

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : INSTALLATIONS ÉNERGÉTIQUES ET TURBOMACHINES

PAR :

BELAHNECHE Boubekour Ghilas

CHETRAT Said

Thème

**Etude d'un écoulement magnétohydrodynamique (M.H.D) le long une
plaque non-isothermique**

Soutenu le 30/06/2019 devant le jury composé de :

Mr. BOUTALBI. N

President

Mr. ALI AGHA. H

Rapporteur

Mr. BENSLIMANE. A

Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu qui nous a donné la santé, la volonté et le courage d'accomplir ce travail.

Nos vifs remerciements à Mr H, ALI AGHA, notre promoteur, pour son aide, ces critiques constructives, ses explications et suggestions pertinentes et pour la qualité de ses orientations tout au long de ce travail et pour avoir apporté tant de soins à la réalisation de ce mémoire.

Nous remercions également les membres de jury qui nous font honneur en acceptant d'examiner et de juger notre travail.

Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mes très chers parents, qui m'ont toujours entouré de leur confiance, amour et encouragement tout le long de ma vie. Sans eux, ce mémoire n'aurait pu voir le jour, ainsi qu'à mes frères.

Et à tous mes amis sans exception.

Ghilas.

Dédicace

Je dédie ce travail en signe de reconnaissance, et respect envers tous ceux qui me sont très chers, et qui m'ont été d'un grand soutien durant mes années d'études.

À mes chers parents,

À mon frère et à mes sœurs,

À toute la famille,

À mes amis, À mes professeurs,

Je tiens à dédier ce travail à tous ceux qui m'ont prêté l'aide et l'assistance à sa réalisation.

Said.

Table des matières

Table des matières

Table des matières	i
Nomenclature	iv
Liste des figures :	vi
Liste des tableaux :	vii
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Contexte théorique et scientifique

I.1. Introduction :	3
I.2. Définition de la magnétohydrodynamique MHD :	3
I.3. Différentes modélisations de la MHD :	4
I.3.1. Magnétohydrodynamique idéale :	4
I.3.2. Magnétohydrodynamique résistive :	4
I.4. Les domaines de la magnétohydrodynamique MHD :	4
I.4.1. Géophysique :	5
I.4.2. Astrophysique :	5
I.5. Applications industrielles de la magnétohydrodynamique :	5
I.5.1. Génération de l'électricité par la MHD :	5
I.5.1.1 Machines linéaires à plasma :	6
I.5.1.2 Machines circulaires à plasma :	6
I.5.1.3 Générateurs à conduction :	6
I.5.1.4 Générateurs à induction :	7
I.6 Application de MHD a la métallurgie :	8
I.7. Choix du fluide conducteur :	10
I.8. Equations de la MHD :	10
I.8.1. Contribution de l'Electromagnétisme :	11
I.8.1.1. Loi d'Ohm généralisée :	11
I.8.1.2. Equations de Maxwell :	11
I.8.1.3. Force électromagnétique :	12
I.8.2. Contribution de la Mécanique des Fluides :	13
I.8.2.1. Équation de quantité de mouvement :	13
I.8.2.2. Équation de continuité :	13
I.9. Transfert de chaleur par convection :	14

Table des matières

I.9.1. Convection naturelle :	15
I.9.2. Convection forcée :	15
I.9.3. Convection mixte :	15
I.10. Théorie de la couche limite :	16
I.11. Régimes d'écoulement dans la couche limite :	17
I.11.1. Couche limite laminaire :	17
I.11.2. Couche limite turbulente :	18
I.12. Couche limite dynamique :	19
I.13. Couche limite thermique :	20
I.14. Synthèse bibliographique	20

Chapitre II : Positionnement du problème

II.1. Introduction :	24
II.2. Description du problème :	24
II.3. Hypothèses simplificatrices :	25
II.4. Les équations gouvernantes du problème :	25
II.4.1. Forme dimensionnelle des équations :	26
II.4.1.1. Equation de continuité :	26
II.4.1.2. Equation de la quantité de mouvement :	26
II.4.1.3. Equation de l'énergie :	26
II.4.1.4. Conditions initiales et aux limites :	27
II.5. Projections des équations de conservation selon le cas de la géométrie en présence :	27
II.5.1. Equations de continuité :	27
II.5.2. Equations de conservation de quantité de mouvement :	27
II.5.3. Equations de conservation d'énergie :	27
II.6. Formulation adimensionnelle :	28
II.6.1. Equations adimensionnelles et solution auto-similaire :	28
II.6.2. Conditions aux limites :	29
II.7. Expression des nombres sans dimensions :	30
II.7.1. Le nombre de Prandtl :	30
II.7.2. Le nombre de Grashof :	30
II.7.3. Nombre de Reynolds :	31
II.7.4. Le nombre de Nusselt :	31

Table des matières

Chapitre III : Méthodes numériques

III.1. Equations différentielles ordinaires :	32
III.2. Problème de valeur aux limites	32
III.3. Méthode numérique :	33
III.4. Validation numérique :	35

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.1. Profils de vitesse adimensionnelle :	36
IV.2. Profils de température adimensionnelle :	39
IV.3. Variations du taux local de transfert de chaleur Nu_x :	44
IV.4. Coefficient de frottement C_f :	47
IV.5. Conclusion :	50
Conclusion Générale	51
Références bibliographiques	53
Résumé	

Nomenclature

\vec{B}	Induction magnétique	
\vec{E}	Champ électrique	
\vec{F}	Force électromagnétique	
\vec{J}	Densité de courant	
g	Accélération de la gravité	(m.s ⁻²)
P	Pression	(Pa)
Q	Densité volumique de charge	(c.m ³)
t	Temps	(s)
T	Température	(K)
X, Y	Coordonnées cartésiennes dimensionnelles	(m)
f	Fonction de similitude	
u, V	Composantes de la vitesse dimensionnelle	(m.s ⁻¹)

Nombres adimensionnelles

Gr	Nombre de Grashof
Nu	Nombre de Nusselt
Pr	Nombre de Prandtl
Re	Nombre de Reynolds
Re_m	Nombre de Reynolds magnétique
Ri	Nombre de Richardson

Symboles Grecs

θ	Température adimensionnelle	
ε_0	Permittivité du vide = $8,8541878 \cdot 10^{-12}$	(F.m ⁻¹)
μ_0	Perméabilité magnétique, du vide	(N.A ⁻¹)
ρ	Masse volumique	(kg.m ⁻³)
Ψ	Fonction de courant	
δ	Epaisseur de la couche limite	(m)
η	Variable de similarité	
μ	Viscosité dynamique	(kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)
σ_e	Conductivité électrique	(Simence.m ⁻¹)
τ	Contrainte de cisaillement	Pa
ν	Viscosité cinématique	(m ² .s ⁻¹)

Indices

∞	Relatif à l'écoulement externe
f	Fluide

Liste des figures :

Figure I.1: Générateur MHD à Conduction (tuyère linéaire).....	7
Figure I.2: Principe d'un générateur MHD à l'eau de mer type hélicoïdal.....	7
Figure I.3: Générateurs à induction.....	8
Figure I.4: Schéma de principe du procédé électromagnétique utilisant un champ magnétique alternatif.	10
Figure I.5: Schéma du phénomène de transfert de chaleur par convection.....	14
Figure I.6: Couche limite laminaire et turbulente sur une plaque plane.	19
Figure I.7: Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane.	19
Figure I.8: Couche limite thermique sur une plaque plane.	20
Figure II.1: La géométrie du problème	24
Figure IV.1: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$). ..	36
Figure IV.2: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$). ..	37
Figure IV.3: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$). ..	38
Figure IV.4: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$). ..	38
Figure IV.5: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$).	40
Figure IV.6: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$).	40
Figure IV.7: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $Ri=1.0$).....	41
Figure IV.8: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$).	42
Figure IV.9: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$).	42
Figure IV.10: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $Ri=1.0$).....	43
Figure IV.11: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$).....	44
Figure IV.12: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ri=1.0$, $Ec=0.0$).....	45

Liste des figures et des tableaux

Figure IV.13: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$).....	46
Figure IV.14: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ri=1.0$, $Ec=0.0$).....	46
Figure IV.15: Profils de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$).....	47
Figure IV.16: Profil de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$).....	48
Figure IV.17: Profils de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$).....	49
Figure IV.18: Profils de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$).....	49

Liste des tableaux :

Tableau III.1: Valeurs de $-\theta'(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand $Ec=0$, $M=0$, $Ri=0$	36
Tableau III.2: Valeurs de $-\theta'(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl et Richardson quand $Ec=0$, $M=0$	36

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

Introduction générale

Ces dernières années, beaucoup de travaux se sont intéressés au transfert de chaleur par convection mixte en présence d'un champ magnétique. L'étude des écoulements magnétohydrodynamique a suscité un intérêt considérable qui s'est traduit par un grand nombre de travaux à cause de son application dans plusieurs domaines.

La magnétohydrodynamique (MHD) est un domaine très vaste de la physique qui concerne l'interaction entre un champ électromagnétique et un fluide conducteur de l'électricité. Ainsi, il est conçu facilement que suivant le type d'interaction, il se peut de trouver que la MHD est liée aux problèmes apparemment disjoints de la couronne solaire, de la magnétosphère, de la conversion d'énergie fossile en énergie électrique, de la fusion thermonucléaire de la propulsion ou encore aux techniques industrielles de la métallurgie.

Dans cette thématique nous avons étudiés un écoulement MHD par convection mixte considéré laminaire, incompressible et bidimensionnel sur un plaque plane verticale, pour cela nous avons eu recours aux équations de Navier-Stocks couplées à l'équation de Maxwell et à l'équation d'énergie par lesquelles nous allons aboutir à deux équations différentielles ordinaire que nous avons résolu par la méthode de différences finies avec le solveur bvp4c par l'outil MATLAB.

L'objectif de notre étude est de voir l'influence du champ magnétique et de la convection mixte sur le champ de vitesse au sein de la couche limite dynamique et l'évolution de la température au sein de la couche limite thermique mais aussi la variation du taux de transfert de chaleur entre la paroi de la plaque et le fluide, ainsi que le coefficient de frottement ; pour cela nous avons eu recours à différents paramètres qui jouent un rôle considérable dans notre objectif d'étude cité précédemment notamment le nombre de Grashof, le nombre de Richardson, le nombre de Nusselt, le nombre de Prandtl et le paramètre magnétique qui sont considérés comme les principaux facteurs de notre étude.

Ce présent mémoire est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur la MHD mais aussi sur la théorie des couches limites et de la convection mixte ainsi qu'une synthèse bibliographique sur les travaux antérieurs sur cette thématique.

Introduction Générale

Le deuxième chapitre est consacré au domaine d'étude (géométrie du problème) mais aussi aux formulations mathématiques dimensionnelles générales du problème sur les équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de Maxwell et l'équation d'énergie que nous avons transformés sous la forme adimensionnelles.

Le troisième chapitre est dédié à la présentation des équations différentielles ordinaires et de la méthode des différences finies ainsi que la validation du modèle adopté que nous avons comparée à des travaux antérieurs déjà réalisés.

Le quatrième chapitre est dédié et à la présentation des résultats que nous avons obtenus et à l'interprétation de ces résultats.

Enfin nous avons terminés par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus durant cette étude.

Chapitre I

Contexte théorique et scientifique

I.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons voir les différents phénomènes physique qui constituent notre sujet d'étude, En premier lieu nous allons définir la magnétohydrodynamique (M.H.D) comme étant une généralisation de l'hydrodynamique appelée plus communément (la dynamique des fluides) qui est consacrée à l'étude des mouvements des fluides conducteurs de l'électricité en présence de champs magnétiques.

Par la suite nous allons voir le transfert de chaleur par convection et dans notre cas nous allons nous basés sur la convection mixte qui est constituée de convection (naturelle et forcée).

En dernier lieu allons voir la théorie sur les couches limites qui est définie comme étant une région de faible épaisseur produite par l'écoulement d'un fluide visqueux en présence d'un obstacle, mais aussi nous allons voir ces différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent) et aussi les couches limites (dynamique et thermique).

I.2. Définition de la magnétohydrodynamique MHD :

La magnétohydrodynamique (MHD) est l'étude des interactions des champs magnétiques et des écoulements de fluide électro-conducteur, ce fluide peut être un liquide, un gaz ionisé ou un plasma. L'étude des écoulements MHD est d'une grande importance compte tenu des diverses applications scientifiques et industrielles qu'on peut lui associer tels que la géophysique et l'astrophysique ou encore le génie métallurgique et les futurs réacteurs de fusion.

Ces écoulements sont modélisés par un couplage des équations de Maxwell et de Navier-Stokes. Comme dans la dynamique des fluides en générale. Le physicien suédois Hannes Alfvén fut le premier, en 1942, à employer le terme de magnétohydrodynamique. Il reçut le prix Nobel de physique en 1970 pour ses travaux. [1].

I.3. Différentes modélisations de la MHD :

Il existe plusieurs modèles de magnétohydrodynamique en fonction du degré de complexité requis il y a deux types

- la magnétohydrodynamique idéale
- la magnétohydrodynamique résistive

Le choix de l'un de ces modèles dépend de la valeur du nombre de Reynolds magnétique R_m .

I.3.1. Magnétohydrodynamique idéale :

La MHD idéale, est caractérisé par des nombre de Reynolds magnétique très haute ($R_m \gg 1$), Le fluide, fortement magnétisé, est traité comme ayant peu ou pas de résistance électrique, et il est assimilé à un conducteur parfait. Cette MHD idéale est étudiée dans les plasmas chauds, tels les plasmas astrophysiques et thermonucléaires d'origine naturelle (étoiles) ou artificielle (tokamaks) Les équations de la MHD idéale consistent en l'équation de continuité, les lois de la quantité de mouvement, le théorème d'Ampère et les équations de la thermodynamique (conservation de l'énergie), on effectue des approximations du flux de chaleur via des conditions adiabatiques ou isothermes. [2].

I.3.2. Magnétohydrodynamique résistive :

La MHD résistive, est caractérisé à faible nombre de Reynolds magnétique ($R_m \leq 1$) décrites fluides magnétisés et non parfaitement conducteurs. Il est dit en général que c'est une résistivité engendrée par les collisions entre les constituants du plasma, qui transforment l'énergie magnétique en chaleur Lorsque la résistivité est non négligeable, (nombre de Reynolds petit). Ce type de MHD intervient dans les applications industrielles à plasmas froids. [2].

I.4. Les domaines de la magnétohydrodynamique MHD :

La MHD s'observe dans différents domaines physiques décrivant des phénomènes naturels, tels que :

I.4.1. Géophysique :

En effet, le noyau de la Terre est, selon la théorie en vigueur, constitué pour sa partie externe d'un fluide métallique à l'état de plasma en mouvement de convection. Ce mouvement serait à l'origine de courants induits et donc du champ magnétique terrestre. [3].

I.4.2. Astrophysique :

La matière observable de l'Univers étant constituée à plus de 99% de plasma, dont les étoiles, les nébuleuses, les milieux interplanétaires et interstellaires, la MHD décrit bon nombre des phénomènes qui y ocurrent, tels les vents solaires et les taches solaires, région sur la surface du Soleil marquée par une température inférieure et une activité magnétique intense. [3].

I.5. Applications industrielles de la magnétohydrodynamique :

La MHD offre un potentiel d'applications industrielles et de recherches considérables.

I.5.1. Génération de l'électricité par la MHD :

Le générateur MHD est un convertisseur d'énergie basé sur le principe de l'interaction entre un fluide électriquement conducteur et un champ magnétique. Les interactions de ce genre ont été étudiées par Faraday au début du XIXème siècle. Dans ses premiers travaux sur l'induction électromagnétique dans les fluides, Faraday a cherché à utiliser le champ magnétique de la terre pour mesurer le débit moyen de l'eau dans la Tamise.

Autrement dit, le remplacement du fluide conducteur (l'eau de mer) par un gaz conducteur à très grande vitesse dans un champ magnétique intense a transformé rapidement l'idée de FARADAY en générateur électrique dans lequel les pièces tournantes sont remplacées par un fluide conducteur et pour lequel les prévisions théoriques de rendement sont très élevées (= 60%), le générateur peut être de deux types, à conduction ou à induction.

Dans ce processus, l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique, on peut considérer que le système le plus simple est celui du convertisseur à conduction. Il est constitué d'un organe essentiel qui est le canal placé dans l'entrefer d'un aimant dans lequel s'écoule un métal liquide qui traverse une induction magnétique \vec{B} qui induit un courant \vec{j} collecté par des électrodes en contact avec le fluide.[4].

