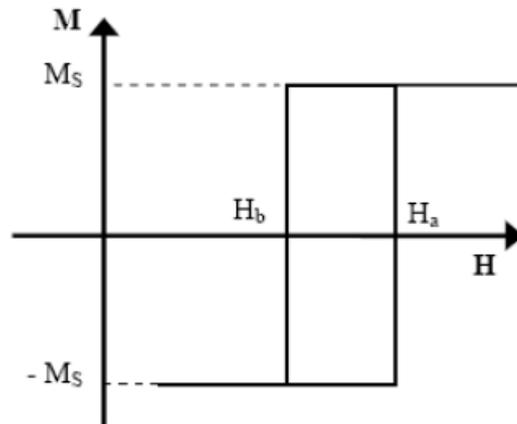
II.4.1.3. Les modèles de pertes fer

La décomposition des pertes fer est répartie selon deux grandes catégories :

- Les modèles numériques, Jiles-Atherton, Preisach
- les modèles analytiques développés du modèle de Steinmetz

Preisach

Néel a adopté la théorie de Preisach, elle est basée sur une représentation graphique des phénomènes d'hystérésis. Le matériau ferromagnétique est discrétisé en éléments infiniment petits, ou dipôles, dont le cycle d'hystérésis est rectangulaire (Figure (II.6)). La hauteur d'hystérésis est définie par M_s qui est la magnétisation macroscopique à saturation du matériau et sa largeur est définie par les paramètres H_a et H_b . Ces derniers ont des valeurs qui dépendent des éléments.



Figure(II.6) : Cycle d'hystérésis d'un élément élémentaire de Preisach.

Seul le demi-plan $H_a \geq H_b$ correspond à des cycles réels, car l'énergie associée est une perte. De plus, les valeurs sont bornées par les valeurs du champ à saturation H_s et $-H_s$. Finalement, l'ensemble des couples (H_a, H_b) se situe à l'intérieur du triangle ABC de la figure (II.7). Dans l'état démagnétisé, le matériau peut être considéré comme ayant autant de dipôles dans l'état positif que dans l'état négatif. A l'application d'un champ magnétique, les éléments vont se magnétiser positivement ou négativement. L'évolution de l'aimantation du matériau résulte alors du changement d'état d'aimantation des dipôles élémentaires [14].

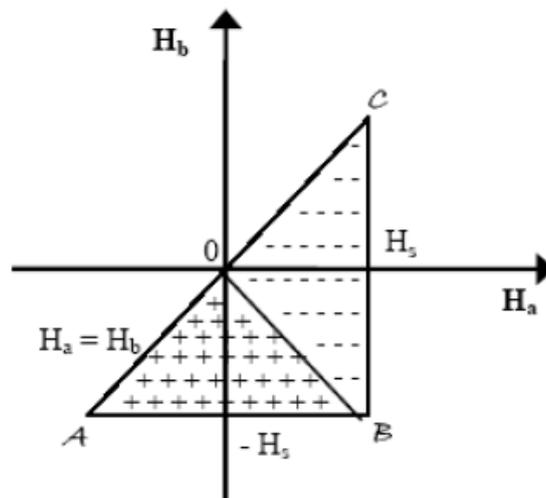


Figure (II.7) : Domaine d'évaluation des couples (H_a, H_b)

La théorie de Preisach consiste à associer une fonction de distribution notée $j(H_a, H_b)$, $dH_a \cdot dH_b$ qui représente la probabilité de trouver un élément dont les bornes de la largeur d'hystérésis sont comprises entre $[H_a; H_a + dH_a]$ et $[H_b; H_b + dH_b]$. Ainsi pour une variation de champ ΔH il est possible de déterminer la variation de la magnétisation du matériau magnétique M [14].

$$\Delta M = 2M_S \iint j(H_a, H_b) dH_a \cdot dH_b \quad (II.75)$$

De l'état de la magnétisation, l'induction peut être obtenue. Ainsi l'intégrale $\int H \cdot dB$ effectuée sur chaque élément permet d'en déduire les pertes par hystérésis.

Steinmetz

Steinmetz en fournit un modèle analytique simple qui permet de déterminer les pertes fer. L'équation (II.76), établissant les pertes, dépend simplement de la fréquence, de la valeur d'induction et du volume du circuit V_C .

$$p_{fer} = V_C \times K_C \times F^\alpha \times B^\beta \quad (\text{II.76})$$

α , β et K_C sont des constantes liées au matériau magnétique.

Le modèle de Steinmetz est très pratique, car les paramètres α , β et K_C sont facilement déterminables. Ainsi une méthode de régression linéaire permet de retrouver ces paramètres en se basant sur les courbes fournies par les constructeurs.

Ce type de modèle suppose que l'induction est sinusoïdale. Dans le cas d'une excitation complexe possédant des harmoniques, les pertes sont déterminées pour chaque harmonique puis sont sommées. Cette méthode de superposition des pertes ne prend pas en compte l'existence de cycles magnétiques mineurs. De plus, ce modèle sous-estime fortement les pertes en cas de saturation et est donc inexploitable dans ces conditions. Cependant les composants magnétiques étudiés ont un point de fonctionnement nominal en dehors de la zone de saturation d'où l'utilisation de ce modèle [14].

II.4.2. Les pertes Joules

Les composants sont soumis à un ensemble de pertes dans les bobinages. Ces pertes sont en premier lieu dues aux pertes joules, mais également aux courants de Foucault qui peuvent se créer selon la fréquence des courants. Il se produit alors des effets de peau et de proximité dans les conducteurs. Ce type de pertes dépend beaucoup du spectre harmonique, et le choix d'une stratégie de modulation peut augmenter fortement les pertes dans les composants magnétiques [15].

Les pertes Joules volumiques dans le cuivre, qui s'expriment par :

$$P_v = \rho_c \cdot \left(\frac{I}{S_c}\right)^2 \quad (\text{II.77})$$

Avec : P_v les pertes volumiques, ρ_c la résistivité du cuivre, I le courant moyen traversant une phase du convertisseur et S_c la section des conducteurs.

II.4.2.1. L'effet pelliculaire

L'effet pelliculaire est la manifestation des effets quasi-statiques dans un conducteur unique. Le courant sinusoïdal parcourant un conducteur, génère un champ magnétique dans et autour de ce même conducteur. A une fréquence suffisamment élevée, ce champ magnétique fait lui-même apparaître dans le conducteur un courant induit qui se superpose au courant initialement appliqué. Compte tenu des équations de Maxwell, la densité de courant a

tendance à se concentrer sur la périphérie du conducteur comme le montre la figure (II.8) [12].

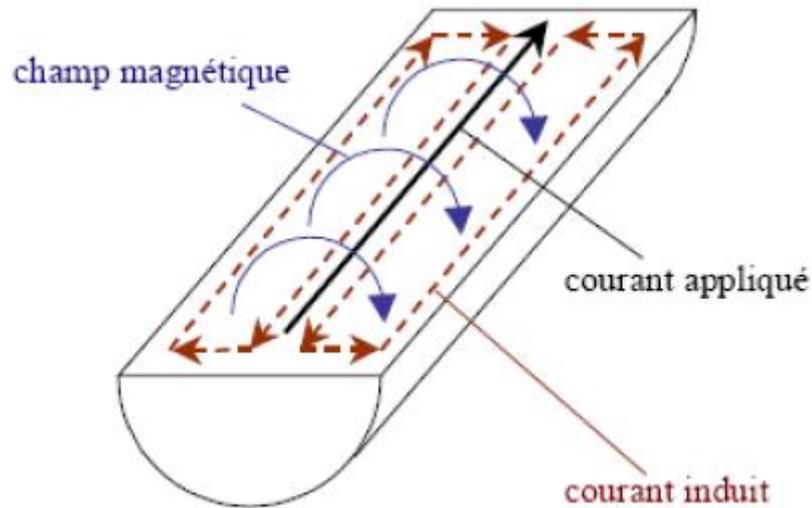


Figure (II.8) : Effet pelliculaire dans un conducteur.

II.4.2.2.L'effet de proximité

Considérons maintenant qu'un second conducteur non alimenté se trouve à proximité du conducteur précédent. Un courant est également induit dans ce second conducteur car il est également traversé par un champ magnétique variable dû au courant porté par le premier conducteur, comme illustré sur la figure (II.9) [14].

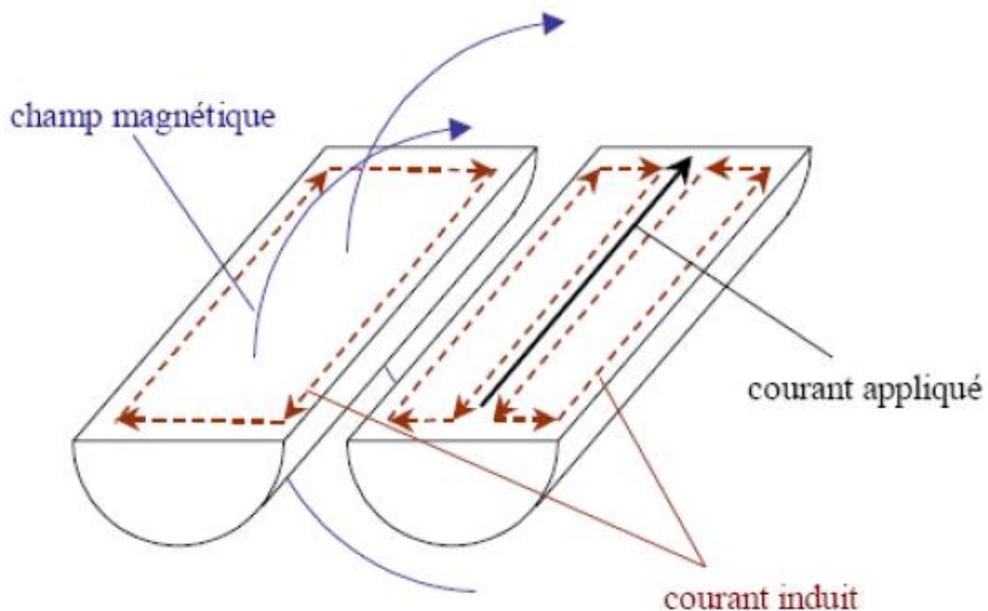


Figure (II.9) : Effet de proximité entre deux conducteurs.

Le courant total ne reste pas nul dans le second conducteur, de sorte qu'il y circule deux densités de courant de sens opposés.

