

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

CHEURFA Fouad

GUENAOUI Nouredine

## Thème

---

**Etude numérique d'un jet impactant sur un disque chauffé**

---

Soutenu le : 06/10/2020 devant le jury composé de:

Mr. SAHLA	Président
Mr. MENDIL .F	Rapporteur
Mr. BENSLIMANE.A	Examineur

**Année Universitaire 2019-2020**

## **Remerciements**

*Avant toute chose nous remercions le bon Dieu d'avoir été à nos côtés tout au long de notre vie, à nous offrir le courage et l'abnégation pour mener à terme ce travail.*

*A nos familles, qui nous ont élevé encourager et soutenu durant tout notre parcours pédagogique.*

*A Mr MENDIL.F, notre encadreur pour avoir accepté de nous encadrer et contribuer à réaliser notre travail.*

*A Mr BENSLIMANE.A, pour avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.*

*A Mr SAHLA, pour avoir Accepté de présider le jury.*

*A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.*

## **Dédicaces**

*Je dédie ce travail :*

*A toute ma famille,*

*A tous mes amis sans exception,*

*Et a tous mes profs.*

***CHEURFA Fouad***

## **Dédicaces**

*Je dédie ce modeste travail :*

*A toute ma famille,*

*A tous mes amis sans exception,  
A tous ceux qui me sont chers.*

***GUENAOUI Nouredine***

# Sommaire

<b>Liste des figures</b> .....	v
<b>Liste des tableaux</b> .....	vi
<b>Nomenclature</b> .....	vii
<b>Introduction Générale</b> .....	1
<b>Chapitre I: Généralités et revue bibliographique</b>	
I. Introduction.....	3
I.1.1 Couche limite dynamique .....	4
I.1.2 Couche limite thermique.....	4
I.2 jets impactant .....	5
I.2.1 Jet impactant unique .....	5
I.2.2 Structure du jet en impact .....	7
I.2.3 Différentes applications des jets .....	8
I.3 État de l'Art et revue bibliographique.....	9
I.4 Conclusion.....	12
<b>Chapitre II: Positionnement du problème et formulation mathématique</b>	
Positionnement du problème et formulation mathématique .....	13
II.1 Introduction .....	13

II.2 problématique .....	13
II.3 Hypothèse simplificatrice .....	14
II.4 Formulation de problème.....	14
II.4.1 Equation de continuité .....	15
II.4.2 Equations de conservation de quantité de mouvement.....	15
II.4.3 Equations d'énergie .....	15
II.5 Equations dimensionnelles .....	15
Equation de continuité.....	15
Equation de quantité de mouvement .....	15
Equation d'énergie .....	15
II.6 Conditions aux limites .....	16
II.7 Formulation adimensionnelle .....	16
II.7.1 Équation adimensionnelles et solution auto-similaire : .....	16
II.7.2 Les conditions aux limites .....	17
II.8 Conclusion .....	18
 <b>Chapitre III: Méthode numérique</b>	
Méthode numérique.....	20
III.1 Introduction .....	20
III.2 Méthode d'Euler.....	20
III.3 Méthode de Runge-Kutta .....	21
III.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre N.....	21
III.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 .....	22
III.4 Méthode de Tirs .....	24
III.5 Algorithme de résolution.....	26
III.6 Conclusion.....	28

**Chapitre IV: Résultats et Discussion**

IV.1 Introduction .....	30
IV.2 Validation des résultats par le code de calcul .....	30
IV.2.1Caractéristique dynamique :.....	31
IV.3.2Caractéristique thermique : .....	34
IV.3.3 Transfert de chaleur et coefficient de frottement : .....	40
IV.4 Conclusion .....	44
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>46</b>
<b>Références Bibliographiques .....</b>	<b>49</b>
<b>Résumé .....</b>	<b>51</b>

# Liste des figures

## Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

Figure I.1 Couches limites dynamique et thermique sur une surface.....	3
Figure I.2 Couches limites dynamique sur un disque .....	4
Figure I.3 Couches limites thermique sur un disque .....	5
Figure I.4 Structure générale du jet libre.....	6
Figure I.5 Représentation schématique d'un jet impactant sur un disque .....	8
Figure I.6 Ecoulement de point de stagnation, (Écoulement de Hiemenz).....	9

## Chapitre II : Positionnement du problème et formulation mathématique

Figure II.1 Schématisation de modèle physique.....	13
--	----

## Chapitre IV : Résultats et Discussion

FigureIV.1 Effet de $Pr$ sur le profil de vitesse $f'$ en fonction( $\eta$ ).....	32
FigureIV.2 Effet de $\beta$ sur le profil de vitesse $f'$ en fonction ( $\eta$ ).....	33
FigureIV.3 Effet de $\lambda$ sur le profil de vitesse $f'$ en fonction de ( $\eta$ ).....	34
FigureIV.4 Effet de $Pr$ sur le profil de température $\theta$ en fonction de .....	35
FigureIV.5 Effet de $\beta$ sur le profil de température $\theta$ en fonction de ( $\eta$ ).....	36
FigureIV.6 Effet de $\lambda$ sur le profil de température $\theta$ en fonction de( $\eta$ ).....	37

FigureIV.7 Effet de  $Pr$  sur le gradient de température  $\theta'$  en fonction de  $(\eta)$ .....38

FigureIV.8 Effet de  $\beta$  sur le gradient de température  $\theta'$  en fonction  $(\eta)$ .....39

FigureIV.9 Effet  $\lambda$  de sur le gradient de température  $\theta'$  en fonction de  $(\eta)$ .....40

FigureIV.10 Coefficient de frottement ( $Cf$ ) pour différentes valeurs de  $Pr$ .....41

FigureIV.11 Coefficient de frottement ( $Cf$ ) pour différentes valeurs de  $\beta$ .....42

FigureIV.12 Nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différentes valeurs de  $Pr$  .....43

FigureIV.12 Nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différentes valeurs de  $\beta$  .....44

# Liste des tableaux

## Chapitre IV : Résultats et Discussion

Tableau IV.1: Valeurs de  $f''(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand  $\lambda=1..30$

Tableau IV.2: Valeurs de  $-\theta'(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand  $\lambda=1..31$

# Nomenclature

Symboles	Définition	Unité (SI)
$\Phi$	: Flux thermique	W
T	: Température	K
K	: Conductivité thermique	W/mk
P	: Pression	Pa
g	: Accélération	m/s <sup>2</sup>
$Cf$	: Coefficient de frottement à la paroi	-
$e_n c_n$	: Constantes arbitraires	-
(r, z)	: Coordonnées cylindriques	-
Nu	: Nombre de Nusselt	-
Pr	: Nombre de Prandtl	-
Re	: Nombre Reynolds	-
$f$	: Fonction de similitude	-
$\theta$	: Température adimensionnelle	-
$\lambda$	: Paramètre de flottabilité (Richardson)	-
$\eta$	: Variable de similitude	-
U	: La vitesse de fluide	m/s
l	: Longueur caractéristique	m
B	: Paramètre de Source de chaleur	-

## Symboles grecs

$\alpha$	: Diffusivité thermique	m <sup>2</sup> /s
$\mu$	: Viscosité dynamique	Pa s
$\nu$	: Viscosité cinématique	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	: Masse volumique	Kg/m <sup>3</sup>
$\delta$	: Epaisseur de la couche limite	m
$\psi$	: Fonction de courant	-
$\tau$	: Contrainte de cisaillement	Pa

## Indices

- ' : Dérivation
- $\infty$  : Condition à l'infini amont
- $w$  : Condition à la paroi
- f : Fluide

# **Introduction Générale**

# Introduction Générale

Depuis plusieurs années, les chercheurs ont développé plusieurs approches qui permettent d'optimiser l'utilisation de l'énergie. Parmi ces approches, nous trouvons celle des jets impactant.

Les écoulements des jets font l'objet des nombreuses recherches tant expérimentales que numérique et théorique. En effet ces jets sont présents dans des nombreux problèmes industriels et notamment dans le secteur aéronautique. Les jets ont une importance toute particulière pour les phénomènes de transfert de chaleur et de masse au sein des écoulements.

Les transferts thermiques produits par les jets impactant restent un domaine très vaste et compliqué car il est dans les processus réels, cet écoulement constitue un moyen efficace pour échanger de la chaleur entre un fluide et une paroi solide.

La dynamique de l'écoulement produit par les jets impactant est très complexe, car la mesure où il se produit une compétition entre les effets de flottabilité engendrés par la différence de température entre la plaque et le fluide, et les effets d'inertie. En pratique, cette compétition se traduit par le décollement de la couche limite dynamique et thermique du fluide sur la plaque, à une distance plus ou moins éloignée de l'axe de la buse.

Les jets impactant sont utilisés dans plusieurs applications industrielles parmi lesquelles les processus de séchage, de refroidissement et de réchauffement.

L'objectif de ce travail est d'étudier numériquement un jet impactant sur un disque horizontale dont la température est supérieure à celle du fluide, et ce en examinant les structures dynamique et thermique de l'écoulement de couche limite introduit par le jet.

Notre mémoire est divisée en quatre chapitres organisé de la manière suivante :

- Dans Le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les notions fondamentales relatives des jets impactant, et une description de la couche limite dynamique et thermique, suivi par une synthèse bibliographique des différents travaux antérieurs sur les jets impactant sur des surfaces chaude.
- Pour le deuxième chapitre, nous commençons par la présentation de problème physique, ensuite nous définissons les hypothèses simplificatrices, et formuler les équations

gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées. Enfin nous établirons les équations gouvernantes sous forme adimensionnelle et définir les groupements adimensionnels caractérisant le phénomène.

- Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode numérique par laquelle nous résoudrons le problème étudié, utilisant la méthode de Runge kutta d'ordre quatre, largement connue (utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires) et la méthode de tir (pour faire démarrer la méthode de Runge kutta).
- Dans le dernier chapitre, nous présentons et nous discutons les principaux résultats obtenus.

Enfin nous concluons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus lors de cette étude qui trace les perspectives et les extensions adaptées à ce travail.

# **Chapitre I**

**Généralités et revue bibliographique**

# Généralités et revue bibliographique

Nous présentons dans ce chapitre quelques généralités sur les couches limites et aussi des généralités sur les jets impactant, et ensuite nous allons aborder l'étude bibliographique sur les différents travaux menés relatifs au refroidissement des parois chaudes moyennant des jets impactant.

## I.1 Concept de Couche limite

L'étude des écoulements au voisinage des parois est nécessaire pour la détermination des échanges thermiques par convection entre un solide et le fluide qui l'entoure. Considérons un écoulement fluide à vitesse  $U_{1e}$  et à température  $T_e$  sur une surface à température  $T_p$  (figure I.1). Au voisinage de la paroi, les valeurs de la vitesse et de la température sont différentes de celles de l'écoulement potentiel et varient en fonction de la distance à la paroi,  $x_2$ . Cette zone de gradients de vitesse et de température est appelée couche limite. Elle résulte d'échanges de quantité de mouvement et de chaleur entre le fluide et la paroi. Donc s'agit de cette mince couche de fluide qui se forme sur la surface d'un corps solide lorsque ce dernier entre en contact avec un fluide visqueux en déplacement (écoulement). Son épaisseur est généralement petite par rapport à l'ensemble de l'écoulement. On distingue deux types de couche limite : la couche limite dynamique et la couche limite thermique.

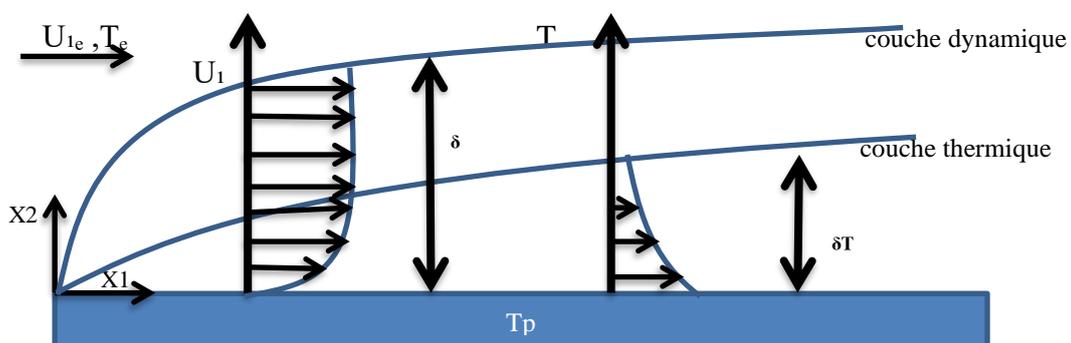


Figure I.1 Couches limites dynamique et thermique sur une surface.

### I.1.1 Couche limite dynamique

Dans la couche limite dynamique on observe 0.99 de la variation de la vitesse (celle-ci varie de 0 à  $U_{e1}$ ). En dehors de la couche limite, la vitesse est presque constante et égale à  $U_{e1}$ . Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais à la paroi. À la paroi, la vitesse du fluide est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci. [4, 8,11]

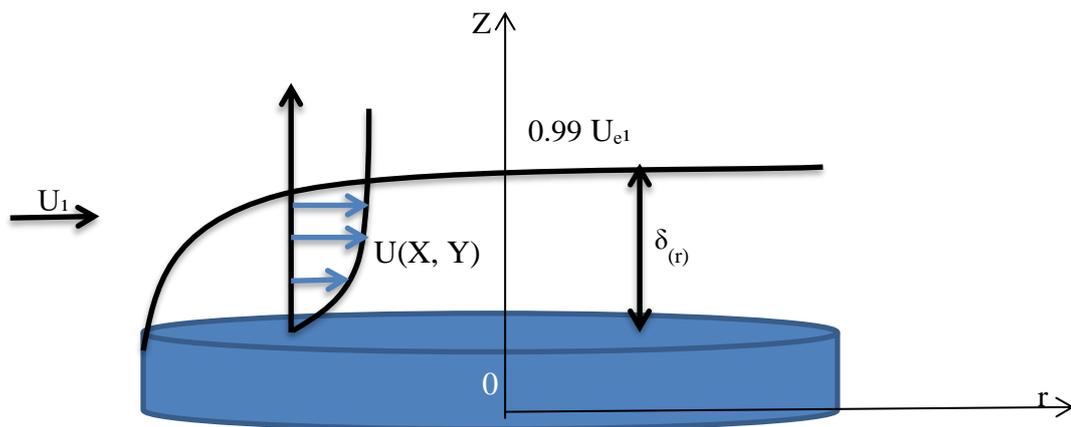


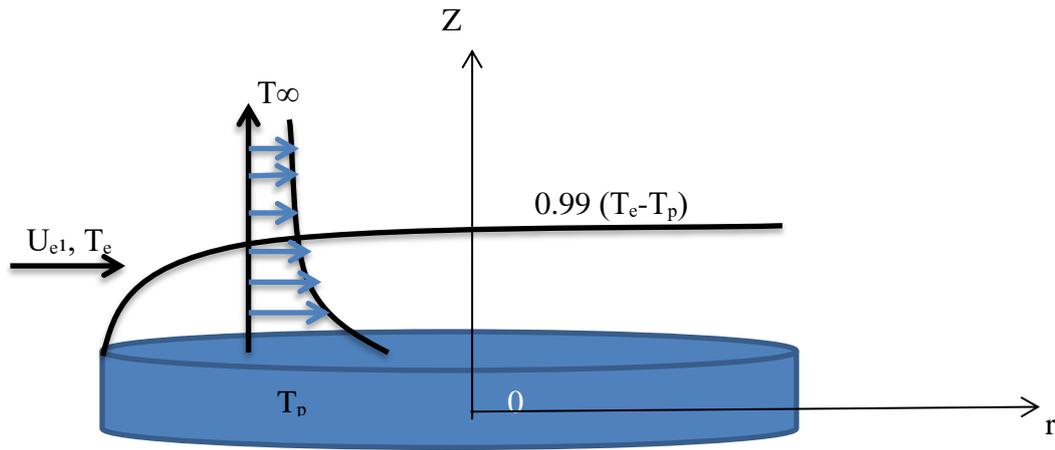
Figure I.2 Couches limites dynamique sur un disque.