Il existe plusieurs types de générateurs MHD suivant la forme et le fluide à utiliser :

I.5.1.1 Machines linéaires à plasma :

Les générateurs linéaires ont une tuyère rectiligne, par opposition aux machines circulaires.

On distingue quatre types de tuyères :

- Tuyères à électrodes continues ;
- Tuyères à électrodes segmentées ;
- Tuyères à effet Hall ;
- Tuyères à effet Hall et champ oblique.

I.5.1.2 Machines circulaires à plasma :

On peut distinguer deux types de configurations :

- Une configuration simple : le plasma entre par une conduite axiale et sort radialement, en passant par les électrodes ;
- Une configuration à double passage : le plasma entre axialement, passe radialement dans les tuyères MHD et ressort axialement.

I.5.1.3 Générateurs à conduction :

Un générateur MHD (magnétohydrodynamique) est un convertisseur MHD qui transforme l'énergie cinétique d'un fluide conducteur directement en électricité. Le principe de base est fondamentalement le même que pour n'importe quel générateur électrique. Les deux types de générateur utilisent un inducteur (électroaimant ou aimant permanent) générant un champ magnétique dans un induit ou canal.

- Dans le cas d'un générateur conventionnel, cet induit est solide : c'est une pièce métallique portant des bobines en cuivre.
- Dans le cas d'un générateur MHD, cet induit est fluide : liquide conducteur (eau salée, métal liquide) ou gaz ionisé (plasma).

Les générateurs MHD n'utilisent donc pas de pièce mécanique mobile, contrairement aux générateurs électriques traditionnels. Le fluide est mis en mouvement dans le champ magnétique, ce qui génère un courant électrique, recueilli aux bornes d'électrodes immergées et connectées à une charge.

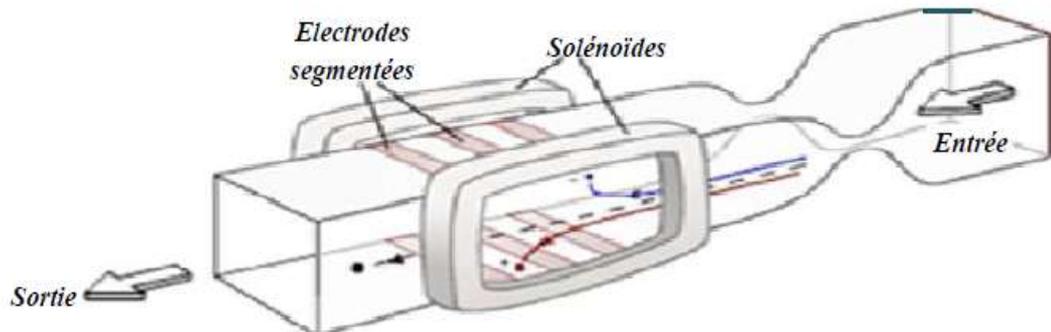


Figure I.1: Générateur MHD à Conduction (tuyère linéaire). [4]

Actuellement, les japonais ont pu concevoir une nouvelle génératrice magnétohydrodynamique à l'eau de mer avec un aimant supraconducteur de 7 T, (fig. I.2).

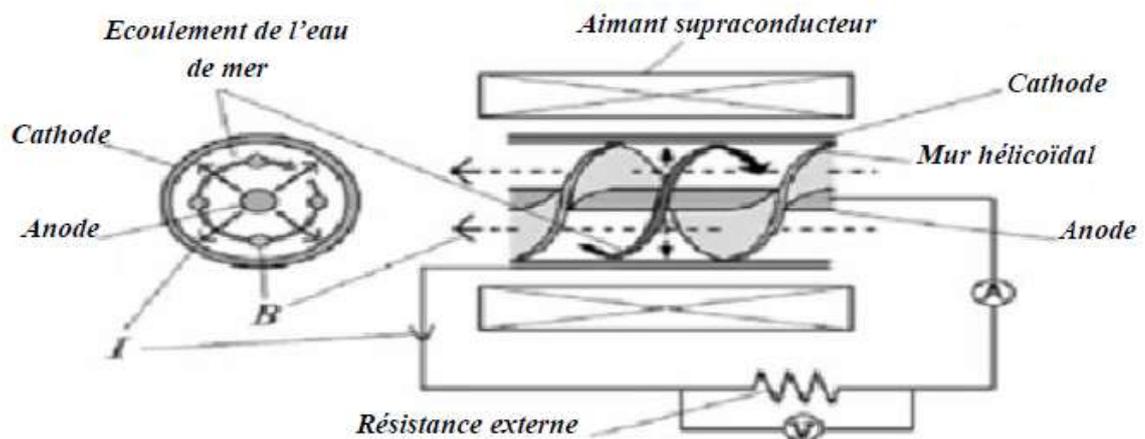


Figure I.2: Principe d'un générateur MHD à l'eau de mer type hélicoïdal. [4]

I.5.1.4 Générateurs à induction :

Ce générateur MHD fonctionne sans électrode, avec des champs magnétiques variables. Classiquement, une "onde magnétique" se déplace dans le fluide, émise par des courants électriques alternatifs circulant dans plusieurs électroaimants successifs, avec la même amplitude mais en déphasage.

La variation du champ magnétique génère des courants induits dans le gaz, qui eux-mêmes génèrent des champs magnétiques induits dont les lignes de champ coupent les

enroulements en spires des bobines. Si la vitesse du gaz est supérieure à la vitesse de déplacement de l'onde magnétique, les courants induits seront tels que les forces de Lorentz générées auront tendance à ralentir l'écoulement, et à générer par induction un courant dans les bobinages triphasés analogue à celui des moteurs asynchrones ou linéaires. (Fig. I.3). [4]

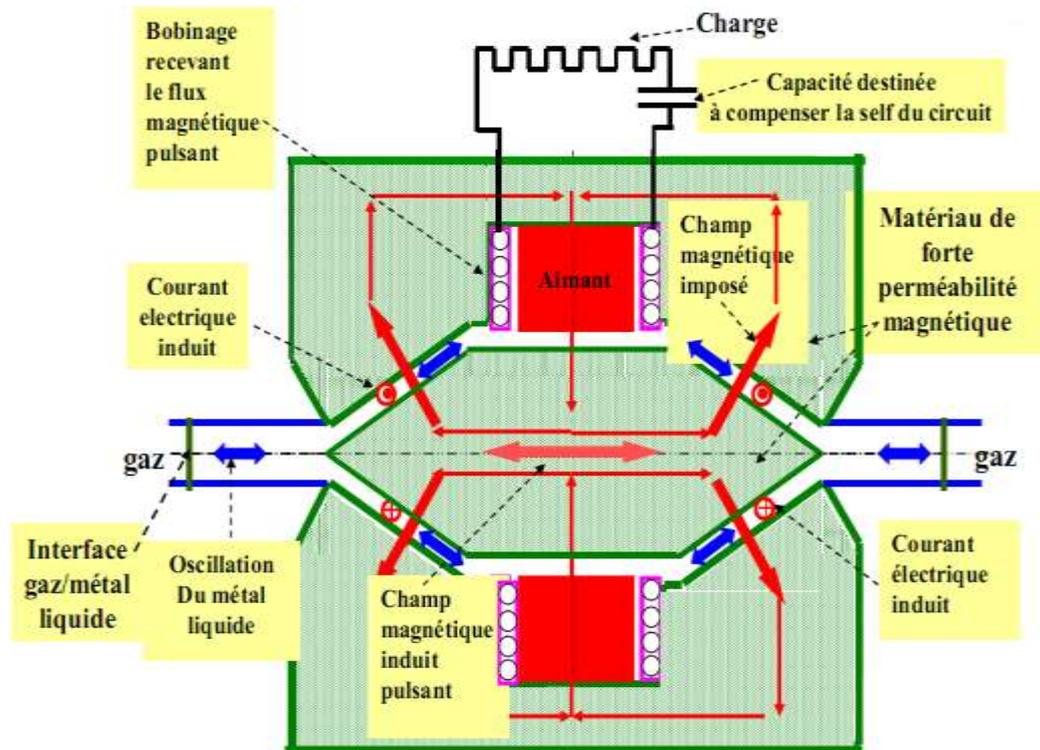


Figure I.3: Générateurs à induction. [4]

I.6 Application de la MHD dans la métallurgie :

Dans ce cas, les forces magnétiques doivent être suffisantes (proportion à la conductivité) pour mettre le métal liquide en mouvement (brassage), le maintien en sustentation (lévitation), le façonner (formage). Le champ magnétique fluctuant agit sur le fluide par l'intermédiaire de la force de Laplace $\vec{j} \wedge \vec{B}$ dans l'équation du mouvement mais ceci dépend de l'application désirée (mettre le fluide en mouvement : brassage), lors des réactions métallurgiques (fabrications d'alliages) soit statique (lévitation). [4]

A. **Brassage** : les brasseurs électromagnétiques, tout comme les pompes électromagnétiques, ont la particularité de ne pas posséder de partie mobile. Par brassage, ils entraînent l'élimination de bulles, de saletés et aussi l'accélération du mélange (par turbulence) lors de réactions métallurgiques (fabrication d'alliages).

B. **Lévitiation** : les procédés de lévitation utilisés en physique, le procédé MHD permet de résoudre trois problèmes à la fois :

- L'absence de contact entre la charge et le creuset évite la contamination du métal par la paroi.
- L'échauffement de la charge par effet Joule peut en causer la fusion.
- Le brassage interne du fluide formé produit un mélange efficace des constituants (alliages).

C. **Formage** : le formage électromagnétique consiste à façonner des masses métalliques en lévitation magnétique par l'action de champs magnétiques qui modèlent la surface libre désirée. Cette technique a l'avantage d'éviter le chauffage et le reformage après Solidification.

D. **Pulvérisation** : la technique électromagnétique permet la fabrication de poudres et grenailles de tailles moyennes ($\approx 100\mu\text{m}$) avec un débit massique élevé. De plus, l'ajustement de la granulométrie est facile et automatique.

Le freinage des métaux peut être aussi assuré par des convertisseurs linéaires à induction appelés vannes électromagnétiques ou robinets électromagnétiques. Il en est de même pour la mesure des vitesses d'écoulement qui peut être effectuée à l'aide des débitmètres électromagnétiques.

E. **Magnétohydrodynamique des fours à induction** : Les fours à induction se composent essentiellement d'une bobine inductrice refroidie par circulation d'eau, entourant un creuset dans lequel se trouve la masse métallique à fondre et à traiter. L'utilisation des champs magnétiques alternatifs dans les fours à induction s'est considérablement développée ces dernières années dans les domaines de l'élaboration et le traitement des métaux. En effet ce type de champ magnétique offre la possibilité d'agir à distance et de façon contrôlée sur un fluide électro conducteur.

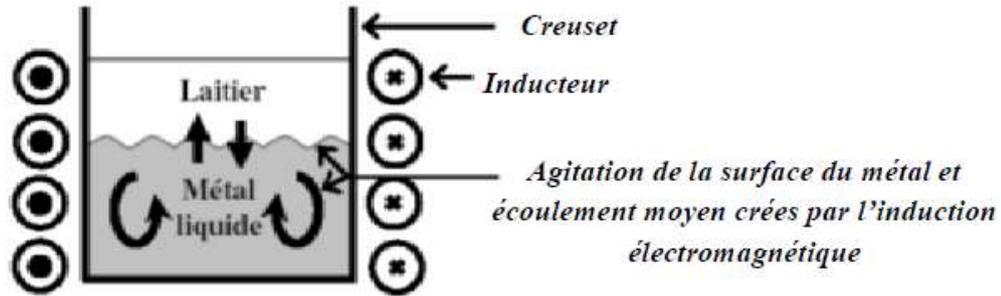


Figure I.4: Schéma de principe du procédé électromagnétique utilisant un champ magnétique alternatif.

I.7. Choix du fluide conducteur :

Les métaux liquides fonctionnent à des températures plus basses que celles des plasmas et par conséquent n'entraînent pas d'usure des électrodes. C'est pour cette raison qu'on choisit les métaux liquides à point de fusion bas.

Cependant un autre métal a suscité de grandes recherches, le sodium fondu, pur ou allié au potassium. En effet, ce liquide est utilisé pour le refroidissement et l'exploitation de certains réacteurs nucléaires. Le mélange sodium potassium rend le composé liquide à la température ambiante. De plus, ces métaux liquides (mercure, sodium potassium) ont des conductivités élevées de l'ordre de $10^6 \text{ } (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$, ce sont donc de bons conducteurs d'électricité. Dans le cadre de ce travail, on choisit le mercure comme métal liquide.

I.8. Equations de la MHD :

Nous allons montrer brièvement comment la MHD est construite sur la base des équations de l'hydrodynamique, auxquelles on joint les équations de Maxwell. L'ensemble des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm va se réduire à une équation d'induction décrivant les variations temporelles du champ magnétique. Le système ainsi constitué est fermé par une équation d'état de la matière.

I.8.1. Contribution de l'Electromagnétisme :**I.8.1.1. Loi d'Ohm généralisée :**

L'établissement de la loi d'Ohm pour un fluide conducteur, c'est-à-dire d'une loi reliant les mouvements de la matière aux densités volumiques de courant, au champ électrique E et au champ magnétique B est à la base de la théorie MHD et peut être un point délicat, notamment pour les plasmas.

Cette loi traduit en termes de courant la réponse d'un milieu conducteur immobile a un champ électrique via la conductivité électrique σ_e , la loi d'Ohm s'écrit dans le référentiel du laboratoire :

$$\vec{j} = \sigma_e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (\text{I.1})$$

\vec{j} : Densité de courant.

σ_e : La conductivité électrique.

\vec{u} : La vitesse du fluide.

I.8.1.2. Equations de Maxwell :

L'ensemble des équations fluides montre comment vont évoluer les grandeurs physiques caractérisant un plasma sous l'action d'éventuels champs de forces extérieurs mais surtout à travers des effets collectifs moyennes sur les échelles de temps et d'espace MHD. Ces effets collectifs dus aux fluctuations des interactions à longue portée sont relaxés dans l'approximation MHD mais nous en gardons trace par des champs électriques et magnétique moyens. Nous allons donc voir à présent comment évoluent ces champs électromagnétiques $\sim E$ et $\sim B$. Cette évolution se décrit naturellement par les quatre équations de Maxwell que nous exprimons dans le système MKSA:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ [Loi de Gauss],} \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ [Loi Anonyme],} \quad (\text{I.3})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad \text{[Loi de Faraday],} \quad (\text{I.4})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} [\text{Loi d'Ampère/Maxwell}], \quad (\text{I.5})$$

Auxquelles on ajoute la loi d'Ohm (I.1). Le diamagnétisme des milieux dilués que sont les fluides électro-conducteurs est très faible, on peut donc se permettre d'approximer la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique à celles du vide $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$, avec $\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

Dans la limite relativiste à laquelle nous allons nous intéresser, la forme réduite de la relation d'Ampère s'écrit :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{I.6})$$

En accord avec la conservation de la charge, qui requiert un courant à divergence nulle, c.-à-d. un courant circulant sur des boucles fermées sans accumulation de charges.

I.8.1.3. Force électromagnétique :

La force électromagnétique ou la force de **Lorentz** une charge (q) qui se déplace dans un champ électrique \vec{E} caractérisé par l'induction magnétique \vec{B} .

$$\vec{F} = q\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{I.7})$$

Avec l'approximation électromagnétique, la force par unité de volume est écrite sur cette forme :

$$\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{I.8})$$

On a:

$$\vec{F} = \sigma_e (\vec{V} \wedge \vec{B}) \vec{B} \quad (\text{I.9})$$

I.8.2. Contribution de la Mécanique des Fluides :

I.8.2.1. Équation de quantité de mouvement :

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide lors de son mouvement et les causes qui le produisant. Il indique que le taux de variation de quantité de mouvement contenu dans le volume de contrôle et égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g} + f \quad (\text{I.10})$$

Le 1er terme de cette équation correspond à l'accélération du fluide. Le 2^{ème} terme du 1er membre correspond au phénomène d'advection de la quantité de mouvement par le champ vectoriel de la vitesse (forces inertielles volumiques). Cela correspond, en mécanique des fluides, à de la convection. On peut également l'interpréter par des forces volumiques d'inertie.

Au niveau du 2^{ème} membre, le 1er terme correspond au gradient de pression. Celui dépendant de la viscosité μ correspond à l'expression des forces de viscosités volumiques, c'est-à-dire les forces résistives.

