

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE DEPARTEMENT DE GENIE  
MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : construction mécanique

Par :

**BELKACEMI Bilal**

**BIREM Loucif**

**Thème**

---

**Détermination des propriétés effectives d'un matériau  
composite a trois phases**

---

Soutenu le 13/10/2020 devant le jury composé de:

Melle. ADJOUADI

Présidente

Mr. BOUTAANI

Rapporteur

Melle. HIMED

Examinatrice

**Année Universitaire 2019-2020**

## ***Remerciement***

*Nos profonds remerciements à Monsieur S. BOUTAANI, enseignant à l'Université de Bejaia, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.*

*Nos remerciement vont également aux membres de jury pour avoir accepté d'examiné et jury notre travail.*

*Nous tenons aussi à adresser nos vifs remerciements à tous les enseignants du département génie mécanique de l'université de Bejaia, ainsi que le personnel du hall technologie targa ouzemour.*

*En finale nos souhaitons remercié l'ensemble des étudiants génie mécanique et tous ceux qui nous ont aidé de prés ou de loin.*

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*- Mes chères parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leur prières tout au long de mes études.*

*-Mes frères AMIROUCHE et MOULOUD*

*- toute ma famille et mes proches.*

*- Tous mes ami(e)s et camarades de classe.*

*BILAL*

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*A ceux qui ont tant éveillé la nuit, tant sacrifié de leurs  
temps pour nous instruire et qui ont su faire face aux  
difficultés de tous les jours avec vaillance et qui ont pu  
les surmonter malgré tout et cela dans le seul souci de  
notre bien être,*

*A vous mes très  
chers Parent que dieu  
vous protège*

*A mes chers sœurs et  
Fère Toute ma famille et  
mes proches*

*A tous mes amis sans exception et tous ceux qui me sont chers.*

**LOUCIF**

# Tableau des matières

## Chapitre I : Généralité sur les matériaux composites

Introduction .....	1
Définition d'un Matériaux composites.....	1
Définition.....	1
Grande diffusion .....	1
Hautes performances.....	1
Les constituants .....	3
a) Le renfort .....	4
b) La matrice .....	5
c) Les charges .....	7
d) Les additifs .....	8
Quelques matériaux composites et leurs classification.....	8
Classification des matériaux composites .....	9
Classification suivant la forme des constituants.....	9
Composites à fibres.....	9
Composites à particules .....	9
Classification suivant la nature de la matrice .....	10
I.4.2.1. Composites à matrice organique (résine, charges) .....	10
I.4.2.2 Composites à matrice métallique.....	11
I.4.2.3 Composites à matrice minérale (céramique) .....	11
Les avantages et les inconvénients des matériaux composites .....	11
Les avantage .....	11
a) Facilité de mise en forme.....	11
b) Légèreté .....	12
c) Adaptabilité .....	12
d) Résistance à la corrosion ou à l'oxydation .....	12
e) Isolation électrique et thermique .....	12
Les inconvénients .....	12
a) Le Coût .....	12
b) Conception et analyse.....	13

c) Assemblage.....	13
d) Tolérance aux dommages .....	14
Conclusion .....	14
<b>Chapitre II : Notions d’homogénéisation en élasticité linéaire</b>	
II. Notions d’homogénéisation en élasticité linéaire.....	15
Introduction .....	15
Le concept du Volume Élémentaire Représentatif (VER) .....	15
Rappels de la théorie d’élasticité et la micromécanique.....	19
Lois de comportement .....	19
Problème de l’élasticité linéaire macroscopique.....	21
Les champs de contraintes-déformations micro-macro échelle .....	23
Principes et représentation du milieu hétérogène.....	24
Représentation .....	26
I.3.2 Localisation .....	26
II.3.3 Homogénéisation.....	27
Présentation de quelques modèles analytiques de changement d’échelles .....	28
Homogénéisation analytique.....	28
Comparaison entre les modèles et les bornes analytiques .....	30
Conclusion.....	31
<b>Chapitre III : génération et maillage de microstructures</b>	
Introduction .....	32
Modélisation de la microstructure : génération et maillage de microstructures.....	32
Modèles de génération et reconstitution des microstructures.....	32
Modèle d'addition séquentielle aléatoire (RSA).....	34
Modèle de génération par la technique dynamique moléculaire .....	35
Génération de microstructures aléatoires avec trois phases en 3D.....	35
Matériaux et Méthodes.....	36
Description de la microstructure .....	36
Propriétés élastiques des phases .....	37
Différentes méthodes de maillage .....	37
Maillage régulier .....	37

## Tableau des matières

---

Maillage adaptatif .....	38
Maillage libre.....	38
Résultats et discussion.....	39
Fraction volumique 10% .....	39
Fraction volumique 20% .....	42
Effet de la fraction volumique sur les propriétés élastiques.....	44
CONCLUSION .....	45

## LISTES DES FIGURES

### CHAPITRE I

Figure I.1 Matériau composite

Figure I.2 Types de renfort

Figure I.3 différents familles de matrice

Figure I.4 béton armé

Figure I.5 fibres de verre courtes

Figure I.6 particules (microbilles) de verre

Figure I.7 quelques application des CMO {haute performance} : (a) un catamaran, (b) le support de la charge utile d'Ariane, (c) des skis des compétitions

Figure I.8 Alliages légers et ultra légers d'aluminium

Figure I.9 (a) la tuyère d'un moteur spatial, (b) le disque à aubes d'un turbine, (c) un disque de frein

### Chapitre II

Figure II.1 milieu hétérogène (a) est le milieu macroscopiquement (b) reliés V.E.R

figure II.2 volume élémentaire représentatif

Figure II.3 étapes d'homogénéisation

Figure II.4 variation de coefficient de compression  $K$  , en fonction de la fraction volumique des inclusions

### Chapitre III

Figures III.1 Microstructure d'un réfractaire électro-fondu zircone-verre caractérisée par microtomographie ([Madi, 2006](#)). Volume représenté : 350 x 350 x 700  $\mu\text{m}$ , (a) Segmentation du volume pour séparer les phases en présence. (b) Détection de l'isosurface, et triangulation. (c) Maillage obtenu (éléments tétraédriques linéaires, 1 500 000 degrés de liberté). La zircone est ici en rouge, et la phase vitreuse en jaune.

Figure III.2 Microstructure générée par RSA : (a) image virtuelle, (b) maillage des particules et (c) maillage total du composite, Kari et al. (2007b).

Figure III.3 Définition de la géométrie et du paramétrage des particules

Figure III.4 Les tailles de volume de la microstructure 3D utilisé pour les fractions volumique 10% et 20%.

Figure III.5 Maillage 2D et 3D de la géométrie d'une microstructure.

Figure III.6 Maillage d'un disque par des triangles

Figure III.7 Courbes de convergence de module de compressibilité apparent  $k_{app}$  en fonction de la taille du domaine  $V$ . Fr10%

Figure III.8 Courbes de convergence de module de cisaillement apparent  $\mu_{app}$  en fonction de la taille du domaine V. **Fr10%**

Figure III.9 Courbes de convergence de module de Young en fonction de la taille du domaine v. **Fr10%**

Figure III.10 Courbes de convergence de module de compressibilité apparent  $k$  en fonction de la taille du domaine V. **Fr20%**

Figure III.11 Courbes de convergence de module de cisaillement apparent  $\mu_{app}$  en fonction de la taille du domaine V. **Fr20%**

## Liste des tableaux

### CHAPITRE I

Tableau I.1 Les caractéristiques moyennes des fibres et renforts

### CHAPITRE II

Tableau II.1 Expression mathématique des approches d’homogénéisation analytique pour le coefficient de compression  $k$

Tableau II.2 Expression mathématique des approches d’homogénéisation analytique pour le coefficient de cisaillement  $\mu$ .

### CHAPITRE III

Tableau III.1 propriétés élastiques des composants

## Symbole & Notations générales

$\boldsymbol{\sigma}$  : est le tenseur des contraintes du second ordre

$\boldsymbol{\varepsilon}$  : est le tenseur du second ordre

$\mathbf{C}$  : est le tenseur de rigidité du quatrième ordre

$\mathbf{E}$  : est le module d'Young

$\mathbf{G}$  : est le module de cisaillement

$\mathbf{K}$  : est le module de masse

$\lambda$  : Est Lamé constant

$\mathbf{C}_{\text{eff}}$  : est la rigidité effective d'un composite en N phases

$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathbf{c}}$  : est la contrainte moyenne du composite

$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{c}}$  : est la déformation moyenne

$\mathbf{\Phi}_r$  : est la fraction volumique de la phase r

$\mathbf{C}_r$  : est le tenseur de rigidité de la phase r

$\mathbf{A}_r$  : est appelé le tenseur de localisation des déformations de la phase r

$\mathbf{d}$  : est la taille caractéristique des hétérogénéités

$\mathbf{L}$  : est la taille caractéristique de la structure macroscopique

$\mathbf{l}$  : est la taille caractéristique du VER

$\mathbf{2D}$  : Deux dimensions

$\mathbf{3D}$  : Trois dimensions

$\mathbf{VE}$  : Volume élémentaire

$\mathbf{VER}$  : Volume élémentaire représentatif

**CAL** : conditions aux limites

**KUBC** : Conditions aux limites cinématiques

**HS** : Les bornes de Hashin-Shtrikman

**HS+** : Les bornes supérieures de Hashin-Shtrikman **HS-** : Les bornes inférieures de Hashin-Shtrikman **SC**: Auto cohérent (Self-consistent)

**MT** : les bornes Mori-tanaka **VR** : les bornes

Voigt-Reuss **P, V** : Fraction volumique

***f<sub>m</sub>*** : Fraction volumique de la matrice

***f<sub>i</sub>*** : Fraction volumique de l'inclusion

***k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub>*** : Modules de compressibilités (*Bulk*) pour les deux phases (matrice + inclusion)

***μ<sub>1</sub>, μ<sub>2</sub>*** : Modules de cisaillement (*Shear*) pour les deux phases (matrice + inclusion)

***f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>*** : Fractions volumiques pour les deux phases.

Les signes + et - : désignent les bornes respectivement supérieures et inférieures

***E<sub>m</sub>*** et ***E<sub>i</sub>*** : sont le tenseur élastique de la matrice et l'inclusion

**L** : est la longueur du volume

**D** : est le diamètre des particules

***K<sub>m</sub>*** : module de compressibilité de la matrice

***μ<sub>m</sub>*** : module de cisaillement de la matrice

***E<sub>m</sub>*** : module de young de la matrice

***K<sub>f1</sub>*** : module de compressibilité des inclusions 1

***μ<sub>f1</sub>*** : module de cisaillement des inclusions 1

***E<sub>f1</sub>*** : module de young des inclusions 1

***K<sub>f2</sub>*** : module de compressibilité des inclusions 2

***μ<sub>f2</sub>*** : module de cisaillement des inclusions 2

***E<sub>f2</sub>*** : module de young des inclusions 2

# Introduction

## Introduction générale

Les matériaux industriels sont en général des matériaux hétérogènes lorsqu'ils sont observés dans une certaine échelle. La détermination des caractéristiques macroscopiques des matériaux hétérogènes est un problème majeur dans de nombreuses applications d'ingénierie et de sciences. L'étude de la relation entre les phénomènes de microstructure et le comportement macroscopique permet non seulement de prédire le comportement des matériaux qui existe déjà, mais fournit également un outil pour la conception de microstructures des matériaux de telle sorte que le comportement macroscopique résultant correspond aux caractéristiques souhaitées. Le calcul de microstructures dans le cadre de la mécanique des milieux continus est désormais une discipline scientifique à part entière, et combine les méthodes numériques du calcul des structures et les connaissances en sciences des matériaux.

Aujourd'hui, on remarque une progression importante dans l'emploi des matériaux Composites dans des domaines d'application aussi divers et variés.

Le but du présent travail est de prédire le comportement élastique apparent d'un matériau composite à 3 phases ainsi de déterminer les propriétés élastiques apparentes. Plusieurs réalisations sont effectuées pour différentes fractions volumiques, ces réalisations sont de forme d'un cube qui contient un certain nombre de sphères et avec différentes géométries. Le comportement élastique est évalué à l'aide d'un logiciel de simulation numérique (Comsol), ce travail est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré à une introduction sur les matériaux composites et leurs types ainsi que les procédés de fabrication des matériaux composites.

Le deuxième chapitre concerne la modélisation de leur comportement élastique linéaire mécanique dans le domaine de l'élasticité et à la méthodologie de la modélisation par changement d'échelles. Nous présentons la démarche générale de cette modélisation dans le cadre du comportement mécanique, en détaillant les notions d'homogénéisation et de localisation, de volume élémentaire représentatif.

Finalement, le troisième chapitre présentera la génération des particules en 3D dans un volume cubique, il aborde aussi la technique de maillage des images virtuelles utilisée dans cette

étude, finalement la modélisation par la méthode d'homogénéisation numérique à l'aide du logiciel Comsol multi-physique 5.5 et le calcul des propriétés élastiques effectives de composite en 3D ayant des particules sous forme sphérique de différent diamètre , les résultats obtenus seront comparé aux deux modèles abordés (Hashin-Strikman et le modèle auto cohérent).

*Chapitre I :*  
**Généralité sur les matériaux composites**

## **Introduction**

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs (constructeurs). Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps, résulte de l'association d'au moins deux matériaux non miscibles, dont les qualités se combinent avec synergie. C'est donc, par essence même, un produit hétérogène.

Les matériaux composites sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel illimité. Les matériaux composites se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie.

## **Définition d'un Matériaux composites**

### **Définition**

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes. Leur association est complémentaire et permet d'aboutir à un matériau dont les performances recherchées seront supérieures à celles des composants pris séparément. Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, appelée renfort ou matériau renforçant, est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue, appelée matrice.

On distingue deux types de composites :

#### **- Grande diffusion**

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiels, qui sont l'optimisation des coûts par diminution des prix de revient, la composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe des matériaux (moulage par contact, SMC et injection).