La différence avec l'effet pelliculaire provient de l'origine du champ magnétique variable qui provoque l'apparition de courants induits dans le conducteur. Dans le premier cas (effet pelliculaire), le champ magnétique est dû au courant porté par le conducteur lui-même où se produit l'effet quasi-statique. Dans le second cas (effet de proximité), le champ magnétique a une origine extérieure quelconque, par exemple un courant variable porté par un conducteur proche. Ainsi, un conducteur peut être soumis à des effets de proximité et générer des pertes, même si celui-ci n'est pas soumis ou alimenté par un courant [14].

II.4.2.3. Les modèles de pertes Joules

Il est possible de modéliser les courants induits dans les conducteurs de manière analytique en reprenant les équations de Maxwell sous réserve de prendre certaines hypothèses :

1. Les lignes de champ dans les bobines sont parallèles avec l'axe du noyau magnétique (\vec{y}) et ceci sur toute la hauteur des bobines. Ainsi le champ est considéré comme unidirectionnel.
2. Le champ magnétique ne varie pas selon l'axe du noyau magnétique.
3. Les courants sont perpendiculaires au plan d'étude (\vec{z}).

$$H = \begin{vmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \tag{II.78}$$

$$J = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_z \end{vmatrix}$$

En reprenant les équations Maxwell de la magnétodynamique, on peut écrire l'équation (II.80) en utilisant l'opérateur Δ défini par l'équation (II.79).

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{II.79}$$

$$\nabla \wedge E = -j\omega\mu H \tag{II.80}$$

Le passage en écriture complexe impose que les excitations soient sinusoïdales. En insérant la loi d'Ohm, dans l'équation (II.80), celle-ci devient :

$$\nabla J = -j\sigma\omega\mu H \quad (\text{II.81})$$

En prenant le rotationnel de chaque côté de l'équation (II.81), sous condition que σ et μ soient homogènes, on obtient :

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge J) = -j\sigma\omega\mu J \quad (\text{II.82})$$

Et en développant le membre de gauche :

$$\nabla(\nabla \cdot J) - \nabla^2 J = -j\sigma\omega\mu J \quad (\text{II.83})$$

L'équation (II.83) fait apparaître la divergence de \mathbf{J} : $(\nabla \cdot J)$. Or par définition, la divergence de \mathbf{J} est nulle d'où la formule (Equation (II.84))

$$\nabla^2 J = j\sigma\omega\mu J \quad (\text{II.84})$$

En utilisant les hypothèses émises sur l'équation (II.78), l'équation (II.84) se simplifie en étant résolue seulement sur l'axe z .

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_z}{\partial z^2} = j\sigma\omega\mu J_z \quad (\text{II.85})$$

Or, on sait que :

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (\text{II.86})$$

En combinant les équations (II.86), (II.85) et (II.80), l'équation d'Helmholtz est finalement obtenue (Equation (II.87))

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} = j\omega\mu\omega\sigma H(x) \quad (\text{II.87})$$

Les conditions limites à appliquer au bord des conducteurs s'obtiennent facilement en reprenant le théorème d'Ampère issu des équations magnétostatiques en 1 dimension :

$$\int H \cdot dl = \sum I \quad (\text{II.88})$$

La figure (II.10) illustre la différence de répartition du champ magnétique dans le cas d'un transformateur à deux enroulements pour les basses et hautes fréquences. A basse fréquence, on retrouve une accumulation et une dés-accumulation linéaires des ampères-tours, contrairement à haute fréquence où le champ se retrouve expulsé contre les bords du conducteur.

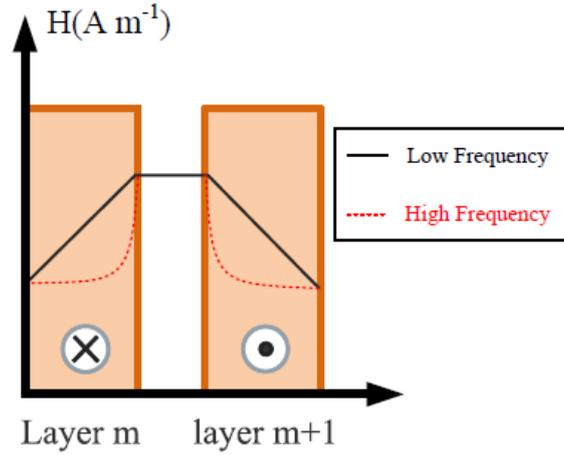


Figure (II.10) : Champ magnétique dans deux conducteurs plats et parallèles parcourus par des courants opposés à faibles et hautes fréquences.

La détermination des densités de courant s'obtient en dérivant le champ magnétique ainsi déterminé (Equation (II.89)).

$$J(x) = \frac{dH(x)}{dx} \quad (\text{II.89})$$

Le champ magnétique à basse fréquence s'accumule linéairement dans les couches, tandis qu'à plus haute fréquence, les conducteurs repoussent le champ magnétique vers l'extérieur. Il apparaît alors un phénomène d'avalanche, où les densités de courant sont maximales entre primaire et secondaire [14].

Les pertes Joules (P_j) générées s'obtiennent en intégrant le carré de la densité :

$$P_j = \int \frac{J^2}{\sigma} dV \quad (\text{II.90})$$

Les hypothèses présentées ont été utilisées par Dowell [16]. Celui-ci en développant les équations analytiques permet d'écrire les pertes Joules sous la forme de l'équation (II.91)

$$P_j = F_r \cdot R_{DC} \cdot I_{eff}^2 \quad (\text{II.91})$$

Il introduit ainsi un facteur de perte F_r obtenu en résolvant l'équation d'Helmholtz. Ce facteur dépend du nombre de couches totales de conducteur m , de l'épaisseur du conducteur h , et de l'épaisseur de peau δ (Equation (II.92)).

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \cdot \mu \cdot f}}$$

$$X = \frac{h}{\delta} \quad (\text{II.92})$$

$$F_r = G_1(x) + \frac{1}{3}(m^2 - 1)(G_1(x) - 2G_2(x))$$

Les fonctions G_1 et G_2 sont définies respectivement par les équations (II.93) et (II.94).

$$G_1(x) = \frac{\sinh 2X + \sin 2X}{\cosh 2X - \cos 2X} \quad (II.93)$$

$$G_2(x) = \frac{\sinh X \cdot \cos X + \cosh 2 \cdot \sin 2}{\cosh 2X - \cos 2X} \quad (II.94)$$

La figure (II.11) montre l'évolution du coefficient de pertes Fr en fonction du nombre de couches.

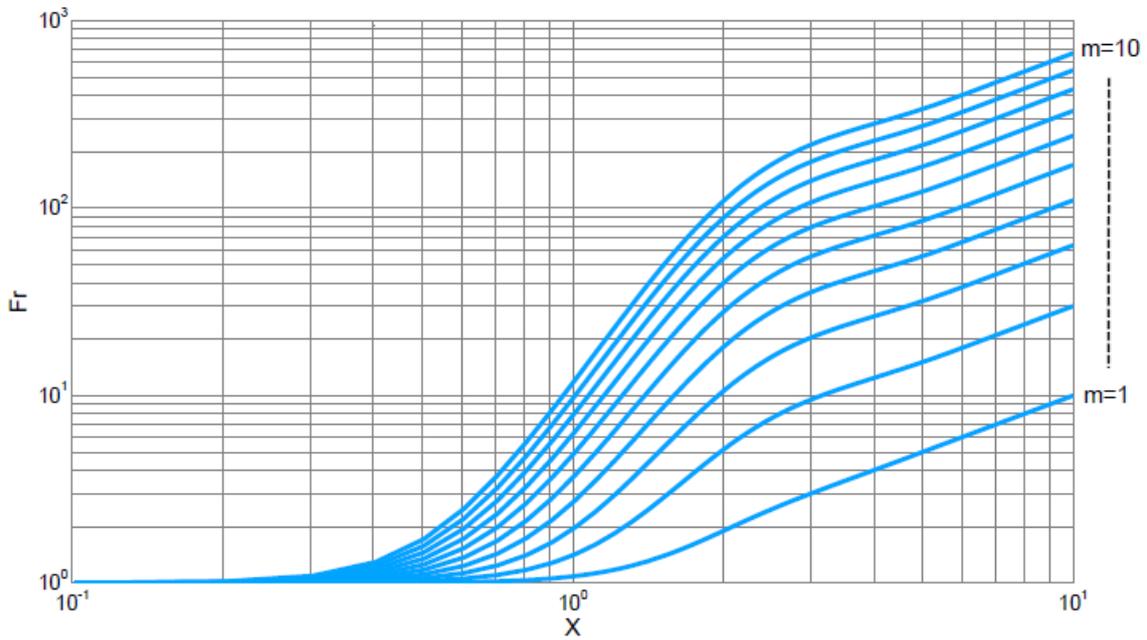


Figure (II.11) : Facteur de pertes Fr dépendant de la fréquence et du nombre de couches
(M)

II.4.2.4 Pertes et dissipation thermique

Les propriétés des médias, où les flux ont lieu, n'ont pas été prises en compte jusqu'à présent. Outre le flux de courant électrique et le flux magnétique, il existe également un flux de chaleur causé par des sources de pertes de puissance. Les sources de pertes de puissance sont liées aux charges électriques et magnétiques et aux propriétés du matériau. La perte dans un conducteur pour le courant continu $P_{cu.dc}$ est exprimée par la densité de pertes de puissance, qui dépend de la résistivité ρ et du carré de densité de courant J^2 , et du volume du conducteur V_e [17].

$$P_{cu.dc} = I^2 R = \left(\frac{JA_e}{N}\right)^2 \rho \frac{l_e N}{A_e} = \rho J^2 A_e l_e = \frac{1}{2} \rho J_m^2 V_e \quad (II.95)$$

La perte de ré-aimantation dans le conducteur magnétique pour l'excitation sinusoïdale symétrique peut être trouvée à partir des données de pertes spécifiques K_{fe} et du volume de noyau V_m

$$P_{fe} = K_{fe}(B_m, \omega)V_m \quad (\text{II.96})$$

Alternativement, les pertes fer totale peuvent être calculées à partir de la formule de séparation des pertes, où l'hystérésis, les courants de Foucault et les coefficients de pertes supplémentaires K_{hy} , h , K_{ec} , K_{an} complètent l'expression.

$$P_{fe} = (K_{hy}B_m^h\omega + K_{ec}B_m^2\omega^2 + K_{an}B_m^{1.5}\omega^{1.5})V_m \quad (\text{II.97})$$

La relation entre la densité d'écoulement et la densité de pertes dans un conducteur électrique peut être exprimée comme

$$q_e = \frac{1}{2}J_m^2\rho \quad (\text{II.98})$$

Et la relation approximative dans le conducteur magnétique, où k_m indique le coefficient de pertes.