De plus, à partir de cette équation, il est possible de définir un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds, correspondant au ratio entre les phénomènes de convection et les forces visqueuses :

$$Re = \rho \cdot \frac{(V \cdot \nabla) V}{\mu \nabla^2 v} = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (\text{I.11})$$

I.8.2.2. Équation de continuité :

L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de la masse d'un fluide en mouvement. Dans un volume élémentaire, la masse du fluide prélevé ou injecté est égale à la somme de variation de la masse volumique du fluide durant un intervalle de temps élémentaire et des flux massiques traversant la surface de ce volume. Elle est définie par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{I.12})$$

I.9. Transfert de chaleur par convection :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et de mouvement de milieu, elle est considérée comme le mécanisme le plus important de transport de l'énergie entre une surface solide et un liquide ou gaz. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacent.

L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température est l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte simultanément, le fluide et l'énergie. L'énergie est à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. [5].



Figure I.5: Schéma du phénomène de transfert de chaleur par convection. [5]

L'étude de transfert de chaleur par convection permet de déterminer un écoulement à une température T_∞ autour d'une structure à une température uniforme T_s de surface S , l'expression du flux de chaleur en convection est la suivante :

$$\delta Q = h(T_s - T_\infty)ds. dt \quad (\text{I.13})$$

Où h est le coefficient de transfert thermique. Cette loi est une loi empirique. Elle dépendra donc beaucoup de la situation physique : en particulier $(T_s - T_\infty)$ peut se trouver dans certains cas, être à une puissance plus grande que l'unité. Le flux de chaleur transmis est donné par la relation dite loi de Newton.

Loi de Newton :

$$\frac{\delta Q}{dt} = h(T_S - T_\infty)ds \quad (\text{I.14})$$

Avec :

$\frac{\delta Q}{dt}$: puissance transmise (w)

h : Coefficient d'échange (W / m² k)

($T_S - T_\infty$) : Différence de température entre le corps et le fluide en (K)

ds : Surface d'échange en (m²).

I.9.1. Convection naturelle :

La convection libre ou naturelle si le mouvement du fluide n'est dû qu'à des variations de masse volumique. Ces gradients de masse volumique sont le moteur de l'écoulement du fluide. Est basé sur le fait qu'il y'a déplacement de matière : il ne concerne donc que les fluides (liquides et gaz). Contrairement à la conduction où le transfert de chaleur se fait « par contact » Ainsi, la compréhension des mécanismes de convection naturelle est importante pour accéder à des modélisations, et donc des prédictions, des effets sur l'environnement (et par là même dans les équipements). [2].

I.9.2. Convection forcée :

Dans La convection forcée le mouvement est provoqué par un procédé mécanique indépendant des phénomènes thermiques ; c'est donc un gradient de pression extérieur qui provoque les déplacements des particules du fluide. L'étude de la transmission de chaleur par convection est donc étroitement liée à celle de l'écoulement des fluides. La convection est dite forcée quand il existe une cause du mouvement autre que les variations de températures du fluide, cette cause étant la seule à prendre en compte en raison de son importance relative. [2].

I.9.3. Convection mixte :

Correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections sont

considérées séparément, du même ordre de grandeur. La convection mixte peut être aidée (favorable) lorsque les effets de la convection naturelle et de la convection forcée sont dans la même direction. Elle est dite défavorable quand ces derniers effets sont de sens opposés. En général, les problèmes de la convection thermique s'intéressent à la détermination du taux de transfert thermique et/ou la température de surface. Ces facteurs importants d'ingénierie sont établis une fois la distribution de température dans le fluide en mouvement est déterminée. Le point focal dans le transfert thermique par convection est la détermination de la distribution de la température dans un fluide mobile. [5].

Le groupe adimensionnel qui détermine laquelle de ces convections est dominante est le nombre de Richardson Ri qui est le rapport du nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds.

- $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$ (I.15)
- Si : $Ri < 1$ c'est la convection forcée qui domine.
- Si : $Ri > 1$ c'est la convection naturelle qui domine.
- Si : $Ri = 1$ c'est le domaine de la convection mixte (naturelle et forcée).

I.10. Théorie de la couche limite :

Il est défini généralement la couche limite comme une région de faible épaisseur produite par l'écoulement d'un fluide visqueux en présence d'un obstacle. Une couche limite est qualifiée de laminaire, quand la valeur du nombre de Reynolds (ordre de grandeur du rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses) est inférieur à une valeur critique, d'environ 3×10^3 ; dans le cas contraire elle est qualifiée de turbulente. [6].

Le fait que cette couche soit très fine permet de faire un certain nombre d'approximations dans les équations du mouvement s'appliquant dans cette zone. En effet, en adimensionnant les équations de Navier-Stokes et en comparant les ordres de grandeur des différents termes, Prandtl a montré que plusieurs d'entre eux sont négligeables dans la couche limite. En particulier, la vitesse dans la direction normale à la paroi est négligeable devant la vitesse tangentielle et la variation de la vitesse le long de la paroi est très faible devant la variation de la vitesse dans la direction normale à la paroi.

I.11. Régimes d'écoulement dans la couche limite :

Comme on l'a vu précédemment, il existe deux régimes d'écoulement bien distincts lors du développement d'une couche limite : les régimes laminaire et turbulent. Il convient à présent de les définir et de connaître leurs principales caractéristiques.

I.11.1. Couche limite laminaire :

Pour une géométrie de type plaque plane sans gradient de pression et à incidence nulle, Blasius introduit le premier, en 1908, une solution exacte des profils de vitesse pour une couche limite laminaire. À partir de l'équation de Navier-Stokes du bilan de quantité de mouvement, exprimée sous forme de fonctions de courant, Blasius a proposé l'équation suivante :

$$f''' + ff'' = 0 \tag{I.16}$$

Avec $\frac{U(x;y)}{U_e} = f'(\eta)$ et $\eta = y \sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}}$. Les conditions aux limites s'écrivent alors si $\eta=0$, $f(0) = f'(0) = 0$ et si $\eta \rightarrow \infty$, $f'(\eta) = 1$. La résolution numérique de ce système, permet de retrouver l'évolution de la vitesse en fonction de la hauteur à la paroi, pour une position longitudinale donnée et une vitesse d'écoulement extérieur fixée. Dans ce système, la grandeur η est appelée paramètre de similitude car elle permet de décrire tout le développement d'une couche limite laminaire. En cas d'un angle d'incidence de la plaque ou d'un gradient de pression le long de celle-ci, on utilise la solution de l'équation de Falkner-Skan, qui est une généralisation de l'équation de Blasius. À partir de cette solution analytique de la vitesse, la couche limite est entièrement définie le long de la plaque plane. [7].

On peut alors déterminer des lois comportementales pour les grandeurs caractéristiques de la couche limite (détails des calculs dans l'ouvrage de Schetz) :

$$\delta_{99}(x) = \frac{5,0x}{\sqrt{Re_x}} \tag{I.17}$$

$$\delta_1(x) = \frac{1,721x}{\sqrt{Re_x}} \tag{I.18}$$

$$\delta_2(x) = \frac{0,664x}{\sqrt{Re_x}} \tag{I.19}$$

La couche limite laminaire évolue alors en $x^{1/2}$, elle est dite couche limite de Blasius.

I.11.2. Couche limite turbulente :

Dans le cas d'une couche limite turbulente, il est beaucoup plus délicat d'obtenir une solution exacte de l'élévation de la vitesse. En effet, les propriétés du fluide dépendent maintenant de l'espace et du temps. Dans le cas laminaire, la dépendance en temps n'intervenait pas et l'équation de Navier-Stokes pouvait alors être simplifiée et résolue analytiquement. Dans le cas turbulent, cela est quasiment impossible. [7].

Néanmoins, pour pallier cette difficulté, Prandtl proposa en 1927 une solution empirique pour retrouver les profils de vitesse :

$$\frac{U(y)}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta_{99}}\right)^{1/n} \quad (\text{I.20})$$

Avec dans notre cas $n = 7$. On obtient alors les formules suivantes pour les grandeurs caractéristiques de la couche limite.

$$\bullet \quad \delta_{99}(x) \approx \frac{0,382x}{Re_x^{1/5}} \quad (\text{I.21})$$

$$\bullet \quad \delta_1(x) \approx \frac{0,0477x}{Re_x^{1/5}} \quad (\text{I.22})$$

$$\bullet \quad \delta_2(x) \approx \frac{0,0371x}{Re_x^{1/5}} \quad (\text{I.23})$$

Cette fois-ci, la couche limite croît en $x^{4/5}$, c'est-à-dire beaucoup plus rapidement que dans le régime laminaire.

La figure (I.6) montre la différence entre une couche limite laminaire et turbulente

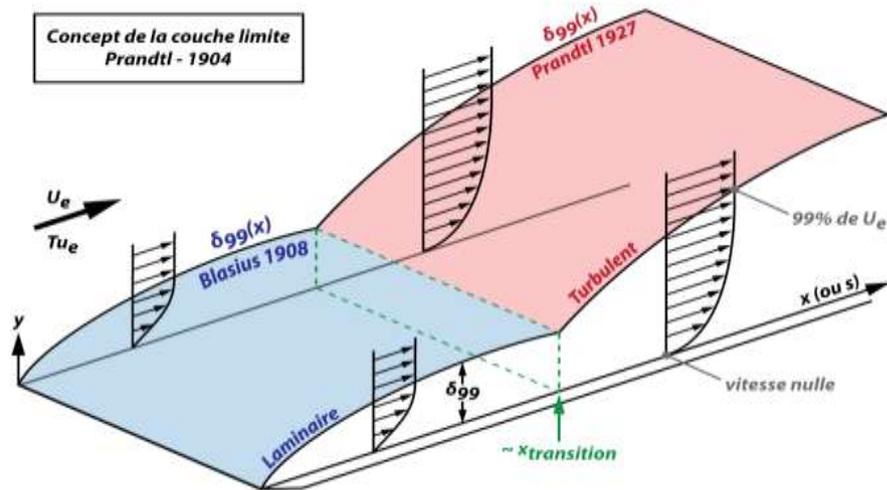


Figure I.6: Couche limite laminaire et turbulente sur une plaque plane. [8]

I.12. Couche limite dynamique :

Une des principales caractéristiques d'un fluide est sa viscosité. Cette dernière varie avec la température mais n'est jamais nulle. En conséquence, la vitesse du fluide à la paroi est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci. [8]

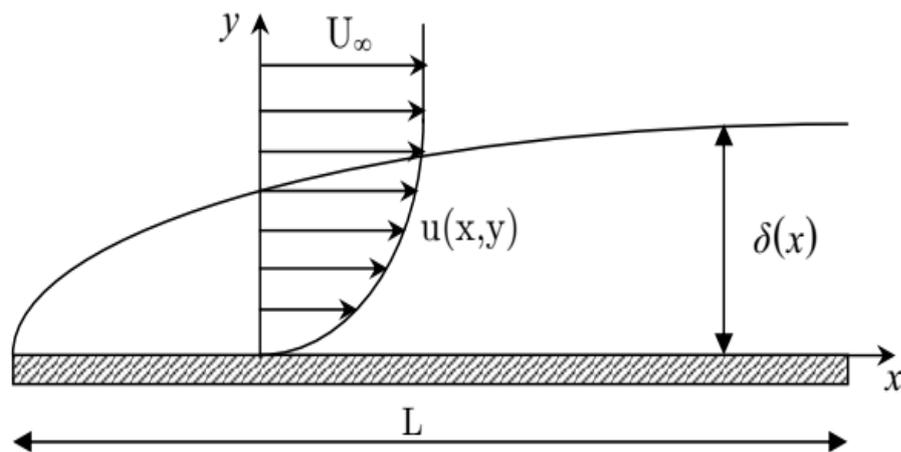


Figure I.7: Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane. [8]

I.13. Couche limite thermique :

La couche limite thermique ne se développe au sein d'un écoulement de fluide visqueux en contact avec un corps solide, que si ces derniers sont à des températures différentes. Supposons par exemple que l'écoulement incident sur une plaque plane soit à une température uniforme T_∞ , et que la surface de cette dernière soit maintenue à une température T_w également uniforme mais différente de T_∞ . En explorant le champ de température T perpendiculairement à la plaque, selon l'ordonnée y , on observera une variation progressive de T_w à T_∞ , d'abord rapide puis de plus en plus lente à mesure qu'on pénètre dans l'écoulement. L'épaisseur δ_t de la couche limite thermique est conventionnellement définie comme étant la distance à la paroi pour laquelle le rapport $\frac{T_w - T(\delta_t)}{T_w - T_\infty} = 0,99$. [9]

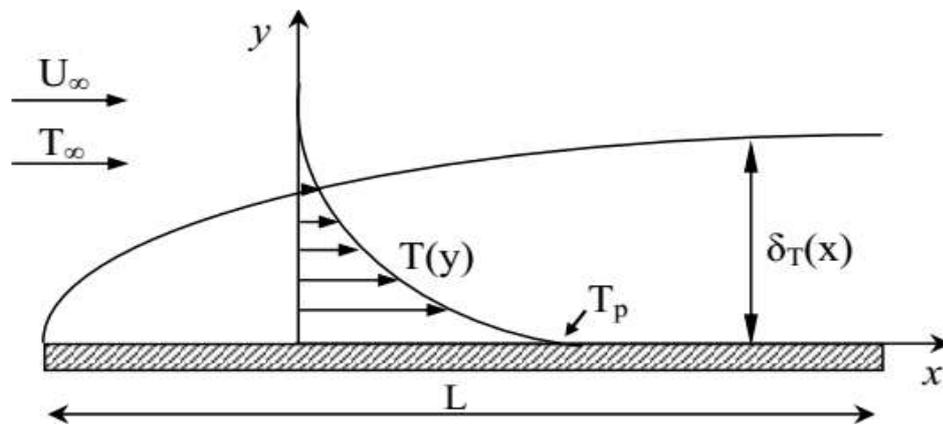


Figure I.8: Couche limite thermique sur une plaque plane. [8]

I.14. Synthèse bibliographique

Orhan Aydın, Ahmet Kaya [10] ont fait une étude sur le transfert de chaleur par convection mixte MHD en régime laminaire sur une plaque plane verticale, en tant compte du chauffage ohmique et de la dissipation visqueuse, les profils de vitesse et de température sont déterminées à l'aide des paramètres suivant : le paramètre magnétique, le nombre d'Eckert, le nombre de Richardson, et le paramètre d'aspiration/injection. Ils ont constatés que l'augmentation du nombre de Richardson (paramètre de la convection mixte) entraîne une augmentation de la vitesse d'écoulement (quantité de mouvement), et aussi que la dissipation visqueuse augmente la température du fluide et diminue le gradient de température au niveau de la paroi, ils ont vu aussi que la présence du champ magnétique diminue la vitesse

d'écoulement mais augmente la température du fluide, et que le paramètre magnétique varie en fonction du nombre de Richardson.

A.M. Rashad [11] a étudié l'influence du rayonnement sur la convection naturelle MHD et le transfert de chaleur et de masse dans un écoulement laminaire d'un fluide visqueux newtonien sur une plaque plane verticale noyée dans un milieu poreux, il a aussi étudié l'effet du dépôt de particules par thermophorèse. Il a conclu qu'une diminution du paramètre magnétique et du paramètre de flottabilité entraîne une augmentation de la vitesse d'écoulement, la concentration de particules ainsi que l'épaisseur de la couche limite diminue en raison de l'augmentation du nombre de Lewis, et que le paramètre de rayonnement et le rapport de flottabilité ont augmentés lorsque le paramètre magnétique a diminué. Mais aussi que la vitesse de dépôt thermophorétique diminue au fur et à mesure que le paramètre magnétique, le paramètre de rayonnement, la différence de température augmentent ; et augmente (la vitesse de dépôt thermophorétique) à mesure que le rapport de flottabilité N ou le coefficient thermophorétique k augmente.