### I.1.2 Couche limite thermique

La couche limite thermique est la zone dans laquelle on observe 0.99 de la variation de la température adimensionnelle  $\frac{T-T_p}{T_e-T_p}$ .

À la surface de la plaque, la vitesse du fluide est nulle  $U=0$ . En ce lieu, le transfert de chaleur est purement conductif.

Lorsqu'un fluide de température  $T$ , s'écoule sur une paroi à température  $T_p$ , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact de la paroi. Ces particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme. [4, 8,11]



**Figure I.3 Couches limites thermique sur un disque.**

## I.2 Jet impactant

La technique des jets impactant se trouve dans nombreuses applications industrielles et les résultats de sa mise en place dépendent de nombreux paramètres. Ainsi de nombreuses études expérimentales et numériques ont été menées dans le but d'une meilleure compréhension des phénomènes physiques intervenant et régissant l'impact d'un jet.

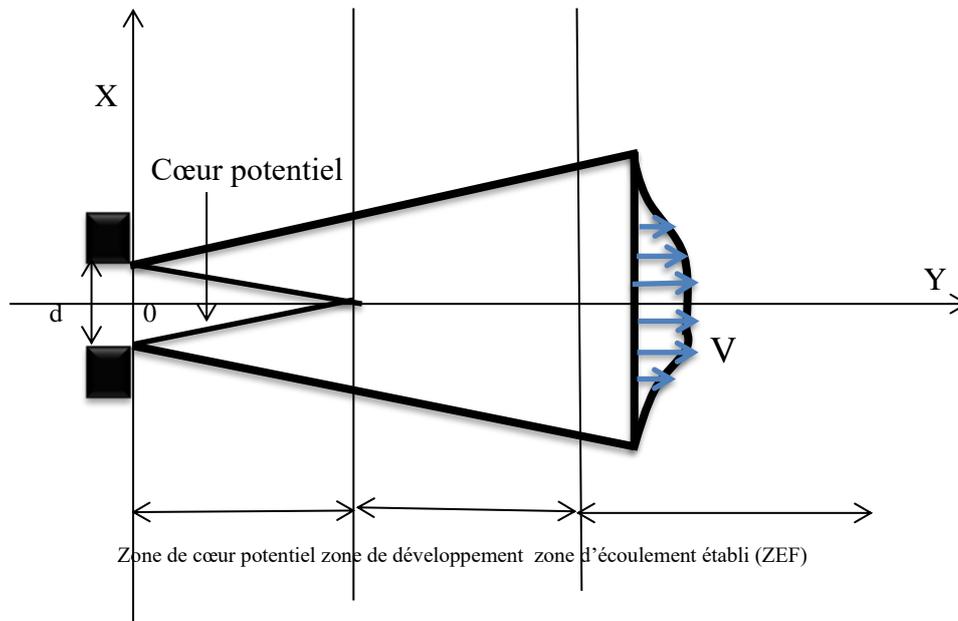
Pour comprendre les structures propres au jet en impact, il convient d'abord de s'intéresser au cas du jet libre. [4,8]

### I.2.1 Jet impactant unique

Pour comprendre les structures propres au jet en impact, il convient d'abord de s'intéresser au cas du jet libre.

- **Structure du jet libre**

- ✓ Une décomposition classique proposée pour le jet libre est de distinguer trois zones.



**Figure I.4 Structure générale du jet libre.**

➤ **zone de corps potentiel**

Elle se caractérise par une vitesse en sortie de buse conservée sur l'axe central du jet à l'intérieur de ce qui s'appelle alors le corps potentiel. L'air environnant est entraîné par le jet et réduit ainsi progressivement la vitesse dans le jet jusqu'à atteindre la ligne centrale. L'entraînement de l'air environnant crée une région de mélange et de fort cisaillement. La longueur du corps potentiel est généralement évaluée entre 4 et 7 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur, mais ce résultat dépend fortement des profils de vitesse et des taux de turbulence en sortie d'injecteur. La géométrie de l'injecteur influence nécessairement ces deux paramètres. Par exemple, pour un jet issu d'un tube long circulaire, la longueur du corps potentiel est de l'ordre de 4,5 à 5 fois le diamètre hydraulique. [4,8]

➤ **zone de transition**

Cette zone commence lorsque les couches de mélange se rejoignent au centre du jet. On observe alors une baisse de la vitesse axiale due aux fortes contraintes de cisaillement dans cette zone.

➤ **zone développée**

Les profils de vitesse sont désormais auto semblables et peuvent donc être déduits des profils amont par similitude. D'après différents auteurs, le début de cette zone est situé à partir de 8 fois jusqu'à 20 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur.

## **I.2.2 Structure du jet en impact**

Il apparaît que les caractéristiques d'un jet en impact peuvent se révéler très différentes selon la distance d'impact et donc selon la zone dans laquelle se situe l'impact. Trois régions distinctes sont considérées dans la structure d'un jet en impact. [4,8]

➤ **Région de jet libre**

Cette région est caractérisée par l'écoulement d'un jet rond turbulent, axisymétrique en moyenne, il peut atteindre une zone d'écoulement établi ZEF (Zone of Established Flow) cette dernière ne peut apparaître que lorsque la distance d'impact est suffisamment grande.

➤ **Région de stagnation (région d'impact)**

Cette région est caractérisée principalement par une forte diminution de la composante de vitesse axiale à l'amont du point de stagnation, une élévation importante de la pression au point d'arrêt, et une forte augmentation de la composante de vitesse radiale en aval du point d'impact.

➤ **Région de jet pariétal**

Cette région est caractérisée par le développement et l'épaississement d'un jet pariétal, c'est à dire le long de la surface d'impact et dont la vitesse radiale maximale diminue.

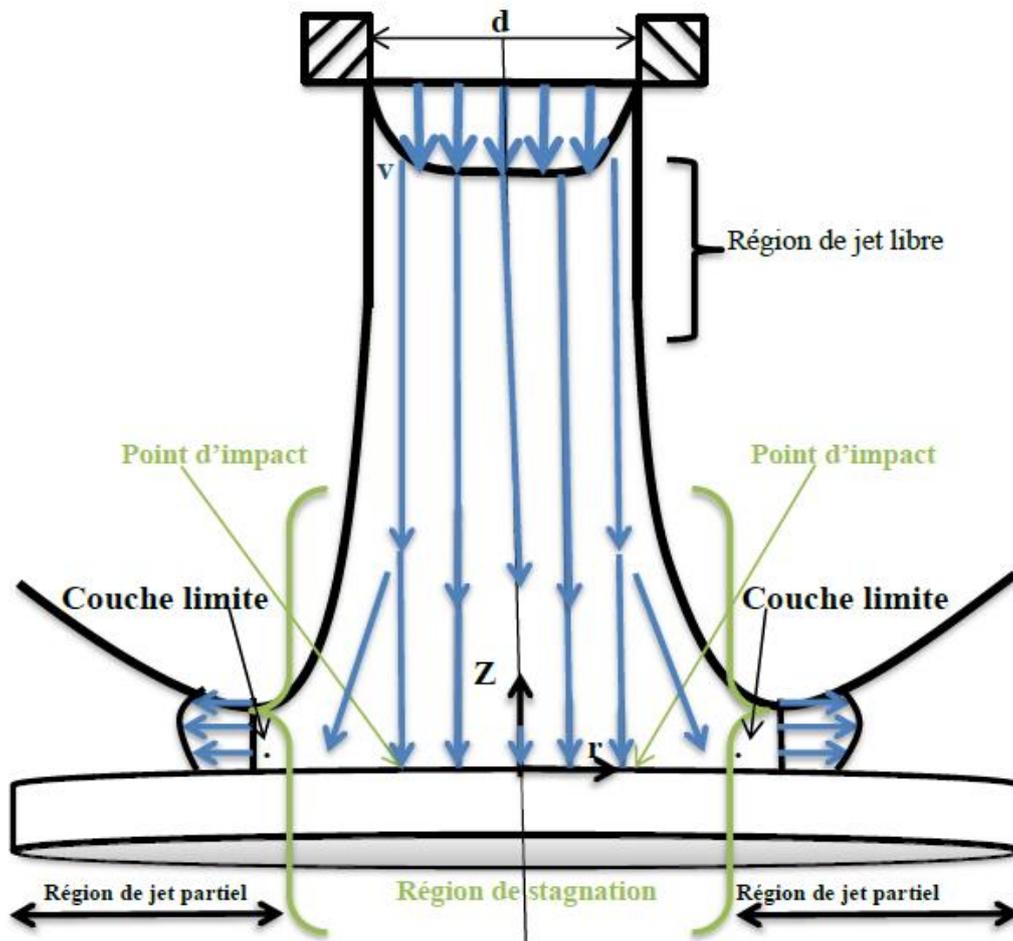


Figure I.5 Représentation schématique d'un jet impactant sur un disque

### I.2.3 Différentes applications des jets

Les jets impactant sont utilisés dans plusieurs applications industrielles parmi lesquelles les processus de séchage, de refroidissement et de réchauffement. Par exemple, on peut citer :

- Découpe et refroidissement de nappes de verre en fusion.
- Evaporation de l'eau de la pâte à papier dans l'industrie papetière.
- Refroidissement de feuillets métalliques ou plastiques.
- Refroidissement de moteurs thermiques, circuits hydrauliques, chambres de combustion, aubes de turbines et moteurs électriques de grande puissance destinés à une nouvelle génération de voitures électriques.
- Refroidissement de denrées alimentaires.
- Refroidissement de composants électronique.

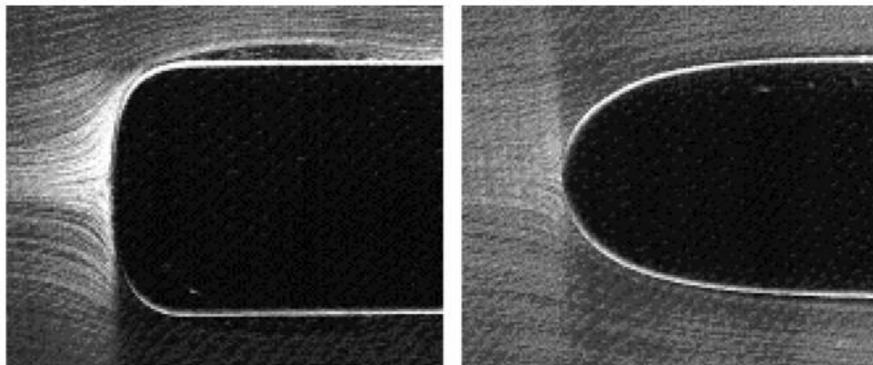
### I.3 État de l'Art et revue bibliographique

Au cours de ces dernières années, plusieurs travaux de recherche concernant les jets impactants ont été publiés, vu de leur importance dans diverses applications dans plusieurs domaines pratiques tels que l'environnement (aération), l'industrie (traitement des surfaces), le transport (moteurs à impulsion) etc.

L'objectif de ce travail est de déterminer et d'analyser la structure dynamique et thermique de l'écoulement d'un jet impactant. On présente dans ce chapitre une synthèse bibliographique des principales études effectuées sur ce type de configuration.

#### ➤ **Écoulement de Hiemenz :**

**Hiemenz [5]** a été le premier à étudier l'écoulement bidimensionnel près d'un point de stagnation, problème classique de la mécanique des fluides, dans lequel il a simplifié les équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement en une équation différentielle ordinaire du troisième ordre, en utilisant la transformation de similarité. En raison des non-linéarités dans l'équation différentielle réduite, aucune solution analytique n'est disponible et l'équation non linéaire est habituellement résolue numériquement sous réserve de conditions aux limites à deux points, dont l'une est prescrite à l'infini.



**Figure I.6 Écoulement de point de stagnation. (Écoulement de Hiemenz) [5]**

#### ➤ **Écoulement sur une plaque plane chauffée :**

**Stewartson [7] et Gill et Del Casal [16]**, ont étudié la théorie de fonctionnement du transfert de chaleur par convection à partir d'une plaque horizontale et a rapporté la présence de solutions analogues à une plaque isotherme presque infinie immergée dans l'air. Ils ont déduit les premières conditions d'existence d'un flux thermique de couche limite sur une plaque plane horizontale.

**Ishak et al [9]**, ont étudié théoriquement les solutions de similarité pour l'écoulement de couche limite à convection mixte régulière sur une plaque plane verticale immergée dans un fluide micropolaire visqueuse incompressible, les équations différentielles ont été résolues numériquement en utilisant la méthode de la boîte de Keller, il ont étudié les effets paramètre de matériau  $K$ , nombre de Prandtl  $Pr$  et le paramètre de flottabilité  $\lambda$ , sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur caractéristiques.

Les mêmes chercheurs **Ishak et al [10]**, ont étudié les solutions de similarité de l'écoulement de couche limite de convection mixte stable près du point de stagnation sur une surface perméable verticale noyée dans un fluide visqueux et électriquement conducteur. Ils ont constaté que des solutions doubles existent pour les deux cas, et la plage du paramètre de convection mixte pour laquelle la solution existe augmente avec l'aspiration.

**Fabien et al [1]**, ont effectué une étude expérimentale sur un jet laminaire axisymétrique impactant une plaque plane horizontale chauffée et dont la température est maintenue fixe à l'aide d'un système d'asservissement. Ils ont analysé la couche limite cinématique et thermique du fluide, distance à l'axe du jet et les effets de flottabilité.