$$q_m = \frac{1}{2}B_m^2\omega^2K_m \quad (\text{II.99})$$

Selon le transfert de chaleur, il existe un équilibre entre les sources de chaleur et la dissipation thermique. La distribution de chaleur en régime permanent est définie par l'équation différentielle partielle de Poisson [16].

$$\lambda_x \frac{d^2}{dx^2} \vartheta + \lambda_y \frac{d^2}{dy^2} \vartheta + \lambda_z \frac{d^2}{dz^2} \vartheta + q = 0 \quad (\text{II.100})$$

Où les conductivités thermiques λ_x , λ_y et λ_z définissent le flux de chaleur d'une région de température supérieure à ϑ vers une région de température plus basse, respectivement, dans les directions x, y et z selon la distribution spatiale de la source de chaleur q [W / m³] et la dissipation prédéfinie. Dans le cas d'une distribution de chaleur unidimensionnelle (1D), la chaleur est générée dans le matériau lui-même [17].

$$\lambda_x \frac{d^2}{dx^2} \vartheta + q = 0 \quad (\text{II.101})$$

En appliquant les conditions aux limites selon lesquelles il n'y a pas de flux de chaleur Q [W / m²] à travers la (les) surface (s) symétrique (s) et la température prédéfinie des surfaces de délimitation est distributions, alors la distribution de température dans une plaque d'une épaisseur $d = 2x_s$ et la température de référence $\vartheta(x_s) = \vartheta_s$

$$\vartheta(x) = \vartheta(x_s) + \frac{q}{2\lambda_x} \cdot (x_s^2 - x^2) \quad (\text{II.102})$$

Et dans un cylindre de diamètre $d = 2r_s$ et la température de référence $\vartheta(r_s) = \vartheta_s$

$$\vartheta(r) = \vartheta(r_s) + \frac{q}{2\lambda_r} \cdot (r_s^2 - r^2) \quad (\text{II.103})$$

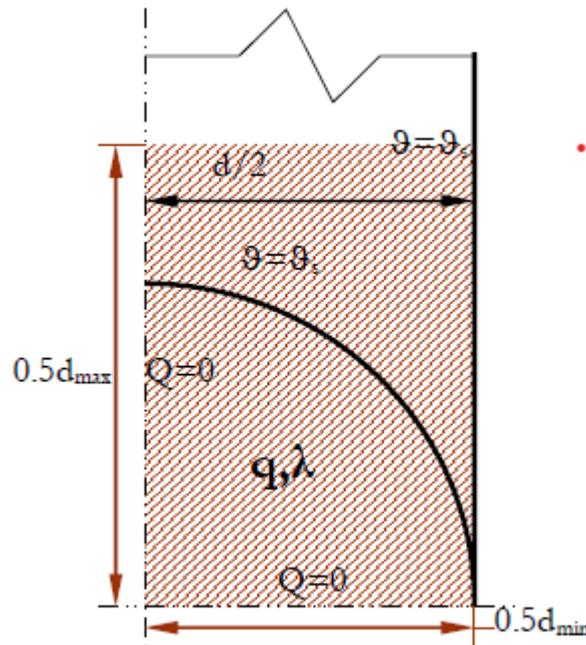


Figure (II.12) : section de conducteur avec une génération de chaleur interne q et une conductivité thermique isotrope λ .

L'élévation de température $\Delta\vartheta$ la plus élevée au centre d'une plaque ou d'un cylindre, dont l'épaisseur ou le diamètre, respectivement, est noté d et le coefficient lié à la géométrie k_g est de 1 pour une plaque et de 2 pour un cylindre.

$$\Delta\vartheta = \frac{q}{2k_g\lambda} \frac{d^2}{4} \quad (\text{II.104})$$

La section transversale réaliste d'un conducteur électrique ou d'un conducteur magnétique se situe entre le rectangle et le cercle, ce qui correspond à la zone striée de la figure (II.12). La forme géométrique et les proportions peuvent être prises en compte avec le coefficient lié à la géométrie qui se trouve empiriquement à partir du rapport de la dimension la plus courte à la dimension la plus longue de l'aire de section transversale [17].

$$k_g = 1 + \left(\frac{d_{min}}{d_{max}}\right)^2 \quad (\text{II.105})$$

En choisissant que le circuit électrique produit la même quantité de pertes que le circuit magnétique, et l'élévation de température totale dans le dispositif électromagnétique est la somme de l'élévation de température dans le circuit électrique et dans le circuit magnétique.

$$\Delta\vartheta = \frac{q}{8} \left(\frac{\min(l_s, \omega_s)^2}{\lambda_e \left(1 + \left(\frac{\min(l_s, \omega_s)}{\max(l_s, \omega_s)}\right)^2\right)} + \frac{\min(l_c, h_c)^2}{\lambda_m \left(1 + \left(\frac{\min(l_c, h_c)}{\max(l_c, h_c)}\right)^2\right)} \right) = qk_\vartheta \quad (\text{II.106})$$

Même si le couplage thermique entre les circuits électrique et magnétique est complexe, cette approche simple permet de choisir les proportions géométriques d'un transformateur afin de réduire l'échauffement maximal. Une section transversale étroite et élevée d'un circuit a une élévation de température plus petite qu'une section transversale de forme carrée avec la même surface. Par conséquent, les résultats (Figure (II.13)) indiquent la somme des charges thermiques dans le circuit électrique et dans le circuit magnétique qui ont leur résistance thermique maximale aux différentes proportions géométriques d'un transformateur. Dans un souci de comparabilité, la conductivité thermique est prise de la même manière $\lambda_e = \lambda_m = 1 \text{ W / mK}$. La résistance thermique maximale pour le circuit électrique est dans la région $kH = 0,5 \text{ kW} = 0,7$ - coquille et $kH = 0,25 \text{ kW} = 1,1$ - noyau, et pour le circuit magnétique est dans la région $kH = 1,1 \text{ kW} = 0,25$ - coquille et $kH = 0,7 \text{ kW} = 0,5$ - noyau. La résistance thermique est calculée par rapport au volume de l'enveloppe du transformateur qui est $V_{tr} = 1 \text{ m}^3$ [17].

$$R_\vartheta = \frac{k_\vartheta}{V_{tr}} \quad (\text{II.107})$$

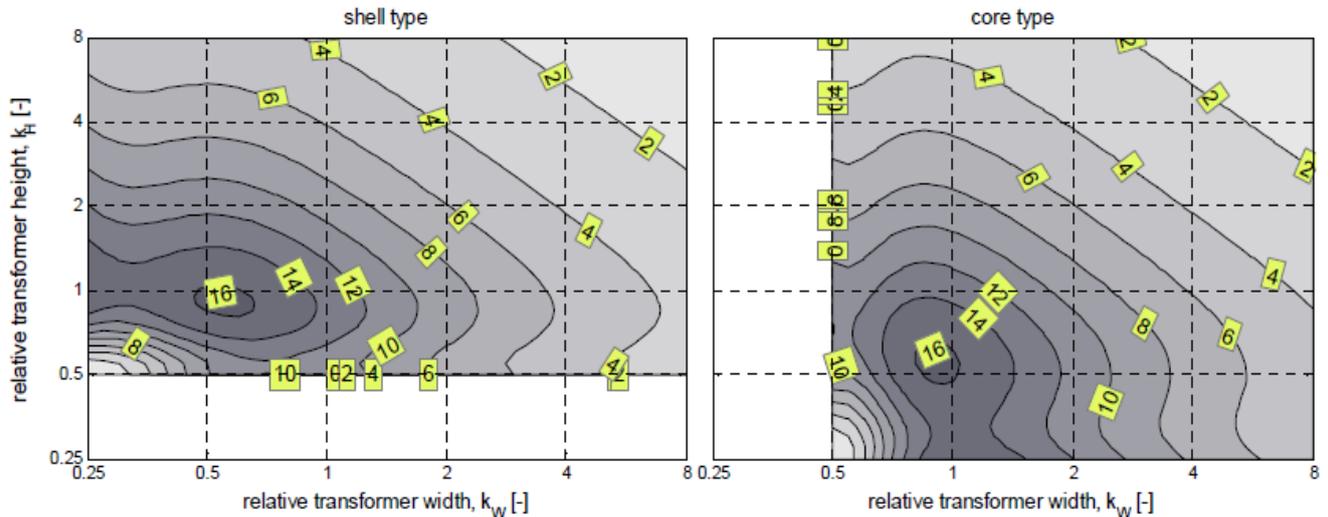


Figure (II.13) : Résistance thermique par rapport au type de transformateur et aux proportions de la géométrie du transformateur.

II.5. Domaine thermique

II.5.1. Modélisation thermique

L'objectif de modélisation thermique est d'obtenir des modèles simples permettant de déterminer la température de fonctionnement d'un composant magnétique en fonction des pertes dans le matériau et dans le cuivre au prix d'approximations acceptables.

On souhaite déterminer la température moyenne du matériau magnétique et du bobinage en faisant des hypothèses simplificatrices. On considère ainsi que la température est uniforme dans le matériau magnétique et qu'il en est de même dans le cuivre afin de conserver une grande simplicité du modèle. Dans ces conditions, le modèle devra à partir des pertes évaluer la température avec une précision de quelques degrés °C (figure II.14).

En effet il n'est pas indispensable pour l'utilisateur d'obtenir une cartographie complète du composant, seules quelques zones particulières présentent de l'intérêt d'un point de vue thermique. En considérant que chaque bobinage est caractérisé par une température de fonctionnement et que la température est uniforme dans le matériau magnétique, le problème revient à déterminer les températures de fonctionnement de quelques zones considérées comme isothermes. Il s'agit naturellement d'une approximation, chaque « zone thermique » étant représentée par sa température moyenne.

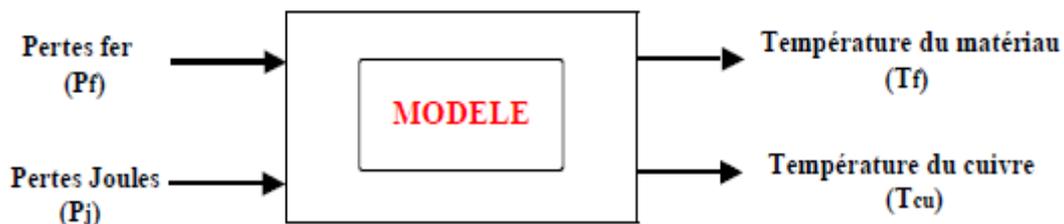


Figure (II.14) : Présentation du modèle.

II.5.2. Outils de modélisation thermique

Les outils majeurs de la modélisation thermique des machines électriques sont principalement deux méthodes de calculs : la méthode nodale, déjà ancienne et toujours d'actualité et la méthode des éléments finis (EF). Cette dernière permet d'étudier des structures plus complexes et offrent plus d'informations locales en chaque partie de la structure. Elle permet également des couplages avec d'autres problèmes physiques (électrique, magnétique) dans la même machine. La méthode nodale est aussi répandue car elle nécessite moins de temps de calcul et par conséquent l'espace mémoire des machines de calcul nécessaire est réduit [18].