O. Anwar Bég, Joaquín Zueco, R. Bhargava, H.S. Takhar [12] ont étudiés la convection naturelle MHD dans une sphère encastrée en présence d'un fluide électro-conducteur. Ils ont présentés un modèle d'écoulement visqueux en utilisant la théorie de la couche limite. Le but de leurs recherche est de d'étudier l'influence du nombre de Darcy (Da), du nombre Forchheimer (Fs), du paramètre magnétique (Mn), du paramètre de générateur de chaleur (Q), et du nombre de Grashof (Gr) sur les champs de vitesse et de température. Ils ont trouvés que, l'augmentation du nombre de Darcy accélère la vitesse d'écoulement mais réduit la température du fluide. Mais aussi l'augmentation du paramètre magnétique réduit la vitesse d'écoulement mais augmente la température, par ailleurs avec une génération de chaleur ($H > 0$) entraîne une augmentation de la température et de la vitesse, et aussi l'augmentation du paramètre de trainée poreuse (nombre de Forchheimer Fs) provoque une baisse de la vitesse, et l'augmentation du nombre de Grashof (Gr) diminue la vitesse et le gradient de température de surface.

C.-H chen, Yulin, Taiwan [13] ont effectués une étude sur la convection naturelle MHD sur une surface perméable et inclinée avec une température de paroi variable en tenant compte des effets du chauffage ohmique et de la dissipation visqueuse afin d'étudié les caractéristiques de transfert de masse, de quantité de mouvement et de quantité de chaleur. Ils ont constatés qu'en présence d'un champ magnétique la température et la vitesse diminue, ce

qui entraîne une diminution du nombre de Nusselt local mais aussi du nombre de Sherwood, l'augmentation de l'angle d'inclinaison a pour effet de diminuer le nombre de Nusselt local, le nombre de Sherwood local et le coefficient de frottement, l'effet de dissipation visqueuse montre une réduction considérable du taux de transfert de chaleur, Le nombre Nusselt local peut être augmenté en augmentant les valeurs du nombre Prandtl, contrairement à une surface imperméable, le coefficient local de frottement, le nombre local de Nusselt, le nombre local de Sherwood augmenteront que si la paroi est perméable, le transfert de chaleur sera amélioré lorsque le taux de flottabilité augmente pour les valeurs plus petites du nombre Eckert, ils ont observés le contraire pour un nombre d'Eckert élevé.

Dulal Pal, Hiranmoy Mondal [14] ont étudiés l'effet de la viscosité dépendant de la température sur le transfert de chaleur par convection mixte MHD non-Darcy au-delà d'un milieu poreux en prenant compte de la dissipation ohmique et de la source/puits de chaleur non-uniforme, les paramètres suivant : le paramètre de flottabilité, la viscosité, la porosité, le nombre d'Eckert, le nombre de Prandtl, le champ magnétique, le champ électrique, le nombre de Hartmann et le paramètre source/puits de chaleur non-uniforme sont utilisés pour analysés leurs influence sur les profils de vitesse et de température.

Ils ont trouvés que pour des valeurs plus élevées du nombre de Hartmann, la vitesse de la couche limite va atteindre sa valeur minimale et que l'effet du champ électrique et d'augmenter la vitesse de la couche limite, et aussi l'augmentation du nombre de Prandtl a pour effet de diminuer la température mais aussi l'épaisseur de la couche limite, le paramètre de porosité augmente la vitesse le profil de vitesse sur l'ensemble de la couche limite, et que le paramètre de flottabilité consiste à augmenter la distribution de la vitesse dans la couche limite, mais aussi le paramètre source/puits de chaleur non-uniforme a pour effet de générer de la température.

Dulal Pal, Babulal, Talukdar [15] ont fait une étude analytique du problème de la convection mixte instationnaire avec rayonnement thermique et d'une réaction chimique de premier ordre sur une couche limite magnétohydrodynamique d'écoulement d'un fluide visqueux et électriquement conducteur devant une plaque verticale perméable, le but de leurs étude et d'étudier l'influence du chauffage ohmique et du champs magnétique sur le flux de chaleur et de masse combiné sur un fluide conducteur.

Ils ont eu pour résultats que la vitesse d'écoulement diminue avec l'augmentation : du paramètre de réaction chimique, du paramètre de source de chaleur, du paramètre de rayonnement thermique, du nombre de Schmidt et du paramètre magnétique, et ils ont observés que l'inverse se produit lorsque le paramètre poreux augmente.

Jiin-YuhJang, Chung-Ting Hsu [16] ont étudiés l'instabilité du vortex d'un écoulement MHD avec une convection naturelle sur une couche limite dans un milieu poreux en tenant compte de l'effet de rayonnement. Ils ont constatés que le champ magnétique produit une force de retardement sur les flux et les champs thermiques ainsi, il réduit la vitesse et le taux de transfert de chaleur mais aussi que la présence du champ magnétique déstabilise le flux du vortex en instabilité. D'autre part, l'effet de rayonnement réduit également la vitesse mais augmente le taux de transfert de chaleur, ils ont trouvés également que, contrairement à l'influence du champ magnétique, l'effet du rayonnement stabilise l'instabilité du flux de vortex.

Chapitre II

Positionnement du problème

II.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle physique et les hypothèses simplificatrices. Ainsi que les équations régissant le phénomène de convection mixte en présence d'un champ magnétique le long d'une plaque plane verticale. Et nous avons exprimés les équations de conservation et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle. Puis nous avons introduit les principales grandeurs dynamiques, thermiques.

II.2. Description du problème :

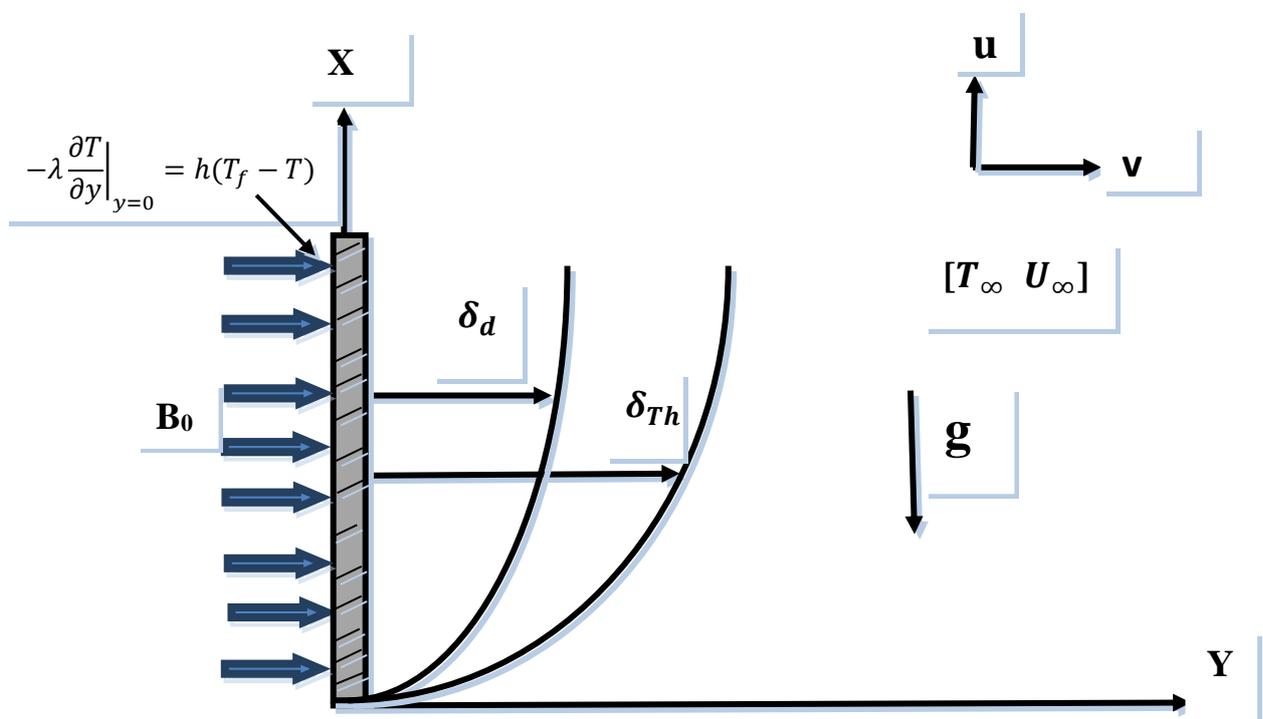


Figure II.1: La géométrie du problème

On considère cet écoulement comme étant laminaire, incompressible, bidimensionnel, avec un mode de convection mixte sur une plaque plane verticale. Le fluide est supposé électriquement conducteur, le système de coordonnées est choisi de telle sorte que X mesure la distance le long de la plaque et Y mesure la distance qui lui est normale (par rapport à la plaque).

Un champ magnétique uniforme est supposé appliquer dans la direction de Y qui interagit avec le fluide conducteur et qui cause une force de résistance dans la direction X, on suppose que le champ magnétique est induit de l'extérieur. (Voir la figure II.1)

II.3. Hypothèses simplificatrices :

La modélisation du phénomène étudié est basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement du fluide, les transferts de chaleur et de masse sont permanents et le régime est laminaire.
- Le fluide est newtonien.
- Le liquide est incompressible ($\rho = cte$).
- La dissipation visqueuse est négligée.
- La paroi est non-isotherme.
- Le champ magnétique est induit à l'extérieur.
- Les propriétés physiques du liquide sont constantes.
- **L'approximation de Boussinesq** : consiste à supposer que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendantes de la pression. Cette hypothèse est adoptée pour la masse volumique qui est considérée comme constante dans tous les termes des équations de transfert sauf dans le terme gravitationnel où elle est traitée comme variable en fonction de la température et s'exprime comme suit : $(\rho - \rho_0)g = -\rho_0\beta(T - T_0)g = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]g$

II.4. Les équations gouvernantes du problème :

La formulation mathématique des phénomènes de convection mixte double diffusive repose sur les équations liant les différents paramètres, à savoir : la vitesse, la pression, la température et la concentration. Ces équations sont obtenues à partir de :

- La loi de conservation de masse (équation de continuité)
- La loi de conservation de quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes)
- La loi de conservation d'énergie (équation d'énergie)

II.4.1. Forme dimensionnelle des équations :

II.4.1.1. Equation de continuité :

Cette équation est déduite du premier principe de conservation de masse. Elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \tag{II.1}$$

Ou $V(u, v)$ et le champ de vitesse de l'écoulement, et ρ la masse volumique du fluide

II.4.1.2. Equation de la quantité de mouvement :

La loi fondamentale de la dynamique conduit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \wedge \vec{B} \tag{II.2}$$

Avec g accélération due à la pesanteur, p pression ν viscosité cinématique.

$\frac{1}{\rho} \vec{j} \wedge \vec{B}$: La force de Laplace par unité de masse.

II.4.1.3. Equation de l'énergie :

L'équation de l'énergie s'écrit comme suite :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T = \alpha \Delta T + \frac{j^2}{\sigma \rho C_p} + \frac{\Phi_v}{\rho C_p} \tag{II.3}$$

Avec :

- C_p capacité thermique massique
- Φ_v dissipation volumique par viscosité,
- α diffusivité thermique

II.4.1.4. Conditions initiales et aux limites :

Nous allons imposer des conditions aux limites et initiales sur la vitesse et la température sur la paroi :

Conditions initiales :

- $Y = 0, \quad u = 0, \quad V = 0 \quad ; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_f - T)$

Conditions aux limites :

- $Y \rightarrow \infty, \quad u = u_\infty \quad ; \quad T = T_\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \quad Y = 0, \quad u = 0, \quad V = 0 \quad ; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_f - T) \\ \bullet \quad Y \rightarrow \infty, \quad u = u_\infty \quad ; \quad T = T_\infty \end{array} \right\} \quad \text{(II.4)}$$

II.5. Projections des équations de conservation selon le cas de la géométrie représenté :

En appliquant les approximations précédentes, les équations précédentes peuvent être écrite en régime stationnaire et en projection selon (x, y) comme suit :

II.5.1. Equations de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{(II.5)}$$

II.5.2. Equations de conservation de quantité de mouvement :

$$\left. \begin{array}{l} \text{OX : } u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (u - u_\infty) \\ \text{OY : } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{(II.6)}$$

II.5.3. Equations de conservation d'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho c_p} (u^2 - u_\infty \cdot u) \quad \text{(II.7)}$$

II.6. Formulation adimensionnelle :

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures, et ainsi permettre d'avoir des informations généralisées sur une variété du problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un côté, et d'un autre côté, réduire le nombre de paramètres d'un problème.

II.6.1. Equations adimensionnelles et solution auto-similaire :

Pour résoudre le système d'équations nous avons cherchés une solution de type auto-similaire (self similar) étant donné qu'il s'agit d'un écoulement de couche limite. Ainsi, on introduit les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{y}{x} Re_x^{1/2}; Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \\ \theta &= \frac{T-T_\infty}{T_F-T_\infty}; \quad \Psi(x, y) = \nu Re_x^{1/2} f(\eta) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II.8)}$$

Où, ψ est la fonction de courant définie comme suit :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\Psi(x, y)$ Est la fonction de courant qui satisfait équation (II.5) avec $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ en fonction de ces nouvelles variables, les composantes de la vitesse peuvent être exprimées comme suit :

$$u = u_\infty f' \quad \text{(II.9)}$$

$$V = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{x} Re_x^{1/2} [f - \eta f'] \quad \text{(II.10)}$$

Après avoir introduit (II.8) dans (II.6), (II.7) et (II.4) Les équations de quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les conditions aux limites Peuvent être écrites comme suit :

- Equation de quantité de mouvement :

$$f''' + R_i \theta - M(f' - 1) + \frac{1}{2} f f'' = 0 \tag{II.11}$$

- Equation d'énergie :

$$\theta'' + \frac{1}{2} P_r f \theta' + M \cdot E_c \cdot P_r (f'^2 - f') = 0 \tag{II.12}$$

Le signe (') représente une différentielle par rapport à η .

II.6.2. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites peuvent se réécrire ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0 ; f(0) = 0 ; f'(0) = 0 \quad \theta' = H(\theta(0) - 1) \\ \eta \rightarrow \infty ; \quad f'(\infty) = 1 ; \quad \theta(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{II.13}$$

Pour les besoins ultérieures de cette étude nous avons défini les grandeurs physiques suivantes, qui sont le coefficient de frottement C_f , le Nusselt local N_{ux}

$$\left. \begin{aligned} C_f = \frac{\tau_f}{\rho U_\infty^2 x} ; \quad N_{ux} = \frac{x \cdot q_f}{K(T_f - T_\infty)} \end{aligned} \right\} \tag{II.14}$$

Où, τ_f représente la contrainte de cisaillement à la paroi, q_w le flux de chaleur transmis par la paroi au fluide définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \tau_f = \mu_f \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} ; \quad q_f = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \tag{II.15}$$

Pour adimensionnaliser les quantités physiques précédentes nous avons introduit le changement de variable (II.8) définit auparavant, de ce fait on obtient :

}

$$C_f = f''(0)/Re_x^{1/2}; \quad N_{ux} = -\theta'(0).Re_x^{1/2} \quad \text{(II.16)}$$

Où les groupes sans dimension (nombres caractéristiques) sont :

$$M = \frac{\sigma B_0^2 x}{\rho U_\infty} : \text{Paramètre magnétique local} \quad \text{(II.17)}$$

$$R_i = \frac{Gr}{Re_x^2} = \frac{g\beta\Delta T x}{U_\infty^2} : \text{Paramètre de convection mixte} \quad \text{(II.18)}$$

$$P_r = \frac{\vartheta}{\alpha} : \text{Nombre de Prandtl} \quad \text{(II.19)}$$

$$E_c = \frac{U_\infty^2}{c_p(T_f - T_\infty)} : \text{Nombre d'Eckert} \quad \text{(II.20)}$$

$$H = \frac{R_{ix}}{Re_x} : \text{Paramètre de la convection à la paroi} \quad \text{(II.21)}$$

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2} : \text{Nombre de Grashof} \quad \text{(II.22)}$$

II.7. Expression des nombres sans dimensions :

II.7.1. Le nombre de Prandtl :

Il représente le rapport entre la viscosité cinématique ν et la diffusivité thermique α . Il compare la rapidité des phénomènes de diffusion thermique et de diffusion visqueuse dans un fluide. Ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, un physicien allemand et s'écrit.

II.7.2. Le nombre de Grashof :

Le nombre de Grashof est le rapport entre l'effet de flottaison par force motrice d'Archimède et l'effet résistif de l'écoulement, il est défini par la relation suivante.

II.7.3. Nombre de Reynolds :

C'est Reynolds, ingénieur anglais spécialiste de l'hydrodynamique qui a introduit ce nombre qui est constamment utilisé dans les calculs d'écoulements. L'écoulement peut être laminaire, transitoire ou turbulent. Dans le premier cas, le fluide s'écoule sous forme des filets parallèles aux parois, dans le troisième cas, la notion de filet n'existe plus, le mouvement des particules de fluide est aléatoire. Et dans le second l'écoulement du fluide est intermédiaire entre laminaire et turbulent, il est défini comme suite.