#### **- Hautes performances**

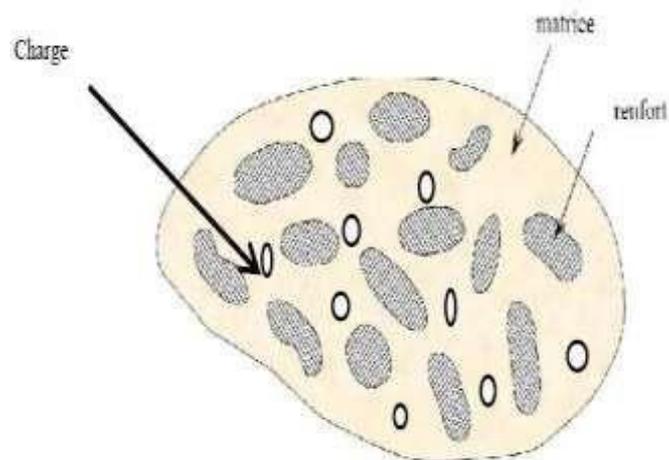
Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduit des hautes valeurs ajoutées. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%. Ces

composites sont élaborés par les procédures suivantes : - drapage autoclave, enroulement filamentaire, RM. -T beaucoup de procédés encore manuels.

### Les constituants

En général les constituants principaux d'un matériau composite sont :

- La matrice ;
- Le renfort ;
- Les charges et les additifs ;



**Figure I.1**Matériau composite [1].

a) Le renfort

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite. un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes :

- Linéique (fils, mèches)
- Tissus surfaciques (tissus, mats)
- Multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 1[2].

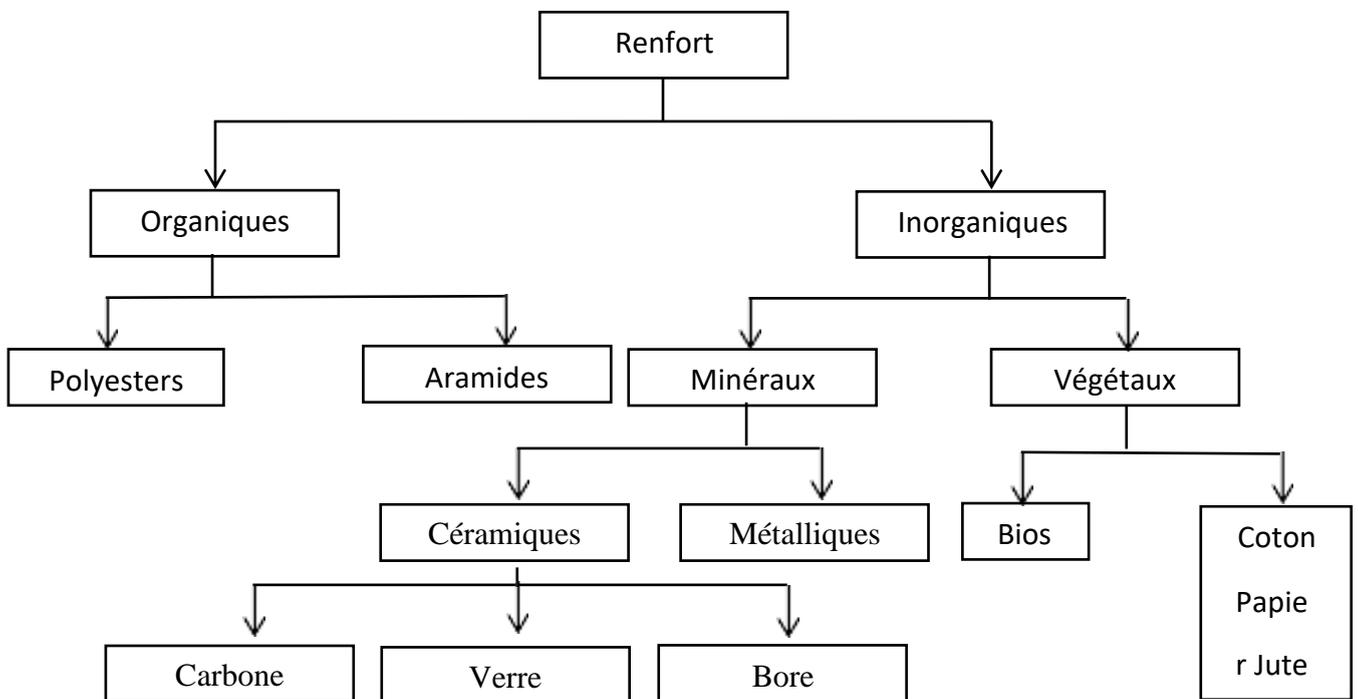


Figure I.2 Types de renfort [3].

Renforts	Diamètre du filament ( $\mu\text{m}$ )	Masse volumique ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	Module de cisaillement (Mpa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique $^{\circ}\text{C}^{-1}$
	d	?	E	G	?	$s_r$	A	a
Verre E	16	2 600	74 000	30 000	0,25	2 500	3,5	$0,5 \cdot 10^{-5}$
Verre R	10	2 500	86 000		0,2	3 200	4	$0,3 \cdot 10^{-5}$
Carbone HM	6.5	1 800	390 000	20 000	0,35	2 500	0,6	$0,08 \cdot 10^{-5}$
Carbone HR	7	1 750	230 000	50 000	0,3	3 200	1,3	$0,02 \cdot 10^{-5}$
Kevlar 49	12	1 450	130 000	12 000	0,4	2 900	2,3	$-0,2 \cdot 10^{-5}$
Bore	100	2 600	400 000			3 400	0,8	$0,4 \cdot 10^{-5}$
Silicate d'alumine	10	2 600	200 000			3 000	1,5	
Polyéthylène		960	100 000			3 000		

Tableau (I-1) : Les caractéristiques moyennes des fibres et renforts [3]

### b) La matrice

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres. Elle répartit les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique des fibres.

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure (I-3)

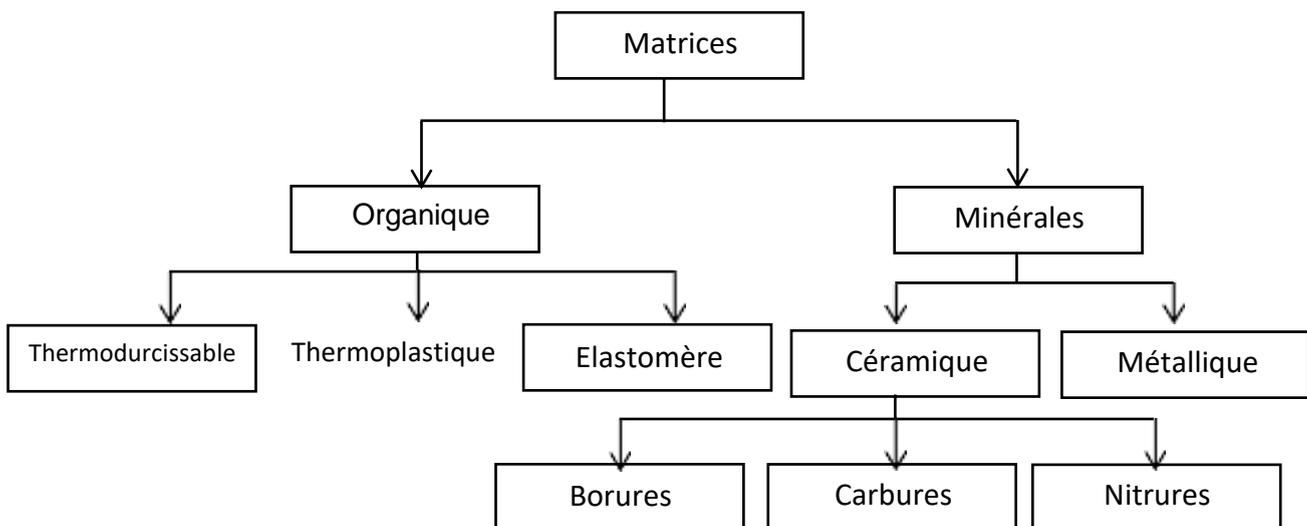


Figure (I-3) : Différentes familles de matrice [3].

Les résines les plus employées dans les matériaux composites sont les résines thermodurcissables et les résines thermoplastiques

### - **Résines thermodurcissables**

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées (traitement thermique ou physico-chimique). Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois. Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage : les résines polyesters insaturées, les résines de condensation, les résines époxydes.

### - **Les résines époxydes**

Les résines les plus utilisées après les résines polyesters insaturées sont les résines époxydes.

Elles ne représentent cependant que 5 % du marché composite, à cause de leur prix élevé (de l'ordre de cinq fois plus que celui des résines polyesters) [1].

Du fait de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les résines époxydes, généralement utilisées sans charges, sont les matrices des composites à hautes performances (constructions aéronautiques, espace, missiles, etc.).

Les caractéristiques mécaniques générales des résines époxydes sont les suivantes:

- ❖ Module d'élasticité en traction 3 à 5 GPa
- ❖ Contrainte à la rupture en traction 60 à 80 MPa
- ❖ Contrainte à la rupture en flexion 100 à 150 MPa
- ❖ Allongement à la rupture 2 à 5 %
- ❖ Résistance au cisaillement 30 à 50 MPa
- ❖ Température de fléchissement sous charge 290 °C

### - **Résines thermoplastiques**

Ce sont des polymères pouvant être alternativement ramollis par chauffage et durcis par refroidissement dans un intervalle de température spécifique du polymère étudié. Les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramolli, de se mouler aisément par plasticité [1].

### - **Résines thermostables**

Ce sont des polymères présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées (>200°C) appliquées de façon continue. Cette propriété est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000h sans perdre la moitié de ses caractéristiques mécaniques. [1]

### c) **Les charges**

#### ❖ **Charges renforçantes**

L'objet de l'incorporation de charges renforçantes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en

- Charges sphériques
- Charges non sphériques

#### ❖ **Charges non renforçantes**

Les charges non renforçantes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

Parmi ces classes on trouve :

- Charges de faible coût ;
- Charges ignifugeantes ;
- Charges conductrices et antistatiques ;

### d) **Les additifs**

Les additifs se trouvent en faible quantité et interviennent comme :

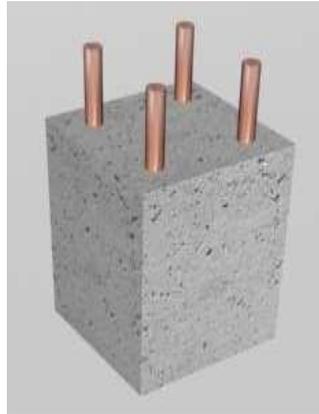
- Lubrifiants et agents de démoulage ;
- Pigments et colorants ;
- Agents anti-retrait ;

## Quelques matériaux composites et leurs classification

Le béton : est un matériau bon marché. Son module de Young en compression est voisin de 40 GPa, ce qui est très correct. Par contre, en traction, les valeurs sont jusqu'à dix fois plus faibles. Cela constitue son principal défaut.

L'acier : présente un module de Young en traction 210 GPa. Cependant, il est bien sûr hors de question de construire des bâtiments entièrement en acier : trop cher, trop lourd et incompatible avec de nombreuses contraintes techniques.

L'idée, initiée en 1848 par Louis Lambot, est de tirer parti à la fois du béton et de l'acier. Concrètement, des tiges d'acier sont disposées dans un coffrage (un moule) et le béton frais est versé. Quand celui-ci est sec et solidifié, le coffrage est retiré.



**Figure I.4 béton armé**

On obtient du béton armé, dont le brevet fut déposé en 1892 par François Hennebique. Il bénéficie d'un meilleur module de Young en traction que le béton ordinaire, lorsque l'effort est exercé selon l'axe des tiges. Les tiges en acier constituent le renfort, et le béton est la matrice. Pour que le béton et les tiges d'acier ne glissent pas les uns par rapport aux autres, les tiges ont à leur surface un relief, à la manière d'une vis.

Globalement, les charges renforçant es apportent un gain de solidité au matériau, de manière isotrope (sans direction privilégiée). Ils permettent également de limiter la propagation de fissures dans le matériau.

## Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des constituants ou suivant la nature des composants.

### Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes :

#### Composites à fibres

On appelle composite à fibre, si le renfort se trouve sous forme de fibre (soit fibres continues, soit fibres discontinues, coupées ou courtes).



**Figure I.5.**Fibres de verre courtes.

#### Composites à particules

On appelle composite à particule, lorsque le renfort se trouve sous forme de particule. Au contraire d'une fibre, la particule n'a pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion...etc. mais dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques. Ce type de composite recouvre un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse.



**Figure I.6** Particules (microbilles) de verre.

### Classification suivant la nature de la matrice

Selon la nature de la matrice les matériaux composites sont classés :

#### **I.4.2.1. Composites à matrice organique (résine, charges)**

Il s'agit, de loin, des composites les plus répandus : ce sont en effet les seuls composites ayant, pour beaucoup d'entre eux, des coûts unitaires suffisamment réduits pour pouvoir être produits en grandes séries. Plus précisément, on distingue généralement deux types de CMO :

##### **Les composites à grande diffusion**

Peu coûteux et représentant près de 95% des CMO fabriqués, utilisés pour toutes sortes de pièces faiblement sollicitées.

##### **Les composites à haute performance**

Plus onéreux mais présentant des qualités mécaniques supérieures, notamment employés dans l'aéronautique, le nautisme, les sports et loisirs ou encore la construction industrielle.

#### **I.4.2.2 Composites à matrice métallique**

Alliages légers et ultra légers d'aluminium, de magnésium, de titane) domaine des températures jusqu'à 600°C.



**Figure I.7.**Alliages légers et ultra légers d'aluminium.

### I.4.2.3 Composites à matrice minérale (céramique)

Domaine des températures jusqu'à 1000°C. Ce type de composite (matrice) peut être associé à divers renforts.



-a-



-b-



-c-

**Figure I.9.**a) la tuyère d'un moteur spatial, (b) le disque à aubes d'une turbine, (c) un disque de frein

## Les avantages et les inconvénients des matériaux composites

### Les avantages

#### a) Facilité de mise en forme

Le matériau durcit et prend un aspect de surface définitif alors qu'il est positionné sur le moule. Il est ainsi possible de réaliser en une seule opération des formes qui auraient nécessité plusieurs étapes en utilisant d'autres matériaux (exemple : découpe, formage, soudure, polissage pour des tôles métalliques). La réalisation de pièces par moulage au contact nécessite un matériel d'application peu onéreux. La réalisation des moules pour ce procédé est également simple et permet donc une grande liberté dans la création des formes qui est notamment mise en œuvre dans les applications liées à la carrosserie (voitures, camions, bateaux, ferroviaire, ...).