**Lin et al [6]**, ont fait une série de travaux sur la convection mixte laminaire sur une plaque horizontale avec la température uniforme des plis ou le flux thermique uniforme de la paroi, ils ont analysé les paramètres de flottabilité et de variables de transformation appropriés pour les fluides de tout nombre Prandtl  $Pr$  entre compris entre 0,001 et 10 000.

**Guha et Pradhan [3]**, ont étudié le problème d'un l'écoulement de la couche limite avec convective naturelle d'un fluide de loi de puissance non newtonien sur une plaque plane horizontale isotherme, le problème a été résolu numériquement en utilisant une méthode des différences finies chronologiques. Leurs résultats montre que la vitesse, la température et la pression à l'intérieur de la couche limite dépendent de deux paramètres, qui sont : la loi de puissance non newtonienne index ( $n$ ) le nombre de Prandtl généralisé ( $Pr$ ), et ont constaté aussi que :

- Pour  $n > 1$  (fluides dilatants), les profils de vitesse ( $u$ ) révèlent que la vitesse maximale atteinte augmente mais que l'épaisseur de la couche limite diminue à mesure que la valeur de  $n$  est progressivement augmentée au-dessus de l'unité.

- Pour  $n < 1$  (fluides pseudoplastiques), l'inverse se produit et l'épaisseur de la couche limite augmente dans une large mesure tandis que la vitesse maximale est réduite à mesure que la valeur de  $n$  diminue progressivement en dessous de l'unité.
- L'amplitude de la vitesse normale le composant au bord de la couche limite est plus petit pour les fluides dilatants et plus grand pour fluides pseudoplastiques par rapport aux fluides newtoniens.

**Yih Wang [14]**, a analysé le problème de convection mixte laminaire stable régulier de la couche limite sur une plaque horizontal chauffée avec un fluide non newtonien, le système d'équations différentielles est résolu à l'aide de méthode différence finie implicite, il a étudié les caractéristiques d'écoulement du fluide et de transfert de chaleur, il a prouvé que les nombres de Prandtl généralisés plus élevés et le paramètre de flottabilité améliore le transfert de chaleur, et il a constaté que le frottement augmente avec une force de flottabilité croissante et diminue avec une augmentation de nombre de Prandtl pour tous les fluides non newtoniens.

**Chen et al [13]**, ont analysé les caractéristiques du transfert de chaleur et de masse en convection mixte le long de plaques planes verticales ou inclinées, sous l'influence des effets combinés de flottabilité thermique et massique. Ils ont supposé que les effets Soret et Dufour ainsi que les vitesses interfaciales sont négligeables. La plaque est maintenue soit à température et concentration uniforme ou à flux thermique et massique uniforme. Leurs résultats numériques sont présentés pour le nombre de Nusselt local et le nombre de Sherwood local pour la diffusion de masse dans l'air ainsi que l'eau. Ils ont montré que les flux surfaciques locaux augmentent lorsque les forces dues à la diffusion massique (poussée due à la différence de concentration) assistent celle de flottabilité thermique, et diminue si ces deux dernière sont opposées. De plus, les effets combinés des deux forces sur le taux de transfert de masse et de chaleur ont tendance à diminuer avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale. Finalement, ils mettent en place une comparaison entre les deux cas étudiés (température/concentration uniforme et flux massique/de chaleur uniforme).

**Dinarvand et al [12]**, ont étudié numériquement le flux de point de stagnation par convection mixte laminaire stable sur une surface perméable verticale, le système des équations aux dérivées partielles est été transformé en système d'équations différentielles ordinaires utilisant une similarité de transformation, qui sont ensuite résolues numériquement

par la méthode de Runge – Kutta associé à technique de tir. Ils ont utilisé trois types différents de nanoparticules avec de l'eau comme fluide de base. Ils ont obtenu des résultats numériques pour nombre de Nusselt ainsi que pour les profils de vitesse et de température pour certaines valeurs de paramètres gouvernants. Ils ont constaté qu'il existe des solutions doubles pour les flux auxiliaires et opposés, et la plage du paramètre de convection mixte pour laquelle la solution existe, augmente avec l'aspiration, le champ magnétique et fraction volumique de nanoparticules.

## **1.4 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté des différentes notions primaires, des couches limites et des généralités sur les jets impactant. Par suite nous avons présenté une synthèse bibliographique sur les études similaires à notre étude et les différents travaux effectués sur les écoulements sur la plaque plane chauffée. Dans ce qui suit, nous présentons dans ce qui suit notre contribution à l'étude de ces phénomènes dans leurs différents aspects.

# **Chapitre II**

**Positionnement du problème et formulation  
mathématique**

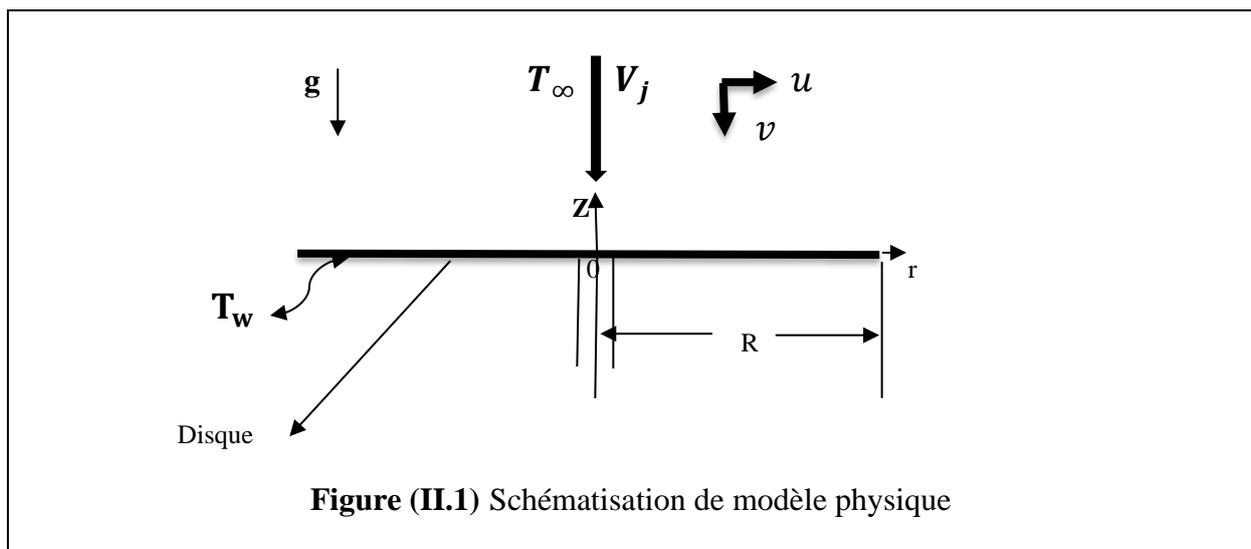
# Positionnement du problème et formulation mathématique

## II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation mathématique du problème, le modèle physique et les hypothèses simplificatrices. Nous allons établir les équations régissant la convection mixte le long d'un disque. Ensuite nous posons les conditions aux limites sous forme adimensionnelles et nous introduisons les principales grandeurs dynamiques et thermiques.

## II.2 problématique

Dans cette étude, nous étudions l'écoulement de couche limite d'un jet de température  $T_\infty$  impactant perpendiculairement de vitesse  $V_j$  sur un disque chauffé imperméable à une température uniforme  $T_w$  qui est différente de celle de fluide, comme il est schématisé sur la figure (II.1), avec une vitesse varie linéairement selon  $r$  du point de stagnation, comme suit  $V_j(r) = ar$  ; avec  $a$  est constant.



### II.3 Hypothèse simplificatrice

Pour la modélisation du problème, nous adoptons les hypothèses suivantes :

- L'écoulement de fluide et transfert de chaleur sont permanents et le régime est laminaire.
- Le fluide est newtonien et incompressible.
- Le disque est imperméable.
- Les transferts par rayonnement sont négligeables.
- L'écoulement et le transfert de chaleur sont bidimensionnels (r, z).
- Les propriétés thermophysiques du fluide ( $\mu$ ,  $C_p$ ,  $k$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ ) sont constantes.
- L'approximation de **Boussinesq** est validée, elle consiste à considérer que les variations de la masse volumique sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de quantité de mouvement ( $\rho = \rho_\infty$ ), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de la température est donnée comme suit  $\rho(T) = \rho_\infty [1 - \beta (T - T_\infty)]$

Avec :  $\beta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$

$T_\infty$  : Température de référence.

$\beta$  : Le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

$\rho_\infty$  : Masse volumique du fluide à  $T_\infty$ .

### II.4 Formulation de problème

L'étude numérique du phénomène de la convection mixte se base sur les équations liant les paramètres de pression, température et la vitesse. Les équations découlent des lois suivantes :

- La loi de la conservation de la masse (équation de continuité)
- La loi de la conservation de la quantité de mouvement (Newtonien, Navier -stokes)
- La loi de la conservation de l'énergie (équation d'énergie)

### II.4.1 Equation de continuité

Cette équation est déduite du principe de conservation de masse. Elle s'exprime comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

### II.4.2 Equations de conservation de quantité de mouvement

Cette équation est déduite de la deuxième loi de la dynamique, qui stipule que la variation de la quantité de mouvement d'une particule de fluide est la somme des forces extérieures sur cette particule. Elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} - \vec{g}(\rho \beta)(T - T_\infty) \quad (\text{II.2})$$

### II.4.3 Equations d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \vec{V}) T = \alpha \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho C_p} (T - T_\infty) \quad (\text{II.3})$$

## II.5 Les équations dimensionnelles

En tenu compte des hypothèses simplificatrices précédemment, les équations régissant de l'écoulement en coordonnées cartésiennes s'écrit comme suit :

### Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.4})$$

### Equation de quantité de mouvement

$$\rho \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right] + \rho g_r \beta (T - T_\infty) \quad (\text{II.5})$$

### Equation d'énergie

$$\rho C_p \left( u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi_v (T - T_\infty) \quad (\text{II.6})$$

## II.6 Conditions aux limites

La solution exacte du système d'équations, obtenue précédemment, nécessite l'incorporation des conditions aux limites appropriées de champs dynamiques et thermiques. Et elles s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} z = 0 & : u = 0 ; T = T_w \\ z = \infty & : u = V_j(r) = ar ; T = T_\infty \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

## II.7 Formulation adimensionnelle

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures, et ainsi permettre d'avoir des informations généralisées sur une variété de problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un côté, et d'un autre côté, réduire le nombre de paramètres d'un problème.

### II.7.1 Équation adimensionnelles et solution auto-similaire :

Pour résoudre le système d'équations de mouvement, nous cherchons une solution de type auto-similaire (*self similar*) étant donné qu'il s'agit d'un écoulement de couche limite. Ainsi, nous introduirons les transformations similaires suivantes :

$$\eta = \left(\frac{a}{\nu}\right) \left(\frac{V_j}{\nu r}\right)^{\frac{1}{2}} z = \frac{1}{2} z \quad ; \quad \Psi = (V_j \nu r)^{\frac{1}{2}} f(\eta) = (\nu a)^{\frac{1}{2}} r f(\eta) \quad (\text{II.8})$$

$$\theta(\eta) = \frac{(T - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}. \quad (\text{II.9})$$

Avec  $\Psi$  est la fonction de courant définie comme suit :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} ; \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (\text{II.10})$$

En développant  $u$  et  $v$ , on trouve :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = ar f'(\eta) ; \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = (-a\nu)^{\frac{1}{2}} f'(\eta) \quad (\text{II.11})$$

Les équations de continuité et de quantité de mouvement sous leurs formes adimensionnelles sont comme suit :

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 + \lambda\theta = 0 \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' + f'\theta + B\theta = 0 \quad (\text{II.13})$$

### ➤ Nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl caractérise l'importance relative de deux mécanismes qui pilote la convection du fluide qui sont, la diffusion de quantité de mouvement (viscosité cinématique,  $\nu$  et diffusion de chaleur  $\alpha$ ).

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Les valeurs du nombre de Prandtl nous renseignent sur les caractéristiques thermo-physiques du fluide choisi.

### ➤ Le paramètre de flottabilité

Le paramètre de flottabilité est le rapport de deux nombre adimensionnel, le nombre de Grashof et le nombre de Reynolds

$$\lambda = \frac{Gr_r}{Re_r^2} = \frac{\rho\beta(T - T_\infty)l}{\nu^2}$$

Avec :

$$Gr = \frac{\rho g \beta \Delta T l^3}{\nu^2}, \quad Re = \frac{Vl}{\nu}$$

## II.7.2 Les conditions aux limites

$$\text{Pour : } \eta = 1 \quad ; \quad f(1) = 0 \quad ; \quad f'(1) = 0 \quad ; \quad \theta(1) = 1$$

$$\text{Pour : } \eta \rightarrow \infty \quad ; \quad f'(\eta) \rightarrow 1 \quad ; \quad \theta(\eta) \rightarrow 0 \quad (\text{II.14})$$

Pour les besoins ultérieures de cette étude nous définissons des grandeurs physiques suivantes, qui sont le coefficient de frottement  $C_f$  et le Nusselt local  $N_{u_x}$  qui sont définis comme suit :

➤ **Nombre de Nusselt :**

Les échanges thermique sont caractérisé par un nombre adimensionnel dit nombre de Nusselt qui est le rapport entre le flux échangé par convection à celui par conduction à la paroi :

$$\text{Tel que : } h = \frac{a}{T_p - T_{ref}}$$

Avec  $T_p$ ,  $a$  et  $L_{ref}$  respectivement la température de la paroi considérée, la densité de flux de chaleur et une longueur de référence.

➤ **Coefficient de frottement :**

Le coefficient de frottement est défini comme suit :

$$C_f = \frac{\tau_c}{\rho \frac{V_j^2}{2}}$$

Comme  $\tau_c$  représente la contrainte de cisaillement à la paroi et  $q_c$  représente le flux de chaleur transmis par la paroi au fluide.

$$\tau_f = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} \quad \tau_f = -k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0}$$

Avec  $\mu$  et  $k$  représentent la viscosité dynamique et la conductivité thermique respectivement.

En utilisant les variables de similarité en obtient :

$$\frac{1}{2} C_f Re_r^{1/2} = f''(0) \quad N_{u_r} / Re_r^{1/2} = -\theta'(0)$$

Pour  $Re_r = 1$

$$N_{u_r} = -\theta'(0) \text{ Et } C_f = f''(0)$$

## II.8 Conclusion

Après avoir posé le problème traité (un jet impactant sur un disque chauffé) sous forme des équations mathématique (dynamique et thermique), ainsi que les conditions aux limites sont posées et les équations gouvernantes du problème sont mises sous formes adimensionnelles, dans le chapitre suivant, nous résoudrons le problème analytiquement avec l'utilisation de la méthode de Runge kutta et la méthode de tir.