II.7.4. Le nombre de Nusselt :

Groupement sans dimension du coefficient d'échange convectif h , d'une échelle de longueur caractéristique L et de la conductivité thermique du fluide. Il intervient dans la caractérisation énergétique des transferts de chaleur entre une surface solide ou liquide et un fluide monophasique ou polyphasique en mouvement. En convection forcée, il est lié au nombre de Reynolds et au nombre de Prandtl.

Chapitre III

Méthodes numériques

Dans ce chapitre, nous allons décrire la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations gouvernantes dans le Chapitre II.

Nous allons être amenés à étudier un problème d'équations différentielles ordinaires (EDO) (aux limites), dont le comportement est très différent de celui d'un problème aux valeurs initiales. Dans l'application, nous utiliserons la routine Matlab `bvp4c` qui permet de résoudre le (problème aux limites) par une méthode de différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation.

III.1. Equations différentielles ordinaires :

Les équations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent continuellement. Ils se posent en modèles à travers les mathématiques, les sciences et l'ingénierie. En soi, un système d'équations différentielles possède de nombreuses solutions. Communément une solution d'intérêt est déterminée en spécifiant les valeurs de toutes ses composantes en un seul point ($x = a$), c'est ce que l'on appelle un problème aux valeurs initiales (IVP). Cependant, dans de nombreuses applications, la solution est déterminée de manière plus complexe.

Un problème de valeur aux limites (BVP) définit des valeurs ou encore des équations pour les composantes de la solution à plus d'un point. Contrairement aux IVP, un problème de valeur aux limites peut, ne pas avoir de solution, avoir un nombre fini, ou bien en avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution des BVP, exige de ses utilisateurs de fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent, il existe des paramètres qui doivent être déterminés de telle sorte que le BVP a une solution. Ce qui suit montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un BVP avec le programme `bvp4c` Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème type d'un BVP aussi facile que possible.

III.2. Problème de valeur aux limites

Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le problème de valeur initiale $y' = f(x, y)$, avec $y(a)$ donné, possède une solution unique. Les problèmes de valeur aux limites à deux bouts sont illustrés par l'équation :

$$y'' + y = 0 \tag{III.1}$$

Avec les conditions aux limites suivantes : $y(a) = A, y(b) = B$.

Une manière d'analyser ces problèmes est de considérer une famille de solutions de IVP. Soit $y(x, s)$, la solution de l'équation (III.1) avec les valeurs initiales $y(a) = A$ et $y'(a) = s$. Chaque $y(x, s)$ s'étend jusqu'à $x = b$, maintenant la question est de déterminer les valeurs de s pour lesquelles $y(b, s) = B$.

S'il existe une solution S pour cette équation algébrique, la valeur $y(x, s)$ correspondante constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités aisément.

Soit $U(x)$ la solution définie par $y(a) = A, y'(a) = 0$ et $V(x)$ la solution définie par $y(a) = 0, y'(a) = 1$. La linéarité implique que $y(x, s) = U(x) + s V(x)$, et la condition à la limite $B = y(b, s) = U(b) + s V(b)$ n'est autre qu'une équation algébrique linéaire qui définit la pente initiale inconnue S .

III.3. Méthode numérique :

En générale pour résoudre ce genre de problème la méthode la plus connue à laquelle ont recours les ingénieurs n'est autre que la méthode de Runge-Kutta avec une technique de tir, ce qui peut surprendre que la routine `bvp4c` n'est pas un code de technique de tir (shooting method).

En effet `bvp4c` met en œuvre une méthode de collocation pour la résolution des problèmes de valeurs aux limites de la forme telle que l'exemple suivant :

$$y' = f(x, y, p), \quad a \leq x \leq b \tag{III.2}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$G(y(a), y(b), p) = 0 \tag{III.3}$$

Ici p est un vecteur de paramètres inconnus. Par souci de simplicité, il n'est pas pris en compte dans les expressions qui suivent. La solution approximative $S(x)$ est une fonction polynomiale d'ordre trois continue sur chaque sous-intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ du maillage $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ qui satisfait les conditions aux limites suivantes

$$g(s(a), s(b)) = 0 \quad (\text{III.4})$$

Et qui satisfait les équations différentielles (polynômes de collocation) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle :

$$S'(x_n) = f(x_n, S(x_n)) \quad (\text{III.5})$$

$$S'(x_n + x_{n+1})/2 = f((x_n + x_{n+1})/2, S((x_n + x_{n+1})/2)) \quad (\text{III.6})$$

$$S'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, S(x_{n+1})) \quad (\text{III.7})$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébriques non linéaires pour les coefficients définissant $S(x)$. A la différence de la technique de tir, la solution $y(x)$ est évaluée sur tout l'intervalle $[a, b]$ avec prise en compte des conditions aux limites à tous moments.

La méthode de base de `bvp4c` est une méthode aux différences finies qui implémente la formule de Lobatto à trois étapes de collocation. Il peut être démontré, que $S(x)$ est une approximation de quatrième ordre pour une solution isolée $y(x)$, c'est-à-dire

$$\|y(x) - S(x)\| \leq ch^4.$$

Ici, h est la valeur maximale du pas $h_n = x_{n+1} - x_n$ et C est une constante. Nous insistons sur le fait important que cette borne soit vraie pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, ce qui n'est pas le cas pour certaines méthodes de collocation populaires. Après $S(x)$ est calculé sur un maillage avec `bvp4c`.

En raison du fait que les problèmes de valeurs aux limites peuvent avoir plus d'une solution, les codes de résolution obligent ses utilisateurs à fournir une estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend une estimation d'un maillage initial, les codes ensuite adaptent le maillage de manière à obtenir une solution numérique précise avec un nombre réduit de nœuds.

La partie la plus ardue pour résoudre un BVP est l'estimation en elle-même puisque réussir à trouver une approximation adéquate du premier est extrêmement difficile. Venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile. [17]

Le code `bvp4c` adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de remédier aux mauvaises suppositions. Le fait que $S(x)$ est régulière sur $[a, b]$ ainsi que les collocations aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que la dérivée $S(x)$ est également continue sur l'intervalle $[a, b]$ ce qui induit à un résiduel noté $r(x)$ dans l'équation différentielle défini par :

$$r(x) = S'(x) - f(x, S(x)) \quad (\text{III.8})$$

Autrement dit, $S(x)$ est la solution exacte des équations différentielles ordinaires perturbées.

$$S'(x) = f(x, S(x) + r(x)) \quad (\text{III.9})$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites est $g(S(a), S(b))$

La routine `bvp4c` contrôle les tailles de ces résidus, si ces derniers sont uniformément petits, $S(x)$ s'avère être une bonne solution dans le sens que c'est la solution exacte d'un problème relativement proche de celui fourni au solveur. La routine est basée sur des algorithmes plausibles, même lorsque le maillage initial est non satisfaisant, elle continue à fournir des résultats corrects quand h tend vers 0. [17]

III.4. Validation numérique :

Pour valider nos résultats numériques et vérifier la véracité et la précision de la méthode de calcul utilisée, nous les avons confrontés, à ceux de O. Aydin, A. Kaya [10]. Nous avons collecté les résultats propres de chacun de ces auteurs et nous avons effectué une comparaison des différentes valeurs du nombre de Nusselt local $-\theta'(0)$ pour plusieurs valeurs du nombre Prandtl et Richardson.

Tableau III.1: Valeurs de $-\theta'(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand $Ec=0$, $M=0$, $Ri=0$.

Pr	O. Aydin, A. Kaya [10]	Nos résultats
1	0.332000	0.332600
10	0.727801	0.728500
100	1.573141	1.572600

Tableau III.2: Valeurs de $-\theta'(0)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl et Richardson quand $Ec=0$, $M=0$.

Ri	Pr=0.72		Pr=7	
	O. Aydin, A. Kaya [10]	Nos résultats	O. Aydin, A. Kaya [10]	Nos résultats
0.0	0.2970	0.2972	0.6460	0.6463
0.2	0.3320	0.3321	0.6980	0.6988
0.4	0.3560	0.3564	0.7400	0.7394
0.6	0.3760	0.3757	0.7720	0.7732
0.8	0.3940	0.3918	0.8020	0.8024
1.0	0.4060	0.4058	0.8270	0.8282

On remarque une certaine homogénéité ainsi qu’une concordance avec les résultats obtenus par les auteurs cités précédemment, ce qui nous permet de prouver la justesse de notre code de calcul et ainsi étendre notre étude à d’autres cas plus complexes.

Chapitre IV

Résultats et discussion

Nous avons effectués une étude paramétrique selon la méthode décrite précédemment, et un ensemble représentatif des résultats graphiques a été obtenu pour la vitesse $f'(\eta)$, la température $\theta(\eta)$ adimensionnelles. Ainsi que les variations du taux de transfert de chaleur local Nu_x et le coefficient de frottement C_f . L'effet des différents paramètres de contrôles seront exposé en détails pour chaque graphe pour avoir une idée globale de comportement des différents fluides que nous avons choisi, comme référence, c'est-à-dire l'air ($Pr=0.72$) et l'eau ($Pr=7.0$) qui traduisent respectivement le comportement général des gaz et des liquides, ces résultats sont obtenue sans dissipation visqueuse ($Ec=0.0$).

IV.1. Profils de vitesse adimensionnelle :

La variation de la distribution de la vitesse adimensionnelle suivant la variable de similarité η est représentée respectivement sur les figures (IV.1) à (IV.4) pour quelques valeurs de M , Ri . En variant le nombre de Prandtl ($Pr=0.72$ et 7).

- Cas de l'air $Pr=0.72$:

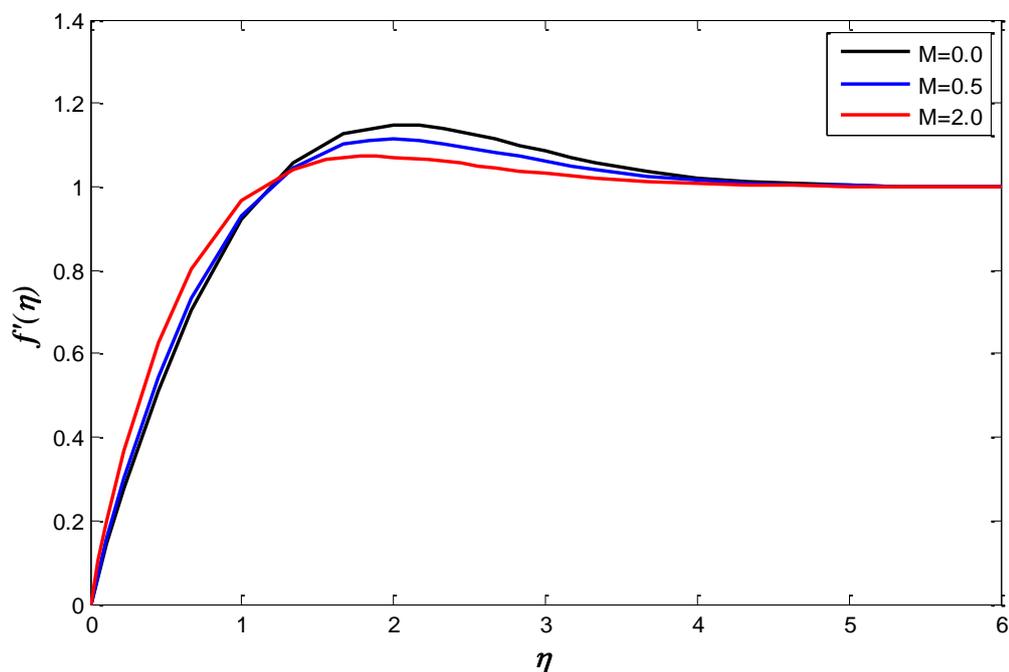


Figure IV.2: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$).

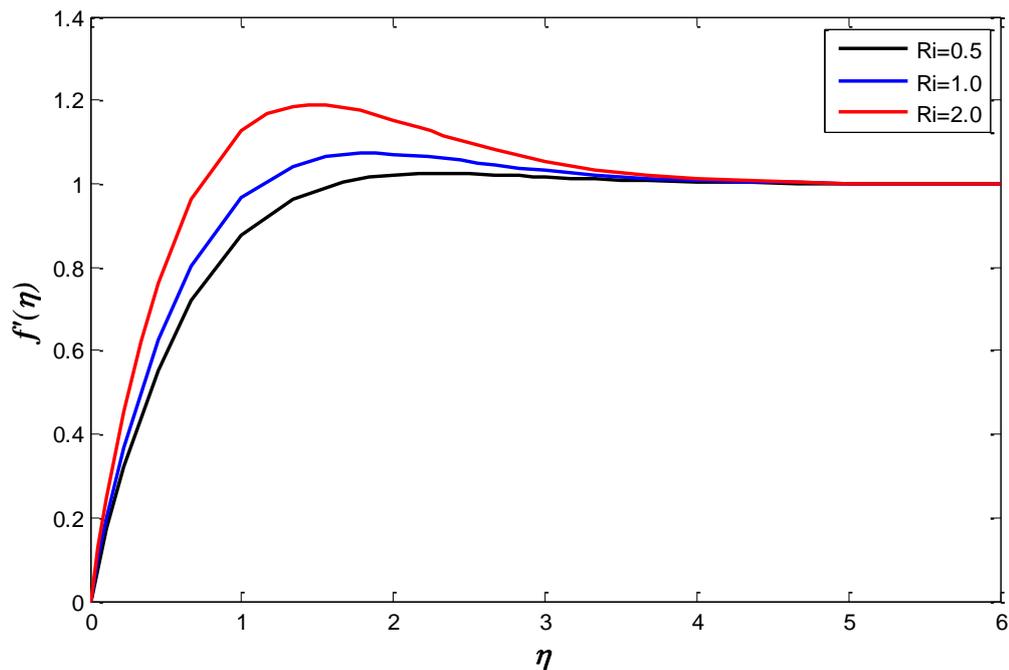


Figure IV.3: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$).

La figure (IV.1) montre l'effet de l'intensité du champ magnétique sur le profil de vitesse dans le cas convection mixte ($Ri=1$). D'après cette figure, on remarque que le paramètre de l'intensité du champ magnétique a un effet remarquable sur le profil de vitesse, l'augmentation de ce paramètre conduit à amplifier la vitesse longitudinale près de la plaque qui implique une augmentation de l'épaisseur de couche limite dynamique, en second on remarque que le profil est diminuer puis elle devient constant malgré l'augmentation de l'intensité du champ magnétique.

Dans la figure (IV.2) nous avons variés le nombre de Richardson pour voir l'évaluation de la vitesse d'écoulement en fonction du mode de convection, et nous avons imposé une intensité du champ magnétique. Nous avons remarqués que quand $Ri=2.0$ (convection naturelle) la vitesse d'écoulement va être supérieur que lorsque $Ri=1$ (convection mixte) et aussi quant $Ri=0.1$ (convection forcée), nous avons remarqués aussi que la vitesse va se stabiliser malgré le changement de mode de convection.