#### b) Légèreté

Pour des propriétés mécaniques équivalentes, l'utilisation de matériau composite à la place de métaux permet un gain de poids de près de 50 %. Cette propriété est notamment mise à profit dans le secteur automobile.

-

**c) Adaptabilité**

Les caractéristiques mécaniques du composite peuvent être ajustées en jouant globalement sur le taux de fibres mais aussi localement en adaptant la quantité et le positionnement des fibres dans des zones soumises à de plus fortes contraintes mécaniques.

**d) Résistance à la corrosion ou à l'oxydation**

À cause de leur composition chimique à base de résine organique, les composites sont peu sensibles à la corrosion et sont très résistants aux attaques chimiques. Cette caractéristique leur donne un avantage important par rapport aux métaux pour la réalisation de réservoirs et d'équipements destinés à un usage extérieur ou en zone humide.

**e) Isolation électrique et thermique**

Le bon niveau d'isolation que procurent les matériaux composites pourrait conduire à une utilisation plus importante dans le bâtiment. Toutefois, leur emploi massif est freiné à cause de coûts élevés par rapport aux matériaux de construction traditionnels.

-

**Les inconvénients**

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

**a) Le Coût**

Les matériaux composites hauts performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent, à quelques exceptions comme les équipements de sports où la performance prime également sur le coût.

**b) Conception et analyse**

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels. Elles nécessitent de nouvelles approches, généralement plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures. L'hétérogénéité impose l'analyse selon au moins deux points de vue. La micromécanique examine l'interaction des constituants à

l'échelle microscopique. La macro-mécanique suppose que le composite est homogène et s'intéresse aux propriétés apparentes du matériau.

Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (les lois de comportement). Ces propriétés sont déterminées selon les directions principales du pli élémentaire (directions parallèle et perpendiculaire à l'orientation des fibres). Pour les stratifiés composites, les rigidités sont déterminées à l'aide de la théorie classique des stratifiés. La rupture des stratifiés composites se produit de plusieurs façons très complexes. Il est donc difficile d'établir une théorie de résistance qui tienne compte de tous les modes de rupture et de leurs interactions. Par conséquent, la détermination des résistances est plus compliquée et nécessite des vérifications expérimentales. De plus, la résistance d'un stratifié peut être influencée par les contraintes inter laminaires au voisinage des bords libres. La séquence d'empilement du stratifié doit être soigneusement déterminée afin de minimiser ces contraintes.

### **c) Assemblage**

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de concentration telle que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférés par un joint. Le trou est donc souvent renforcé par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée. De tels renforcements entraînent du poids supplémentaire pour la structure. Le problème d'assemblage est donc critique pour le succès de l'emploi des matériaux composites.

### **d) Tolérance aux dommages**

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages. Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, par exemple l'impact, soit en service ou pendant la maintenance, est inévitable. En Règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement. Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue

considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des structures sont le programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages

### **Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons définie qu'est-ce que un matériau composite, Ce type de matériaux consiste à associer plusieurs matériaux de propriétés différentes, dites phases. Une phase matrice, généralement continue et les autres dites renforts sont habituellement dures de forme différente, et nous avons aussi définie leurs constituants et leurs classification suivant la forme et la nature, comme des autres matériaux le matériau composite à des avantages et des inconvénients.

*Chapitre II :*  
**Notions d'homogénéisation en élasticité  
linéaire**

## II. Notions d'homogénéisation en élasticité linéaire

Ce chapitre propose une revue bibliographique des connaissances et des travaux portant sur les matériaux composites, en particulier ceux à particules de type inclusions circulaires ou sphériques. Nous nous intéressons à la modélisation de leur comportement élastique linéaire mécanique dans le domaine de l'élasticité.

### Introduction

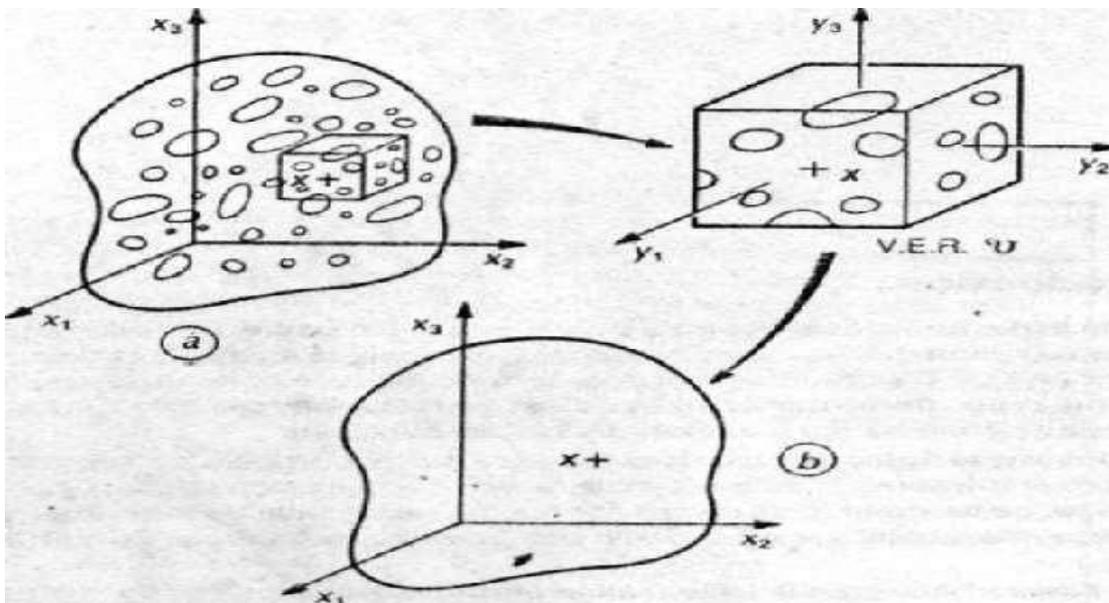
Le comportement de matériaux hétérogènes est souvent décrit par la notion de volume élémentaire représentatif (VER). En effet, il permet de définir la structure macroscopique à l'aide d'un échantillon beaucoup plus petit (qui est encore assez grand pour être constitutivement valide). Avant de répondre à la question de la taille du VER qui sera considérée dans notre étude, il convient bien de définir la notion de VER et de résumer les différentes techniques de la littérature visant à identifier sa taille. La question de l'existence du volume élémentaire représentatif pour les matériaux poreux, tels que le béton, est un sujet de recherche actuel (Gitman et *al.*, 2007 ; Nguyen et *al.*, 2010)

### Le concept du Volume Élémentaire Représentatif (VER)

Dans la réalité, il est illusoire de vouloir connaître la densité de probabilité d'un champ (contrainte, masse volumique, déformation, etc.) en chaque point  $x$  de la structure. L'évolution spatiale de cette dernière traduit l'ordre régnant dans le matériau et cette densité de probabilité est considéré comme définie par la loi conjointe de sa variable aléatoire sur  $n$  points. On parle ainsi d'une description à **1,2,...,n** points. Un autre point de vue consiste à apprécier loi de probabilité au point  $x$  par ses divers moments probabilistes : moment d'ordre 1 ou espérance, moments d'ordre 2 centré ou variance, etc. suivant le degré de connaissance de ces moments (**1, 2,3,..,n**) on parle de degré d'homogénéité du matériau. On se contente en général du degré 1 qui est celui relatif à la moyenne ou à l'espérance mathématique qui introduit la notion classique d'homogénéité du matériau composite, ou du matériau statistiquement homogène. Cette notion d'homogénéité est liée à la possibilité de définir dans le matériau un volume élémentaire représentatif (V. E. R.) sur lequel moyenne spatiale du champ considéré coïncide avec la moyenne probabilité du même champ au point  $x$ .  $x$  est un point particulier de VER., en générale le centre géométrique, et ce volume élémentaire représentatif est indépendant du point  $x$  : le V.E.R. est une sorte de masque que l'on peut

poser en 'importe quel point du matériau. Cette notion d'homogénéité fait donc appel à la notion générale d'ergodicité qui consiste à remplacer les moyennes probabilistes par les moyennes spatiales (ou autre suivant la théorie) sur le V.E.R. le lien entre les milieux aléatoires et les milieux périodiques (milieu totalement ordonné dans lesquels le V.E.R. est la période) à été réalisé par Kroner en 1980.

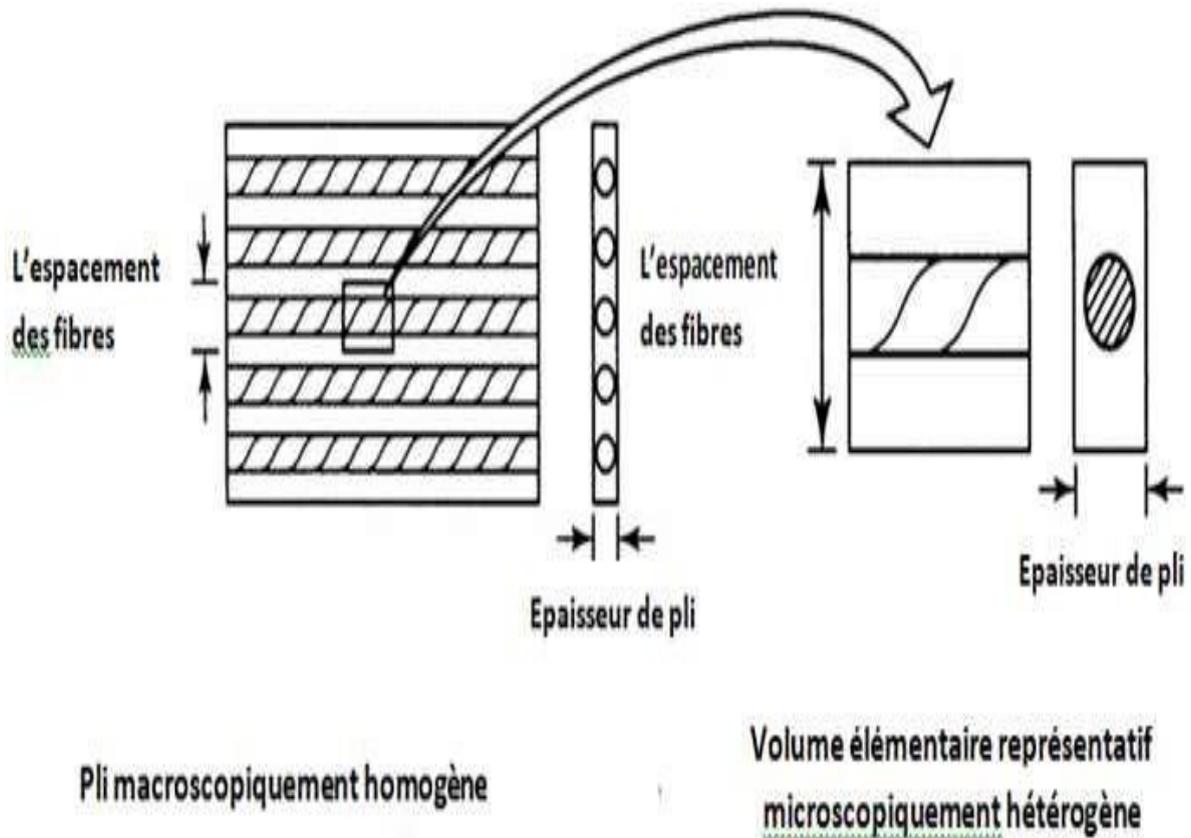
Le volume élémentaire représentatif (V.E.R.) joue pour les matériaux hétérogènes le rôle classique de l'élément de volume de la mécanique des milieux continus. Afin de traduire la notion d'homogénéité d'une grandeur ou de la valeur efficace de cette grandeur ; on distingue classiquement deux échelle :



L'échelle macroscopique (notée  $x$ ) qui est un point particulier du V.E.R.

**L'échelle microscopique (notée  $y$ ) qui décrit.**

**Figure II.1** Milieu hétérogène (a).et milieu macroscopiquement (b) reliés V.E.R.



**Figure II.2** volume élémentaire représentatif

Le milieu composite est relié au milieu homogène ou macroscopiquement homogène (Figure 2-3) par le choix ou la modélisation du V.E.R. qui définit en premier lieu les différentes théories de l'homogénéisation. Il est important de souligner que le V.E.R. ne présente aucun caractère aléatoire et n'est pas nécessairement un prélèvement du milieu composite. Les modèles de V.E.R. les plus couramment rencontrés sont :

Des assemblages de sphères ou de cylindre à base hexagonale ou circulaire qui respectent les pourcentage volumique de chaque phase.

Des milieux infinis qui sont intéressants pour les faibles concentrations de particules et sont connus sous le nom de modèles auto-cohérents (self-consistent).

Des cellules ou périodes de base dans le cas de milieux à structure périodique (stratifiés, tissus, etc.).

Les milieux périodiques méritent une attention particulière, non seulement à cause de leur application en construction (milieux à haute performance) mais aussi à cause des méthodes mises en œuvre pour les étudier. En effet, lorsque les développements possèdent un caractère très rigoureux, même s'ils n'apportent pas de résultats nouveaux, ils sont très efficaces dans la justification des diverses approximations rencontrées.

La notion générale d'ergodicité va se traduire sur le V.E.R., pour les contraintes et les déformations, par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} E[\sigma_{ij}(x)] = \overline{\sigma_{ij}}(x) \\ E[\varepsilon_{ij}(x)] = \overline{\varepsilon_{ij}}(x) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Dans lesquelles les moyennes  $\overline{\sigma_{ij}}$  et  $\overline{\varepsilon_{ij}}$  sont définies

$$\text{par : } \begin{cases} \overline{\sigma_{ij}}(x) = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\underline{x}, y) dy & \text{: contraintes macroscopiques} \\ \overline{\varepsilon_{ij}}(x) = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\underline{x}, y) dy & \text{: déformations macroscopiques} \end{cases}$$

Avec  $V$  volume du V.E.R. et  $dy = dy_1 dy_2 dy_3$ , de l'élément de volume correspondant.