II.5.2.1. Méthode nodale

L'approche nodale est basée sur l'analogie électrique-thermique. Les transferts de chaleur sont alors représentés sous forme d'un réseau. La tension est la température au nœud considéré, le courant électrique est représenté par un flux thermique, la source de courant est la source de chaleur (pertes électriques et magnétiques) et la capacité électrique par une

capacité thermique. Elle traite les problèmes 1D, 2D et 3D et les équations utilisées peuvent être non linéaires [19]. Les paramètres thermiques dépendent alors de la température. Les différents modes de transmission de la chaleur associés aux régions de la machine sont déterminés dans un premier temps. Ensuite, la machine est découpée en un certain nombre de volumes élémentaires supposés isothermes à la température T_i de son centre. Chaque volume V_i a une capacité thermique C_i et une source de chaleur P_i affectées en son centre (figure II.15).

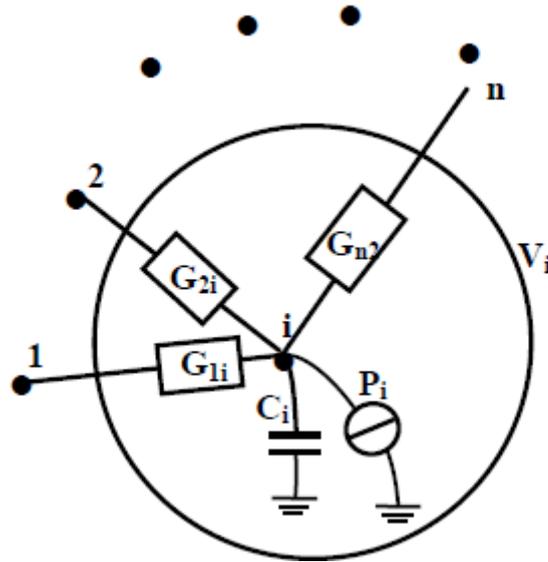


Figure (II.15) : Conductances thermiques d'un nœud dans un volume V_i .

Les nœuds de chaque volume sont connectés par des conductances thermiques G_{ji} traduisant la nature d'échange thermique intervenant entre ces nœuds. L'écriture des équations de transfert entre les nœuds conduit à développer un système d'équations différentielles qui est résolu après avoir été mis sous forme matricielle. Pour chaque nœud, les équations de transferts de chaleurs associés s'écrivent :

$$\rho_i V_i C_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_{j=1}^n G_{ji} (T_j - T_i) + P_i \quad (\text{II.108})$$

Avec : ρ_i : Masse volumique

V_i : Volume élémentaire du nœud i

C_i : Capacité thermique massique

L'équation (II.108) est appliquée à l'ensemble des nœuds, ce qui permet d'obtenir un système d'équations algébriques couplées. Le système d'équations est mis sous forme matricielle :

$$[C] \cdot \left[\frac{dT}{dt} \right] = [G] \cdot [T] + [P] \quad (\text{II.109})$$

Avec : $[C]$: la matrice diagonale des capacités

$[G]$: La matrice des conductances thermiques

$[T]$: Le vecteur des températures

$[P]$: Le vecteur des sources de chaleur

La difficulté de l'approche nodale réside dans la détermination des valeurs des conductances thermiques constituant la matrice $[G]$. Il peut s'agir alors de conductances thermiques de conduction, de convection ou de rayonnement. Les expressions des différentes conductances thermiques que l'on retrouve dans les modèles thermiques des machines électriques sont :

- Conductance de conduction

$$G_{ji}^{cond} = \frac{\lambda S_{ji}}{L_{ji}} \quad (\text{II.110})$$

- Conductance de convection

$$G_{ji}^{conv} = h S_{ji} \quad (\text{II.111})$$

- Conductance de rayonnement

$$G_{ji}^r = \sigma S F_{ij} (T_j^2 + T_i^2) (T_i + T_j) \quad (\text{II.112})$$

Avec : S_{ji} surface d'échange des volumes (j) et (i)

L_{ji} Longueur entre les nœuds (j) et (i)

II.5.2.2.Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (EF) est largement utilisée, à l'heure actuelle, pour ses possibilités de calcul de la distribution de températures dans la machine avec une grande précision et les différents couplages envisageables. Une tendance actuelle dans les simulations numériques est le couplage électromagnétique et thermique dans le cas des machines électriques. La difficulté majeure en utilisant la méthode EF est l'étude du problème thermique de la machine électrique en 3D. En effet, il est en particulier difficile avec cette méthode de tenir compte des couches fines dans certaines parties de la machine et de prendre en compte l'éventuel échauffement du liquide de refroidissement [20]. De plus, le temps de calcul nécessaire au traitement de ce type de problème est souvent important.

Résoudre un problème thermique par EF consiste à déterminer la répartition spatio-temporelle de la température $T(x, y, z, t)$ en résolvant l'équation de la chaleur :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) - P = 0 \quad (\text{II.113})$$

Les conditions aux limites sur les surfaces du domaine considéré pour la résolution de l'équation de la chaleur sont généralement les suivantes :

$T = T_p$ Température imposée (condition d'isotherme), Dirichlet.

$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = \varphi_0$ Flux thermique imposé sur les surfaces du domaine.

Si un corps est thermiquement isolé (adiabatique), le flux thermique est nul $\varphi_0 = 0$.

$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = \varphi_{conv} + \varphi_{ray}$ Condition générale aux surfaces de transfert de chaleur avec le milieu ambiant.

Il est nécessaire de définir la condition initiale à l'instant $t = t_0$

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z)$$

Afin d'obtenir l'équation (II.114), nous utilisons la méthode des valeurs résiduelles dans la formule de Galerkin pour résoudre l'équation (II.113) par la méthode des éléments finis, en multipliant l'équation (II.113) par une fonction aléatoire et intégrable sur le domaine.

$$\int_V T^* (\rho C_p \dot{T} - \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) - P) dV = 0 \quad (\text{II.114})$$

T^* fonction test ou fonction de pondération.

La formulation intégrale faible du problème thermique s'écrit [21] :

$$\int_V T^* \cdot \rho C_p \dot{T} dv + \int_V \overrightarrow{\text{grad}} T^* \cdot \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T dV - \int_S T^* (\varphi_{conv} + \varphi_{ray}) dS - \int_V T^* P dV = 0 \quad (\text{II.115})$$

Cette équation doit être vérifiée pour toute fonction test T^* . Une solution est d'utiliser les fonctions de base polynomiales utilisées pour la discrétisation du problème. On obtient alors au final un système matriciel à inverser.

Pour tout outil numérique de calculs par EF, la démarche de l'étude du problème physique reste la même. Chaque étape utilise un module spécifique (figure II.16).

Les régions à forts gradients de température ou encore les petites épaisseurs doivent faire l'objet d'un maillage particulièrement fin.

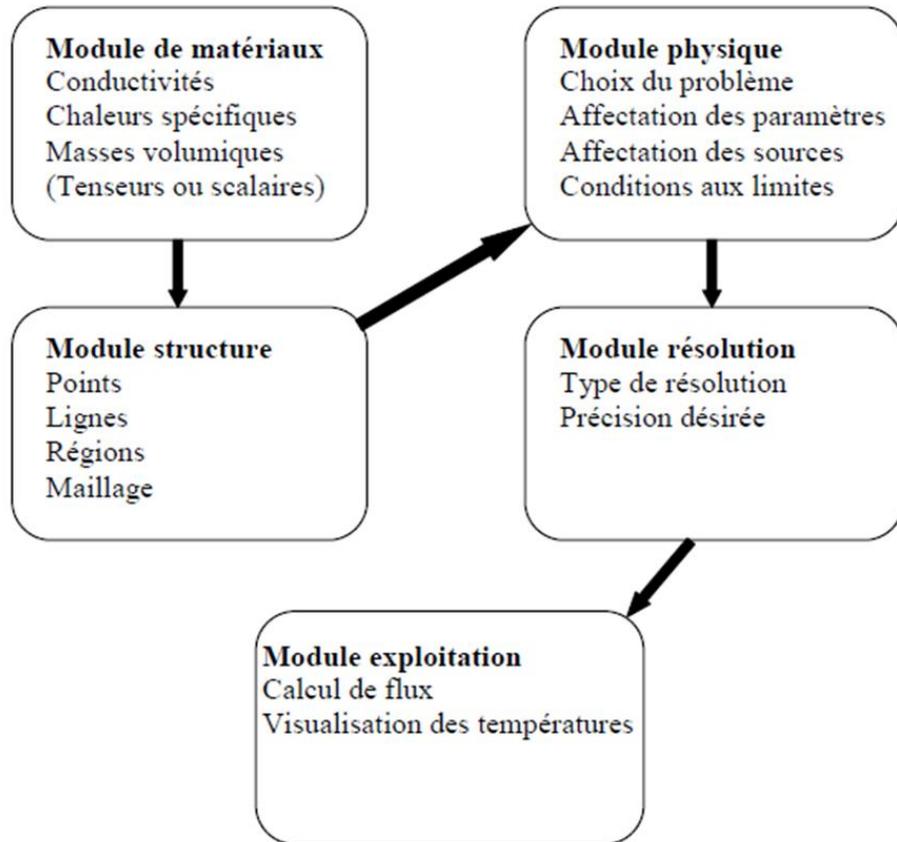


Figure (II.16) : Etapes de modélisation par EF [20].

II.6.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la manière avec laquelle nous pouvons modéliser un transformateur en deux modèles magnétiques et thermiques.

Les équations générales régissant les phénomènes électromagnétiques sont décrites par des équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations permet de connaître l'évolution du champ en tout point de l'espace. Nous nous sommes intéressés d'une façon particulière aux modèles magnétostatique et magnétodynamique qui sont obtenus à l'aide du potentiel vecteur magnétique. Ces équations peuvent être résolues par la méthode des éléments finis.

Les différentes pertes dans les transformateurs sont les sources de chaleur dont la dissipation est régie par trois modes de transmissions. Les transferts de chaleurs rencontrés à la modélisation thermique de transformateur ont été présentés dans ce chapitre.

Chapitre III

Simulation numérique de
transfert thermique dans un
transformateur monophasé

III.1.Introduction

Pour dimensionner, améliorer ou simplement calculer les performances d'un transformateur, il est important de connaître la température en tout point de transformateur.