- Cas de l'eau $Pr=7.0$:

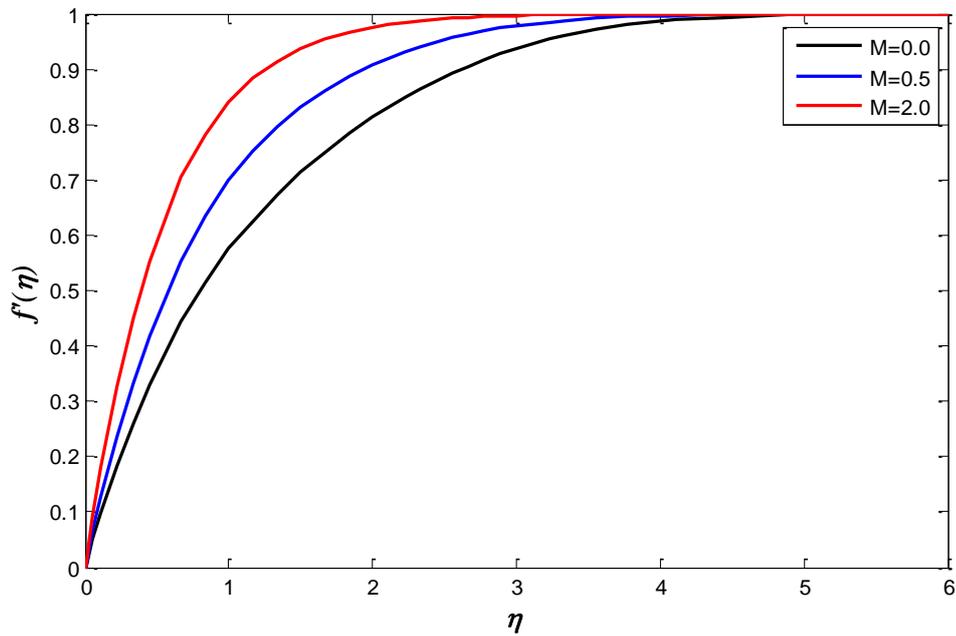


Figure IV.4: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$)

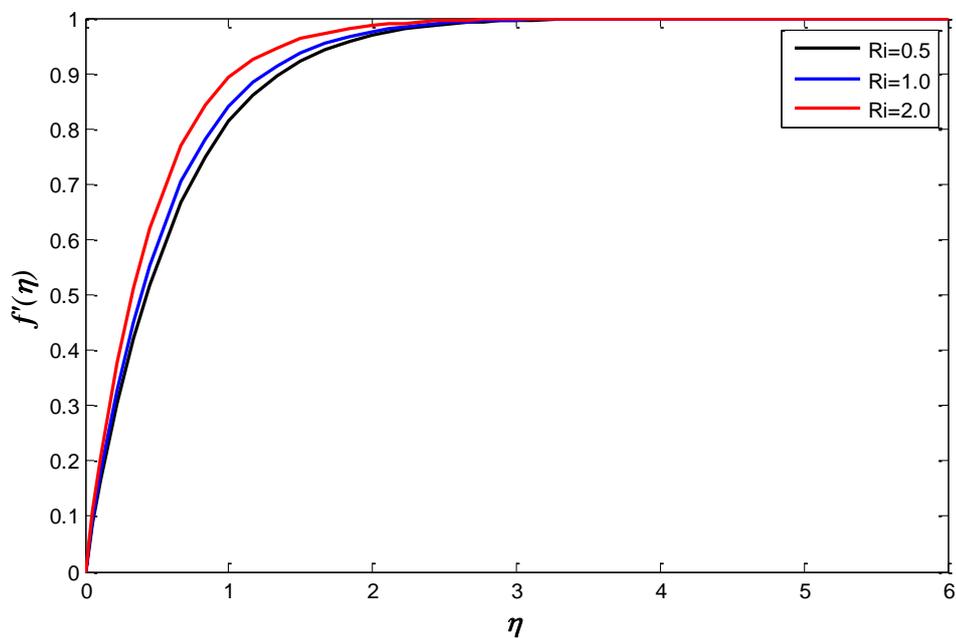


Figure IV.5: Profils de vitesse $f'(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$).

Dans la figure (IV.3) nous avons variés l'intensité du champ magnétique dans le cas convection mixte ($Ri=1$).

D'après cette figure, nous avons remarqués que la vitesse d'écoulement f' augmente proportionnellement avec l'intensité du champ magnétique, c'est-à-dire que lorsque la valeur de ce dernier augmente, la vitesse d'écoulement augmente jusqu'à ce que la vitesse devienne constante en fonction de la variable de similarité η .

Dans la figure (IV.4) nous avons variés le nombre de Richardson pour voir l'évaluation de la vitesse d'écoulement en fonction du mode de convection, et nous avons imposé une intensité du champ magnétique. Nous avons remarqués que lorsque c'est la convection naturelle qui domine $Ri=2$, la vitesse d'écoulement va être supérieur que lorsque $Ri=1$ (convection mixte) et aussi quand $Ri=0.1$ (convection forcée).

IV.2. Profils de température adimensionnelle :

La variation de la distribution de la température suivant la variable de similarité η est représentée graphiquement sur les figures (IV.5) à (IV.10) pour quelque valeur de M , Ri , H . En variant le nombre de Prandtl ($Pr=0.7$ et 7).

- **Cas de l'air $Pr=0.72$:**

La figure (IV.5) montre l'influence de l'intensité de champ magnétique sur les comportements de température dans le cas convection mixte ($Ri=1$). On constate que, l'augmentation de l'intensité du champ magnétique a accompagnées une diminution de la distribution de la température dans la couche limite thermique, jusqu'à ce qu'elle devienne nulle. La température locale dans la couche limite thermique augmente à mesure que l'effet de l'intensité du champ magnétique augmente.

Dans la figure (IV.6) nous avons variés le nombre de Richardson pour voir l'évaluation de la température en fonction du mode de convection, et nous avons imposé une intensité du champ magnétique. Nous avons remarqués que lorsque c'est la convection naturelle qui domine $Ri=2$, la vitesse d'écoulement va être inférieure que lorsque $Ri=1$ (convection mixte) et aussi quand $Ri=0.1$ (convection forcée), c'est-à-dire que la température locale dans la couche limite thermique diminue.

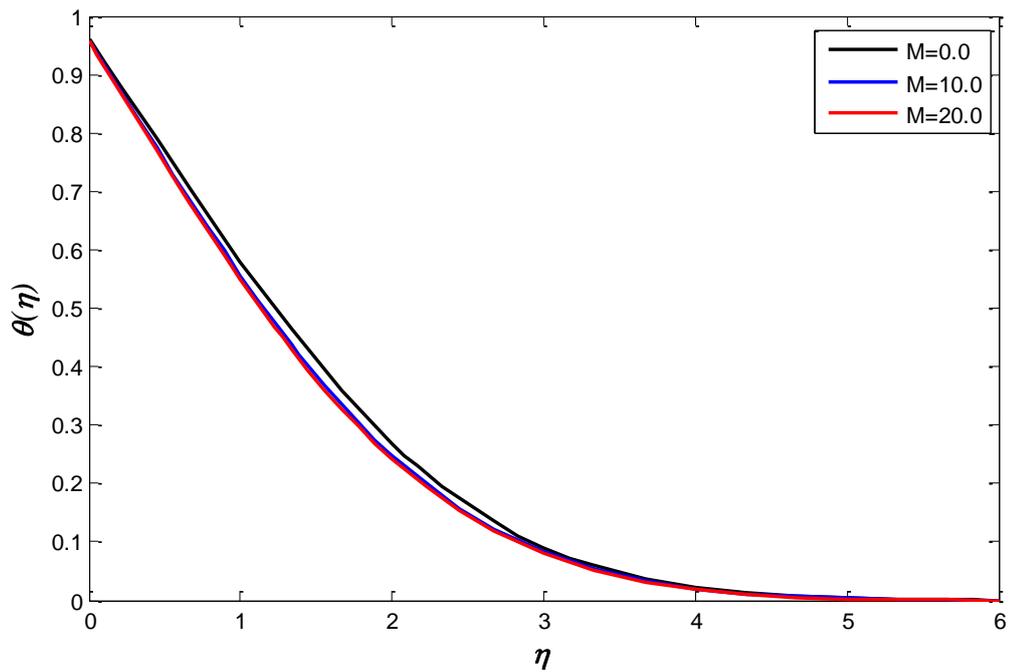


Figure IV.6: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$).

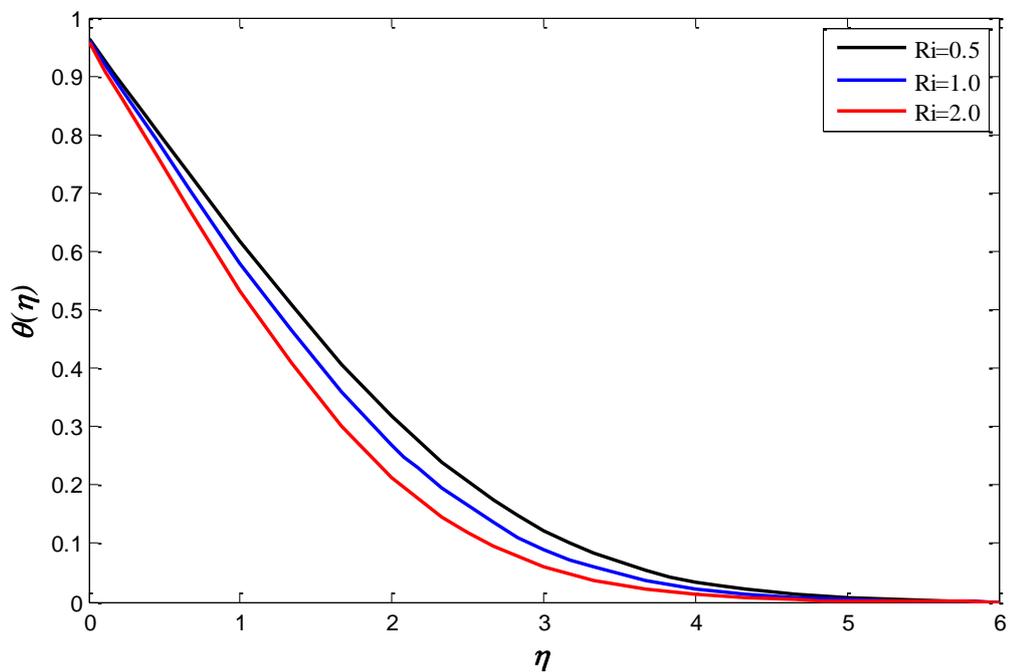


Figure IV.7: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$).

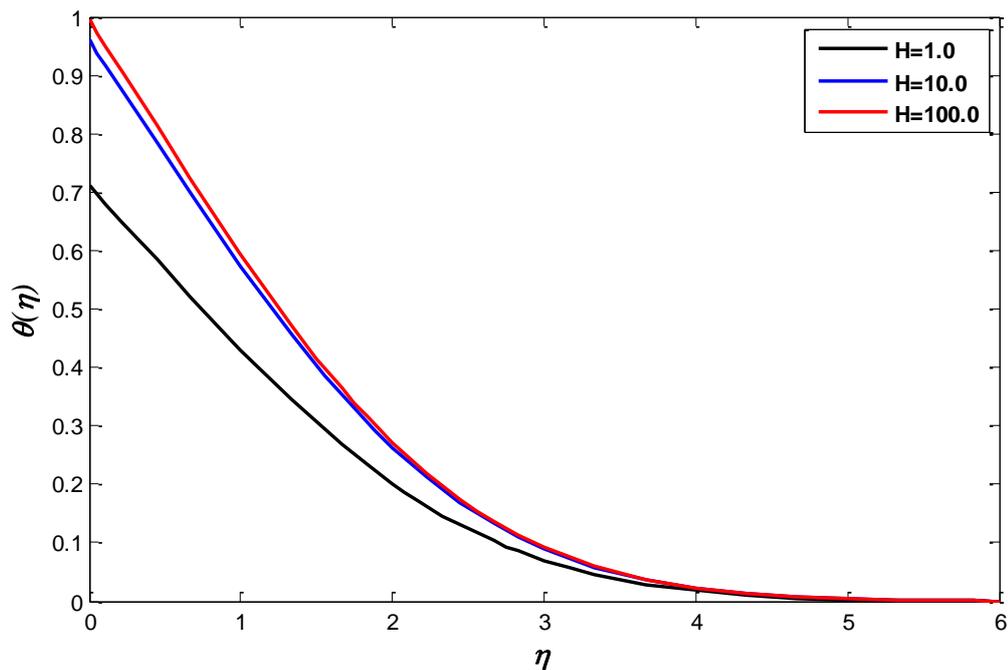


Figure IV.8: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $Ri=1.0$).

Dans la figure (IV.7), nous avons variés le paramètre de convection à la paroi pour voir l'évaluation de la température en fonction du mode de convection, et nous avons imposé une intensité du champ magnétique. Nous avons remarqués qu'à chaque fois qu'on augmente le paramètre H , la paroi de la plaque devient isotherme par conséquent le profil de température atteint son maximum à la valeur 1, ceci est dû à l'augmentation de coefficient de transfert de chaleur.

- **Cas de l'eau $Pr=7.0$:**

La figure (IV.8) montre l'influence de l'intensité de champ magnétique sur les comportements de température dans le cas convection mixte ($Ri=1$).

On constate que, l'augmentation de l'intensité du champ magnétique a accompagnées une diminution de la distribution de la température dans la couche limite thermique, jusqu'à devenir nulle. La température locale dans la couche limite thermique augmente à mesure que l'effet de l'intensité du champ magnétique augmente.

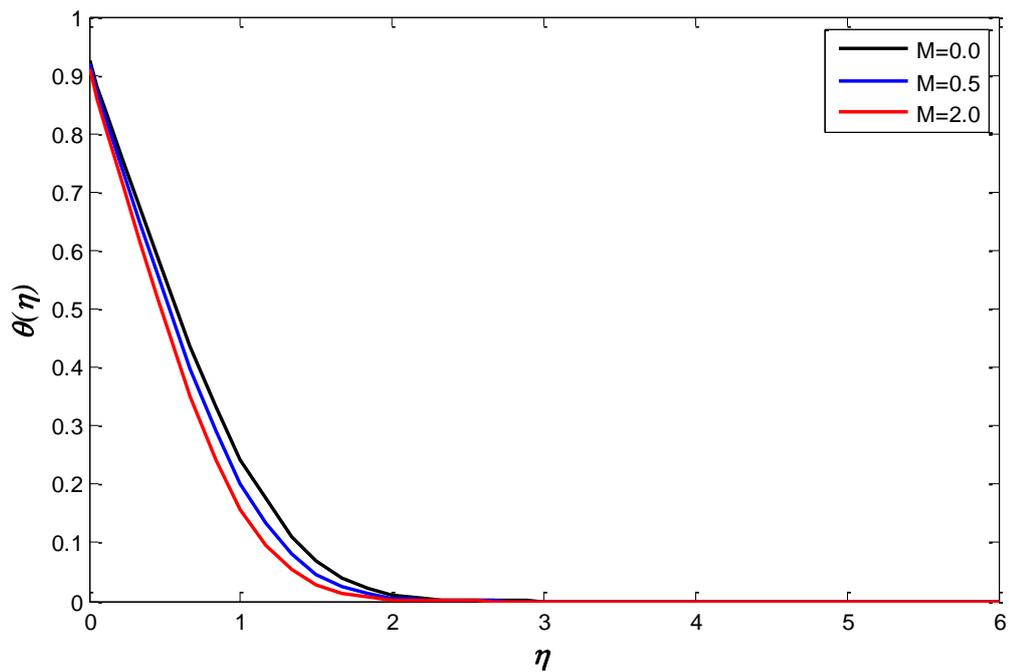


Figure IV.9: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de M ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$, $H=10$).

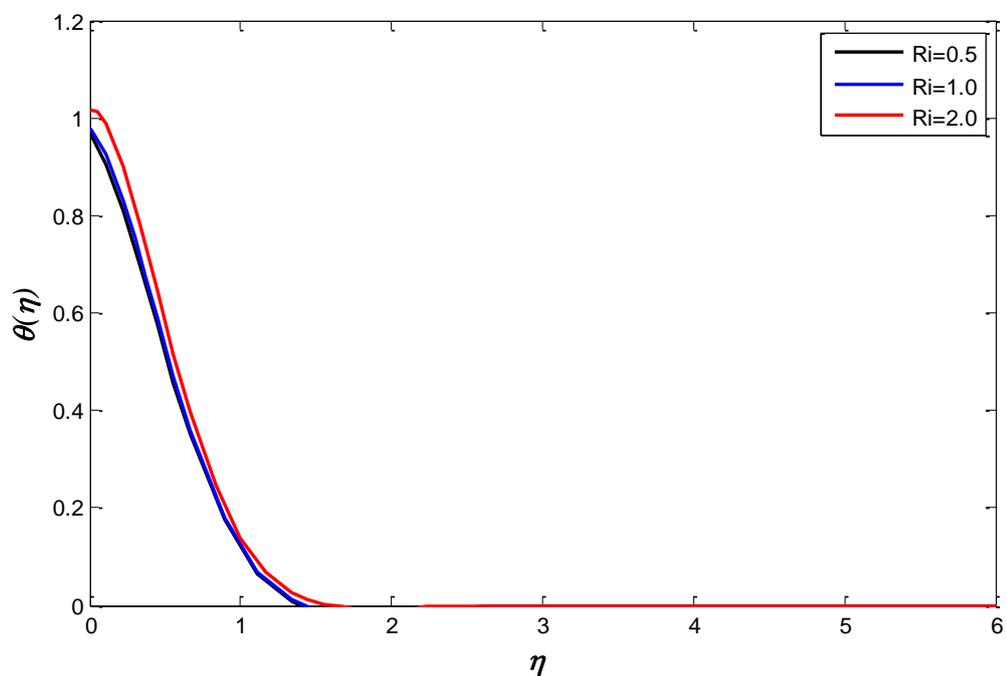


Figure IV.10: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $H=10$).