# **Chapitre III**

**Méthode numérique**

# Méthode numérique

## III.1 Introduction

La simulation numérique en mécanique des fluides est reconnue aujourd'hui comme des outils incontournables de conception, c'est un ensemble de méthodes numériques permettant d'obtenir une solution approximative d'un problème de dynamique des fluides ou de transfert thermique. Grâce au développement des méthodes numériques et à des calculateurs de plus en plus puissants avec une grande capacité de mémoire, la simulation numérique permet d'avoir des solutions très satisfaisantes.

Une équation qui comporte une ou plusieurs dérivées de la fonction inconnue est appelée équation différentielle. L'ordre de cette équation est déterminé par l'ordre du degré le plus élevé de la dérivation.

Dans ce chapitre, nous s'intéressera à la résolution des systèmes d'équations différentielles, ces équations ne possèdent pas des solutions analytiques, dans le cas général, les descriptions mathématiques sont des moyens pour trouver des solutions approximatives aux solutions exactes. Ces équations sont classées en deux catégories : les équations différentielles avec des conditions initiales et les équations différentielles avec des conditions aux limites.

Dans un premiers temps nous remplaçons ces équations différentielles par une ou plusieurs équations algébriques, plus facile à résoudre.

Dans la seconde étape on applique la transformation des conditions aux limites en conditions initiales, beaucoup plus simples à résoudre ce qui fait appel à l'utilisation de la méthode de Runge- Kutta d'ordre quatre (RK4) et la méthode de Tir.

## III.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode de résolution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) de premier degré à une condition initiale, cette méthode est la plus simple. Elle est due au mathématicien et physicien suisse Euler (1707-1783). Elle a une bonne interprétation géométrique et son emploi est facile. L'inconvénient de cette méthode est néanmoins qu'elle est peu précise et l'erreur introduite à la première itération à des

répercussions sur les calculs de la deuxième itération donc l'erreur se propage d'une itération à l'autre. On appelle équation différentielle ordinaire, une équation, ou un système d'équations, dont les fonctions et leurs dérivées successives ne dépendent que d'une seule variable. On appelle ordre de l'équation, le plus fort degré de dérivation apparaissant dans l'équation. Une équation différentielle est dite linéaire, si elle est écrite sous forme d'une combinaison linéaire (coefficients constants) de dérivées successives des inconnues.

L'équation peut être écrite sous la forme :

$$f' = F(x, f) \quad (\text{III.1})$$

Le passage au domaine direct, repose sur le principe du développement de la série de Taylor de solution  $f(x_{i+1})$  avec  $x = x_i$ , généralement on arrête le développement à un ordre qui dépend de la précision voulue. On choisit développement d'ordre deux, on écrit :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} \quad (\text{III.2})$$

Avec :  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

Donc :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i + \varepsilon(\Delta x^2) \quad (\text{III.3})$$

$\varepsilon(\Delta x^2)$  : C'est erreur de troncature, et elle est bornée, ce qui est équivalent à écrire :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i \quad (\text{III.4})$$

Alors on obtient le schéma d'Euler, qui s'écrit sous la forme :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x F(f_i, x_i) \quad (\text{III.5})$$

### III.3 Méthode de Runge-Kutta

#### III.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre N

Les méthodes de Runge-Kutta (ou RK), sont des méthodes dérivées de la méthode d'Euler mais plus faciles et plus pratiques, parmi ses avantages est de ne pas avoir des conditions pour démarrer que connaître les conditions initiales, elles ont l'avantage d'être simples à programmer et sont assez stables pour les fonctions courantes de la physique et peu d'erreur. Ses inconvénients est les consommations en temps de calcul. Le but d'application de méthode de Runge-Kutta, qui est très recommandée pour ce genre de problème. Elle nous permet d'aboutir à des solutions approximatives avec une grande précision. Cette famille de méthodes explicites plus efficaces et plus pratiques que les méthodes d'Euler est basée sur le schéma numérique suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$k_j = F(Y_i, x_i + h\xi_j), \text{ avec } 0 \leq \xi_j \leq 1 \quad (\text{III.7})$$

Sachant que F est la fonction incrémentaire qui s'écrit :

$$Y_i = f_i + \sum_{k=1}^N x_{jk} Y_k \quad (\text{III.8})$$

Pour estimer la pente de la fonction  $f$ , on pose le point N de l'intervalle  $[x_i, x_i + \Delta x]$

Après on calcule la pente moyenne, en utilisant le terme  $\sum_{j=1}^N \bar{\omega}_j K_j$ . pour obtenir l'incrément par l'utilisation de méthode d'Euler.

Pour déterminer les coefficients  $\xi_j, x_{jk}$  et les points posés  $\bar{\omega}_j$ , on impose que le schéma précédant soit équivalent associé à celui de la méthode des séries entières d'ordre N.

#### III.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La version la plus utilisée de la méthode de Runge-Kutta est celle du quatrième ordre (RK4), C'est une méthode un pas unique et simple à programmer, cette méthode est très couramment

utilisées pour la résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO), directement dérivée de la méthode d'Euler. Cette méthode repose sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.

Cette méthode s'exprime sous la forme :

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$f' = F(x, f) \quad f(x_0) = f_0 \quad (\text{III.9})$$

Puis on utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de  $f_{i+1}$  à partir de la valeur calculé  $f_i$ ,

Donc, les points intermédiaires s'écrit comme suit :

1<sup>er</sup> point d'abscisse  $x_i + \frac{\Delta x}{2}$  dont la valeur de l'ordonnée est donnée par :

$$f_{i1} = f_i + \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i \quad (\text{III-10})$$

2<sup>ème</sup> point d'ordonné est :

$$f_{i2} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{i1} \quad (\text{III-11})$$

On utilisant la relation précédente pour calculer l'ordonné d'un point 3 d'abscisse  $x_i + h$ .

On obtient :

$$f_{i3} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{i2} \quad (\text{III-12})$$

Donc on aura quatre coefficients de méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 comme suite :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_i \\
 k_2 &= \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{i1} \\
 k_3 &= \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)_{i2} \\
 k_4 &= \Delta x \left( \frac{df}{dx} \right)_{i3}
 \end{aligned} \tag{III.13}$$

Avec :

$$f' = F(x, f)$$

On aura donc la formule de résolution numérique de méthode Range-kutta ordre 4, qui se présente comme suit (IV-14) :

$$k_1 = F(x_i, f_i)$$

$$k_2 = F\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_1}{2}\right); f \text{ est calculé en utilisant } k_1 \text{ au point } x_i + \frac{\Delta x}{2}$$

$$k_3 = F\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_2}{2}\right); f \text{ est calculé en utilisant } k_2$$

$$k_4 = F(x_i + \Delta x, f_i + k_3); f \text{ est calculé en utilisant } k_3 .$$

$$f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Avec :

- $k_1$  : la pente au début de l'intervalle.
- $k_2, k_3$  : la pente au milieu de l'intervalle.
- $k_4$  : la pente à la fin de l'intervalle.
- $f_{i+1}$  : est l'ordonnée définitive du int d'abscisse  $x_i + \Delta x$

### III.4 Méthode de Tirs

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir, un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum de Pontriaguine. Le principe de méthode de tir est transformer le problème aux limites en un problème aux valeurs initiales. Elles sont basées sur quatre étapes successives suivantes :

- Choisir un point  $x_0$  comme une condition initiale.
- La résolution du problème aux conditions initiales utilisant l'un des méthodes précédente, telle que la méthode Runge-Kutta (RK4).
- calculer la valeur de la condition aux limites.
- Si on ne trouve pas la valeur finale, on modifie la valeur initiale, puis on répète les étapes précédentes jusqu'à l'obtention de la valeur finale qu'on cherche.

La méthode de tir appliqué comme suit :

On considère l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = F\left(x, f, \frac{df}{dx}\right); \text{ avec } x \in [a, b] \quad (\text{III.15})$$

Utilisant les conditions aux limites suivantes:

$$f(a) = c_1 ; f(b) = c_2. \quad (\text{III.16})$$

Nous pouvons encore approcher ce problème par le choix des conditions initiales suivantes :

$$f(a) = c_1 ; \frac{df(a)}{dx} = e_n \quad (\text{III.17})$$

- $e_n$  : une constante qui doit être calculé quand  $f(b) = c_2$

Le choix de valeur  $e_n$  est généralement arbitraire qui toutefois vérifie le test de convergence :

$$|f(b, e_n) - c_2| \leq \varepsilon \quad (\text{III.18})$$

avec  $\varepsilon$  : un nombre réel infiniment petit

Le test de convergence doit être vérifié, sinon il va falloir corriger la valeur de  $e_n$  par le moyen d'une correction de type Newton, le processus itératif est ainsi poursuivi jusqu'à satisfaction du test de convergence.

Le principe de la correction de Newton est présenté comme suit, en utilisant le développement limité à l'ordre un au voisinage de  $e_n$ , et on obtient alors :

$$f(b, e_{n+1}) = f(b, e_n) + (e_{n+1} - e_n) \frac{df}{de_n}(b, e_n) = c_2 \quad (\text{III.19})$$

A partir de l'équation précédente, On déduit la formule de correction de Newton suivante :

$$e_{n+1} = e_n \frac{c_2 - f(b, e_n)}{\frac{df}{de_n}(b, e_n)} \quad (\text{III.20})$$

L'utilisation de la formule de correction de Newton (IV.20) nécessite la connaissance préalable de la fonction G.

Avec : G Fonction introduite  $G = f'$

Donc on résout le problème avec l'utilisation des variations relatives suivante :

$$\frac{d}{de_n} f(b, e_n) \quad (\text{III-21})$$

Alors, on résout le problème aux variations mentionné ci-dessus, associée à l'équation (III-15), Munie des conditions aux limites (III-17), donc le problème se présente comme suit (III-22) :

$$\frac{d}{de_n} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right) = \frac{d}{de_n} \left( F \left( x, f, \frac{df}{dx} \right) \right) \text{ avec } x \in [a, b]$$

Avec

$$\frac{d}{de_n} f(a) = 0 \quad \frac{d}{de_n} f'(a) = 1 \quad (\text{III-23})$$

L'équation obtenue (III-22), avec les conditions aux limites (III-23), elle peut être résolue par la méthode de Rangé-kutta (RK4).

### III.5 Algorithme de résolution

Un algorithme est une suite finie et non ambiguë d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre une classe de problèmes, l'exemple étudié précédemment montre bien que le problème consiste à chercher la valeur appropriée de  $e_n$ , Qui ressemble au problème présentées. Donc on peut présenter l'algorithme associer le problème original comme suit :

- Résoudre l'équation différentielle aux conditions initiales choisie arbitrairement,

$$y(a) = c_1 \text{ et } y'(a) = e_n$$

- Détermine la valeur de  $f(b)$ , a  $x=b$ , pour faire une comparaison entre la valeur chercher et la valeur qu'on trouve.
- ajuste la valeur de  $e_n$  jusqu'au niveau de précision désiré.
- Dès que la valeur cible souhaitée est obtenue par les itérations successives avec la précision requise, on affiche les conditions initiales trouvées.

### III.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode à suivre, pour la résolution des équations de problème de notre étude. Nous avons décrit la méthode Runge-Kutta d'ordre quatre, ainsi l'algorithme de résolution qui concerne la méthode associe à la technique de tir.

# **Chapitre IV**

## **Résultats et Discussion**

# Résultats et Discussion

## IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les principaux résultats obtenus à partir de l'étude numérique d'un jet impactant sur disque chauffé non rotatif. Les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont obtenus en utilisant la méthode numérique (méthode de Runge- Kutta d'ordre 4), cette méthode est bien exposée dans le chapitre précédent.

Nous rappelons que notre étude concerne un écoulement de point de stagnation de couche limite bidimensionnelle qui se développe sur un disque horizontale chauffé, dont la température est supérieure à celle du fluide. En raison de l'existence d'un transfert thermique, il existe un couplage entre l'aspect dynamique et thermique du problème. L'étude est sur l'influence de la variation du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) et la source de chaleur ( $B$ ) sur l'aspect dynamique et thermique de l'écoulement le long de la paroi. Les champs de vitesses de températures est des grandeurs physiques qui sont le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement seront présentés en détail sous forme de courbes.

## IV.2 Validation des résultats par le code de calcul

Pour donner une crédibilité à nos résultats numériques nous avons fait une comparaison des résultats obtenus par nos simulations numériques avec ceux disponibles dans la littérature. On va valider notre simulation numérique en comparant nos résultats avec ceux de Ishak et al [12] et Dinarvand et al [14].

**Tableau IV.1:** Valeurs de  $f''(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand  $\lambda=1$ .

$Pr$	<i>Ishak et al</i> [12]	<i>Dinarvand et al</i> [14]	Nos résultats
0.7	1.706376	1.70632	1.7063
1	-	1.67543	1.6754
7	1.517952	1.51791	1.5179
10	-	1.49283	1.4928
20	1.448520	1.44848	1.4485
100	1.368070	1.36803	1.3680

**Tableau IV.2 :** Valeurs de  $-\theta'(0)$  pour différentes valeurs du nombre de Prandtl quand  $\lambda=1$ .

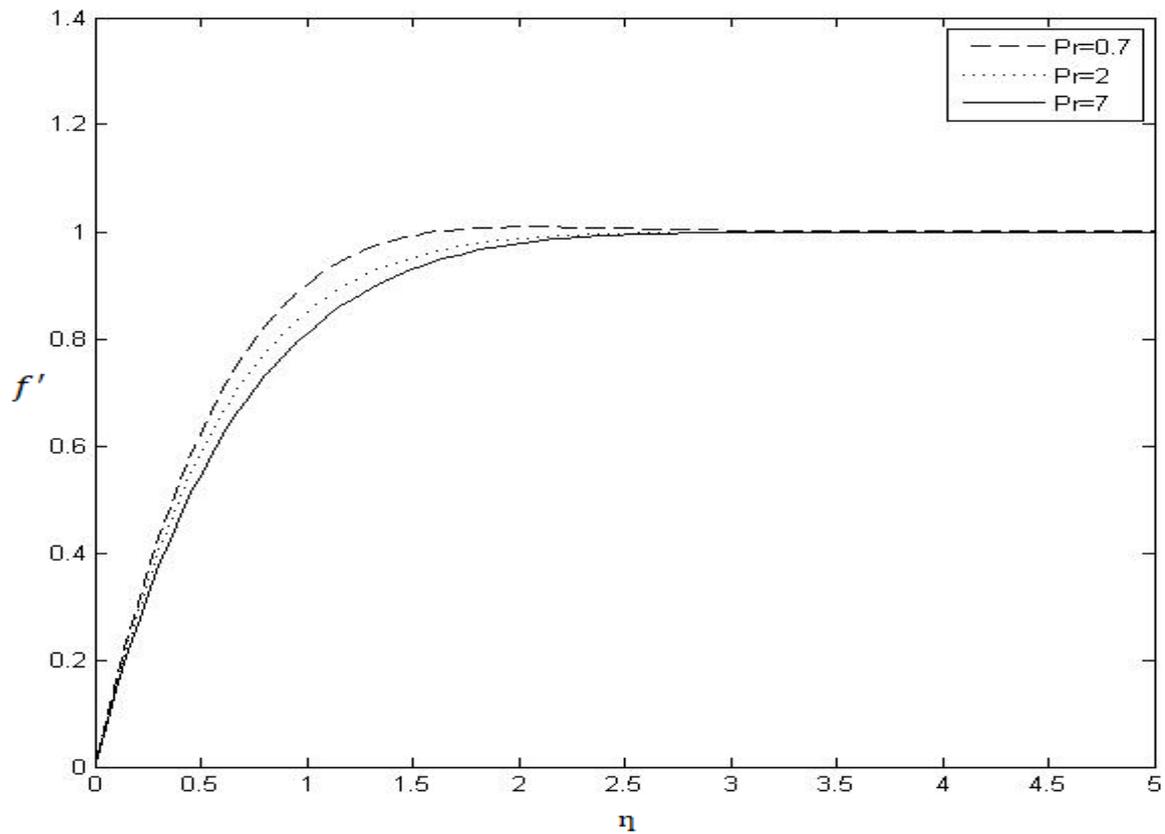
$Pr$	<i>Ishak et al</i> [12]	<i>Dinarvand et al</i> [14]	Nos résultats
0.7	0.7641	0.76406	0.7641
1	0.8708	0.87078	0.8708
7	1.7224	1.72238	1.5179
10	1.9446	1.94462	1.9446
20	2.4576	2.45759	2.4576
100	4.2116	4.21158	4.2117

À partir des résultats des deux tableaux (IV.1 et IV.2), qui sont considérés comme des références, on note qu'il existe une grande homogénéité avec nos résultats, ce qui nous permet de prouver l'exactitude de nos travaux.