Pour le cas d'un transformateur déjà construit, il est impossible de placer les capteurs dans certains endroits. Pour accéder à ces températures souvent importantes à déterminer comme dans le cas des régions des isolants, l'étude par simulation numérique s'impose.

Dans ce travail, nous faisons appel au logiciel d'accès libre femm basé sur la méthode des éléments finis pour simuler le fonctionnement d'un transformateur monophasé.

Premièrement, nous présentons le logiciel utilisé et présentons les résultats des simulations magnétiques pour calculer les pertes indispensables pour le modèle thermique.

Deuxièmement, nous présenterons et analyserons les résultats de calcul des températures dans le cas du modèle thermique du transformateur en 2D.

III.2.Présentation de Logiciel FEMM

Bien qu'il existe de nombreux logiciels exploitant cette méthode et permettant de résoudre des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne idée de ce qu'il fait, notamment quant au choix du maillage et du type d'éléments qui doivent être adaptés au problème posé : aucun logiciel ne fera tout pour l'utilisateur, et il faut toujours garder un œil critique vis-à-vis de solutions approchées. Pour cela il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajuster les différents paramètres.

Parmi ces logiciels, on distingue le logiciel FEMM que nous adoptons pour la résolution des problèmes électromagnétique et thermique, du moment que son accès est libre.

FEMM est une suite de programmes pour résoudre des problèmes statiques et de basses fréquences en magnétisme et thermique. Les programmes actuels s'adressent aux problèmes bidimensionnels dans les domaines cartésiens et axisymétriques.

FEMM est divisé en trois parties [22] :

a) Préprocesseur (femme.exe)

C'est un programme permettant de définir la géométrie de la structure à étudier et d'affecter les propriétés des matériaux dans chaque région et les conditions aux limites choisies, ainsi que le type de problème à résoudre (plan, axisymétrique).

b) Résolveur (fkerne.exe)

Le résolveur prend en considération le problème complètement défini et résout les équations appropriées pour obtenir des valeurs au nœuds de tout le domaine d'étude.

c) Post processeur (femmview.exe)

C'est une interface graphique qui permet de traiter les résultats fournis par le résolveur dans les différentes régions, le programme permet aussi à l'utilisateur d'inspecter le champ dans n'importe quel point de la structure.

Deux programmes additionnels sont appelés pour accomplir des tâches spécialisées, Ceux-ci sont :

- Triangle.exe : c'est programme qui décompose la région d'étude en un grand nombre de triangles, une partie essentielle du processus de la MEF.
- Femmplot.exe : c'est un petit programme employé pour tracer les diverses courbes.

III.3.Description de problème

Le transformateur de type coque en cours d'analyse se compose de deux bobines concentriques enroulées autour de la colonne centrale du noyau. Le circuit secondaire est enroulé au dessus du circuit primaire. Les deux enroulements ont un nombre égal de spires est $N_1 = N_2 = 1000$. Une vue en coupe transversale du transformateur montrant la géométrie du noyau ainsi que le placement des deux enroulements apparaît sur la figure (III.1). Chaque bobine est modélisée par deux régions rectangulaires non contiguës, et les propriétés de ces régions incluent la spécification du nombre de spires de la bobine et du courant aux bornes. De plus, chaque paire de régions représentant une bobine toronnée doit être définie comme connectée en série. Les détails géométriques du dispositif sont indiqués sur la figure (III.1), avec les dimensions en mètre. La plaque signalétique de transformateur indique que le courant nominal égale 2A.

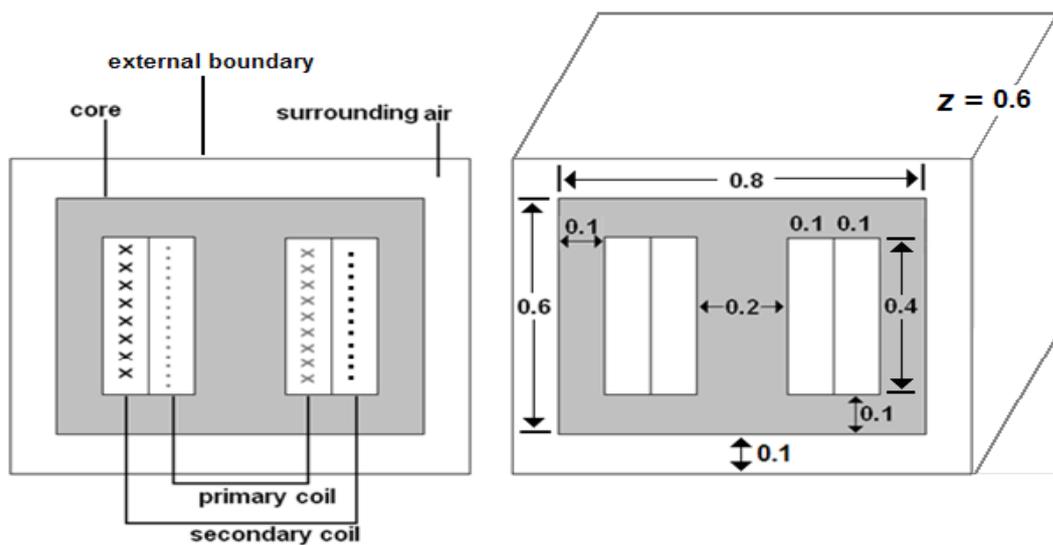


Figure (III.1) : dimension de transformateur monophasé.

III.4.Simulation du problème magnétique

Le but de cette simulation est d'évaluer la valeur du courant à vide et du courant nominal de ce transformateur et de pouvoir passer à la résolution du modèle thermique.

III.4.1.Différents matériaux du transformateur

Le tableau suivant présente les propriétés magnétoélectriques des matériaux intervenant dans le cas du modèle magnétique d'un transformateur.

Propriété Matériaux	μ_r	σ
fer	14871	10.44
cuivre	1	58
Air	1	0

Tableau(III.1) : définit les propriétés des matériaux utilisé dans le transformateur.

III.4.2.Définition des conditions aux limites

Une étape importante pour le calcul, consiste à définir sur le contour extérieur de la zone à étudier une condition aux limites. Elle est de type Dirichlet ($A=0$) dans le cas du transformateur étudié.

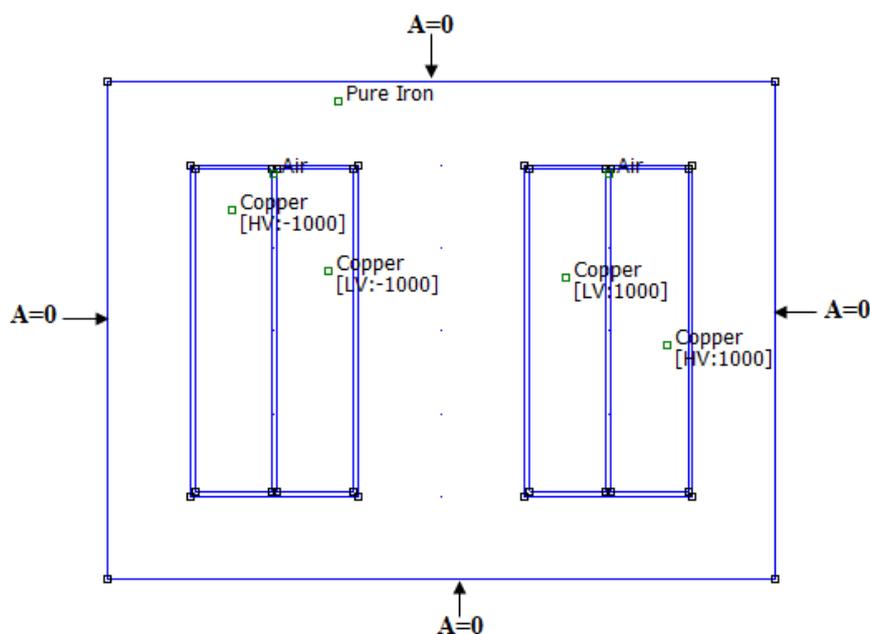


Figure (III.2) : Les conditions aux limites imposées sur la surface extérieure du transformateur.

III.4.3. Maillage en éléments finis du transformateur

Le programme résout les équations magnétiques en un nombre de points (éléments finis) comme l'indique la figure III.3. Plus le nombre de triangle est important, plus les résultats sont précis, mais le temps de calcul est alors plus élevé.

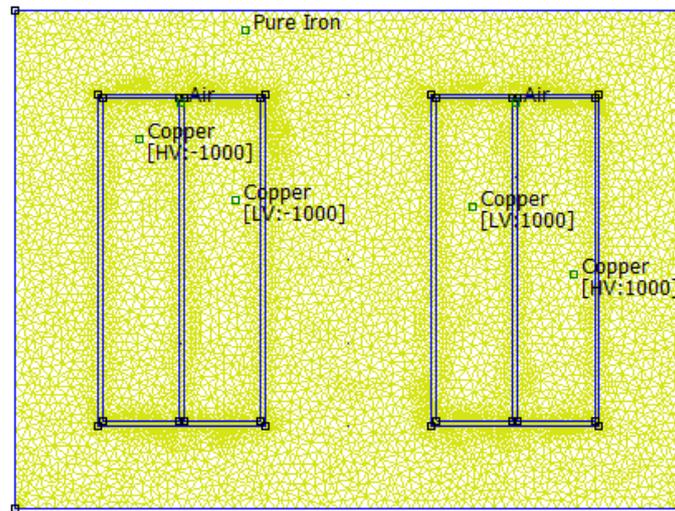


Figure (III.3) : Maillage en éléments finis du domaine d'étude.

III.4.3. Cas à vide

Nous avons la possibilité de déterminer le courant à vide à partir de la courbe de flux en fonction de courant (courbe à vide ou de première aimantation).