## Rappels de la théorie d'élasticité et la micromécanique

### Lois de comportement

On s'intéresse à un matériau élastique linéaire hétérogène. Soit  $V$  un VER, sollicité en conditions homogènes sur son contour  $\Gamma$ , d'un milieu hétérogène dont tous les constituants ont un comportement élastique linéaire.

Généralement, dans un matériau élastique linéaire hétérogène, la loi de comportement s'écrit par analogie avec la loi locale sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{c} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} = \underline{s} \underline{\sigma} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec  $c$  et  $s$  le module d'élasticité (raideur) et la complaisance (souplesse) respectivement. A l'échelle de la microstructure ou macroscopique, l'équation (II.2) peut s'écrire directement sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\Sigma} = \underline{E} \underline{E} \\ \underline{E} = \underline{E} \underline{\Sigma} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où  $\underline{\Sigma}$  et  $\underline{E}$  sont la contrainte et la déformation macroscopiques. L'objectif de l'homogénéisation est de déterminer, encadrer ou estimer ces deux modules macroscopiques.

Les opérations de moyenne sur les grandeurs microscopiques, permettent d'établir une relation entre les déformations et les contraintes à l'échelle microscopique et leurs homologues à l'échelle macroscopique par les expressions suivantes :

$$\underline{\sigma} = \underline{c} \underline{\varepsilon} \quad (\text{II.4})$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{s} \underline{\sigma} \quad (\text{II.5})$$

Où  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'opérateur de moyenne

Les conditions aux limites imposées sur un VER admettent une solution unique qui dépend du chargement macroscopique  $E$  imposé. Il existe donc un champ de tenseur unique dit de concentration permettant d'exprimer une liaison entre les tenseurs des contraintes et des déformations dans les deux échelles Macro et Micro. Les champs  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont définis respectivement en fonction de  $E$  et  $\Sigma$  par :

Déformation homogène au contour :

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon \rangle \quad (II.6)$$

Contrainte homogène au contour :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle \quad (II.7)$$

Où  $A$  et  $B$  sont simplement des tenseurs de quatrième ordre, dits tenseurs de localisation ou de concentration de déformation respectivement de contrainte. Ils dépendent en fait non seulement de la position  $x$ , mais aussi de tout un ensemble de paramètres géométriques et mécaniques du milieu. La moyenne de ces tenseurs est un tenseur identité d'ordre quatre (condition de cohérence) ; de plus ils sont symétriques:

$$(II.8)$$

En utilisant la loi de comportement (1.1) et la relation (I.6), on obtient :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle - \langle \sigma \rangle \quad (II.9)$$

Macroscopiquement, cette relation devient :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle \quad (II.10)$$

Si on compare ce résultat avec l'équation (I.2), on obtient l'expression du tenseur des complaisances homogénéisées macroscopiquement sous la forme :

$$(\_) (\_) \tag{II.11}$$

En déformations homogènes au contour et de manière analogue, on obtient l'expression du tenseur des modules homogénéisés sous la forme :

$$(\_) (\_) \tag{II, 12}$$

On note bien à partir des deux équations I.10 et I.11 que la loi des mélanges (modèle de Voigt et Reuss) qui stipule que les propriétés homogénéisés d'un mélange considérées comme les propriétés de chaque phase pondérées par leurs fractions volumiques, n'a aucun sens sauf si les tenseurs de localisation  $A$  et  $B$  se réduisent à l'identité.

### Problème de l'élasticité linéaire macroscopique

On définit la relation qui relie le tenseur de déformation macroscopique  $E$  et le tenseur de contrainte macroscopique  $\Sigma$  sous la forme matricielle suivante:

$$\Sigma = C : E$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{pmatrix} \tag{II.13}$$

Dans le cas des conditions KUBC (Kinematic uniform boundary condition): le déplacement  $\underline{u}$  est imposé sur les noeuds de la surface extérieure. Le déplacement  $\underline{u}$  est s'écrit à partir du tenseur  $E$  comme suit :

$$\begin{cases} \underline{u} = E \cdot \underline{x} & \forall \underline{x} \in \partial V \\ E = \frac{1}{V} \int \epsilon(\underline{x}) dV \end{cases}$$

Avec  $E(\underline{x})$  est le tenseur de déformation locale.

Dans le cas des conditions SUBC (Static uniform boundary condition) : on applique sur la surface extérieure du volume  $V$  un effort surfacique  $T = \sigma \cdot \underline{n}$  qui s'écrit à partir du tenseur  $\Sigma$  comme suit :

$$\begin{cases} \sigma \cdot \underline{n} = \Sigma \cdot \underline{n} & \forall \underline{x} \in \partial V \\ \Sigma = \frac{1}{V} \int \sigma(\underline{x}) dV \end{cases}$$

avec  $\sigma(\underline{x})$  est le tenseur de contrainte locale.

Dans le cas des PBC (Periodic boundary condition) : le déplacement  $\underline{u}$  imposé sur les noeuds de la surface extérieure  $\partial V$  est périodique. Il s'écrit en fonction du tenseur de déformation homogénéisé  $E$  et d'une fluctuation périodique  $\underline{v}$  comme suit :

$$\begin{cases} \underline{u} = E \cdot \underline{x} + \underline{v} & \forall \underline{x} \in \partial V \\ E = \frac{1}{V} \int \epsilon(\underline{x}) dV \end{cases}$$

La fluctuation est périodique car elle prend la même valeur en deux points homologues de facettes ou droites opposées.

### **Les champs de contraintes-déformations micro-macro échelle**

La plupart des modèles micromécaniques sont basés sur l'hypothèse ou les échelles de longueur dans un matériau hétérogène sont parfaitement séparées. Ceci est interprété comme signifiant que pour chaque paire d'échelles micro-macro, les fluctuations des contributions aux champs (domaines) à l'échelle de longueur inférieure influencent sur le comportement à l'échelle de longueur grande que par leurs moyennes de volume. D'autre part, les gradients des champs, ainsi que des gradients de composition à l'échelle de longueur grande ne sont pas significatifs à l'échelle de longueur inférieure, où ces domaines de semblent être localement constante et peuvent être décrits en termes d'uniforme "appliqué domaines de» ou «domaines de loin".

## Principes et représentation du milieu hétérogène

Pour calculer le comportement apparent ou/et effectif, nous procédons généralement en étapes principales : la représentation du *VER*, la localisation et enfin l'étape d'homogénéisation. Afin de construire des modèles de comportement prédictifs, des recherches ont été entreprises pour prendre en compte l'hétérogénéité de la matière à l'échelle microscopique dans la modélisation de son comportement macroscopique. La modélisation par changement d'échelles consiste à remplacer un milieu homogène équivalent (MHE) à un milieu hétérogène. Cette modélisation permet de :

- Simplifier la représentation du milieu hétérogène ;
- Estimer le comportement de matériaux hétérogènes à élaborer ;
- Améliorer le caractère prédictif des lois de comportement.

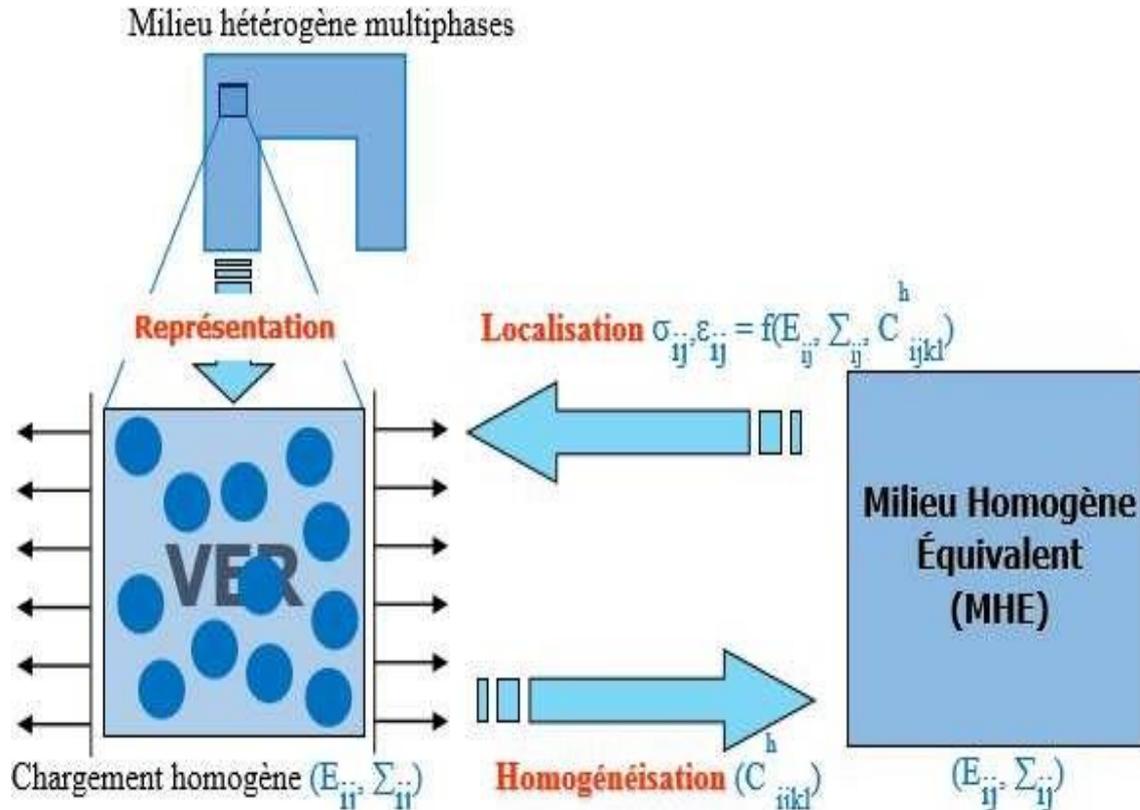


Figure II.3 Etapes d'homogénéisation

L'homogénéisation a pour but de remplacer un matériau ou une structure hétérogène par un milieu homogène de comportement équivalent (figure II.3). Pour atteindre cet objectif, la plupart des modélisations micromécaniques suivent trois étapes :

L'étape de la représentation : définition des phases, description de leur répartition spatiale et de leur comportement mécanique

l'étape de la localisation : modélisation mécanique et détermination des relations entre champs locaux et grandeurs macroscopiques

L'étape d'homogénéisation : opération de moyenne et détermination du comportement effectif.

Nous rappelons ci-dessous les détails de chacune de ces étapes d'homogénéisation. On considère un chargement correspondant à des conditions aux limites homogènes. La surface extérieure  $\partial V$  du *VER* peut être soumise à un déplacement, tel que :

$$(II.18)$$

qui générerait un champ de déformation uniforme dans tout le volume  $V$ . Les conditions aux limites de force imposée, compatibles avec un champ de contrainte uniforme sont définies telles que :

$$\Sigma \quad (II.19)$$

La démarche de modélisation par changement d'échelles se décompose classiquement en trois étapes :

## Représentation

Dans l'étape de représentation, le nombre de phases contenues dans le *VER* est très important. On doit déterminer la nature des paramètres permettant la description des phases correspondantes, ensuite, caractériser le comportement mécanique de chaque phase et enfin décrire la géométrie et la proportion de chaque phase. Pour une détermination exacte du comportement effectif du matériau composite, il est nécessaire de connaître de manière précise la répartition spatiale des phases. La fraction volumique de renforts est le paramètre commun à tous les modèles. Le comportement microscopique élastique de chaque phase « i » est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \underline{\underline{C}}_i : \underline{\underline{\varepsilon}}_i$$

Et

(II.20)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_i = \underline{\underline{S}}_i : \underline{\underline{\sigma}}_i$$

où :  $\underline{\underline{\sigma}}_i$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$  représentent respectivement les contraintes et déformations locales de la phase « i »

$\underline{\underline{C}}_i$  et  $\underline{\underline{S}}_i$  représentent respectivement le tenseur de rigidité et le tenseur de souplesse de la phase « i ».

### I.4.2 Localisation

On considère dans cette étape le *VER* déterminé dans l'étape de représentation. Il s'agit de relier les grandeurs mécaniques microscopiques locales et macroscopiques. C'est-à-dire, on recherche des relations entre déformations moyennes locales de chaque phase  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$  et déformations macroscopiques  $\underline{\underline{E}}$  imposées, ou contraintes moyennes locales de chaque phase  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  et contraintes macroscopiques  $\underline{\underline{\Sigma}}$  imposées. Les grandeurs moyennes sont définies par :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \underline{\sigma} dV$$

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \underline{\varepsilon} dV \text{ et} \tag{II.21}$$

Les relations de localisation des déformations et de concentration des contraintes à partir des quantités moyennes sont :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_i = \underline{\underline{B}}_i : \underline{\underline{\Sigma}} \tag{II.22}$$

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_i = \underline{\underline{A}}_i : \underline{\underline{E}}$$

où  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{B}}$  désignent respectivement les tenseurs de localisation des déformations et de concentration des contraintes.

### II.4.3 Homogénéisation

Cette étape consiste à déterminer le comportement équivalent du matériau hétérogène. Les propriétés effectives de ce matériau relient le champ de contrainte moyenne  $\langle \underline{\sigma} \rangle$  au champ de déformation moyenne  $\langle \underline{\varepsilon} \rangle$ , calculés dans un *VER*

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \langle \underline{\sigma} \rangle_i$$

et

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \langle \underline{\varepsilon} \rangle_i \tag{II.23}$$

A partir des conditions aux limites imposées (équations (I.17) et (I.18)), il est possible de démontrer que les contraintes et les déformations locales doivent vérifier les relations :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad \text{et} \quad \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \quad (\text{II.24})$$

## Présentation de quelques modèles analytiques de changement d'échelles

Nous proposons dans cette partie une présentation générale des différentes approches et méthodes d'homogénéisation.

### Homogénéisation analytique

Les méthodes d'homogénéisation analytiques sont classées en deux groupes : les bornes et les modèles. Les démonstrations mathématiques de chaque approche, mécanique ou thermique, sont présentées dans le livre intitulé *Micromécaniques of heterogeneous materials*, par Buryachenko (2006). Pour estimer les propriétés mécaniques effectives d'un matériau hétérogène, il existe beaucoup de méthodes d'homogénéisation dans la bibliographie. On propose ici de présenter les expressions de quelques bornes et modèles analytiques utilisés pour la modélisation analytique. L'étude se limite au cas d'un matériau biphasé renforcé par des inclusions de comportement linéaire discontinu et de fraction volumique  $p$ , dispersées dans une matrice homogène, linéaire et continue.