Dans cette figure nous avons variés le nombre de Richardson pour voir l'évaluation de la température en fonction du mode de convection, et nous avons imposé une intensité du champ magnétique.

Nous avons remarqués que lorsque c'est la convection naturelle qui domine $Ri=2$, la vitesse d'écoulement va être supérieur que lorsque $Ri=1$ (convection mixte) et aussi quand $Ri=0.1$ (convection forcée), c'est-à-dire que la température locale dans la couche limite thermique augmente, et un faible écart entre les différents modes de convection a été observé.

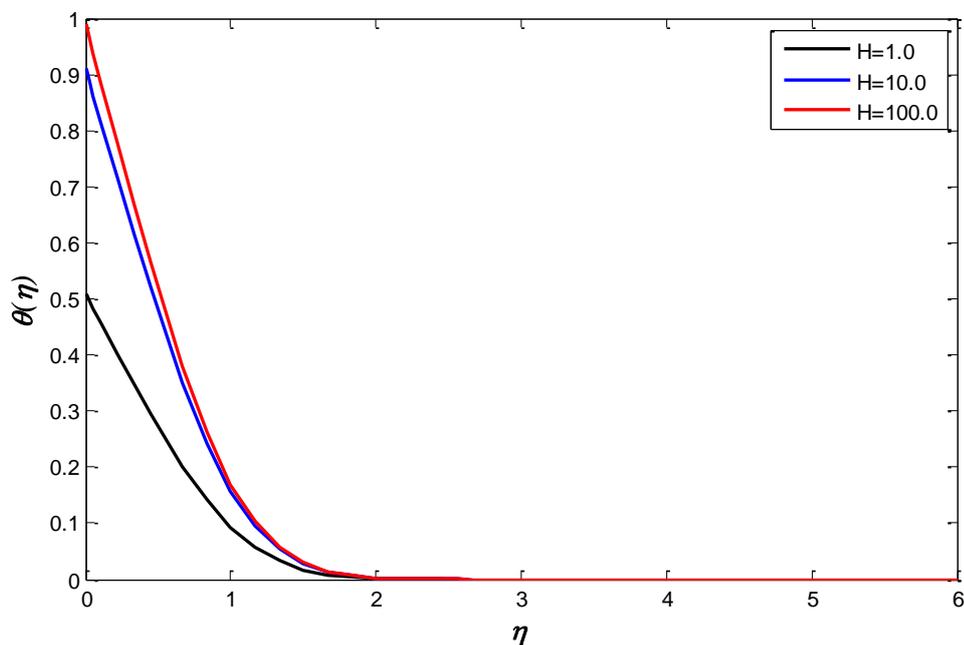


Figure IV.11: Profils de température $\theta(\eta)$ pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $M=2.0$, $Ri=1.0$)

Dans cette figure nous avons variés le paramètre de convection à la paroi pour voir l'évaluation de la température en fonction du mode de convection, et nous avons imposé une intensité du champ magnétique.

Nous avons remarqués qu'à chaque fois qu'on augmente le paramètre H , la paroi de la plaque devient isotherme par conséquent le profil de température atteint son maximum à la valeur 1, ceci est dû à l'augmentation de coefficient de transfert de chaleur.

IV.3. Variations du taux local de transfert de chaleur Nu_x :

Les variations du nombre de Nusselt local sont concernées aux différentes valeurs du paramètre de l'intensité du champ magnétique M et le paramètre de convection à la paroi H . Les principaux résultats sont illustrés dans les figures (IV.11) à (IV.14), pour deux fluides différents l'air et l'eau.

- Cas de l'air $Pr=0.72$:

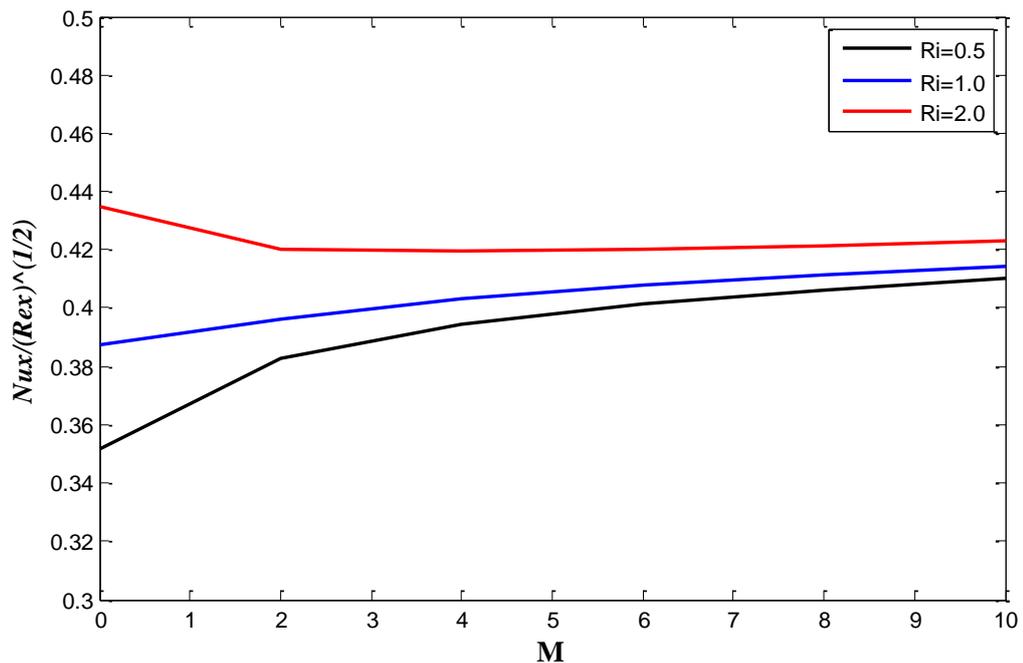


Figure IV.12: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$).

La figure (IV.11) représente la variation de nombre du Nusselt Nu_x pour différents mode de convection, en fonction de l'intensité du champ magnétique. Nous avons remarqué que le taux de transfert thermique dans la convection naturelle ($Ri=2.0$) est supérieur à celui de convection mixte et forcée, et l'augmentation de l'intensité du champ magnétique stabilisé la capacité de transfert de chaleur.

Dans la figure (IV.12) nous avons variés le paramètre de convection à la paroi pour voir l'évaluation du taux local de transfert de chaleur Nu_x en fonction de l'intensité du champ magnétique. Nous avons conclu que chaque fois que la plaque devient isotherme le taux de transfert de chaleur par convection améliore, c'est-à-dire l'augmentation de paramètre H a accompagnées une augmentation du taux local de transfert de chaleur.

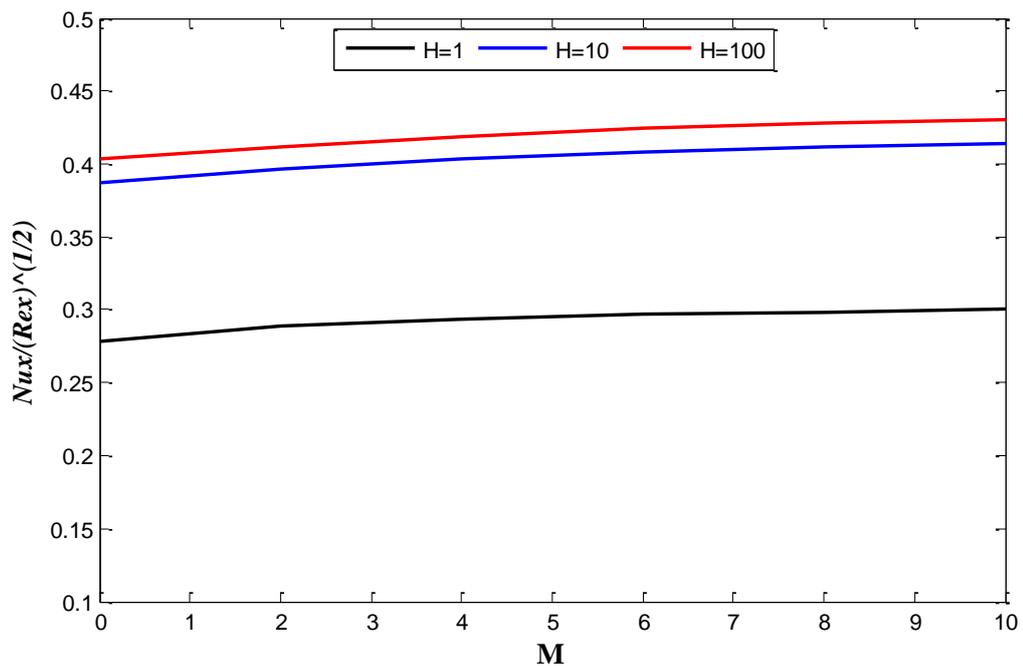


Figure IV.13: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ri=1.0$, $Ec=0.0$).

- **Cas de l'eau $Pr=7.0$:**

La figure (IV.13) représente la variation de nombre du Nusselt Nu_x local pour différents mode de convection, en fonction de l'intensité du champ magnétique. Nous avons remarqués que les différents modes de convection ont un effet remarquable sur, le taux de transfert de chaleur c'est-à-dire en convection naturelle Nu_x local et supérieur que lorsque c'est les autres modes de convection qui dominant.

Dans la figure (IV.14) nous avons variés le paramètre de convection à la paroi pour voir l'évaluation du taux local de transfert de chaleur Nu_x en fonction de l'intensité du champ magnétique. Nous avons remarqués que si la plaque est non isotherme (pour une faible valeur faible de H) le taux local de transfert de chaleur ce stabilise, mais si on augmente le paramètre H la plaque devient isotherme et Nu_x augmente légèrement.

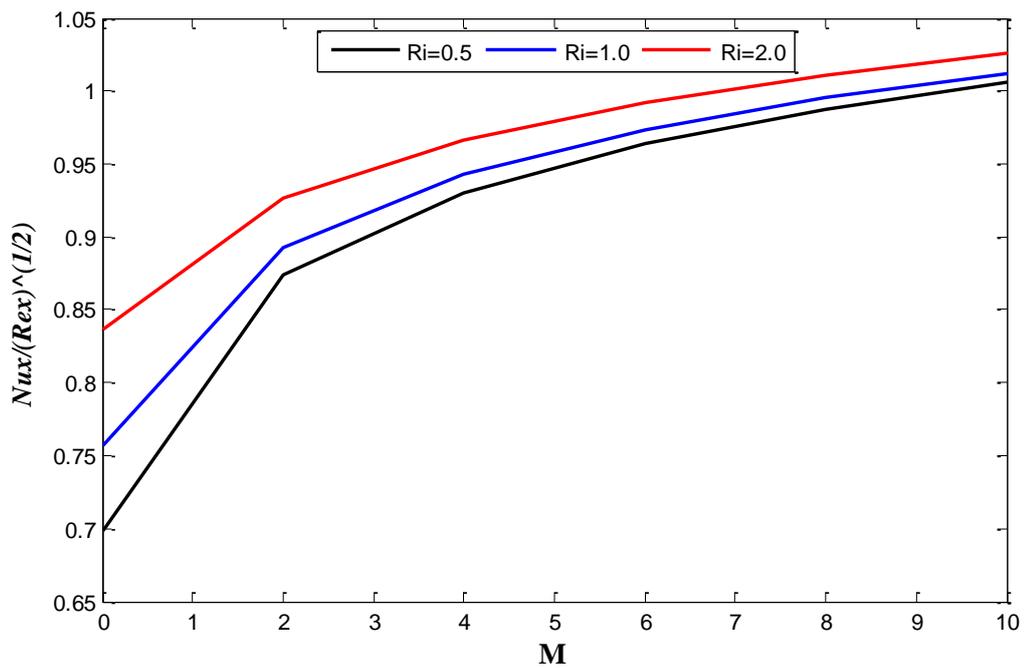


Figure IV.14: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$)

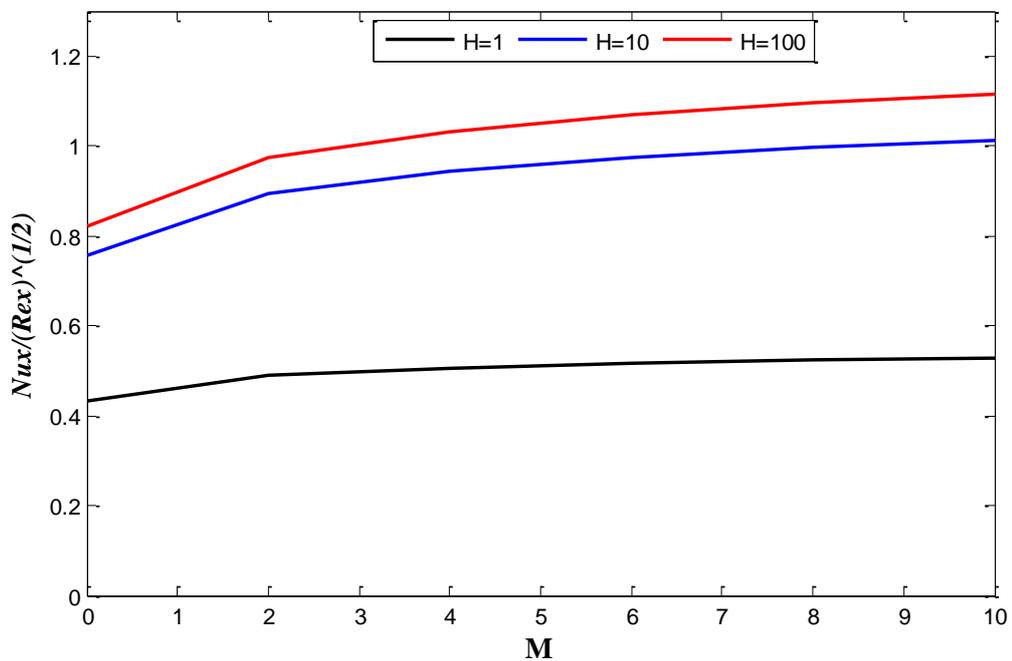


Figure IV.15: Profils de nombre de Nusselt local en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ri=1.0$, $Ec=0.0$).

IV.4. Coefficient de frottement C_f :

On doit démontrer maintenant quelle est la configuration optimale en termes de contraintes à la paroi. Les variations du coefficient de frottement en fonction du paramètre (M) sont illustrées dans les figures (IV.15) à (IV.18), en variant le mode de convection et le paramètre de convection à la paroi H .

- **Cas de l'air $Pr=0.72$:**

Dans la figure (IV.15) nous allons voir le comportement du coefficient de frottement en fonction de l'intensité du champ magnétique en variant le mode de convection.

Nous avons remarqués que les contraintes à la paroi augmentent, et cela lorsque c'est la convection naturelle qui domine, le coefficient de frottement va être supérieur lorsqu'on change le mode de convection.

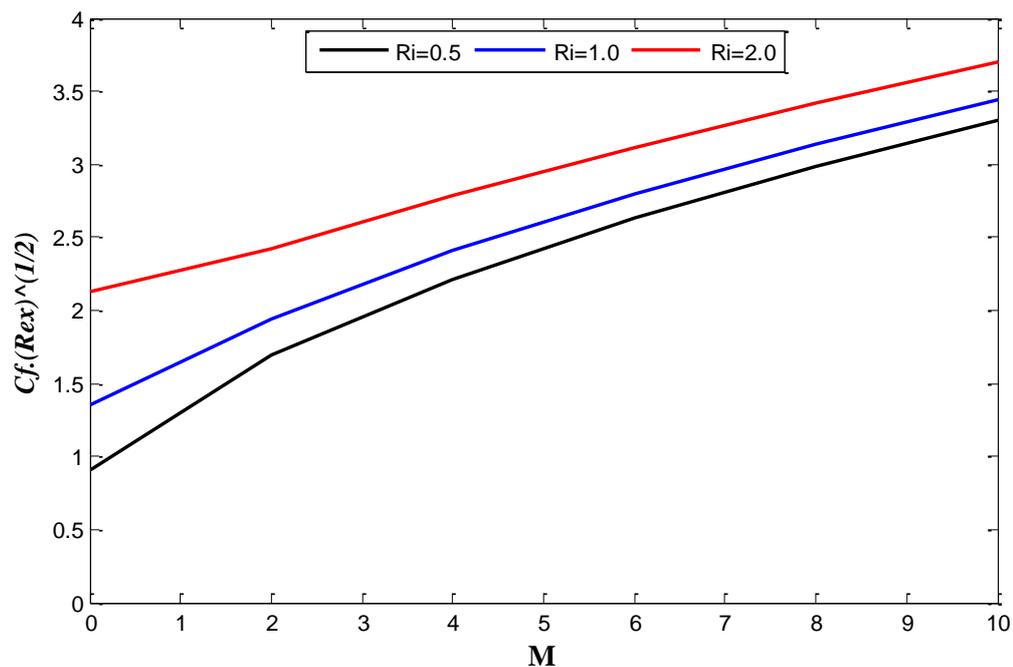


Figure IV.16: Profils de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$).