On impose à chaque fois un courant au primaire (LV) avec un courant nul au secondaire (HV) du transformateur. On calcule la valeur de flux correspondante à chaque courant. La figure III.4 montre la variation de flux en fonction du courant:

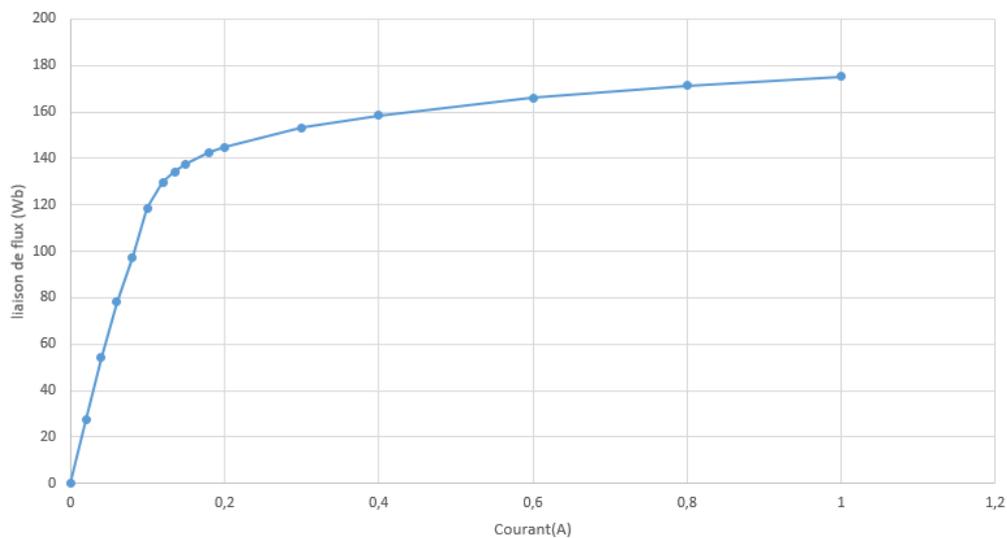


Figure (III.4) : Courbe de flux magnétique en fonction du courant à vide.

CHAPITRE III : Simulation numérique de transfert thermique dans un transformateur monophasé

D'après la Figure (III.4) on évalue le courant à vide à $I_0=0.12$ A.

La figure III.5 montre la répartition des inductions magnétiques dans le transformateur. La figure III.6 montre le niveau de l'induction magnétique le long d'une ligne horizontale prise au milieu du transformateur.

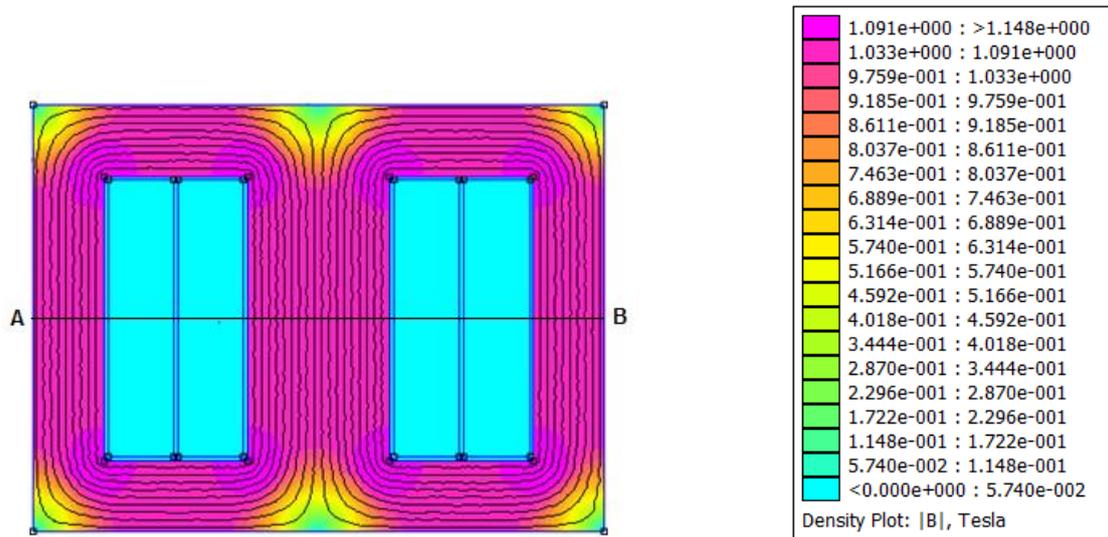


Figure (III.5) : Répartition de l'induction magnétique dans le transformateur à vide.

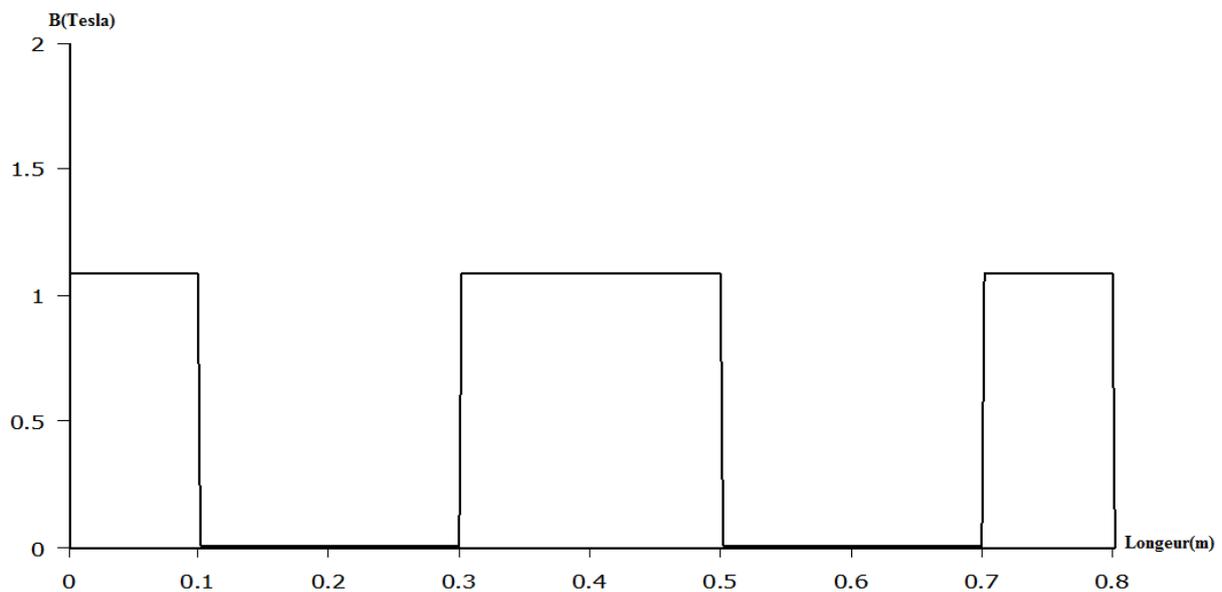


Figure (III.6) : Courbe de l'induction magnétique en fonction de la longueur (le long de la ligne AB de la figure III.5).

III.4.4. Cas en charge

D'après la plaque signalétique de ce transformateur, le courant nominal est $I_n = 2$ A

Les figures III.7 & 8 sont calculées pour le cas du courant nominal et représentent l'induction magnétique dans le transformateur.

CHAPITRE III : Simulation numérique de transfert thermique dans un transformateur monophasé

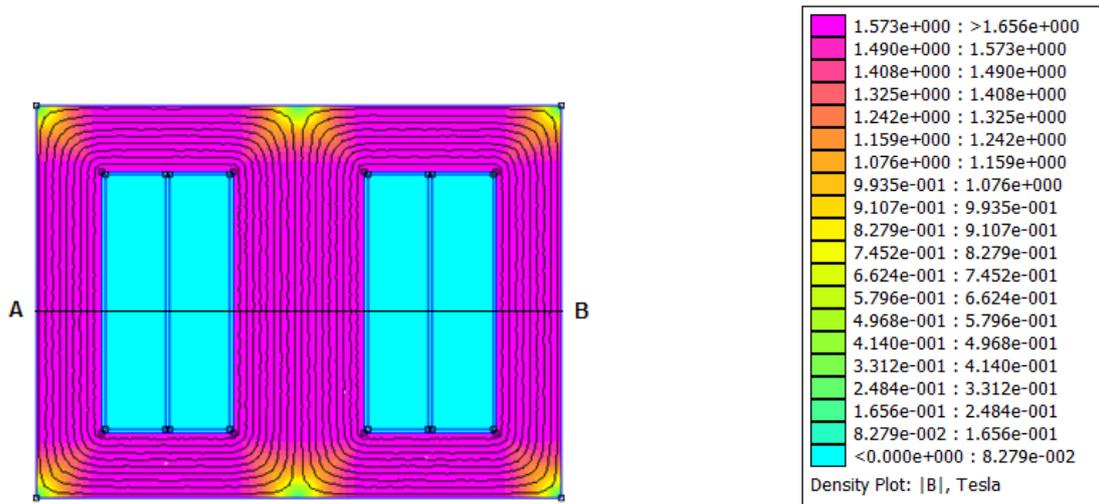


Figure (III.7) : Répartition de l'induction magnétique dans le transformateur en charge.

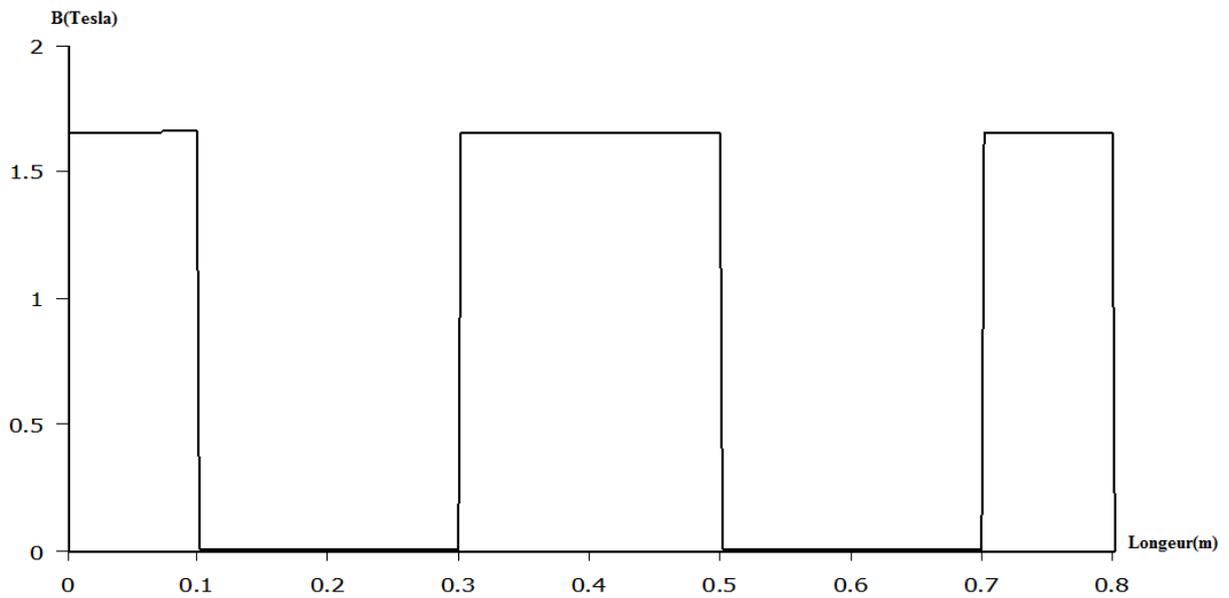


Figure (III.8) : Courbe de l'induction magnétique dans le cas en charge (le long de la ligne AB de la figure III.7).