On considère un milieu élastique, composé d'une matrice isotrope de module de compression  $k_m$ , de module de cisaillement  $\mu_m$ , de coefficient de poisson  $\nu_m$  et d'un module de Young  $E_m$  renforcé par une distribution aléatoire des inclusions de modules  $k_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\nu_i$  et  $E_i$ . Nous donnons les expressions des bornes de différents ordres et les modèles disponibles dans la littérature. Nous avons présenté les méthodes suivantes : les bornes d'ordre 0, les bornes d'ordre 1 de Voigt (1889) et Reuss (1929) et les bornes d'ordre 2 de Hashin and Shtrikman (1963) (HS) ainsi que la solution diluée présentée dans Aboudi (1991), le modèle Auto-cohérent de Mori and Tanaka (1973) (MT) et le modèle Auto-cohérent généralisé de Christensen and Lo (1979) (GSC).

Le tableau II.1 regroupe l'expression de quelques approches analytiques utilisées pour l'estimation de coefficient de compression  $k$ . Dans le cas de coefficient de cisaillement  $\mu$ , les expressions mathématiques sont présentées respectivement sur le tableau II.2 La description générale de chaque approche et les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont données dans la partie Annexe de cette thèse. On rappelle que dans le cas d'un matériau hétérogène avec  $n$ -phase, l'expression des approches citées sont données dans Tucker and Liang (1999), Zaoui (1999) et Bornert et al. (2001).

**Tableau II.1** – Expression mathématique des approches d'homogénéisation analytique pour le coefficient de compression  $k$

	Nom des modèles	Expression mathématique
Bornes	Ordre 0	$\min(k_i, k_m) < k < \max(k_i, k_m)$
	Ordre 1 : Voigt-Reuss (VR)	$k^{Voigt} = pk_i + (1-p)k_m$ $k^{Reuss} = \frac{k_i k_m}{(1-p)k_i + pk_m}$
	Ordre 2 : Hashin-Strikman (HS)	$k^{HS-} = k_m + \frac{p}{1/(k_i - k_m) + 3(1-p)/(3k_m + 4\mu_m)}$ $k^{HS+} = k_i + \frac{1-p}{1/(k_m - k_i) + 3p/(3k_i + 4\mu_i)}$
Modèles	Mori-Tanaka (MT)	$k^{MT} = k_m \left( 1 + \frac{p(k_i - k_m)}{k_m + \alpha(1-p)(k_i - k_m)} \right)$
	Dilué	$k^{SD} = k_m \left( 1 + \frac{p(k_i - k_m)}{k_m + \alpha(k_i - k_m)} \right)$
	Auto-cohérent généralisé (GSC)	$k^{GSC} = k_m + \frac{p(k_i - k_m)}{1 + (1-p) \frac{k_i - k_m}{k_m + \frac{4}{3}\mu_m}}$

**Tableau II.2** – Expression mathématique des approches d'homogénéisation analytique pour le coefficient de cisaillement  $\mu$ .

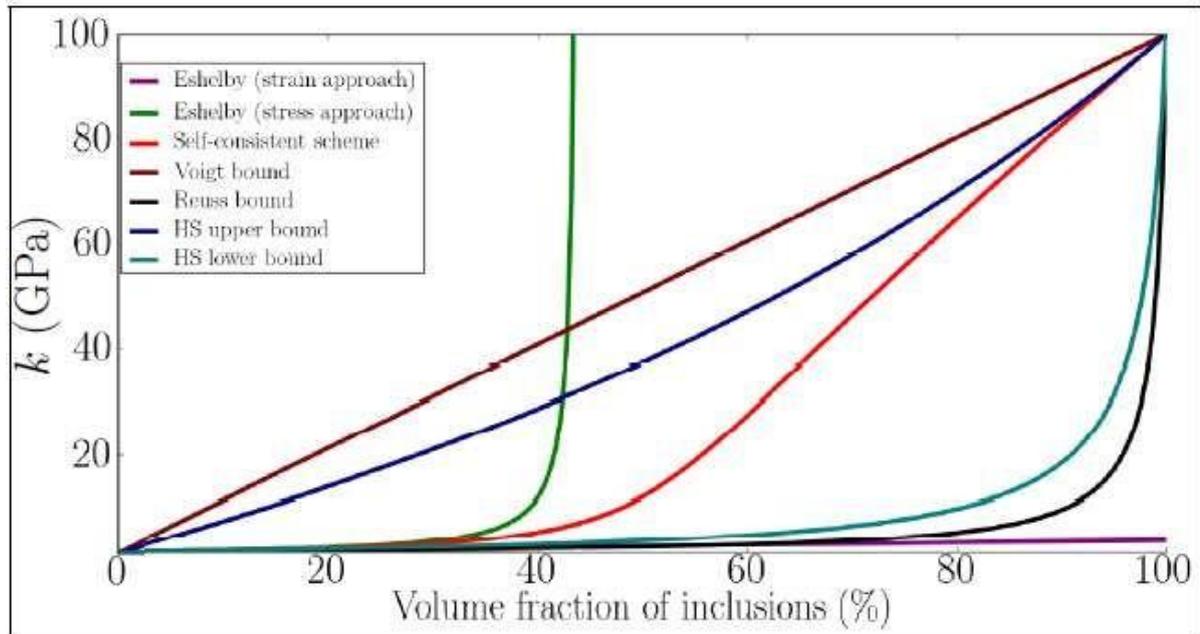
	Nom des modèles	Expression mathématique
Bornes	Ordre 0	$\min(\mu_i, \mu_m) < \mu < \max(\mu_i, \mu_m)$
	Ordre 1 : Voigt-Reuss (VR)	$\mu^{Voigt} = p\mu_i + (1-p)\mu_m$ $\mu^{Reuss} = \frac{\mu_i \mu_m}{(1-p)\mu_i + p\mu_m}$
	Ordre 2 : Hashin-Strikman (HS)	$\mu^{HS-} = \mu_m + \frac{p}{1/(\mu_i - \mu_m) + 6(1-p)(k_m + 2\mu_m)/5\mu_m(3k_m + 4\mu_m)}$ $\mu^{HS+} = \mu_i + \frac{1-p}{1/(\mu_m - \mu_i) + 6p(k_i + 2\mu_i)/5\mu_i(3k_i + 4\mu_i)}$
Modèles	Mori-Tanaka (MT)	$\mu^{MT} = \mu_m \left( 1 + \frac{p(\mu_i - \mu_m)}{\mu_m + \beta(1-p)(\mu_i - \mu_m)} \right)$
	Dilué	$\mu^{SD} = \mu_m \left( 1 + \frac{p(\mu_i - \mu_m)}{\mu_m + \beta(\mu_i - \mu_m)} \right)$
	Auto-cohérent généralisé (GSC)	$A \left( \frac{\mu^{GCS}}{\mu_m} \right)^2 + B \left( \frac{\mu^{GCS}}{\mu_m} \right) + C = 0$

### Comparaison entre les modèles et les bornes analytiques

Dans cette partie, nous comparons les résultats issus des différentes méthodes d'homogénéisations présentées dans le cas de matériaux hétérogènes constitués de deux phases. On présente sur la figure II.4 un exemple de variation de coefficient de compression  $k$ , en fonction de la fraction volumique des inclusions. L'ensemble des calculs obtenus par les différentes approches analytiques ont été déterminés pour un contraste  $c = 100$ . A partir des résultats, on remarque que les bornes d'ordre 0 et 1 n'estiment pas les propriétés mais encadrent les modules élastiques.

Pour conclure cette partie concernant les approches d'homogénéisation analytique, on note que le travail de Tucker and Liang (1999) donne une description générale des modèles analytiques utilisés pour le comportement linéaire d'un matériau hétérogène, comme par exemple les bornes de Voigt-Reuss (VR) et les bornes de Hashin-Shtrikman (HS) et les modèles de SC, Eshelby, MT, GSC, etc.

Il faut noter aussi que le choix de tel ou tel modèle dépend des propriétés du milieu et de la morphologie de la microstructure. Comme l'expliquent Gilormini and Bréchet (1998) dans leur travail "Which material for which model ? Which model for which material ?", le choix d'un modèle est gouverné par plusieurs conditions comme par exemple la géométrie du milieu, le contraste entre les propriétés, la fraction volumique, la distribution et l'orientation des inclusions et le comportement de chaque phase.



**Figure II.4** Variation de coefficient de compression  $k$ , en fonction de la fraction volumique des inclusions [4]

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les étapes de l'homogénéisation ainsi que la notion de volume élémentaire représentatif (*VER*). Nous avons cité quelques modèles micromécaniques usuels comme : les bornes de Voigt, Reuss et Hashin-Shtrikman ainsi que l'approche Auto-Cohérente. Ces modèles d'homogénéisation seront ensuite comparés aux résultats de simulation pour prédire les comportements équivalents des matériaux hétérogènes étudiés dans la suite de ce travail.

## *Chapitre III*

### **Génération et maillage de microstructures\_**

### Introduction

Afin de réaliser ces modèles (la borne supérieure de Hashin-Strikman ( $HS^+$ ) et le modèle autocohérent) de microstructures en 3D, dans ce chapitre, on va générer différentes modèles de microstructure du matériau étudié avec différentes fractions volumiques et de différents diamètres. La réalisation de ces microstructures est basée sur la connaissance de leur morphologie et des constituants qu'elles possèdent. Ensuite, justification de maillage de ces modèles avec le logiciel Comsol.

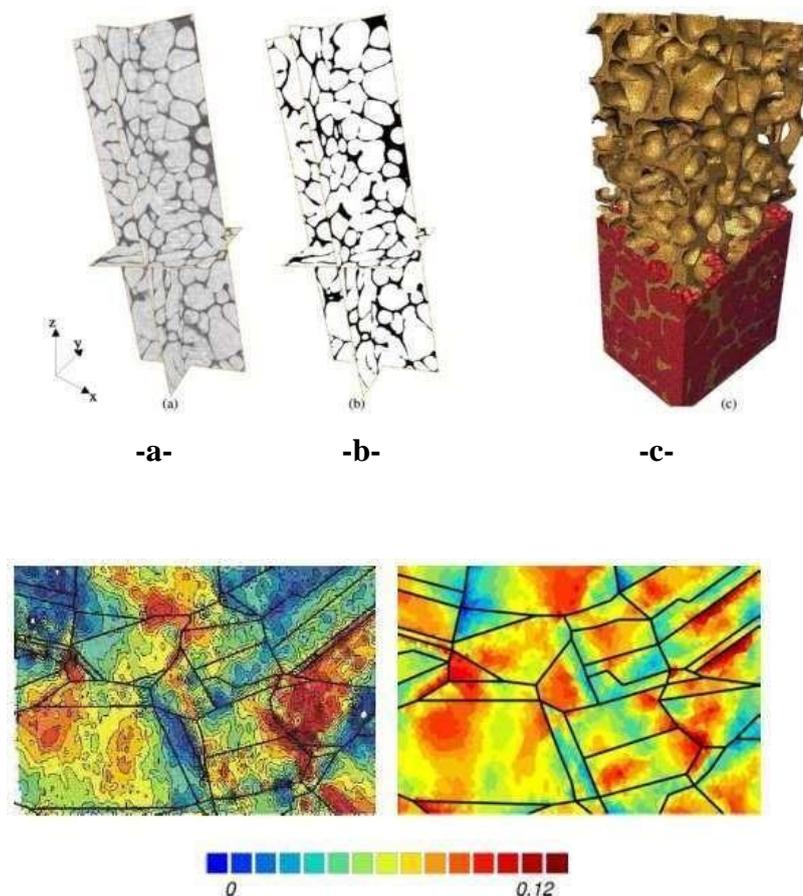
### Modélisation de la microstructure : génération et maillage de microstructures

Dans notre étude, les microstructures 3D ont été générées par le processus aléatoire de Poisson. Ce processus est bien adapté aux microstructures aléatoires et isotropes. Il est la base de la plus part des modèles probabilistes. Ce processus a été utilisé par Kanit et al. (2003) pour la génération des microstructures aléatoires des mosaïques, puis par Jean (2009) pour la génération des microstructures des élastomères renforcés par le noir de carbone. L'intérêt des modèles aléatoires est de permettre facilement la création de nouveaux matériaux virtuels sans passer par les morphologies réelles des microscopes ou de la tomographie.