#### **IV.2.1 Caractéristique dynamique :**

Cette section concerne uniquement les résultats issus de la résolution de l'équation du mouvement. En analysant cette équation on constate qu'elle dépend du nombre de Prandtl, de la source de chaleur ainsi que de la flottabilité. Pour mieux suivre le développement des champs dynamiques nous présentons les profils des vitesses suivants :

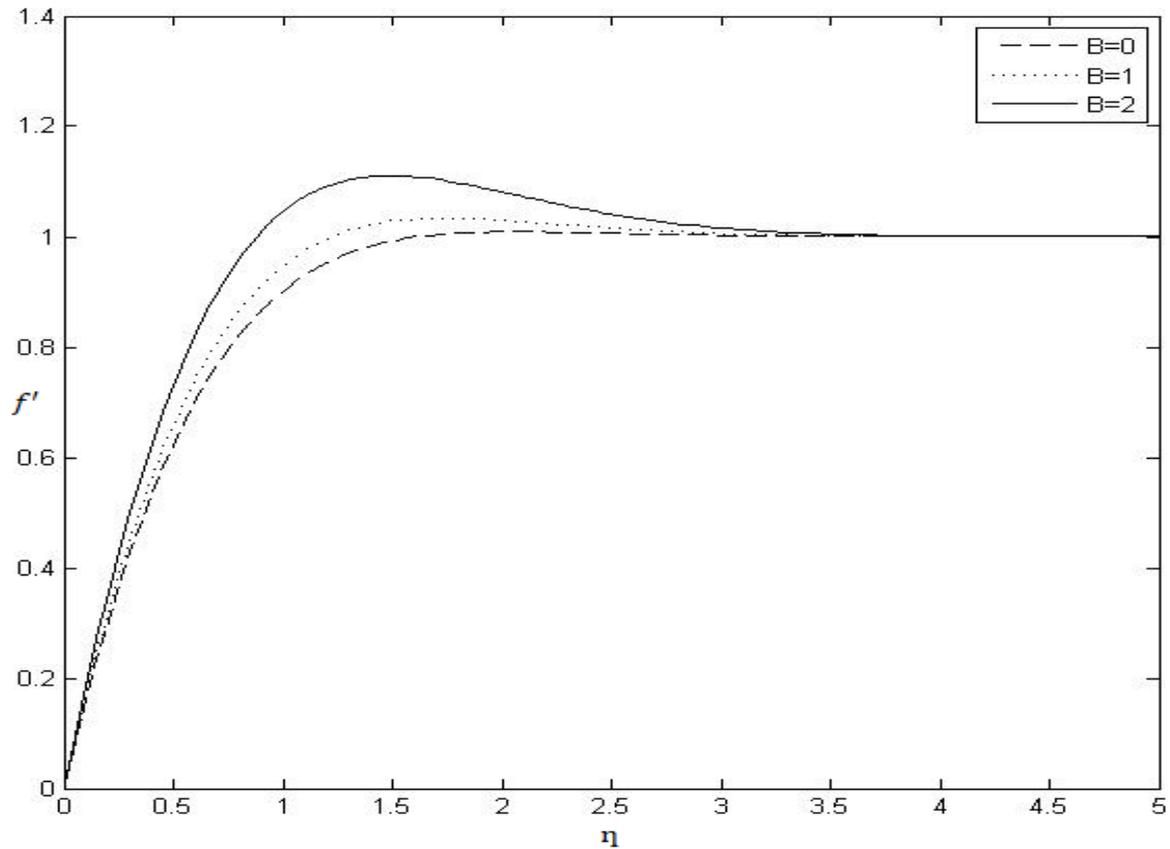
➤ L'effet de nombre de Prandtl  $Pr$  sur le profil de vitesse  $f'$  :



**Figure IV.1** Effet de  $Pr$  sur le profil de vitesse  $f'$  en fonction ( $\eta$ )

La variation de profile de vitesse  $f'$  en fonction de ( $\eta$ ) pour divers valeurs nombre de Prandtl ( $Pr$ ), varié entre  $[0.7, 2, 7]$ , avec un paramètre de source de chaleur constante  $B = 0$  et un paramètre de flottabilité  $\lambda = 1$ , la figure(IV.1) montre que l'épaisseur de la couche limite dynamique se rétrécit avec l'augmentation de nombre de Prandtl  $Pr$ , et on remarque aussi que l'augmentation de nombre de Prandtl fait diminuer le profil  $f'$ .

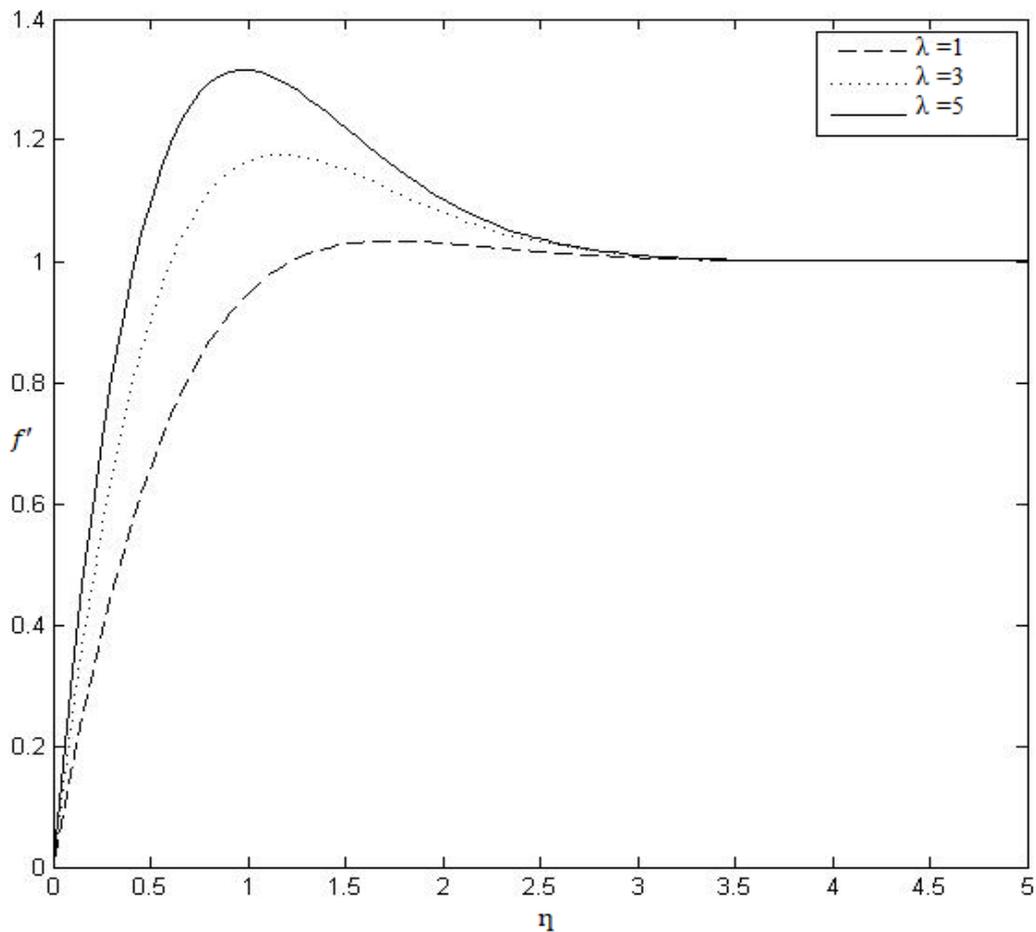
➤ L'effet du paramètre de source de chaleur  $\beta$  sur le profil de vitesse  $f'$  :



**Figure IV.2** Effet de B sur le profil de vitesse  $f'$  en fonction ( $\eta$ )

La figure (IV.2) présente la variation du profile de vitesse  $f'$  en fonction de la variable adimensionnelle ( $\eta$ ), pour divers valeurs de source de chaleur  $B$  (0, 1, 2), avec un nombre de Prandtl fixe à  $Pr = 0.7$  et le paramètre de flottabilité  $\lambda = 1$ , on remarque que l'épaisseur de la couche limite dynamique s'étend avec l'augmentation de source de chaleur  $\beta$ , et on remarque que l'augmentation de source de chaleur accélère l'écoulement.

➤ L'effet du paramètre de flottabilité  $\lambda$  sur le profil de vitesse  $f'$  :



**Figure IV.3** Effet de  $\lambda$  sur le profil de vitesse  $f'$  en fonction de  $(\eta)$

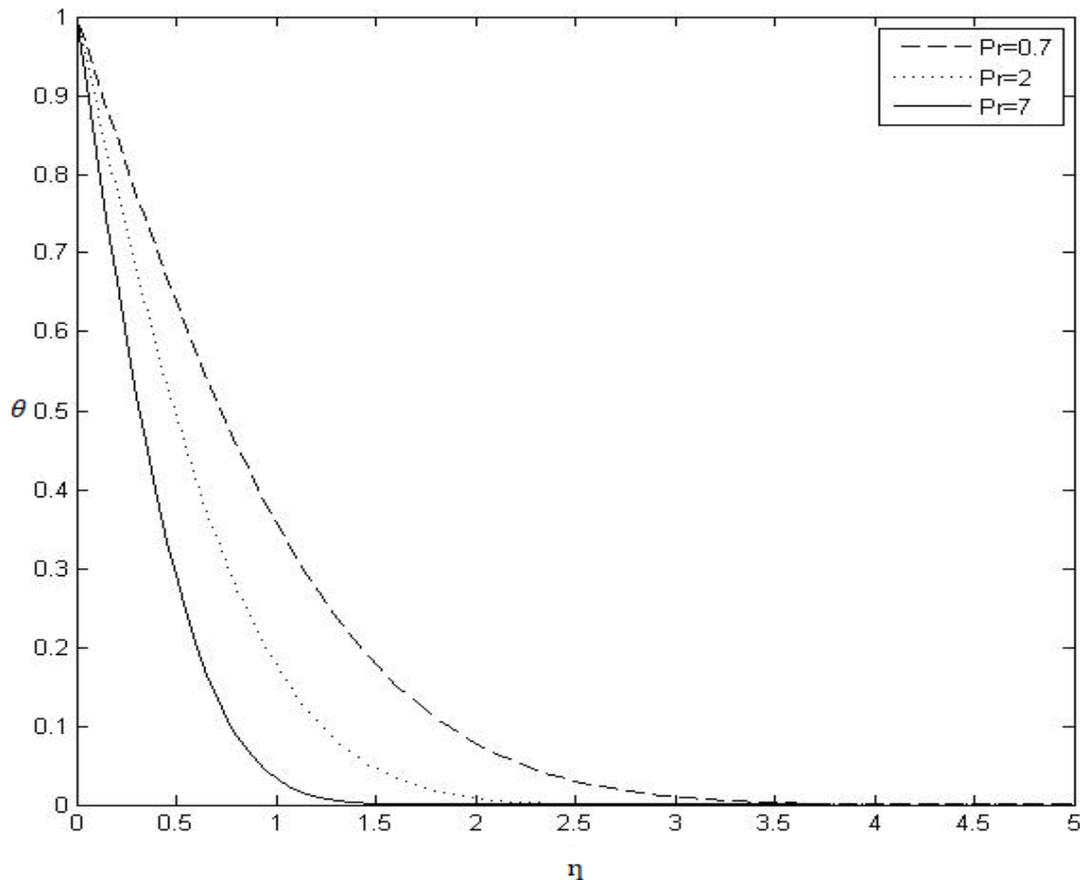
La figure (IV.3.2) présente la variation du profil de vitesse  $f'$  en fonction de  $(\eta)$ , pour divers paramètres de flottabilité (1, 3, 5), avec un nombre de Prandtl fixe à  $Pr = 0.7$  et un paramètre source de chaleur  $B = 1$ , on remarque que l'augmentation du paramètre de flottabilité conduit à l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite dynamique, et on remarque que l'augmentation de flottabilité accélère l'écoulement.