Remarque

On remarque que les lignes de champs magnétique réparties uniformément dans les deux cas et que la valeur de la densité de flux magnétique atteint la saturation plus dans le cas en charge.

III.5. Simulation du problème thermique

Les dimensions géométriques du transformateur restant les mêmes que celles décrites plus haut dans le tableau (III.1).

III.5.1. Différents matériaux

propriété matériaux	λ	Cp	ρ
Fer	80	444	7.860
Cuivre	390	385	8.920
Fibre glace	0.03	1130	2.6
Air	0.025	1004	1.293

Tableau (III.2) : Propriétés thermiques des matériaux utilisés dans le transformateur.

III.5.2. Conditions aux limites

Une étape importante pour le calcul, consiste à définir les conditions aux limites :

- Une condition de Dirichlet : la température ambiante constante $T=293K$ sur le contour extérieur de l'air entourant le transformateur.
- Une condition dite de convection sur la surface externe du transformateur ce qui permet de définir le coefficient de convection pour l'air externe $H=30$.

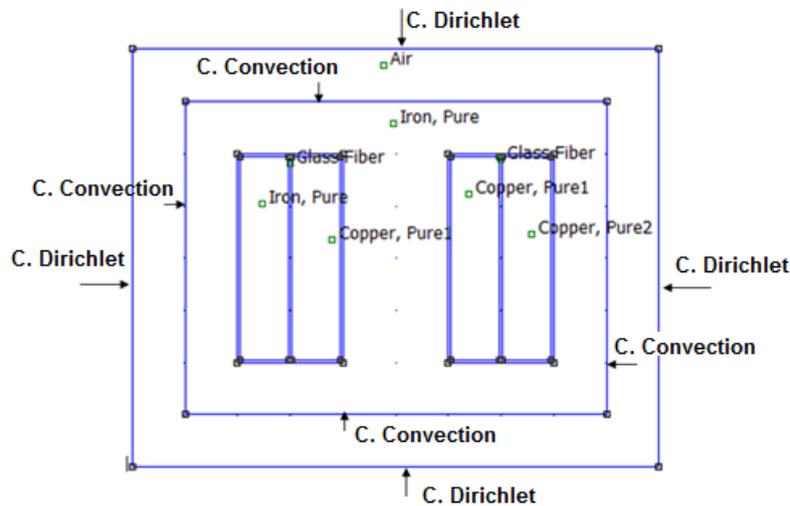


Figure (III.9) : Conditions aux limites imposées au transformateur.

III.5.2. Cas à vide

a. Déterminations des pertes volumiques

Dans cet essai, les pertes volumiques se situent uniquement dans le bobinage primaire du transformateur car le courant secondaire est nul et on n'a tenu compte que des pertes joule ($P_{fer} \approx 0$).

CHAPITRE III : Simulation numérique de transfert thermique dans un transformateur monophasé

D'après la loi d'Ampère, le courant à vide qui circule dans le primaire du transformateur est :

$$\sum I_{10} = I_0 \cdot N \implies I_{10} = 0,12 \cdot 1000 = 120 \text{ A}$$

Donc les pertes volumiques P_{V10} sont :

$$P_{V10} = \frac{R \cdot I_{10}^2}{V_1} \text{ Avec } V_1 = 0,6 \times 0,0925 \times 0,39 = 0,021645 \text{ m}^3 \text{ (volume du cuivre primaire) et } R=0,573518 \Omega$$

$$P_{V1} = \frac{0,573518 \cdot 120^2}{0,021645} = 381550,4366 \text{ W/m}^3$$

Après résolution du problème thermique, nous présentons, sur la figure (III. 10), les résultats de la répartition de la température dans le transformateur à vide. Et la figure III.11 montre la variation des températures le long d'une ligne horizontale AB définie à la figure (III.10).

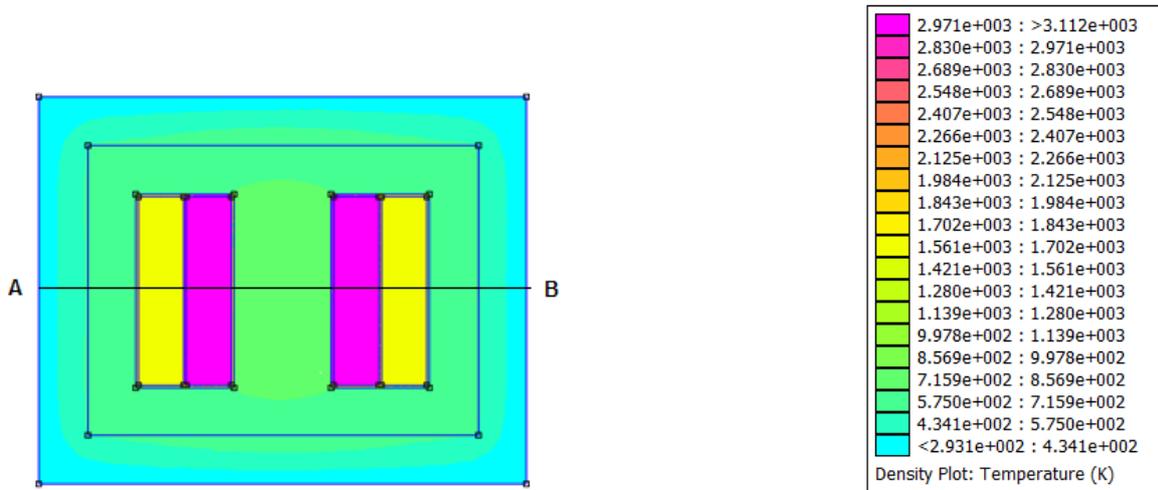


Figure (III.10) : Répartition de température dans le transformateur (cas à vide).

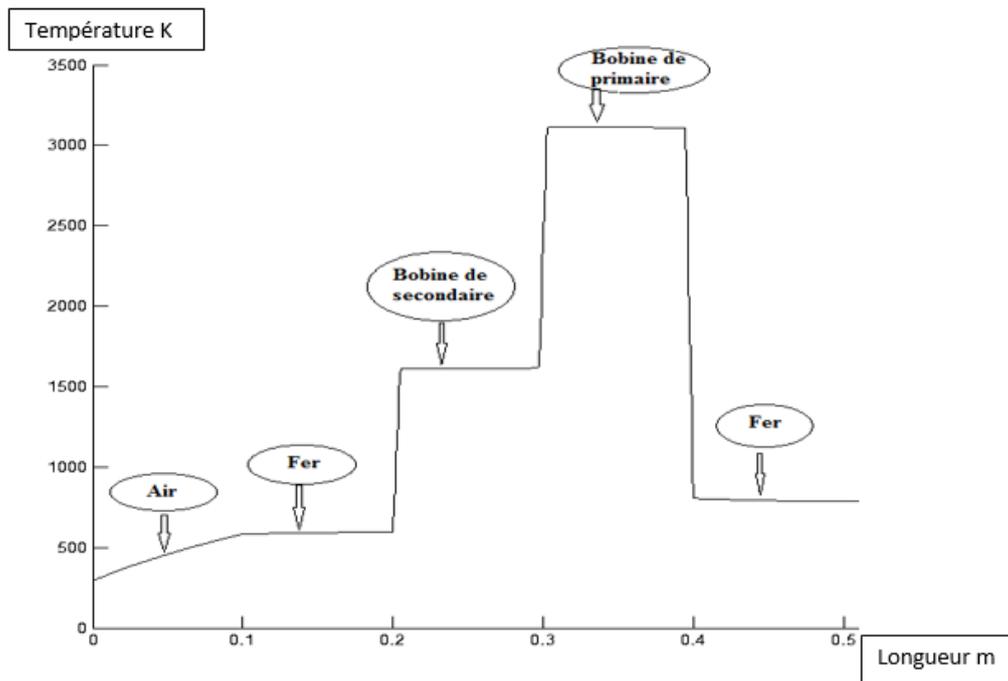


Figure (III.11) : Courbe de variation de température dans différents zone de transformateur (cas à vide).

III.5.3.Cas en charge

a. Détermination des pertes volumiques

La source de l'échauffement dans le transformateur étudié reste essentiellement les pertes Joule surtout dans le cas du point de fonctionnement nominal.

D'après la Loi d'Ampère, le courant qui circule dans les bobines de transformateur est :

$$\sum I = I_n \cdot N \implies I = 2.1000 = 2000 \text{ A}$$

Les pertes volumiques de conducteur primaire P_{V1} et secondaire P_{V2} s'expriment par :

- Perte volumique de conducteur primaire et secondaire :

$$P_{V1} = P_{V2} = \frac{RI^2}{V_1} \quad \text{Avec } V_1 = V_2 = 0,021645 \text{ m}^3 \text{ et } R=0.573518 \Omega$$

$$P_{V1} = P_{V2} = \frac{0,573518 \cdot 2000^2}{0,021645} = 1059862,4 \text{ W/m}^3$$

Avec :

V_1 et V_2 : Volume de la bobine au primaire et au secondaire du transformateur respectivement.

CHAPITRE III : Simulation numérique de transfert thermique dans un transformateur monophasé

$R(\Omega)$ Résistance de conducteur déterminé avec le logiciel FEMM.

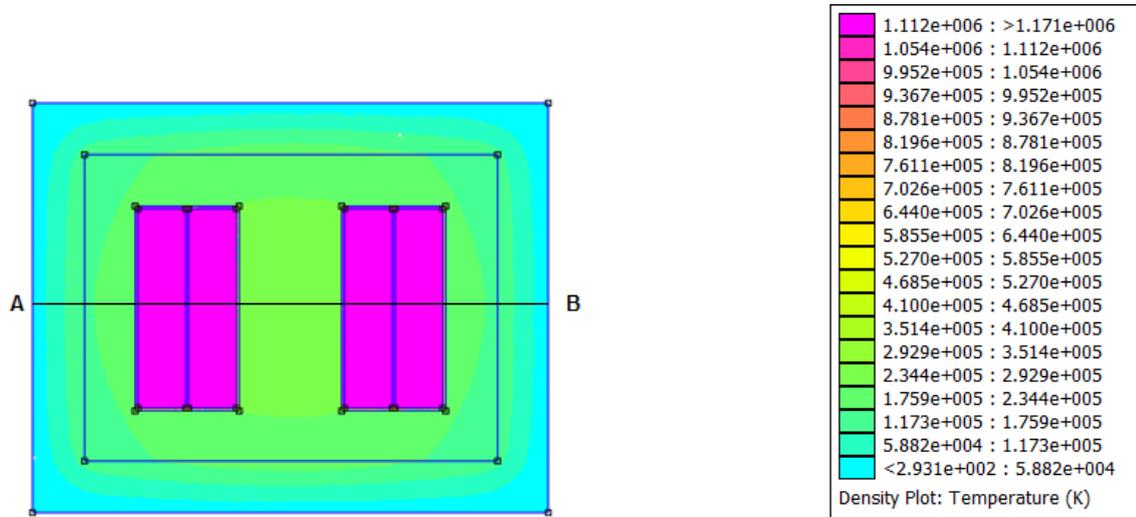


Figure (III.12) : Répartition des températures dans le transformateur (cas en charge).