### Modèles de génération et reconstitution des microstructures

L'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs permet de réaliser des modélisations numériques de plus en plus fines et complexes des structures. Ces progrès profitent également à la modélisation du comportement des matériaux. Ainsi, depuis une vingtaine d'années, se développe l'activité de calcul de microstructure, qui consiste à modéliser explicitement la microstructure des matériaux par des outils numériques (Forest, 2006). Elle permet de représenter différents phénomènes physiques au sein du matériau et d'établir des liens entre la microstructure et les propriétés des matériaux. La modélisation de la microstructure peut être plus ou moins idéalisée (utilisation de schémas booléens, agrégats de polyèdres de Voronoï pour modéliser les polycristaux) ou bien basée sur une image 3D réelle de la microstructure, acquise par microtomographie. La reconstitution à partir d'un tomographe Cette technique est basée sur la reconstruction couche par couche d'un échantillon par polissage et cartographie EBSD (Rey et al., 2006). Toutefois ce procédé présente

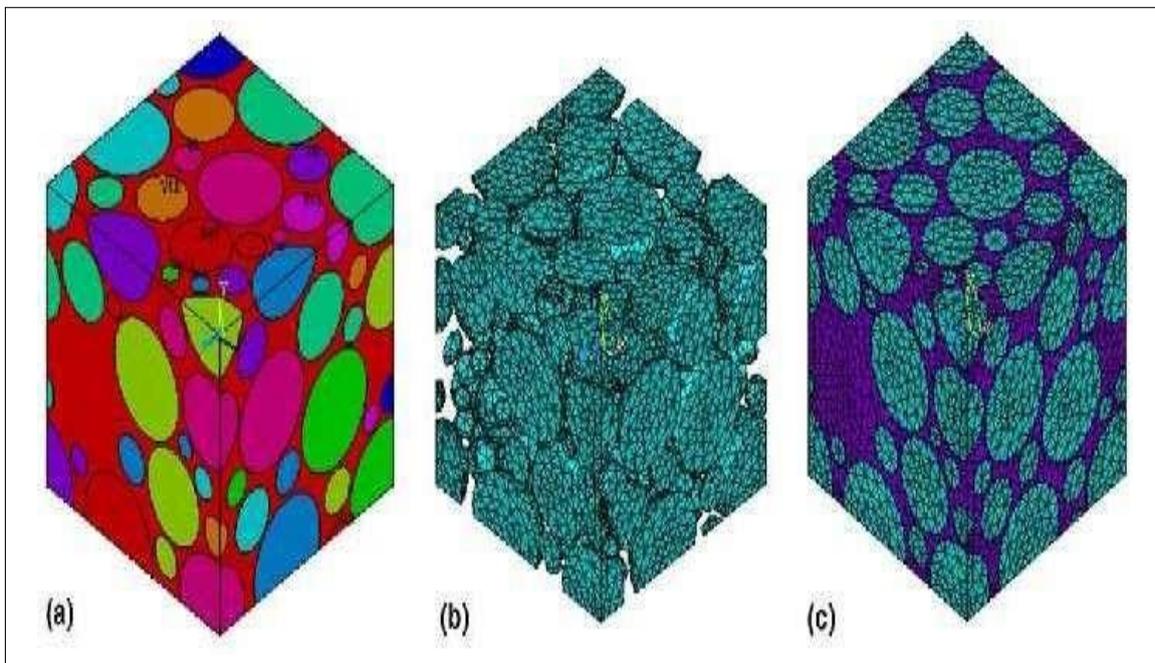
l'inconvénient d'influer sur la structure de l'échantillon. Sur ce point des progrès sont donc espérés avec l'arrivée des techniques d'érosion ionique des échantillons in situ, bien qu'elles se limitent à de petites zones avec de petites dimensions (Lee et al., 2007). D'une part cette technique n'a permis de décrire qu'une couche de grains, d'autre part l'échantillon étant analysé post-mortem, la microstructure décrite est celle après déformation. Malgré ces deux approximations, Musienko ([Musienko et al., 2007](#)) ont obtenus un bon accord entre champs expérimentaux et simulés en utilisant un maillage 3D libre, respectant les joints de grains, et suffisamment fin (voir figure III.1). En réalisant le même calcul pour différentes finesses de maillage, il montre que ce paramètre influe sensiblement sur l'impact du choix des conditions aux limites appliquées.



**Figure III-1** Microstructure d'un réfractaire électro-fondu zircone-verre caractérisée par microtomographie ([Madi, 2006](#)). Volume représenté : 350 x 350 x 700  $\mu\text{m}$ , (a) Segmentation du volume pour séparer les phases en présence. (b) Détection de l'isosurface, et triangulation. (c) Maillage obtenu (éléments tétraédriques linéaires, 1 500 000 degrés de liberté). La zircone est ici en rouge, et la phase vitreuse en jaune

### Modèle d'addition séquentielle aléatoire (RSA)

Parmi les algorithmes les plus utilisés pour la génération et pour la simulation des matériaux hétérogènes on trouve aussi, Random Sequential Adsorption (RSA). Celui-ci consiste à générer de façon aléatoire des particules sphériques et identiques d'une manière séquentielle. Parmi les travaux qui se basent sur cet algorithme on trouve par exemple, Segurado and Llorca (2002), Kari et al. (2007a) et Kari et al. (2007b) pour les particules sphériques, puis Pierard et al. (2007) pour le cas des ellipses. La figure II.2 montrent des exemples de microstructures hétérogènes virtuelles générées par les deux algorithmes de la morphologie mathématique : RSA et le Processus de Poisson.



**Figure III.2** – Microstructure générée par RSA : (a) image virtuelle, (b) maillage des particules et (c) maillage total du composite, [Kari et al. \(2007b\)](#).

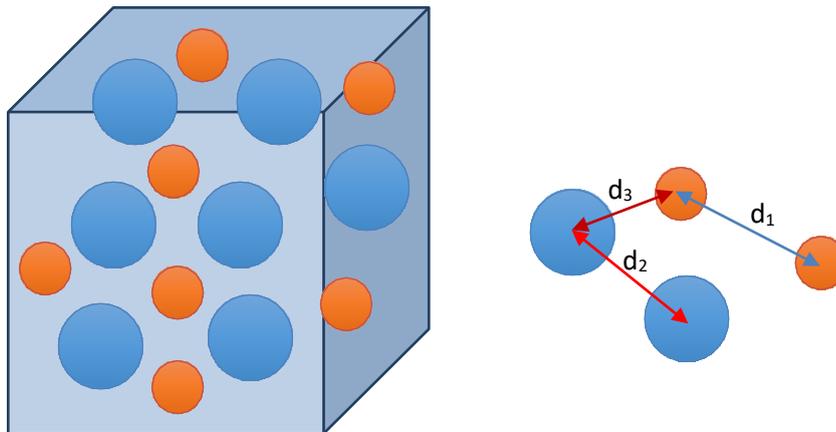
### Modèle de génération par la technique dynamique moléculaire

Cet algorithme part du principe qu'au temps zéro toutes les inclusions sont créées et ont un volume nul. Une position et un vecteur vitesse leurs sont attribués aléatoirement. Les particules sont ensuite mises en mouvement et leur volume augmente à chaque itération jusqu'à atteindre la fraction volumique souhaitée. A chaque itération deux types d'événements sont vérifiés :

- les collisions binaires .
- les collisions entre les particules et les faces de la cellule élémentaire.

Dans le cas de collisions binaires, c'est-à-dire de collisions entre particules, leur vecteur vitesse est mis à jour selon le principe de l'énergie cinétique. Par contre, dans le cas où une particule quitte la cellule à travers une face, elle doit rentrer par la face opposée afin d'assurer les conditions aux limites de périodicité.

### Génération de microstructures aléatoires avec trois phases en 3D



**Figure III.3** Définition de la géométrie et du paramétrage des particules

Les conditions utilisées pour la génération de la microstructure

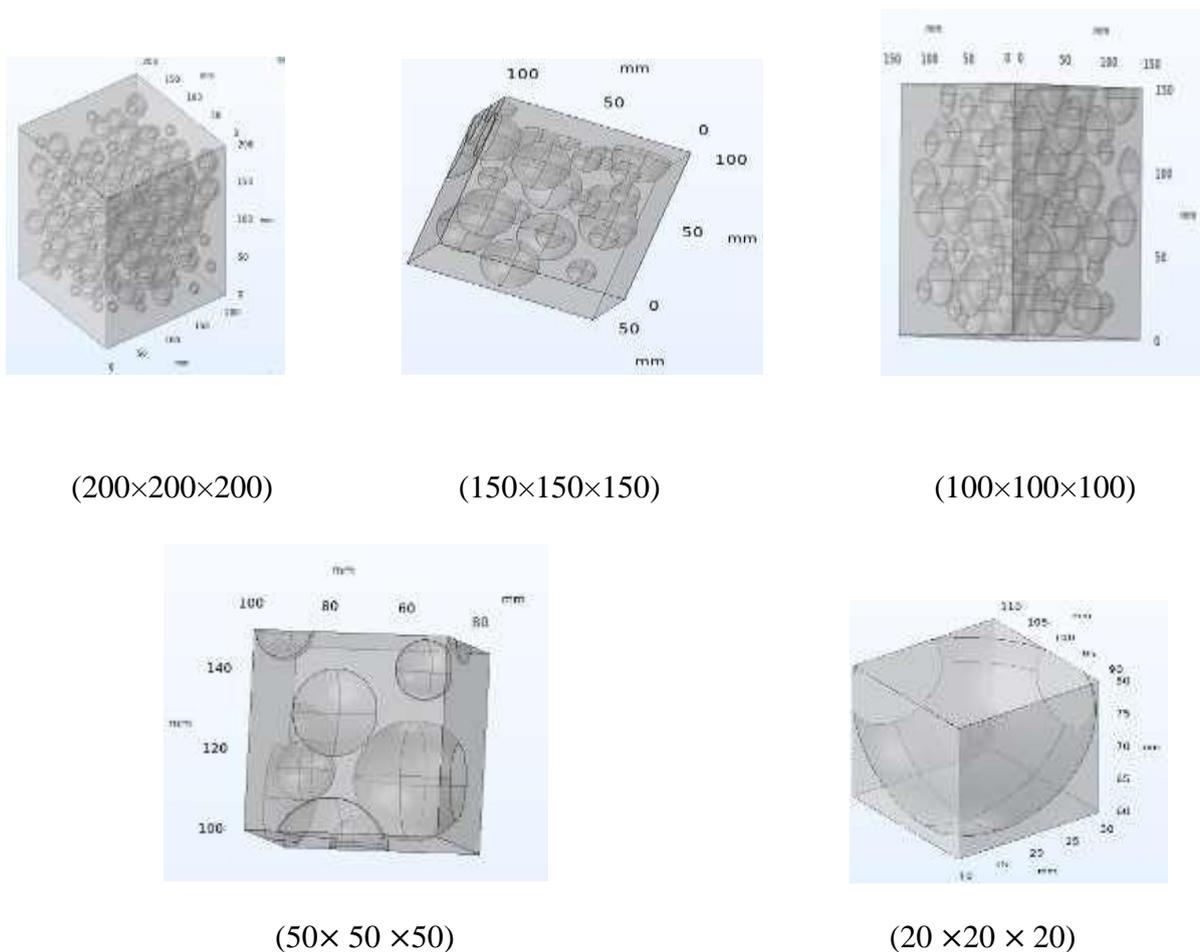
La distance entre les deux petites sphères est supérieure à la distance  $2r_1$  ( $r_1$  est le rayon de la petite sphère). La distance entre les deux grandes sphères est supérieure à la distance  $2r_2$  ( $r_2$  est le rayon de la grande sphère). La distance entre la petite sphère et la grande sphère doit être supérieure à la distance  $(r_1+r_2)$ .

## Matériaux et Méthodes

### Description de la microstructure

La microstructure utilisée dans ce travail est un cube constituée de 3 phases, une matrice  $m$ , l'inclusion 1 et l'inclusion 2. Deux fractions volumiques différentes de matrice sont considérées  $P=10\%$ ,  $20\%$ . Les deux phases (inclusion 1 et 2) ont les mêmes fractions volumiques  $P_1= P_2 =10\%$ ,  $20\%$ , le même nombre d'inclusions  $M_1=M_2$ , les diamètres différents  $R_1 < R_2$  et différentes propriétés élastiques

Les Volumes représentatifs pour différents fractions volumiques (10, et 20%) et pour différentes dimensions  $(200 \times 200 \times 200)$ ,  $(150 \times 150 \times 150)$ ,  $(100 \times 100 \times 100)$ ,  $(50 \times 50 \times 50)$ ,  $(20 \times 20 \times 20)$  sont comme suit :



**Figure III.4** Les tailles de volume de la microstructure 3D utilisé pour les fractions volumique 10% et 20%.

### Propriétés élastiques des phases

Les cellules représentent la microstructure d'un matériau poreux à étudier. Chaque phase est caractérisée par ces propriétés mécanique (le module de Young ( $E$ ) et le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) qui seront utilisées dans les simulations numériques. Les propriétés élastiques du matériau étudié sont indiquées dans le Tableau (III.1):

**Tableau III. 1** Propriétés élastiques des composants

<b>Constitution</b>	<b><math>E</math> [MPa]</b>	<b><math>\nu</math></b>
<b>Matrice</b>	<b>10000</b>	<b>0,3</b>
<b>Inclusion 1</b>	<b>100</b>	<b>0,3</b>
<b>Inclusion 2</b>	<b>1</b>	<b>0,3</b>

### Différentes méthodes de maillage

Il existe plusieurs types de maillage pour le cas des microstructures, parmi ces type on cite : le maillage régulier, le maillage adaptatif et le maillage libre :

#### Maillage régulier

Cette méthode a été mise en place par [Lippmann et al. \(1997\)](#). Elle consiste à superposer un maillage régulier sur une image réelle ou virtuelle de la microstructure. Cette méthode a été déjà utilisée par Barbe et al. (2001a) pour une étude élasto- plastique des matériaux hétérogènes, puis par Kanit et al. (2006), Jean (2009) et Oumarou et al. (2012) pour le maillage des images réelles d'un composite obtenues par microscope à transmission.