#### IV.3.2 Caractéristique thermique :

Cette partie concerne seulement les résultats obtenus lors de la résolution de l'équation d'énergie mentionnée précédemment. En analysant cette équation on constate qu'elle dépend

de nombre de Prandtl, source de chaleur ainsi que la flottabilité, Pour mieux suivre le développement des champs thermiques nous présentons les profils des températures suivants :

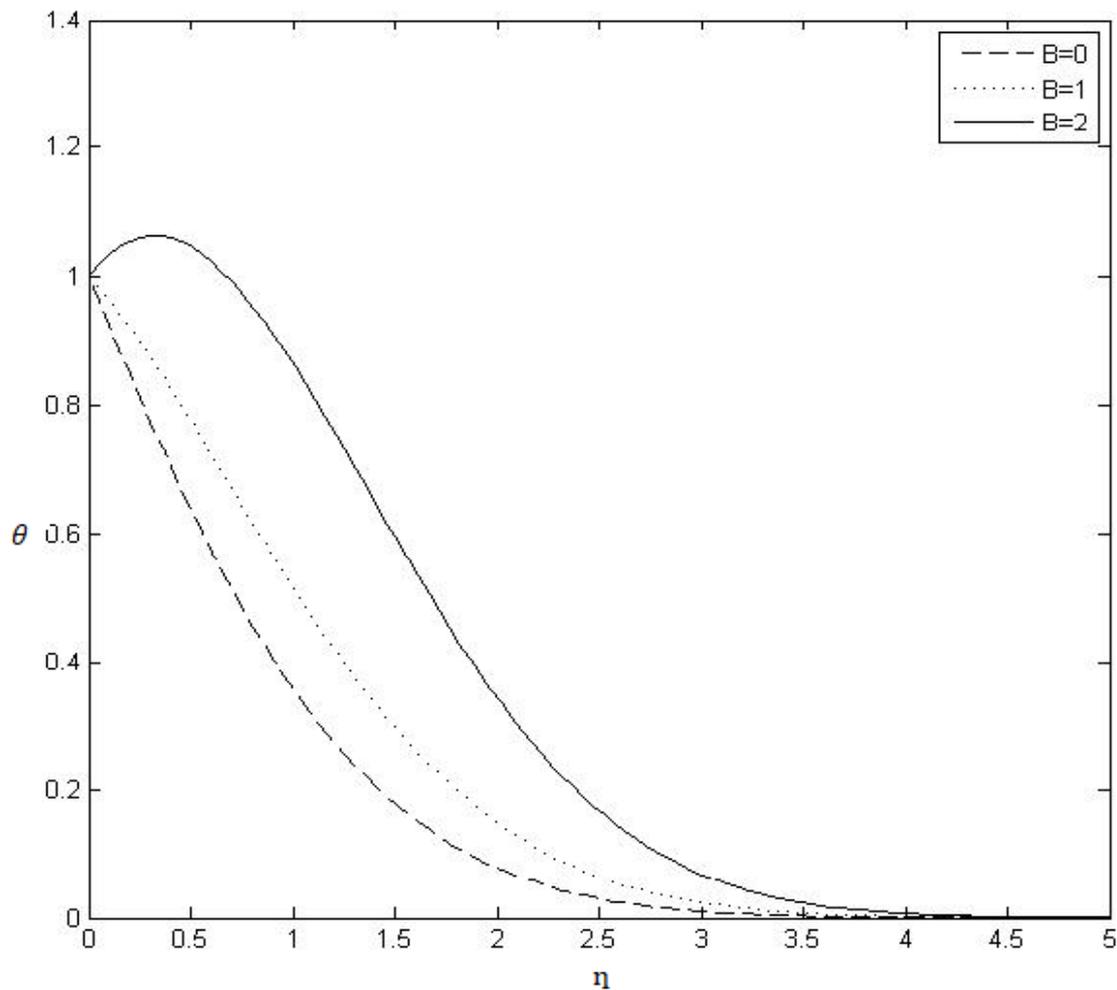
➤ **L'effet de nombre de Prandtl  $Pr$  sur le profil de température  $\theta$  :**



**Figure IV.4** Effet de  $Pr$  sur le profil de température  $\theta$  en fonction de  $(\eta)$

La figure (IV.4) présente la variation du profil de température  $\theta$  en fonction  $(\eta)$ , pour divers valeurs nombre de Prandtl  $Pr$  (0.7, 2,7), avec un paramètre de source de chaleur  $B=0$  et une valeur de flottabilité fixé à  $\lambda = 1$ , on remarque que la température adimensionnelle ( $\theta$ ) diminue avec l'augmentation de  $(\eta)$ , et que l'épaisseur de couche limite thermique se rétrécit avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

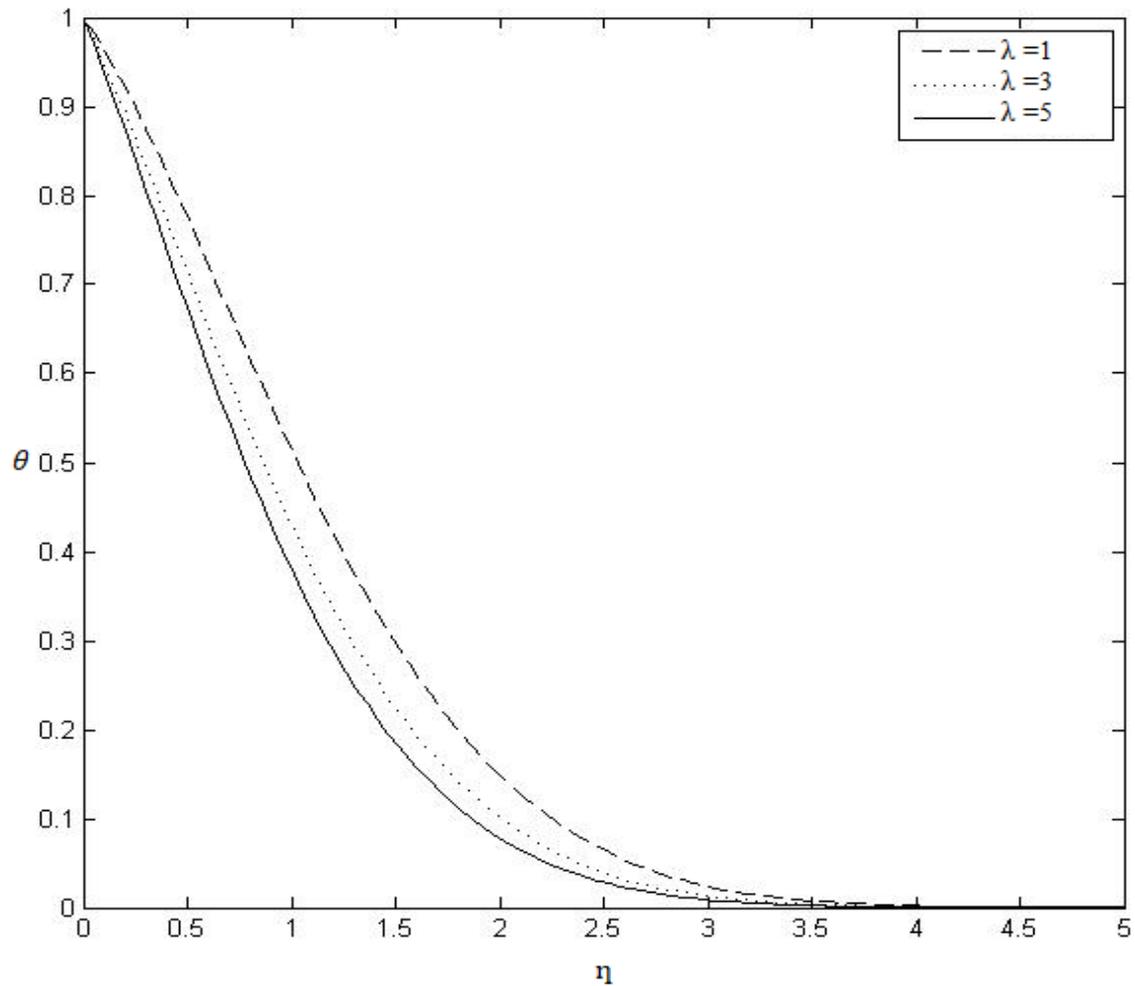
➤ L'effet de source de chaleur  $\beta$  sur le profil de température  $\theta$  :



**Figure IV.5** Effet de  $\beta$  sur le profil de température en fonction de  $(\eta)$

La variation du profil de température  $\theta$  en fonction de la variable adimensionnelle  $(\eta)$ , pour divers valeurs de source de chaleur  $B(0, 1, 2)$ , avec un nombre de Prandtl fixe à  $Pr = 0.7$  et le paramètre de flottabilité  $\lambda = 1$ , on remarque sur la figure (V.3.5) que avec l'augmentation de source de chaleur  $\beta$  l'épaisseur de la couche limite thermique augmente et la température adimensionnelle  $\theta$  diminue avec l'augmentation de  $(\eta)$ .

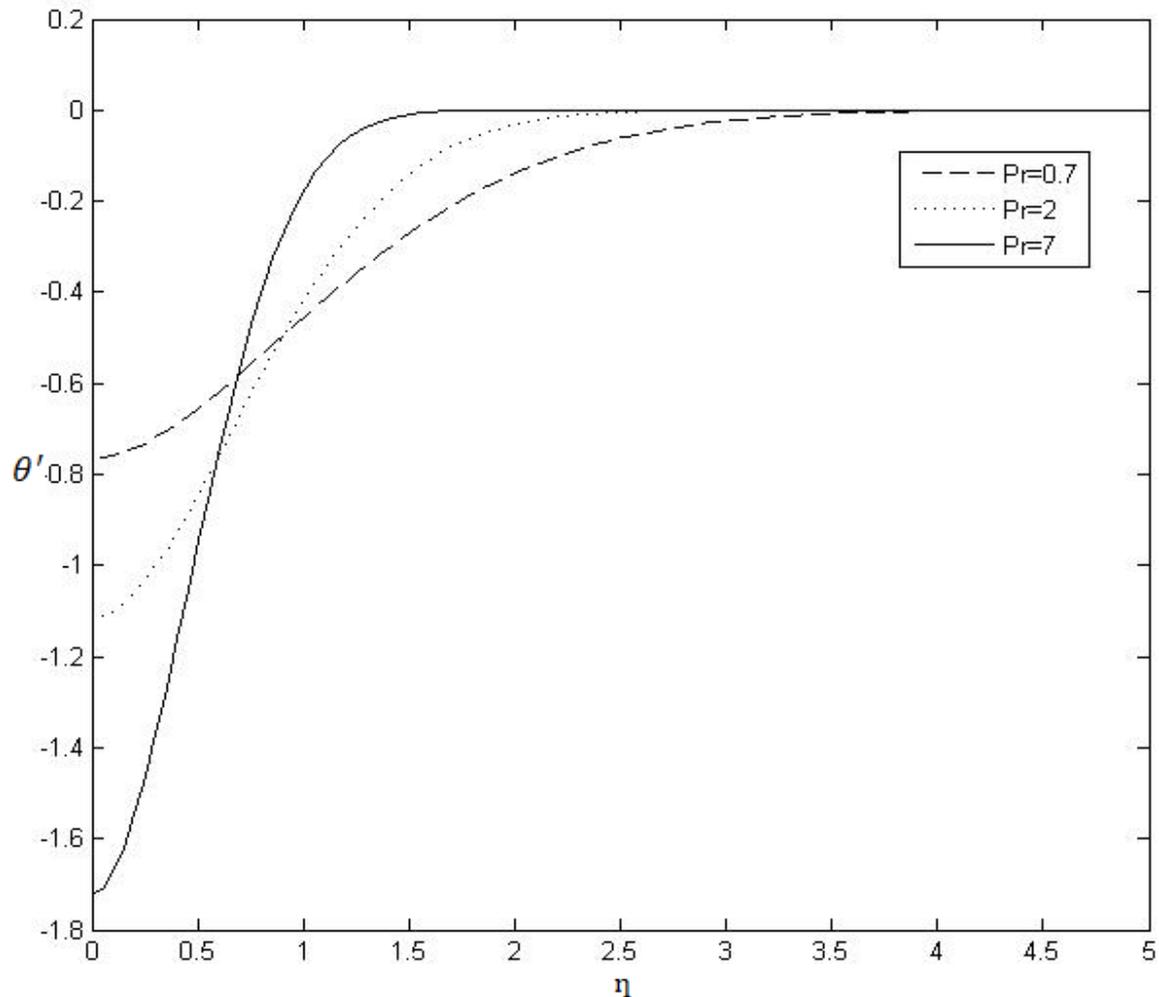
➤ L'effet de paramètre de flottabilité  $\lambda$  sur le profil de température  $\theta$  :



**Figure IV.6** Effet de  $\lambda$  sur le profil de température en fonction de ( $\eta$ )

La figure (IV.6) présente la variation du profil température de  $\theta$  en fonction( $\eta$ ) , pour divers paramètre de flottabilité (1, 3,5), avec un nombre de Prandtl fixe à  $Pr=0.7$  et un paramètre de source de chaleur  $\beta=1$  , on remarque que l'augmentation du paramètre de flottabilité conduit à la diminution de l'épaisseur de la couche limite thermique, et la température adimensionnelle  $\theta$  diminue avec l'augmentation de( $\eta$ ).

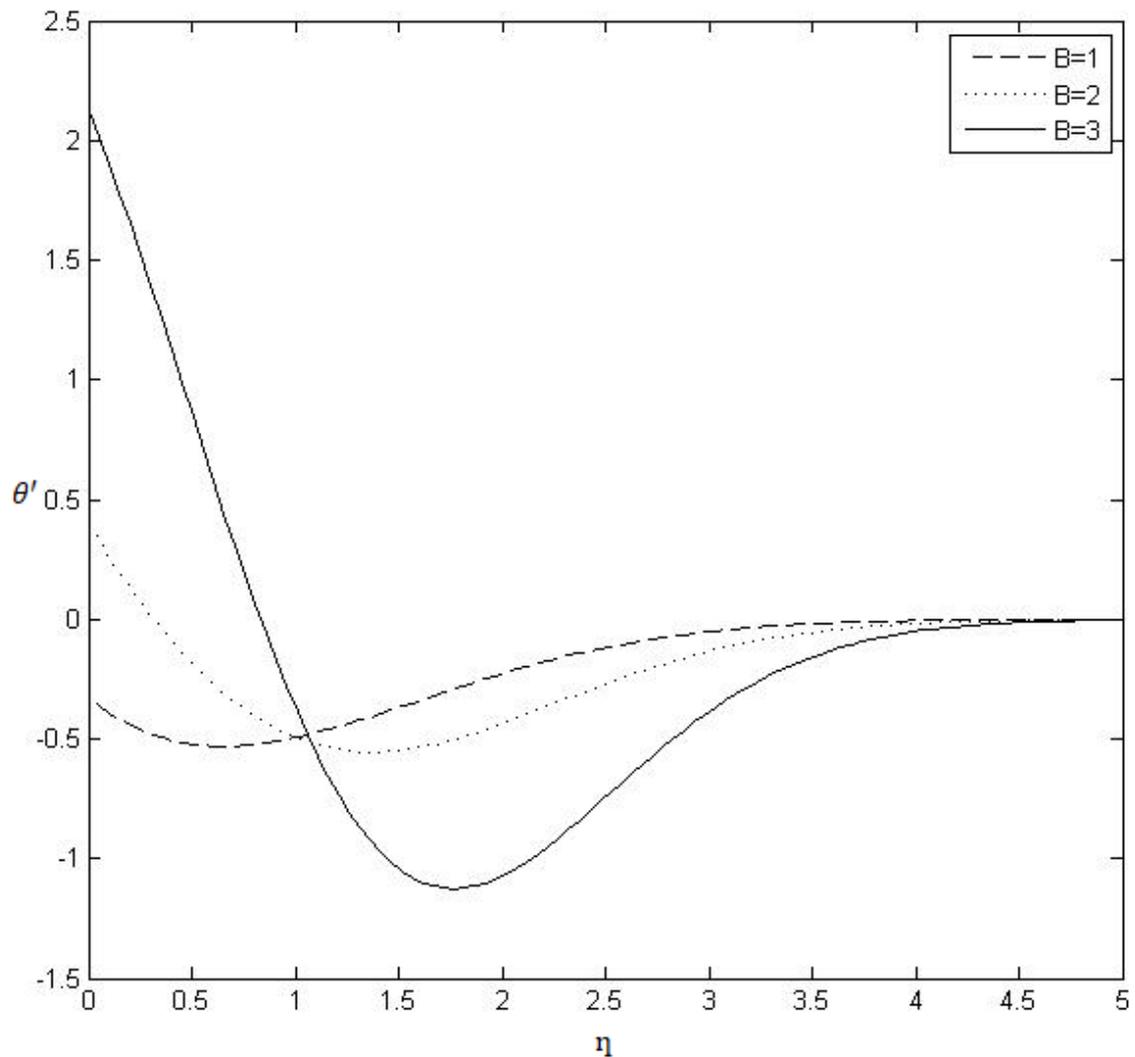
➤ L'effet de nombre de Prandtl  $Pr$  sur le gradient de température  $\theta'$  :