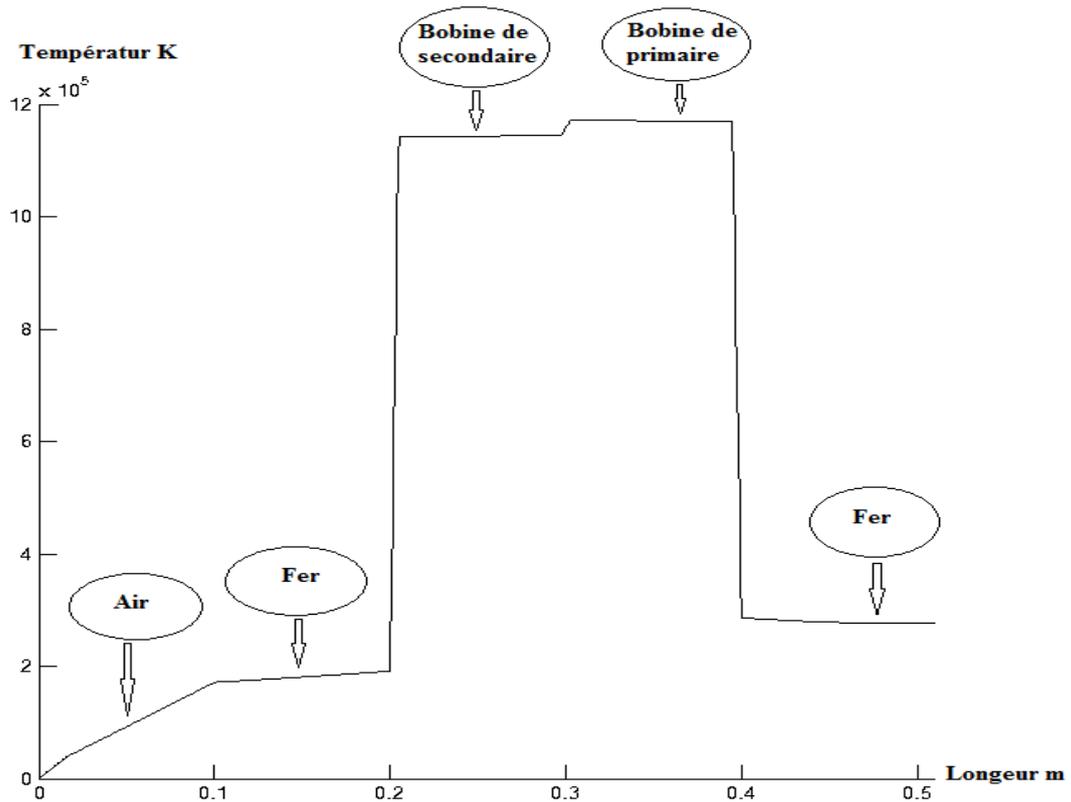


Figure (III.13) : Courbe de variation de température dans le transformateur le long de la ligne AB sur la figure III.12 (cas en charge).

III.5.4. Interprétation des résultats

- La température dans le cas en charge, évidemment, est beaucoup plus élevée par rapport au cas à vide
- Les pertes volumiques dans le cas en charge sont plus élevées que dans le cas à vide, ce résultat prévisible amène le résultat décrit dans le point précédent.
- Le coefficient de convection H qui définit l'importance de l'échange entre le transformateur et le milieu extérieur fait qu'à chaque fois qu'on l'augmente, la température dans les bobines diminue et dans le reste des régions du transformateur. La difficulté de l'évaluer reste vu qu'il dépend de plusieurs paramètres dont le plus important est l'environnement dans lequel est posé le transformateur.

La conductivité thermique est la grandeur physique caractérisant le comportement d'un matériau de transmettre la chaleur par conduction, elle est mesurée par le coefficient λ .

- Plus le λ est grand plus le matériau est conducteur, plus le λ est petit plus le matériau est isolant
- Le λ et μ varient avec la température
- La masse volumique ρ varie selon plusieurs paramètres. Elle dépend notamment de la température.

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a démontré que l'analyse par éléments finis fournit un outil efficace pour déterminer les températures dans un transformateur. L'analyse du transfert de chaleur permet de prédire la température à plusieurs endroits du transformateur et la répartition de la température en tenant compte de différentes conditions de fonctionnement. En considérant que le transformateur a été simulé en géométrie bidimensionnelle, avec certaines caractéristiques et mesures de taille et dimensions approximatives.

Enfin, les résultats de cette étude peuvent permettre aux fabricants de mieux comprendre la nature du transfert de chaleur dans les transformateurs, et peuvent aider à mieux évaluer les contraintes thermiques.

Conclusion générale

Notre travail est consacré à l'étude de la modélisation magnétothermique dans les transformateurs. Ceci nous a permis de comprendre d'une manière précise le comportement magnétothermique des transformateurs en agissant sur les caractéristiques des matériaux et sur la disposition de ces composants.

Une modélisation magnétique permet de connaître l'évolution du champ en tout point de l'espace à partir des équations générales régissant les phénomènes électromagnétiques qui sont décrites par des équations aux dérivées partielles.

Un modèle thermique sera nécessaire pour connaître la répartition de la température dans le transformateur étudié.

Les deux modèles précédents sont à résoudre et pour se faire la méthode des éléments finis 2D a été retenue. D'abord pour son extrême efficacité en temps de précision mais aussi au vu de son adaptation pour les problèmes les plus complexes.

Dans un premier temps, le calcul des pertes volumiques sera nécessaire pour servir comme entrées du modèle thermique. Ce calcul est alors associé aux équations de circuit. Puis, cette méthode mise à profit dans le but de mettre en évidence l'influence des pertes sur l'élévation de la température.

Dans un deuxième temps, la répartition de la température est calculée en résolvant le modèle thermique en 2D. Ces résultats sont importants pour le dimensionnement du transformateur ou de sa protection.

Enfin, il est noté que les résultats obtenus dans notre travail peuvent constituer une plateforme sur laquelle un modèle thermique plus précis du transformateur peut être élaboré. La prise en compte dans un premier temps des autres pertes non considérées dans cette étude comme les pertes fer ou encore les effets de la température sur les paramètres magnétiques et thermiques des matériaux ou encore du couplage magnétothermique.

Bibliographie :

- [1] <http://maphysiqueappliquee.free.fr>, chapitre03-Le transformateur, consulter le 05-08-2020.
- [2] Beboukha abd errazak , ghilani .moussa, " Modélisation et simulation de la protection différentielle dans le transformateur de puissance ", Mémoire de master, Université d'EL-Oued- Faculté des Sciences et de Technologie, 23-24 Juin 2014.
- [3] Gabriel Cormier, " chapitre08-transformateur ", GEN1153.
- [4] http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformateur_de_puissance
- [5] Imadeddine harzelli,"contribution à la modélisation par la méthodes des volumes finis d'un transformateur de courant", Magister en : Electrotechnique.,Université mohamed khaidar biskra.02 octobre 2014.
- [6] V. COSTAN, " Convertisseurs Parallèles Entrelacés : Etude des Pertes Fer dans les Transformateurs Inter-cellules", Thèse de doctorat, institut national polytechnique de Toulouse, octobre 2007.
- [7] Tian. LIU, "Manoeuvre contrôlée des transformateurs de puissance avec flux rémanent", Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes », 7 Juillet 2011
- [8] LEFEVRE.A, "Contrebutions à la modélisation électriques, électromagnétique et thermique des transformateurs ", Thèse de Doctorat, Ecole polytechnique de Nantes, 2006.
- [9] Vincent Doirat « Contribution à la modélisation de systèmes de contrôles non destructifs par courants de Foucault-application à la caractérisation physique et dimensionnelle de matériaux de l'aéronautique » Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes Année 2007.
- [10] Anthony.Lefevre Laurence.Miégeville Java.Fouladgar Guy.Olivier «3D computation of transformers overheating under nonlinear loads » IEEE Transaction On Magnetics, vol.41, No.5, pp 1564-1567, May 2005.
- [11] BENS Aidane Hakim, « Modélisation de systèmes micro-électromécaniques (MEMS) en régime dynamique par la méthode des éléments finis », Mémoire de magister, Université de TIZI OUZOU, 2006.
- [12] Melle ABDELLAOUI Hassina, « Modélisation thermique d'un moteur asynchrone à cage par la méthode des éléments finis », Mémoire de fin d'études ingénieur, Université de TIZI OUZOU, Promotion 2007.
- [13] Mr. M. AFETTOUCHE, Mr. T. ARAB « Etude d'un transformateur de puissance triphasé par la méthode des éléments finis », Mémoire de fin d'études ingénieur, Université de TIZI OUZOU, Promotion 2010.
- [14] Mathieu ROSSI «Conception optimale et multi-physique de composants passifs de puissance exploités dans le domaine ferroviaire» Thèse DOCTORAT DELIVRE PAR L'ECOLE CENTRALE DE LILLE. December 2012.
- [15] W.G. Hurley, WH Wolfle, and J.G. Breslin, Optimized transformer design: Inclusive of high-frequency effects, Power Electronics, IEEE Transactions on 13 (1998), no. 4, 651–659.

[16] PL Dowell, Effects of eddy currents in transformer windings, Proceedings of the IEE 113 (1966), no. 8, 1387–1394.

[17] Studying guide in course on Numerical modelling and design of electrical devices: transformers Project 1.0101-0278 Application of interdisciplinary and international team and project based learning in Master Studies IN 557.

[18] Mohand Laïd Idoughi « Extraction de modèles thermiques simplifiés des machines électriques à partir d'un calcul du champ de températures » Université Paris Sud-Paris XI, 2011.

[19] A. Fasquelle, "Contribution à la modélisation multi-physique électro vibro-acoustique et aérothermique de machines de traction", thèse de doctorat à l'école centrale de Lille, Spécialité : Génie Electrique, 2007.

[20] R. Glises, "Simulation du comportement thermique", Technique de l'ingénieur, D3760.

[21] Y. Debard, "Méthode des éléments finis : thermique", cours de l'université du Mans.

[22] David Meeker, "<http://www.femm.info>." consulter le 20-07-2020.