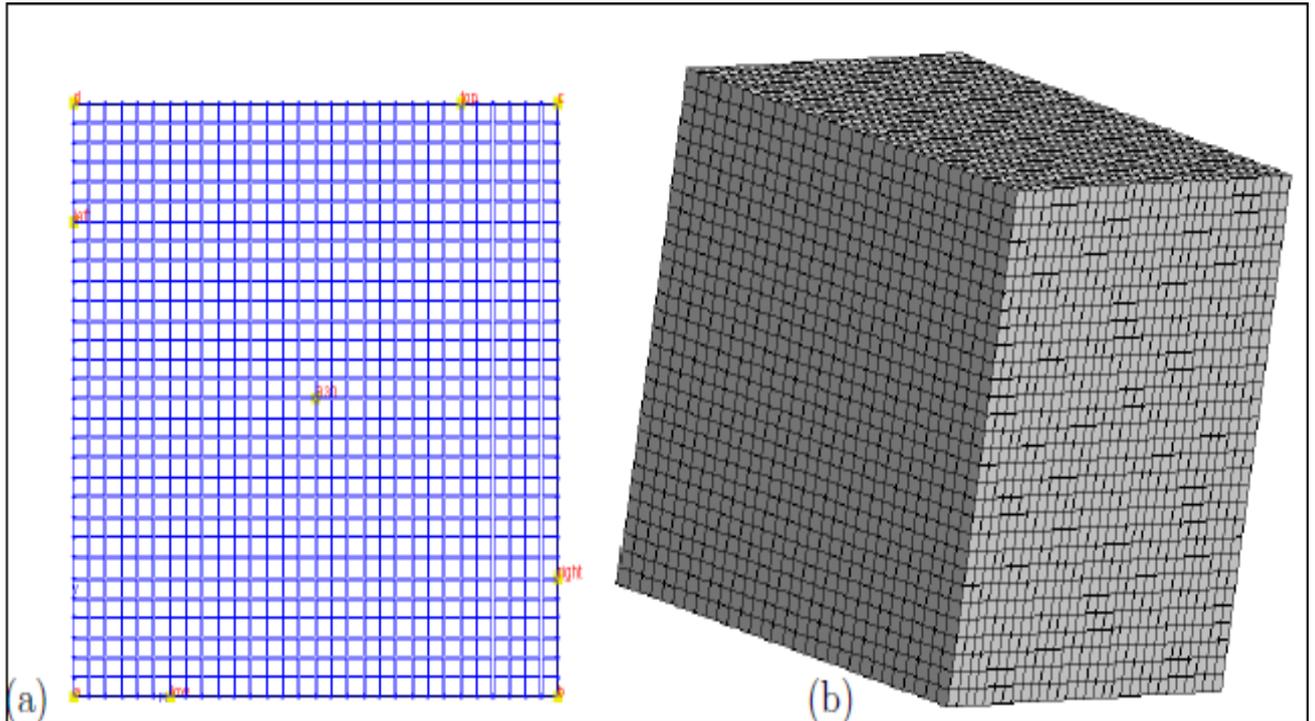


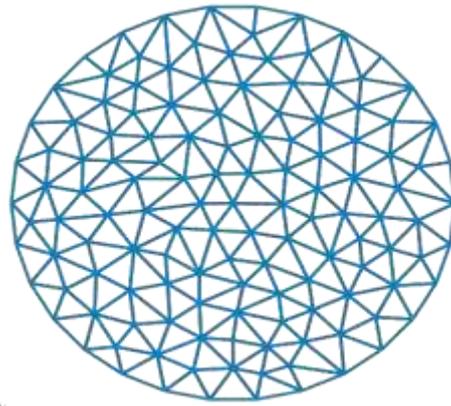
Figure III.5 – Maillage 2D et 3D de la géométrie d'une microstructure.

### Maillage adaptatif

Une autre méthode consiste à utiliser un maillage initial quelconque (libre ou régulier), suffisamment fin, et à déplacer certains nœuds du maillage pour les faire coïncider avec les interfaces. La méthode permet de conserver la topologie des interfaces de la microstructure. (Steinkopff et Sautter, 1995a,b) proposent une méthode d'adaptation du maillage en identifiant les nœuds les plus proches des frontières et en imposant des déplacements de ces nœuds dans les directions normales aux frontières. L'algorithme d'adaptation est détaillé dans la référence (Steinkopff, 1993).

### Maillage libre

un maillage libre est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou aussi, une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définie. L'objet d'un maillage libre est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système et, éventuellement, son environnement (le milieu), dans l'optique de simulation de calculs ou de représentations graphiques.



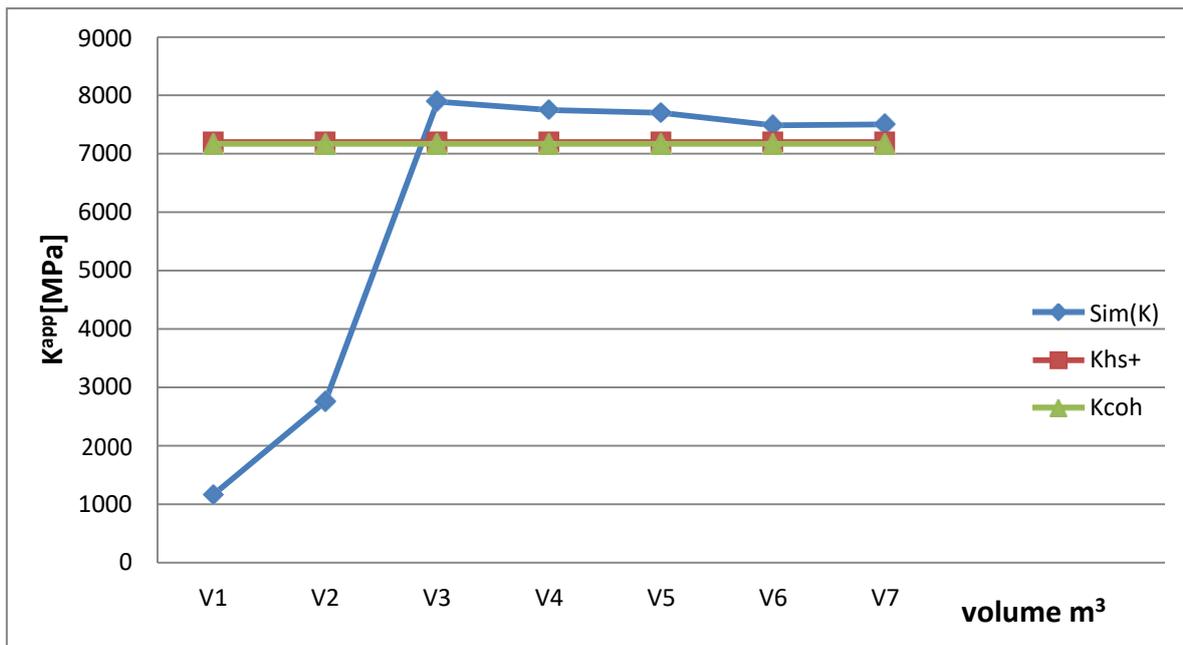
**Figure III.6** Maillage d'un disque par des triangles

## Résultats et discussion

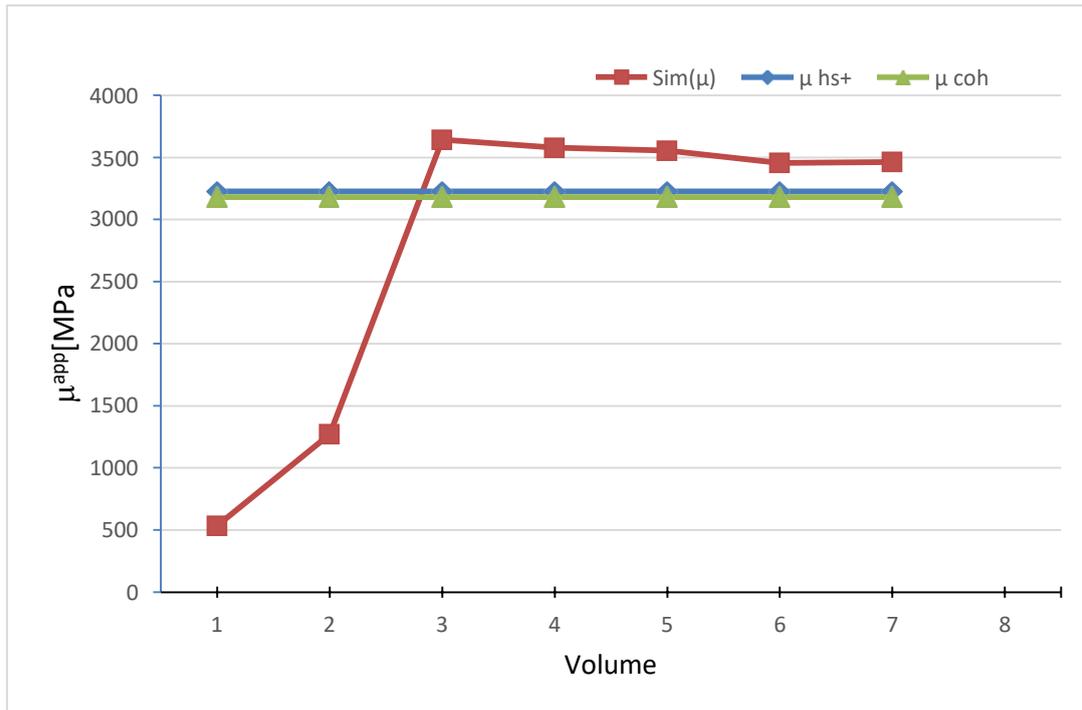
Dans cette partie, et pour la détermination du module de compressibilité et du module de cisaillement de tous les volumes représentatifs du matériau composite étudié, on a utilisé le logiciel de simulation numérique « Comsol multi physique ». Les résultats d'étude pour les deux fractions volumiques sont représentés dans les figures suivantes.

### Fraction volumique 10%

Les graphes suivants représentent les résultats numériques des propriétés élastiques obtenues à partir de notre simulation dans le cas de fraction volumique 10%. Les résultats sont comparé a la borne supérieur Hashin- Shtrikman **hs+** et le modèle auto-cohérent **coh**, déduit analytiquement en utilisant les résultats moyens de tous les volumes étudiés de module de compressibilité  $k$ , et le module de cisaillement  $\mu$ .

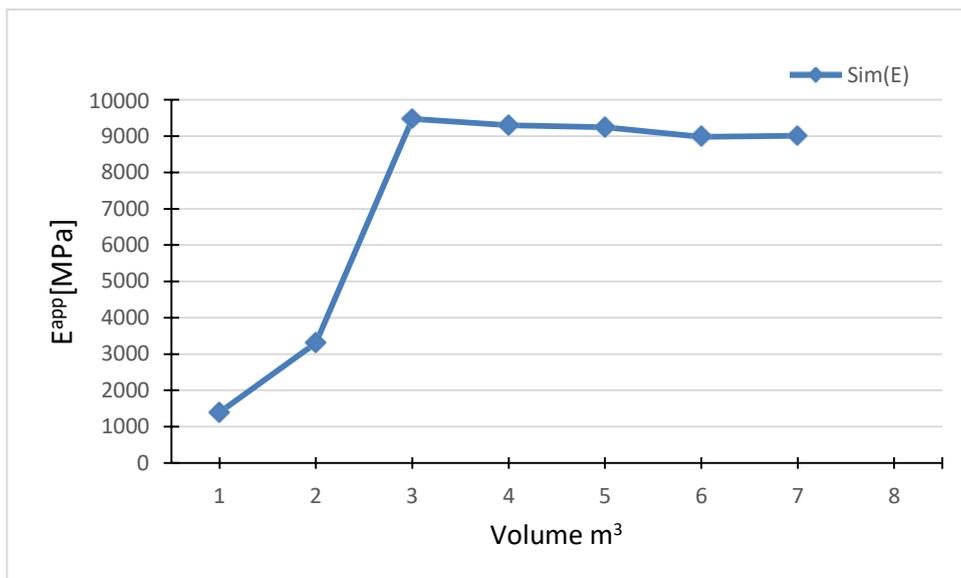


**Figure III.7** Courbes de convergence de module de compressibilité apparent  $k_{app}$  en fonction de la taille du domaine  $V$ . Fr10%



**Figure III.8** Courbes de convergence de module de cisaillement apparent  $\mu^{\text{app}}$  en fonction de la taille du domaine  $V$ . Fr10%

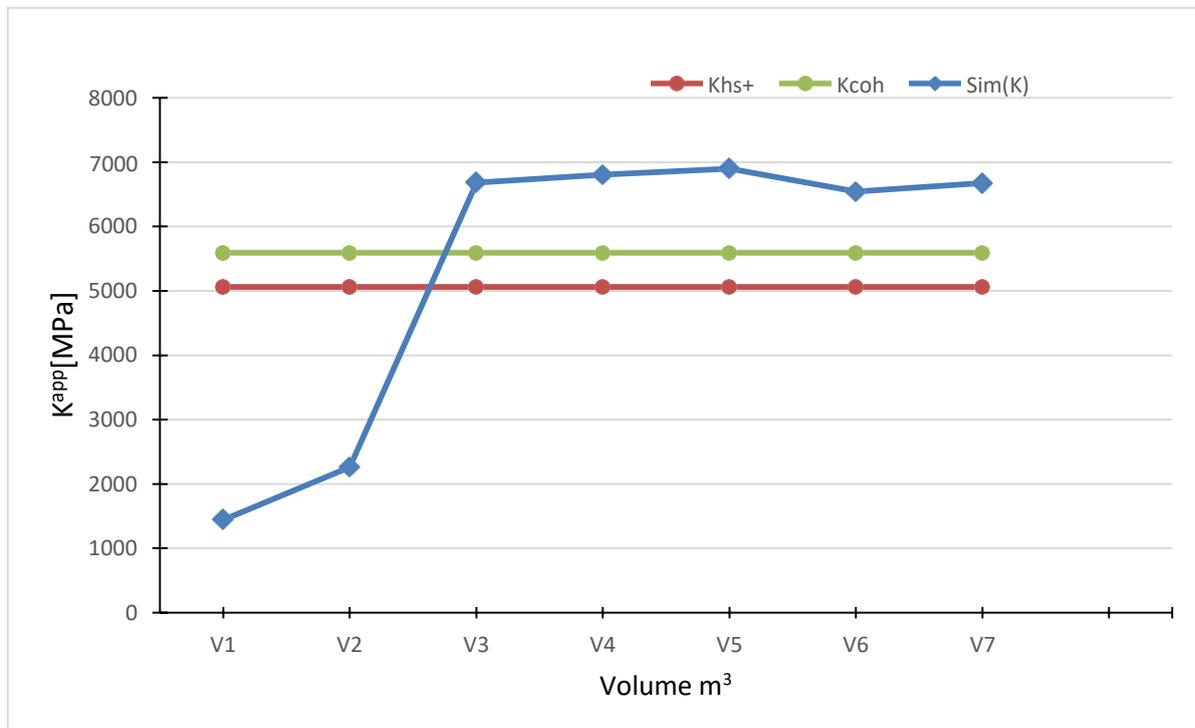
L'étude simulation nous a permis aussi d'obtenir la variance des valeurs de module de Young en fonction de la taille de volume  $v$  les résultats sont présentés dans le graphe de la figure (III.9) :