**Figure IV.7** Effet de  $Pr$  sur le gradient température de  $\theta'$  en fonction ( $\eta$ )

L'évolution de gradient de température  $\theta'$  en fonction de ( $\eta$ ) , pour divers valeurs de nombre de Prandtl  $Pr$  (0.7, 2, 7) avec un paramètre de flottabilité fixé à  $\lambda = 1$  et une source de chaleur  $B = 0$ , est présentée sur la figure(IV.7), on observe que le gradient de température  $\theta'$  augmente avec l'augmentation de ( $\eta$ ) et on observe aussi que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

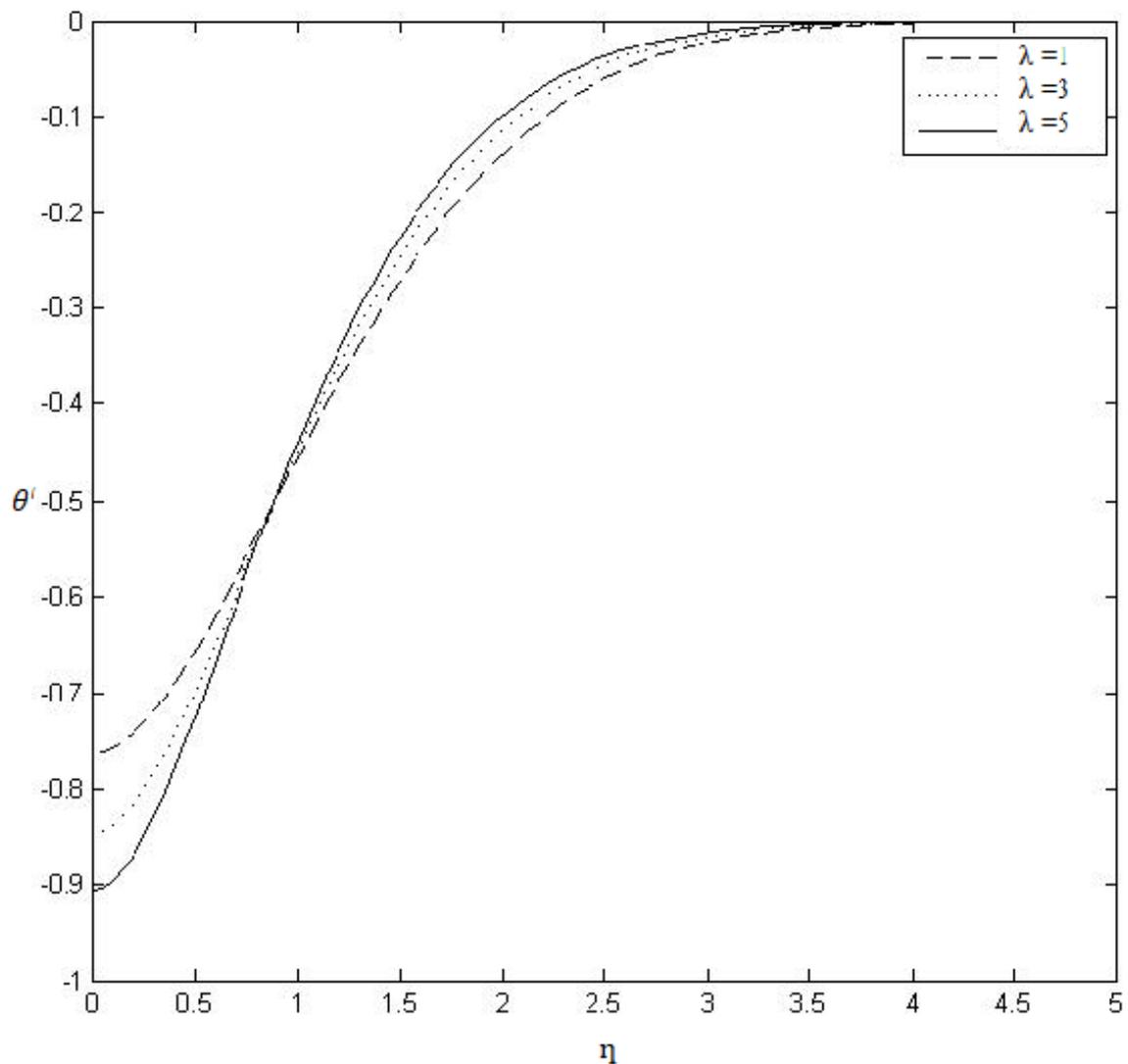
➤ **L'effet de source de chaleur  $\beta$  sur le gradient de température  $\theta'$  :**



**Figure IV.8** Effet de B sur le gradient température de  $\theta'$  en fonction de  $(\eta)$

La figure (IV.8) présente la variation du gradient de température  $\theta'$  en fonction de  $(\eta)$ , pour divers valeurs de source de chaleur  $\beta$  (1, 2,3), avec un nombre de Prandtl fixe a  $Pr = 0.7$  et le paramètre de flottabilité  $\lambda = 1$ . On remarque que le gradient de température  $\theta'$  diminue avec l'augmentation de source de chaleurs et cela pour des petites valeurs de la  $(\eta)$ , mais par contre pour les grandes valeurs de  $(\eta)$  on remarque l'effet inverse, et on remarque un étirement de l'épaisseur de la couche limite thermique avec l'augmentation  $(\eta)$ .

➤ L'effet de paramètre flottabilité  $\lambda$  sur le gradient de température  $\theta'$  :

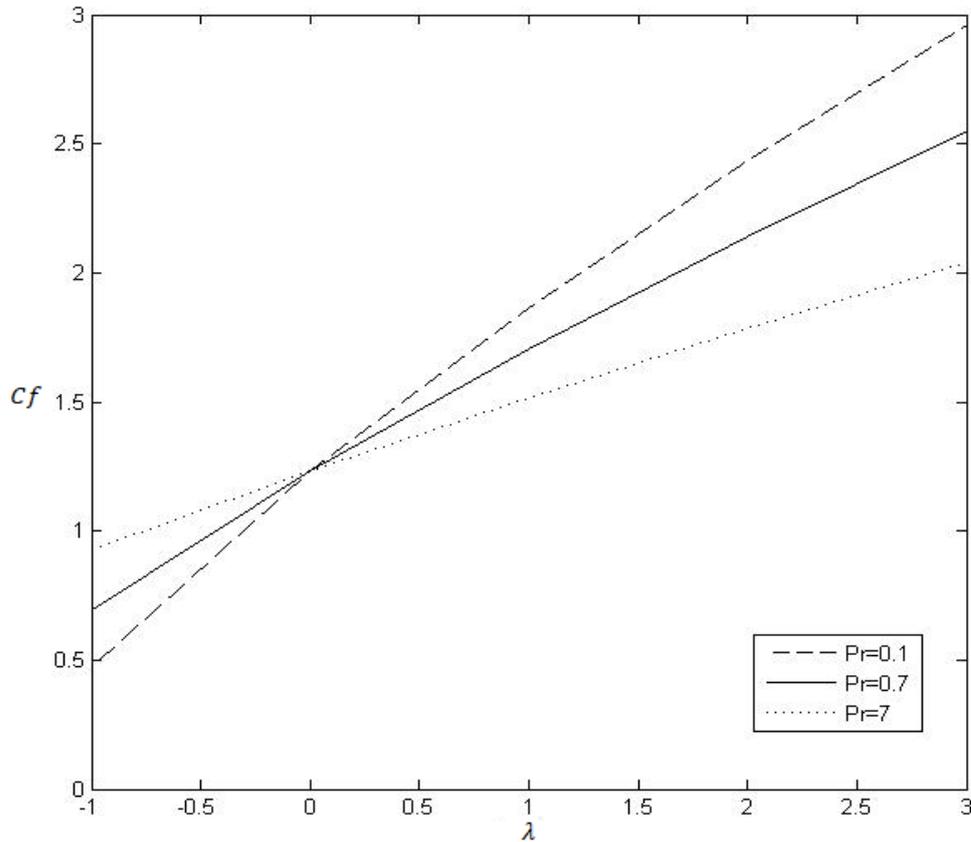


**Figure IV.9** Effet  $\lambda$  de sur le gradient température de  $\theta'$  en fonction de ( $\eta$ )

La figure (IV.9) présente la variation du gradient température de  $\theta'$  en fonction de ( $\eta$ ), pour divers valeurs de flottabilité  $\lambda$  (1, 3,5), avec un nombre de Prandtl fixe à  $Pr = 0.7$  et un paramètre de source de chaleur  $B = 1$ , on remarque que le gradient de température  $\theta'$  augmente avec l'augmentation de ( $\eta$ ).

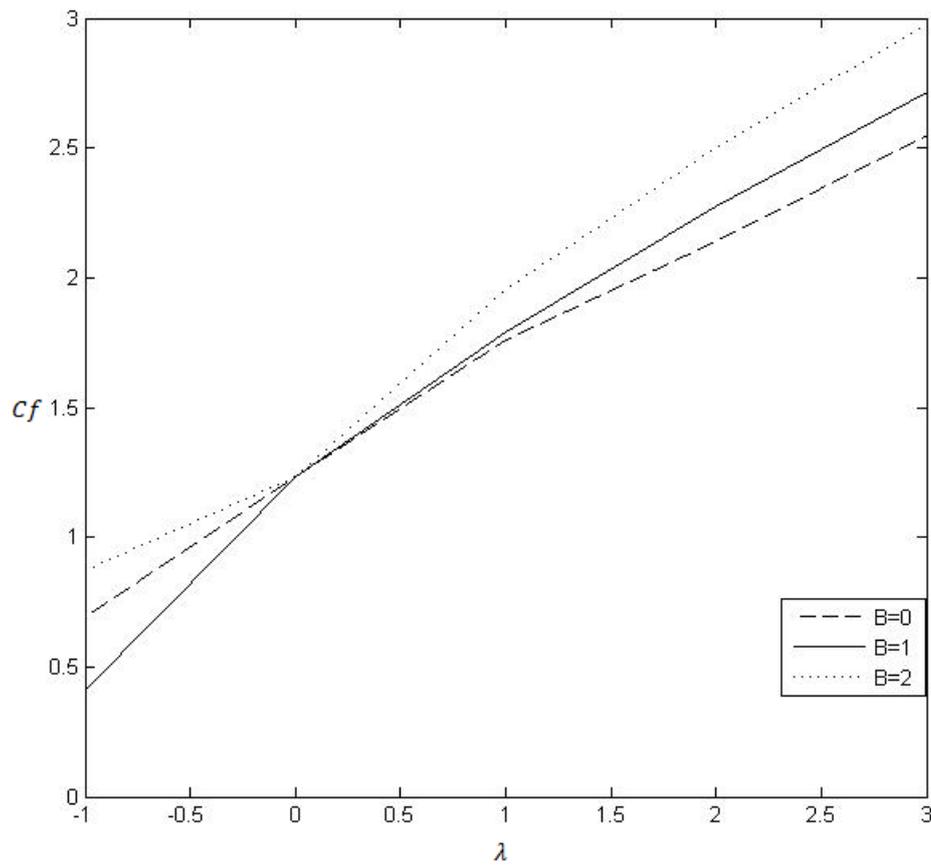
### IV.3.3 Transfert de chaleur et coefficient de frottement :

➤ Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de  $\lambda$  :



**Figure IV.10** coefficient de frottement ( $Cf$ ) pour différentes valeurs de  $Pr$

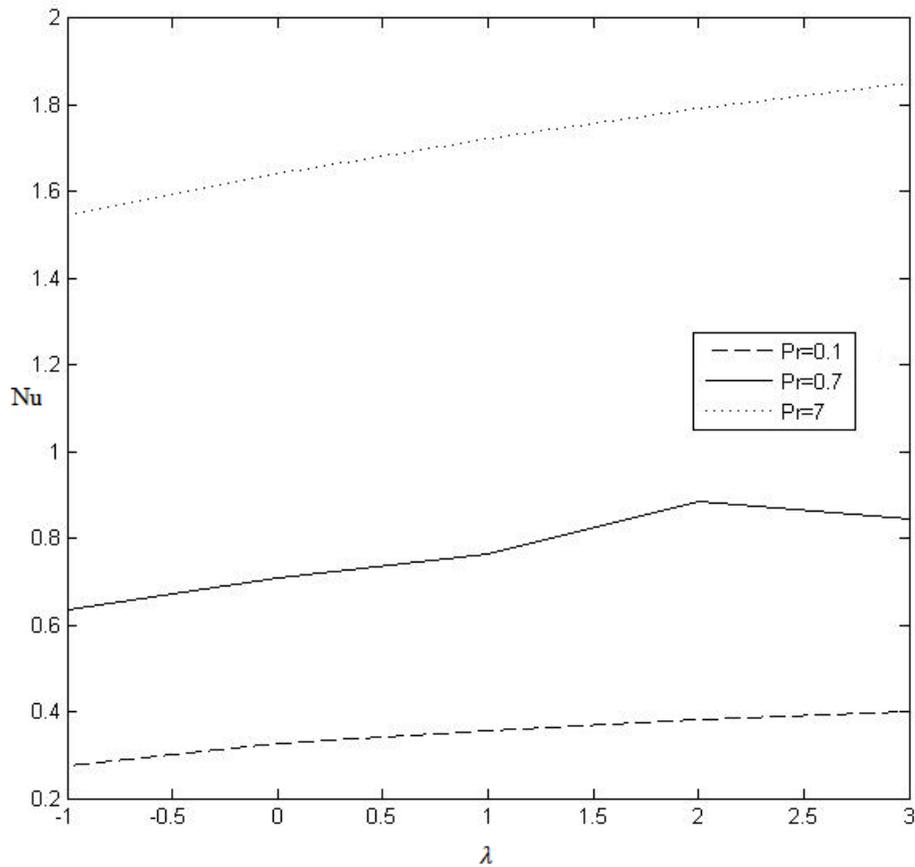
La figure (IV.10) présente la variation du coefficient de frottement ( $Cf$ ) en fonction de ( $\lambda$ ), pour divers valeurs de nombre de Prandtl  $Pr$  et un paramètre de source de chaleur  $B=0$ , on remarque que le coefficient de frottement augmente avec l'augmentation du  $\lambda$  et on observe que, lorsque  $\lambda < 0$  le coefficient de frottement  $Cf$  augmente avec l'augmentation de  $Pr$ , quand  $\lambda=0$  le coefficient de frottement  $Cf$  reste constant pour les différents valeurs de  $Pr$  et lorsque  $\lambda > 1$  le coefficient de frottement  $Cf$  diminue avec l'augmentation de  $Pr$ .