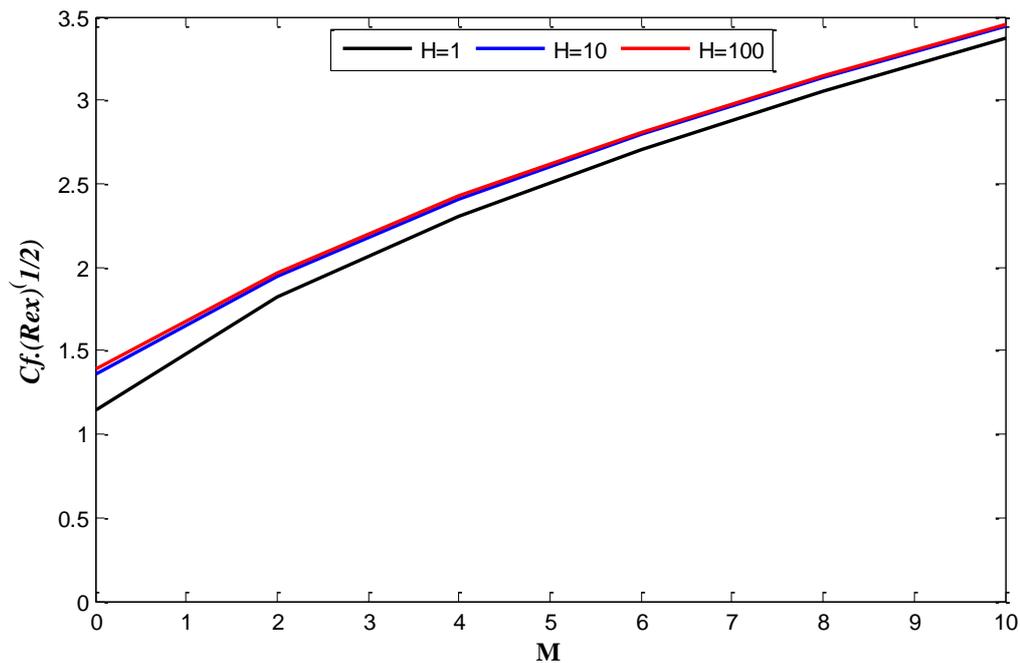


Figure IV.17: Profil de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$)

Dans la figure (IV.16) nous allons voir le comportement du coefficient de frottement en fonction de l'intensité du champ magnétique en variant le paramètre de convection à la paroi H . Nous avons remarqués que le coefficient de frottement augmente proportionnellement avec le paramètre H , c'est-à-dire qu'à chaque fois la plaque devient isotherme, le coefficient de frottement augmente.

- **Cas de l'eau $Pr=7.0$:**

Dans la figure (IV.17) nous allons voir le comportement du coefficient de frottement en fonction de l'intensité du champ magnétique en variant le mode de convection. Nous avons remarqués que les contraintes à la paroi augmentent lorsque c'est la convection naturelle qui domine, le coefficient de frottement va être supérieur lorsqu'on change le mode de convection.

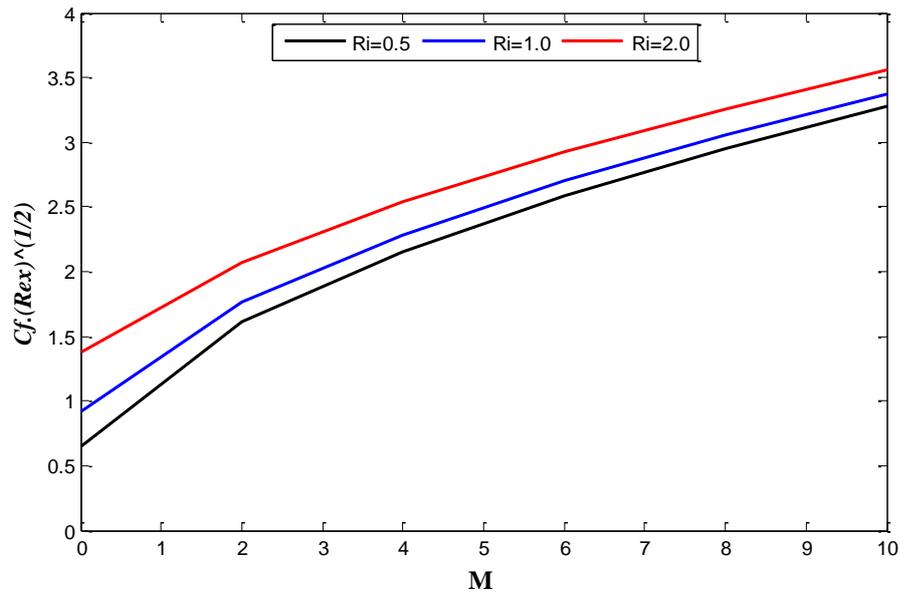


Figure IV.18: Profils de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de Ri ($Ec=0.0$, $H=10$).

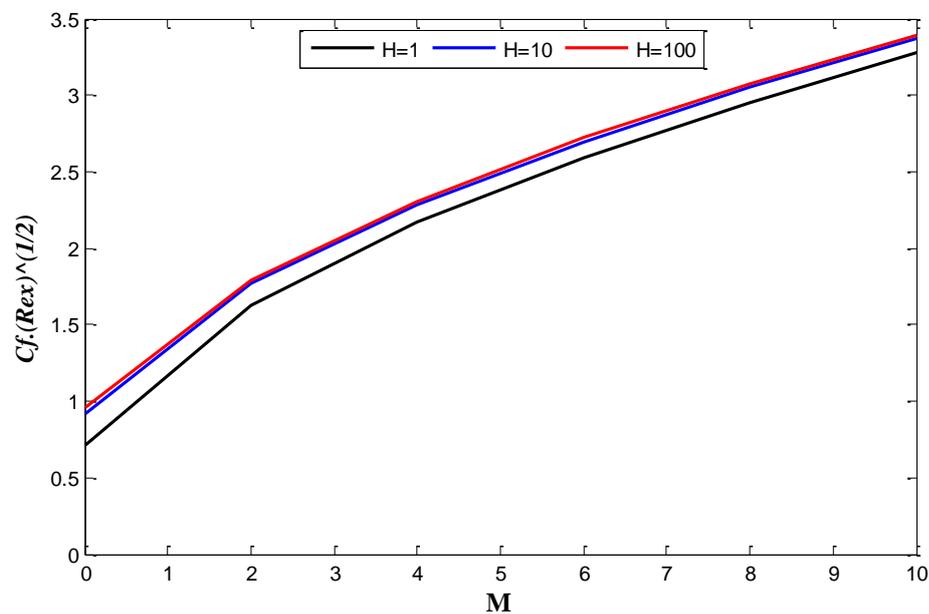


Figure IV.19: Profils de coefficient de frottement en fonction de M pour différentes valeurs de H ($Ec=0.0$, $Ri=1.0$).

Dans la figure (IV.18) nous allons voir le comportement du coefficient de frottement en fonction de l'intensité du champ magnétique en variant le paramètre de convection à la paroi H , en convection mixte.

Nous avons remarqués que le coefficient de frottement augmente proportionnellement avec le paramètre H , c'est-à-dire qu'à chaque fois la plaque devient isotherme, le coefficient de frottement augmente.

IV.5. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons étudiés l'influence du champ magnétique, du paramètre de convection à la paroi sur l'écoulement de la couche limite dynamique et thermique pour différent mode de la convection et cela pour deux fluide différent qui sont l'air et l'eau. Pour cela nous avons étudiés l'évolution de profil de vitesse et de température,

Nous avons vu aussi l'influence du paramètre de convection à la paroi et du mode de convection sur le taux de transfert de chaleur et du coefficient de frottement.

A la lumière de cette étude, on peut expliciter les conclusions suivantes :

Pour les profils de vitesse adimensionnelle :

- L'augmentation de l'intensité du champ magnétique entraine une augmentation de la vitesse.
- L'augmentation du paramètre de Richardson provoque une augmentation de la vitesse.

Pour les profils de température adimensionnelle :

- L'augmentation de l'intensité du champ magnétique entraine une diminution de la température.
- L'augmentation du paramètre de Richardson engendre une diminution de la température.
- L'augmentation du paramètre de convection à la paroi augmente le profil de température à son maximum puis la diminue.

Pour les profils de transfert de chaleur local Nux et le coefficient de frottement Cf :

- L'augmentation du paramètre de Richardson engendre une augmentation du taux de transfert de chaleur et du coefficient de frottement.
- L'augmentation du paramètre de convection à la paroi entraine une augmentation du taux de transfert de chaleur et du coefficient de frottement.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Dans ce présent mémoire nous avons effectué une étude numérique pour un écoulement magnétohydrodynamique par convection mixte pour un fluide considéré incompressible sur un plaque plane verticale semi-infinie, cet écoulement est considéré comme étant laminaire et bidimensionnel.

Les équations qui régissent l'écoulement sont, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie. La méthode d'autosimilarité a été utilisée pour parvenir à la forme adimensionnelle de ces équations pour aboutir à deux équations différentielles ordinaires.

Ces équations ont été résolues numériquement grâce à la méthode des différences finies en utilisant le code bvp4c MATLAB.

La validation numérique du code de calcul a été faite en comparant nos résultats à ceux d'Aydin, O, Kaya, A [10]. Une bonne concordance a été obtenue entre nos résultats respectifs.

Notre études numériques ont été effectuées pour deux fluide différents qui sont l'air et l'eau afin d'examiner les effets du champ magnétique, du nombre de Richardson et du paramètre de la convection à la paroi sur les profils de vitesse et de température, mais aussi sur le taux de transfert de chaleur et sur le coefficient de frottement.

Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du paramètre magnétique engendre une augmentation de la vitesse dans la couche limite dynamique mais aussi il diminue la température dans la couche limite thermique.

Dans le mode de convection naturelle, la vitesse augmente plus considérablement qu'en présence de la convection mixte ou forcée, le contraire a été observé pour l'évolution de la température au sein de la couche limite thermique.

L'augmentation du paramètre de la convection à la paroi, augmente la température jusqu'à atteindre son seuil puis la diminue qu'à chaque fois que la paroi devient isotherme, le contraire a été observé pour le coefficient de frottement et le taux de transfert thermique c'est-à-dire qu'à que la plaque devient isotherme, le taux de transfert thermique et le coefficient de frottement seront optimal.

Le taux de transfert dans la convection naturelle sera supérieur à ceux en présence de la convection mixte ou forcée.

Conclusion Générale

Le coefficient de frottement augmente en présence de la convection, lorsque c'est la convection naturelle qui domine le coefficient va parvenir sa valeur optimale.

Cette étude nous a permis de constater quelques points relativement important parmi l'ensemble des perspectives de ce présent travail nous pouvons tirés ceci :

- La poursuite des études théorique et numérique sur la MHD semble être un objectif tout à fait accessible.
- il reste a validé ces études dans une application industriel car nous n'avons pas pris en compte de nombreux problèmes lors de notre études, par exemple la dissipation visqueuse et la pression du fluide.

De telles études nécessitent bien entendu de collaborer avec des gens experts du domaine.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [1]: Amkadni, M. Etude des équations de couches limites dans un écoulement MHD autour d'un profil, 2006.
- [2]: Belghoul, N. Modélisation et simulation de la convection due à un champ de force externe dans des cavités : Convection Naturelle, MHD et Marangoni, 2018.
- [3]: Mesurolle, M. Modélisation numérique en vue de la conception d'un actionneur SCAO magnétohydrodynamique de précision (Doctoral dissertation), 2015.
- [4]: Bergoug, N. Contribution à la modélisation d'une pompe magnétohydrodynamique (MHD) annulaire à induction (Doctoral dissertation, Université de Batna 2-Mustafa Ben Boulaid), 2013.
- [5]: Bouayed, Z. Etude de la convection mixte laminaire dans une cavité ventilée par la méthode de Boltzmann sur réseau (Doctoral dissertation), 2014.
- [6]: Skandaji Rezg, L. Etude de la structure d'une couche limite turbulente soumise à des oscillations transversales de la paroi (Doctoral dissertation, Ecully, Ecole centrale de Lyon), 1997.
- [7]: Jousot, R. Etude, caractérisation et amélioration d'un actionneur plasma: application au contrôle de la transition d'une couche limite de Blasius. Diss. Université d'Orléans, 2010.
- [8]: Berkane, H. Influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse. Diss. Université Mohamed khider Biskra, 2005.
- [9]: Ayad, F, Tarik, M. Etude de l'influence des effets de flottabilité thermique et massique sur l'écoulement impactant sur une paroi chauffée. Diss. Université Abderrahmane Mira, 2017.
- [10]: Aydin, O, Kaya, A. Mixed convection of a viscous dissipating fluid about a vertical flat plate, Appl. Math. Model 31, 2007.
- [11]: Rashad, A. M. Influence of radiation on MHD free convection from a vertical flat plate embedded in porous media with thermophoretic deposition of particles. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 13.10, 2008.

Références Bibliographiques

- [12]: Anwar Bég, O., et al. Magnetohydrodynamic convection flow from a sphere to a non-Darcian porous medium with heat generation or absorption effects: network simulation. *International Journal of Thermal Sciences* 48.5, 2009.
- [13]: Chen, C-H. Heat and mass transfer in MHD flow by natural convection from a permeable, inclined surface with variable wall temperature and concentration. *Acta Mechanica* 172.3-4, 2004.
- [14]: Pal, D, Mondal, H. Effect of variable viscosity on MHD non-Darcy mixed convective heat transfer over a stretching sheet embedded in a porous medium with non-uniform heat source/sink. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15.6, 2010.
- [15]: Pal, D, Talukdar, B. Perturbation analysis of unsteady magnetohydrodynamic convective heat and mass transfer in a boundary layer slip flow past a vertical permeable plate with thermal radiation and chemical reaction. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15.7, 2010.
- [16]: Jang, J, Y, Hsu. Vortex instability of MHD natural convection flow over a horizontal plate in a porous medium. *Computers & Fluids*, 38(2), 2009.
- [17]: J. Kierzenka, *Studies in the numerical solution of ordinary differential equations, these de doctorat*, Southern Methodist University, Dallas, TX, 1998.

Résumé

Dans ce présent travail, nous avons étudiés un écoulement MHD en convection mixte le long d'une plaque verticale semi infinie. Le phénomène de la MHD est régi par les équations de la quantité de mouvement et d'énergie. Cet écoulement est gouverné par plusieurs paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Prandtl, le nombre de Richardson, le nombre de Nusselt, le paramètre magnétique, le paramètre de convection à la paroi. Le problème envisagé est résolu par voie numérique, à l'aide de la méthode de différence finie en utilisant le solveur bvp4c MATLAB. Les résultats obtenus nous ont permis d'observer l'influence de l'effet des différents paramètres sur l'écoulement MHD notamment sur les profils de vitesse, et de température mais aussi sur le taux de transfert thermique et du coefficient de frottement.

Mots clés : magnétohydrodynamique, convection mixte, couche limite.

Abstract

In this work, we studied a MHD flow in mixed convection along a semi-infinite vertical plate. The phenomenon of MHD is governed by the equations of momentum and energy. This flow is governed by several control parameters, namely the number of Prandtl, the Richardson number, the Nusselt number, the magnetic parameter, and the convection parameter at the wall. The problem is solved numerically, using the finite difference method using the MATLAB bvp4c solver. The results obtained allowed us to observe the influence of the effect of the various parameters on the MHD flow, in particular on the velocity and temperature profiles, but also on the heat transfer rate and the coefficient of friction.

Key words: magnetohydrodynamics, mixed convection, boundary layer.