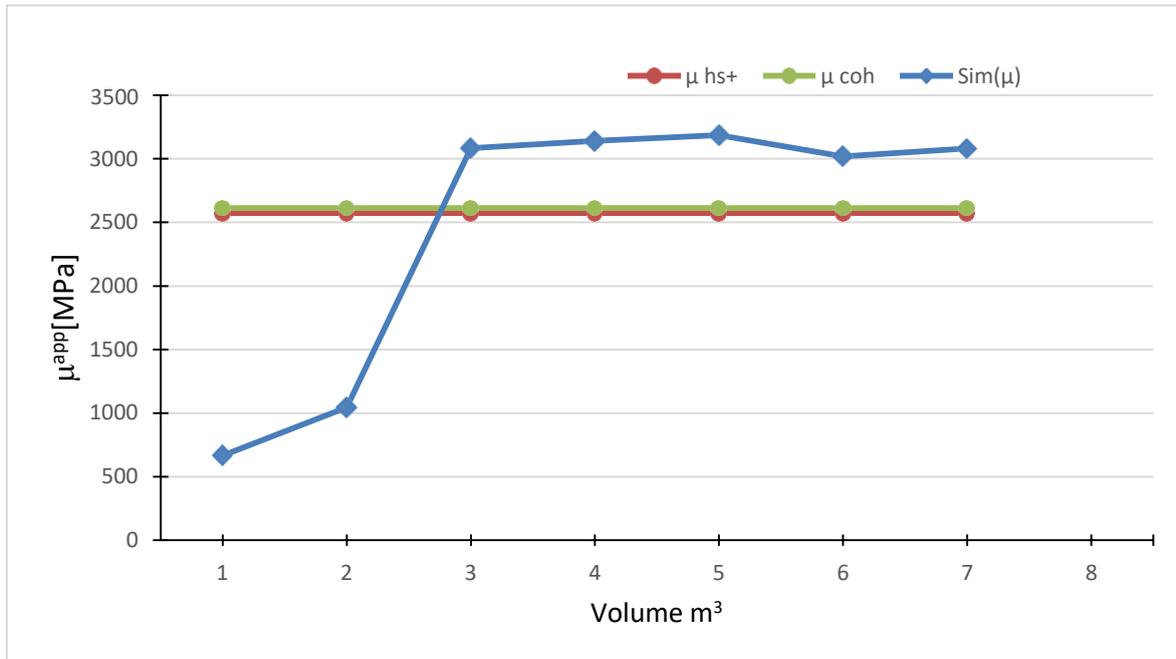
**Figure III.9** Courbes de convergence de module de Young en fonction de la taille du domaine  $v$ . Fr10%

### Fraction volumique 20%

Les graphes des figures III.10 représentent les résultats numériques des propriétés élastiques obtenues à partir de notre simulation dans le cas de fraction volumique **20%**. Les résultats sont comparé a la borne supérieur Hashin- Shtrikman **hs+** et le modèle auto-cohérent **coh**, déduit analytiquement en utilisant les résultats moyens de tous les volumes étudiés de module de compressibilité  $k$ , et le module de cisaillement  $\mu$

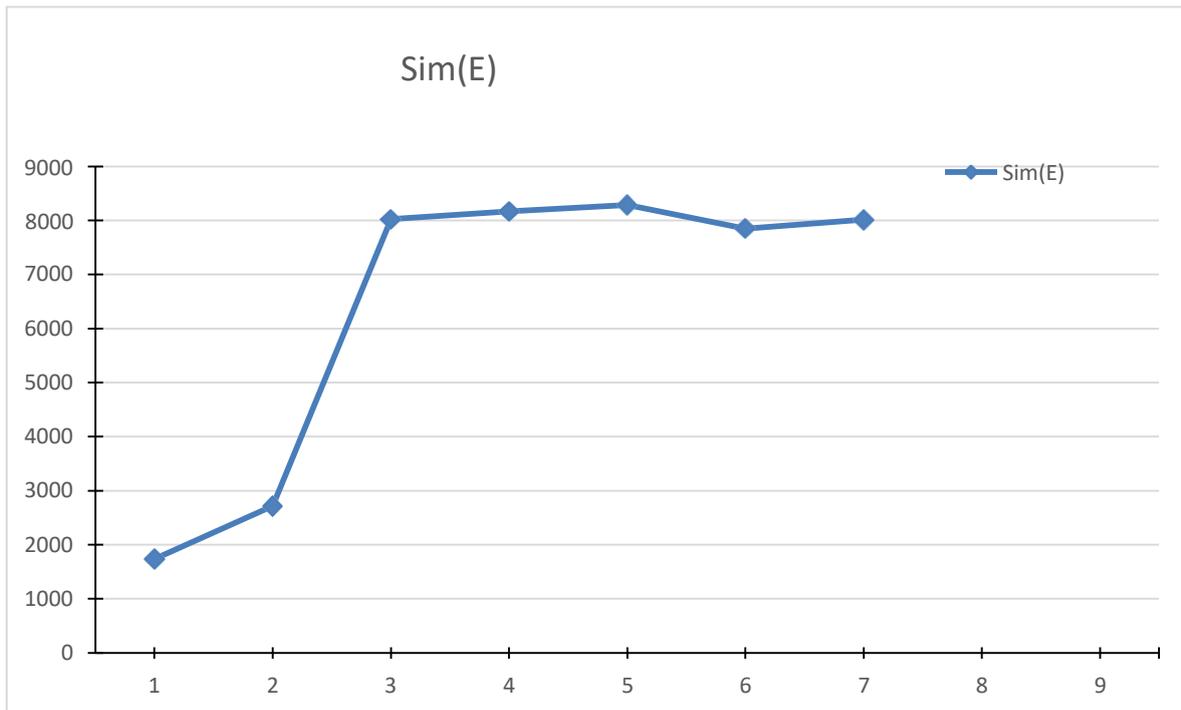


**Figure III.10** Courbes de convergence de module de compressibilité apparent  $k$  en fonction de la taille du domaine  $V$ . Fr20%



**Figure III.11** Courbes de convergence de module de cisaillement apparent  $\mu^{\text{app}}$  en fonction de la taille du domaine  $V$ .Fr20%

La variance des valeurs de module de Young en fonction de la taille de volume pour la fraction volumique 20% est représenté dans le graphe figure III.12 :



**Figure III.12** Courbes de convergence de module de Young en fonction de la taille du domaine v **Fr20%**

### Effet de la fraction volumique sur les propriétés élastiques

Afin d'étudier l'effet de la fraction volumique sur le module de compressibilité  $\mathbf{K}$  et le module de cisaillement  $\mu$ , différentes fractions volumiques ont été prises (10% ET 20%). Les résultats obtenus affirment que le module de compressibilité  $\mathbf{k}$  et le module de cisaillement  $\mu$  augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique.

### CONCLUSION

Dans ce chapitre on a défini les étapes que nous avons suivies pour la simulation numérique du comportement élastique d'un matériau composite à 3 phase, en commençant par la première étape qui est la génération des particules en 3D dans un volume cubique, ensuite on a décrit la microstructure utilisée et les propriétés élastiques de chaque phase.

En deuxième étape on a représenté le maillage comme une opération obligatoire dans la simulation numérique.

Dans la dernière étape une étude sur le comportement élastique d'un matériau composite à 3 phase avec deux fractions volumiques (10% et 20%) est menée, dont le but est de déterminer les propriétés élastiques apparentes de ce matériau. Cette étude est basée sur la simulation à l'aide du logiciel Comsol, Les résultats obtenus sont comparés avec la borne supérieure de Hashin-Strikman ( $HS^+$ ) et le modèle auto-cohérent.

## Contents

Introduction .....	32
Modélisation de la microstructure : génération et maillage de microstructures .....	32
Modèles de génération et reconstitution des microstructures.....	32
Modèle d'addition séquentielle aléatoire (RSA).....	34
Modèle de génération par la technique dynamique moléculaire .....	35
Génération de microstructures aléatoires avec trois phases en 3D.....	35
Matériaux et Méthodes .....	36
Description de la microstructure .....	36
Propriétés élastiques des phases.....	37
Différentes méthodes de maillage .....	37
Maillage régulier.....	37
Maillage adaptatif.....	38
Maillage libre .....	38
Résultats et discussion.....	39
Fraction volumique 10% .....	39
Fraction volumique 20% .....	42
Effet de la fraction volumique sur les propriétés élastiques .....	44
CONCLUSION .....	45

# **Conclusion**

## Conclusion générale

Ce projet de mémoire a pour objectif l'étude des comportements élastique des matériaux composites à 3 phases. Cette étude a mis en évidence la variation des propriétés élastique en fonction de taille de maillage ainsi l'intérêt d'une détermination rigoureuse de la taille du volume élémentaire représentatif (VER) d'une microstructure, celle-ci doit tenir compte de plusieurs paramètres comme : le nombre de phase, la fraction volumique, le type de la propriété et la morphologie des particules.

Cette étude a mis en évidence l'intérêt de l'utilisation des scripts de génération des structures aléatoires de particules avec des tailles du volume élémentaire représentatif (*VER*) variables, celle-ci doit tenir compte de plusieurs paramètres comme : le nombre de phase, la fraction volumique et la morphologie des particules.

De ce fait, nous avons déterminé la variation des propriétés élastiques apparentes du matériau composite l'évaluation de ces propriétés est basée sur l'utilisation des approches numériques (logiciel Comsol). L'ensemble des résultats numériques obtenus ont été validés par les approches analytiques et statistiques.

Les bornes de Hashin-Strikman et l'estimation Auto-cohérente (Self-Consistent) ont donnés de bons résultats dans le cas de comportement linéaire pour l'évaluation des deux propriétés effectives ( $k$  et  $\mu$ ) des matériaux hétérogènes à structure aléatoire.

**Référence**  
**bibliographiques**

## Référence bibliographiques

- [1] Berthelot J.M., Matériaux composites - Comportement mécanique et analyse des structures, Ed.
- [2] Glossaire des Matériaux Composites. Centre d'Animation Régional en Matériau Actives -CARMA -
- [3] Stephen W. Tsai – Introduction to Composite Materials. A Technomic Publishing Company book Includes index p.453 .Congress Card n° 80-51965 Lancaster, Pennsylvania 17604 U.S.A 1980
- [4] PASTOR J, OHAYON J et DISDIER C 6 Homogénéisation périodique et composites à fibres actives
- [5] <http://www.cvm.qc.ca/geoffrio/index/materiau/cours13/cours13.html>
- [6] [http://www.ssicomposites.com/processes\\_vb.html#9](http://www.ssicomposites.com/processes_vb.html#9)
- [7] [http://www.hexcel.com/Resources/DataSheets/Brochure-Data-Sheets/Prepreg\\_Technology.pdf](http://www.hexcel.com/Resources/DataSheets/Brochure-Data-Sheets/Prepreg_Technology.pdf)
- [8] <http://www.netcomposites.com/guide/pultrusion/55>
- [9] Reuss, A., 1929. Berechnung der fließgrenz von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. Z. Angew. Math. Mech. 9, 49–58.
- [10] Eshelby, J.D. 1957.
- [11] Glossaire des Matériaux Composites. Centre d'Animation Régional en Matériau Actives CARMA
- [12] Dormieux, L., Kondo, D., & Ulm, F.-J. 2006. "Microporomechanics". John Wiley & Sons.

# **Annexes**

## A. Annexe

### Propriétés physiques pour le cas 3D

Le tenseur d'élasticité est défini par son module de compression  $k$  et son module de cisaillement ou de manière équivalente, par son module d'Young  $E$  et son coefficient Poisson

$$\begin{cases} 3k = \frac{E}{1 - 2\nu} \\ 2\mu = \frac{E}{1 + \nu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = 9 \frac{k\mu}{3k + \mu} \\ 2\mu = \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)} \end{cases}$$

### Les limites de Hashin-Shtrikman (cas 3D)

La détermination de ces limites est basée sur des principes variant supposée infinie et aucune information géométrique des constituants et considérés. Les limites de Hashin-Shtrikman sont les meilleures estimations pour l'obtention de l'analyse des propriétés efficaces de matériau isotrope macroscopique. Les limites pour les propriétés effectives des matériaux isotropes résultant sont établies par les expressions dans le cas 3D :

$$k^{HS\pm} = k_m + \frac{f_i}{(k_i - k_m)^{-1} + f_m \left(k_m + \frac{4}{3}\mu_m\right)^{-1}}$$

$$\mu^{HS\pm} = \mu_m + \frac{f_i}{(\mu_2 - \mu_1) + \frac{2f_m(k_m + 2\mu_m)}{5\mu_m \left(k_m + \frac{4}{3}\mu_m\right)}}$$

Avec:  $k_m > k_i$  ;  $\mu_i > \mu_m$  ;  $V_i + V_m = 1$

Où  $(k$  et  $\mu$ ) sont respectivement les modules de compressibilités et de cisaillement pour les deux phases  $f_1$  et  $f_2$  sont les fractions volumiques pour les deux phases les signes + et - désignent respectivement les bornes supérieures et inférieures.

### Modèle auto cohérent

L'homogénéisation auto-cohérente a été développée à l'origine pour estimer la rigidité équivalente des polycristaux et considérer l'interaction de la matrice et des grains suivant la formulation d'Eshelby. Et s'est concentrée sur les particules sphériques et les fibres alignées continues. Une approche cohérente de l'homogénéisation est basée sur l'idée que l'existence d'une seule inhomogénéité ne modifie pas les propriétés matérielles effectives dans un système avec de nombreuses inclusions. Par conséquent, les inclusions interagissent les unes avec les autres à travers le milieu efficace, ce qui signifie que les tenseurs de localisation seront basés sur les propriétés du milieu effectif plutôt que sur les propriétés du matériau de la matrice. L'interaction locale des inclusions avec le matériau de la matrice environnante reste inchangée.

$$k = \frac{k_m(\mu_m + k_f) + \mu_m V_f (k_f - k_m)}{(\mu_m + k_f) + V_f (k_m - k_f)}$$

$$\mu = \mu_m \left( 1 + \frac{V_f}{\frac{\mu_m}{\mu_f - \mu_m} + \frac{k_m + 2\mu_m}{2(k_m + \mu_m)} (1 - V_f)} \right)$$

Avec :

$$k_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} , \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} , \quad i = m , f$$

---

## Les bornes de Voigt & Reuss (CAS 2D)

### Model Voigt

$$K_{\text{Voigt}} = K_f \cdot v_f + K_m \cdot (1 - v_f)$$

$$\mu_{\text{Voigt}} = \mu_f \cdot v_f + \mu_m \cdot (1 - v_f)$$

$$E_{\text{Voigt}} = E_f \cdot v_f + E_m \cdot (1 - v_f)$$

### Model Reuss

$$K_{\text{Reuss}} = \frac{K_f \cdot K_m}{K_f + K_m}$$

$$\mu_{\text{Reuss}} = \frac{\mu_f \cdot \mu_m}{\mu_f + \mu_m}$$