**Figure IV.11** coefficient de frottement ( $Cf$ ) pour différentes valeurs de  $B$

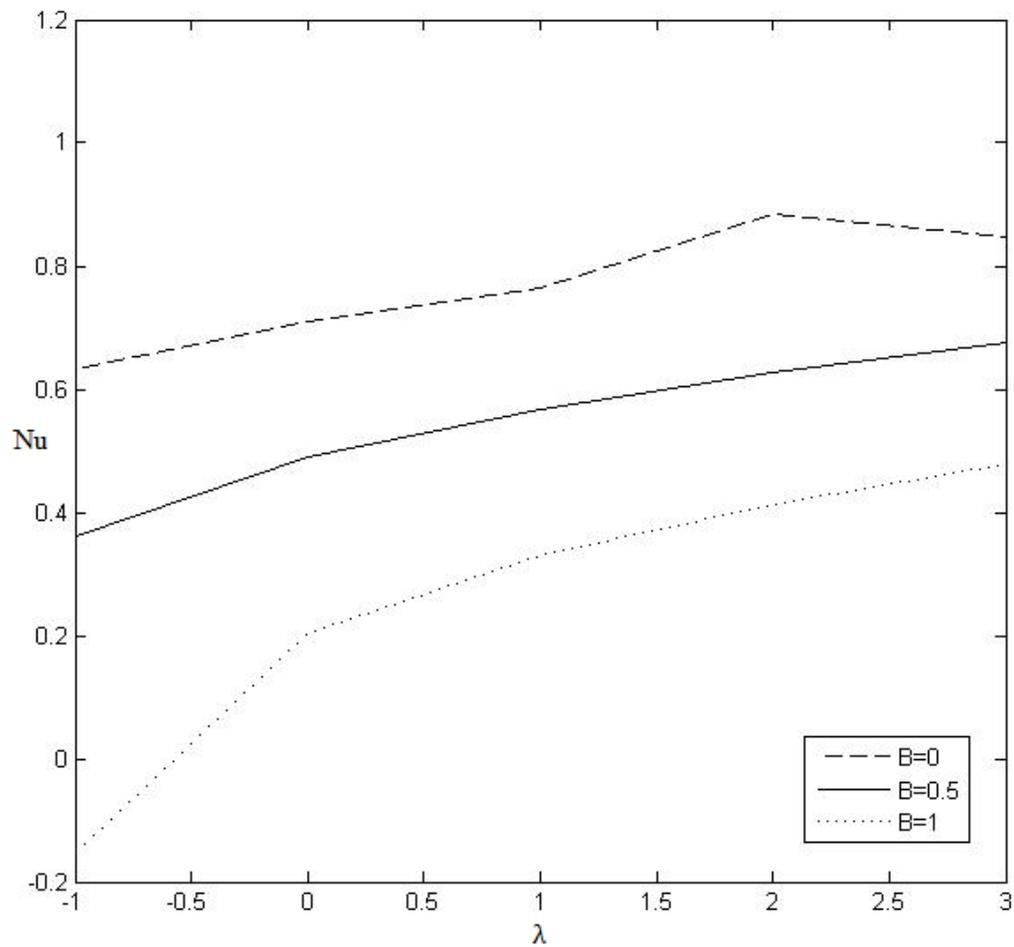
La figure (IV.11) présente la variation du coefficient de frottement ( $Cf$ ) en fonction de ( $\lambda$ ), pour divers valeurs du paramètre de source de chaleur  $B$  et un nombre de Prandtl  $Pr=0.7$ , on remarque que le coefficient de frottement  $Cf$  augmente avec l'augmentation de  $\lambda$ , et diminue avec l'augmentation de  $B$ .

➤ Profil du nombre de Nusselt local en fonction de  $\lambda$  :



**Figure IV.12** le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différentes valeurs de  $Pr$

La figure (IV.12) présente la variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction de ( $\lambda$ ), pour divers valeurs du nombre de Prandtl et un paramètre de source de chaleur  $B=0$ , on remarque que le nombre de nusselt local augmente avec l'augmentation de  $\lambda$  et de  $Pr$ .



**Figure IV.13** le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) pour différentes valeurs de B

La figure (IV.13) présente la variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction de ( $\lambda$ ), pour divers valeurs du paramètre de source de chaleur B et un nombre de Prandtl  $Pr=0.7$ , on remarque que le nombre de nusselt local augmente avec l'augmentation de  $\lambda$  et diminue en fonction de B.

#### IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les comportements d'une couche limite dynamique et thermique pour un jet impactant sur un disque chauffé non rotatif. Les profils des vitesses et des températures sont tracés en fonction de  $(\eta)$  pour étudier les effets de nombre de Prandtl  $Pr$ , le paramètre de source de chaleur  $\beta$  et le paramètre de flottabilité  $\lambda$ , pour analyser la structure de couche limite ainsi pour présenter l'évolution de nombre de Nusselt local ( $Nu$ ) et de coefficient de frottement ( $Cf$ ) en fonction du paramètre de flottabilité  $\lambda$ . Les résultats obtenus à propos de cette étude sont analysés et discutés. Il est vérifié que l'épaisseur d'une couche limite varie avec la variation des paramètres ( $Pr$ ), ( $\beta$ ) et ( $\lambda$ ) et le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de Nusselt local ( $Nu$ ).

# **Conclusion Générale**

## Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié numériquement un jet impactant sur un disque horizontal dont la température est supérieure à celle du fluide et sans rotation. L'objectif principal de ce travail est d'analyser la structure dynamique et thermique du flux de couche limite qui se présente sur la surface plane de disque.

Cette étude a été réalisée suite à une recherche bibliographique actuelle existant sur les travaux similaires à l'écoulement laminaire de couche limite au voisinage de point de stagnation sur les parois horizontaux et verticaux.

Nous avons mis en avant les équations de quantité de mouvement et d'énergie liées à notre étude. Pour résoudre ce système d'équations partielles en le convertissant en système d'équations différentielles ordinaires présenté sous la forme d'un problème aux valeurs limites, puis le résoudre numériquement par la méthode de Runge – Kutta d'ordre quatre associé à la technique de tir.

La validation du code de calcul a été faite avec des travaux numériques trouvés dans la littérature. Un bon accord a été obtenu entre nos simulations avec les simulations numériques relatives au flux de convection mixte près du point de stagnation sur une surface plane.

Pour notre étude nous avons varié une gamme de paramètre, le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), le paramètre de source de chaleur ( $B$ ) et le paramètre de flottabilité ( $\lambda$ ), pour étudier leurs effets sur les champs dynamiques (la vitesse ( $f'$ ) et le coefficient de frottement ( $Cf$ )) et champs thermiques (la température ( $\theta$ ) et le nombre de Nusselt ( $Nu$ )).

En premier lieu, nous avons examiné l'influence de nombre de Prandtl ( $Pr$ ) sur les caractéristiques dynamiques et thermiques, pour une gamme de valeurs ( $Pr = 0.7; 2; 7$ ), nous avons constaté que :

- l'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl ( $Pr$ ).
- la vitesse de l'écoulement diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl ( $Pr$ ).

Dans la seconde étude, nous avons examiné l'effet de source de chaleur ( $B$ ) sur les caractéristiques dynamiques et thermiques, pour une gamme de valeurs ( $B = 0; 1; 2$ ), nous avons constaté que :

- l'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique augmente avec l'augmentation du paramètre de source de chaleur ( $B$ ).

- l'augmentation de source de chaleur  $B$  accélère l'écoulement.

En dernière lieu, nous avons examiné influence de paramètre de flottabilité( $\lambda$ ) sur les caractéristiques dynamiques et thermiques, pour une gamme de valeurs( $\lambda = 1; 3; 5$ ), nous avons constaté que :

- l'épaisseur de la couche limite dynamique augmente avec l'augmentation de paramètre de flottabilité( $\lambda$ ).
- l'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation paramètre de flottabilité( $\lambda$ ).

L'évolution de nombre de Nusselt local ( $Nu$ ) et le coefficient de frottement( $Cf$ ) pour un ensemble de paramètres différents,( le nombre de Prandtl( $Pr$ )et le paramètre de source de chaleur ( $B$ ) en fonction de paramètre de flottabilité  $\lambda$  montre que :

- l'augmentation de nombre de Prandtl augmente le nombre de Nusselt local et réduit le coefficient de frottement lorsque  $\lambda > 0$ , donc le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) améliore le taux de transfert thermique.
- l'augmentation de source de chaleur ( $B$ ) diminue le nombre de Nusselt local et réduit le coefficient de frottement, donc le nombre la source de chaleur ( $B$ ) diminue le taux de transfert thermique.
- Pour la valeur  $\lambda=0$  le coefficient de frottement reste constant pour différent valeurs de  $Pr$  et  $B$ .

# **Références Bibliographiques**

## Références Bibliographiques.

- [1] Fabien, C. Philippe, B. Philippe, et G.Zakaria, 28-30 Aout 2007, Etude expérimentale d'un jet laminaire impactant une plaque plane chauffée, 13èmes journées internationales de thermique, Albi, France, pp.1-5.
- [2] G. Bernard, cours transfert de chaleur, <http://www.grandjeanbpa.com/therm>.
- [3] G.Abhijit , K. Pradhan, Natural convection of non-Newtonian power-law fluids on a horizontal plate, International Journal of Heat and Mass Transfer ,volume 70, March 2014, pages 930-938
- [4] H.Ali, A. Abdenasser, Etude numérique du refroidissement d'une plaque chauffée par un jet l'impactant dans un canal, Mémoire de fin d'étude, université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [5] Hiemenz, Die nGrenzschicht aneinem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten graden Kreiszyylinder, Dingers Polytech. Journal 32 (1911) 321-410.
- [6] H.-T. Lin, W.-S. Yu and S.-L Yang, Taiwan, Mixed convection from a horizontal plate to fluids of any Prandtl number, W/irme- und Stofffibertragung 24, 225-234 (1989).
- [7] K. Stewartson, On the free convection from a horizontal plate, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 9a (1958) 276–282.
- [8] Incropera, D.Dewitt, T. Bergman, A.Lavine."Fundamentals of Heat and Mass Transfert". New York: Wiley, 6 edition;( 2007).
- [9] I. Anuar , R.Nazar, I.Pop, Dual solutions in mixed convection boundary layer flow of micropolar fluids, nternational Journal of Thermal Sciences 47 417–422,2009.

- [10] I.Anuar ,R. Nazar , N.Bachok, Ioan Pop, MHD mixed convection flow near the stagnation-point on a vertical permeable surface, journal homepage, Physica A 389 (2010) 40\_46.
- [11] M. Tarik et A. Feriel, Etude de l'influence des effets de flottabilité thermique et massique sur l'écoulement impactant sur une paroi chauffée, Mémoire de fin d'étude, université Abderrahmane Mira Bejaia.
- [12] S. Dinarvand, H. Tamim, R.Hosseini Ioan Pop, MHD mixed convection stagnation-point flow of a nanofluid over a vertical permeable surface: a comprehensive report of dual solutions, Heat Mass Transfer doi 10.1007/s00231-013-1264-2.
- [13] T. S. Chen, C. F. Yuh, Combined heat and mass transfer in mixed convection vertical and inclined plates, Int.J.Heat Mass Transfer, (1979), 23, 527-537.
- [14] Tian-Yih Wang, Mixed convection heat transfert from a horizontal plate to non-newtonian fluide, int. comm. heat mass transfer vol. 20, pp. 845-857, 1993 Printed in the US.
- [15] Yves Jannot, Transferts thermiques, Cours 2eme année, Ecole des Mines Nancy, 2011.
- [16] W.N. Gill, D.W. Zeh, E.D. Casal, Free convection on a horizontal plate, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 16 (1965) 539–541.

## Résumé

Dans ce travail nous avons étudié numériquement un écoulement de la couche limite induit par un jet laminaire et stationnaire, impactant sur un disque horizontal chauffé imperméable, l'écoulement est supposé axisymétrique et l'approximation de Boussinesq est adoptée. La résolution numérique du système des équations gouvernante est réalisée à l'aide de la méthode de tir qui est basée sur les conditions aux limites en utilisant la méthode Runge Kutta pour la transformation des conditions aux limites aux conditions initiale. L'objectif est d'analyser l'effet de certains paramètres, dont les conditions aux limites par l'étude de l'influence de la variation du nombre de Prandtl, la source de chaleur et le paramètre de flottabilité sur les champs dynamique et thermique. Les résultats obtenus montrent que le taux transfert de chaleur augmente si on augmente de nombre de Prandtl (Pr).

**Mot clés :** couche limite, écoulement laminaire, jet impactant méthode Runge-kutta, méthode tir.

---

## Abstract

In this work we have studied numerically a boundary layer flow induced by a laminar and stationary jet, impacting on an impermeable heated horizontal disc, the flow is assumed to be axisymmetric and the Boussinesq approximation is adopted. The numerical resolution of the system of governing equations is carried out using the draw method which is based on the boundary conditions using the Runge Kutta method for the transformation of the boundary conditions to the initial conditions. The objective is to analyze the effect of certain parameter, including the boundary conditions by studying the influence of the variation in the Prandtl number, the heat source and the buoyancy parameter on the dynamic and thermal fields. The results obtained show that the heat transfer rate increases if we increase the number of Prandtl number (Pr).

**Key words:** boundary layer, laminar flow, impacting jet Runge-kutta method, shooting method.