

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. MIRA - Bejaia

Faculté de Technologie
Département génie électrique
Spécialité électromécanique maintenance industrielle



Réf :.....

Mémoire de Fin de Cycle
En vue de l'obtention du diplôme

MASTER
En électromécanique option maintenance
industrielle

Thème

**Détermination de la période optimale de
remplacement des pièces d'usure**

Présenté par :

Amghar Halim et Moulelkaf lotfi

Soutenu le : 17/09/2020

Devant le jury composé de :

- ❖ Mr Fella
- ❖ Mr Ait mokhtar

Année universitaire : 2019/2020

Remerciements



Nous remercions tout d'abord Dieu, le tout-puissant de nous avoir accordé santé, courage et foi.

Nous adressons en particulier nos remerciements à nos encadrateurs Mr AMRI et Mme SERIR qui nous ont fait un grand honneur en dirigeant ce travail ainsi qu'en nous guidant tout au long de sa réalisation.

Nos remerciements vont également :

Mr Fella pour l'honneur qu'elle nous fait de présider et à Mr Ait mokhtar d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous tenons à formuler notre gratitude et nos profondes reconnaissances à l'égard de nos parents pour leurs indéfectibles soutiens durant tout notre cursus.

Afin de n'oublier personne, nos vifs remerciements





Dédicace

ÀU NOM DU TOUT MERVEILLEUX SENTIMENT, JE DÉDIE CE
MODESTE TRAVAIL :

À MES TRÈS CHERS PARENTS QU'UNE EXPRESSION NE
POURRA TRADUIRE
L'AMPLEUR DE MON AMOUR ET RECONNAISSANCES POUR EUX.

À MES SŒURS
À MON FRÈRE

À MON BINÔME ET AMI LOTFI

À MES AMIS ET TOUS CEUX QUI NOUS ONT AIDÉ.

HALIM.A



Dédicace

CE MODESTE TRAVAIL EST DÉDIE :

À MES CHERS PARENTS QUE DIEU LES PROTÈGE TOUS LES DEUX.

À MA SŒUR IBTISSAM.

À MON BINÔME ET AMI HALIM.

À MA FAMILLE : MES GRANDS-PARENTS, MES ONCLES ET MES TANTES.

À MES COUSINS :

LÝNA ,ÝANIS ,LYÉS ,MADJID,LATIF,HAKIMA ,NADJIA.

À MES AMIS :

NABIL ,DIDIN ,AMAR,MAHMOUD,BILAL,YAZID ,HALIM,NADJIM,MOUSSA,
KAMAL, ADEL.

LOTFI.M



*Table des
matières*

Introduction générale 1

Chapitre I : Notion de maintenance

1. Introduction 2

2. Historique (concepts et terminologie normalisés) 2

3. Généralité sur la fonction maintenance : 2

 3.1. Définition de la maintenance : 2

 3.1.1. Définitions AFNOR et CEN de la maintenance : 2

 3.1.2. Définitions de la maintenance selon l'AFNOR par la norme X 60-000..... 3

 3.1.3. Définition de la maintenance selon l'AFNOR par la norme NF X 60-010 3

 3.1.4. Définition de la maintenance selon Larousse 3

 3.2. Rôle de la maintenance et du dépannage des équipements dans l'industrie..... 3

 3.3. Intérêt de la maintenance..... 5

 3.4. Structure du service maintenance..... 5

 3.5. Fonctions d'un service maintenance 6

 3.5.1. Fonction étude et méthode..... 6

 3.5.2. Fonction exécution et mise en œuvre 6

 3.6. Politique de maintenance..... 6

 3.6. 1.Types de maintenance 6

 3.6.2. Les opérations de maintenance..... 9

 3.7. Les stratégies de maintenance : 11

4.Conclusion 12

Chapitre II : Notions de fiabilité

1.Introduction 13

2. Notions de fiabilité 13

 2.1 Définition du concept de fiabilité 13

 2.2 Défaillance de matériel ou système 14

 2.2.1. Paramètres d'identification des défaillances..... 14

2.3 Matériel réparable.....	16
2.4 Matériel irréparable (non réparable).....	17
2.5. Sûreté de fonctionnement	18
2.6. La maintenabilité	18
2.7. Disponibilité	19
2.7.1. Définition 1.	19
2.7.2. Définition 2	20
3. Indices de fiabilité	21
3.1. Fonction fiabilité.....	21
3.2 Taux de défaillance.....	22
3.3. Les différentes phases du cycle de vie d'un produit.....	23
4. Fiabilité d'un système	24
4.1 Configuration série	24
4.2 Configuration parallèle	25
4.3 Autres configurations	26
5. Lois de fiabilité.....	26
5.1. Lois discrètes :	26
5.2 Les lois continues :	26
5.3 Modèles paramétriques de fiabilité.....	27
5.3.1 La loi exponentielle.....	27
5.3.2 La loi de weibull	28
6. Analyse de Pareto ou ABC.....	29
6.1. Classification	30
6.2. Construction du diagramme.....	30
6.3. Diagramme de Pareto	30
7. Conclusion.....	31

Chapitre III : Détermination de la période optimale

1. Introduction	32
2. Modélisation mathématique	33
2.2. Modèles de remplacements par block	33
2.2. Modeles de remplacement basés sur l'âge	34
3. Application	36
3.1 Le taux de défaillance.....	36
3.2 Esperance	36
3.3 Ecart type	36
3.4 Détermination de la période optimale par modèle de remplacement par block.....	37
3.5 Détermination de la période optimale par Modèle de remplacement basé sur l'âge.....	38
3.6 Comparaison entre les deux modèles	40
4. Conclusion	40
Conclusion générale	41



Liste des

figures

Chapitre I : Notion de maintenance

Figure 1: les organismes de normalisation 2
Figure 2: structure type avec sectorisation partielle..... 5
Figure 3: Types de maintenance 11

Chapitre II : Notions de fiabilité

Figure 1: Chronogramme d'un équipement réparable..... 17
Figure 2: Chronogramme d'un équipement irréparable..... 17
Figure 3: Évolution de maintenabilité d'un système en fonction de temps 19
Figure 4: Évolution de disponibilité d'un équipement en fonction de temps 20
Figure 5: Évolution de disponibilité d'un équipement réparé de manière continue en fonction de temps 21
Figure 6: La courbe en baignoire 23
Figure 7: Composants en série 24
Figure 8: Composants en parallèle 25
Figure 9: Densité de probabilité de la loi exponentielle. 27
Figure 10: Influence de β sur la densité de probabilité et le taux de défaillance. 28
Figure 11: Diagramme de Pareto. 30

Chapitre III : Détermination de la période optimale

Figure 1: Remplacement à période fixe T_0 33
Figure 2 : Remplacement lorsque l'âge de la pièce (T_0)est atteint. 34
Figure 3 : Courbe de l'écart type et MTBF 37
Figure 4: allure C en fonction de T..... 38
Figure 3 : allure C en fonction de T..... 39



Liste des

Tableaux

Chapitre II : Notions de fiabilité

Tableau 1 : Les facteurs de maintenabilité 19

Chapitre III : Détermination de la période optimale

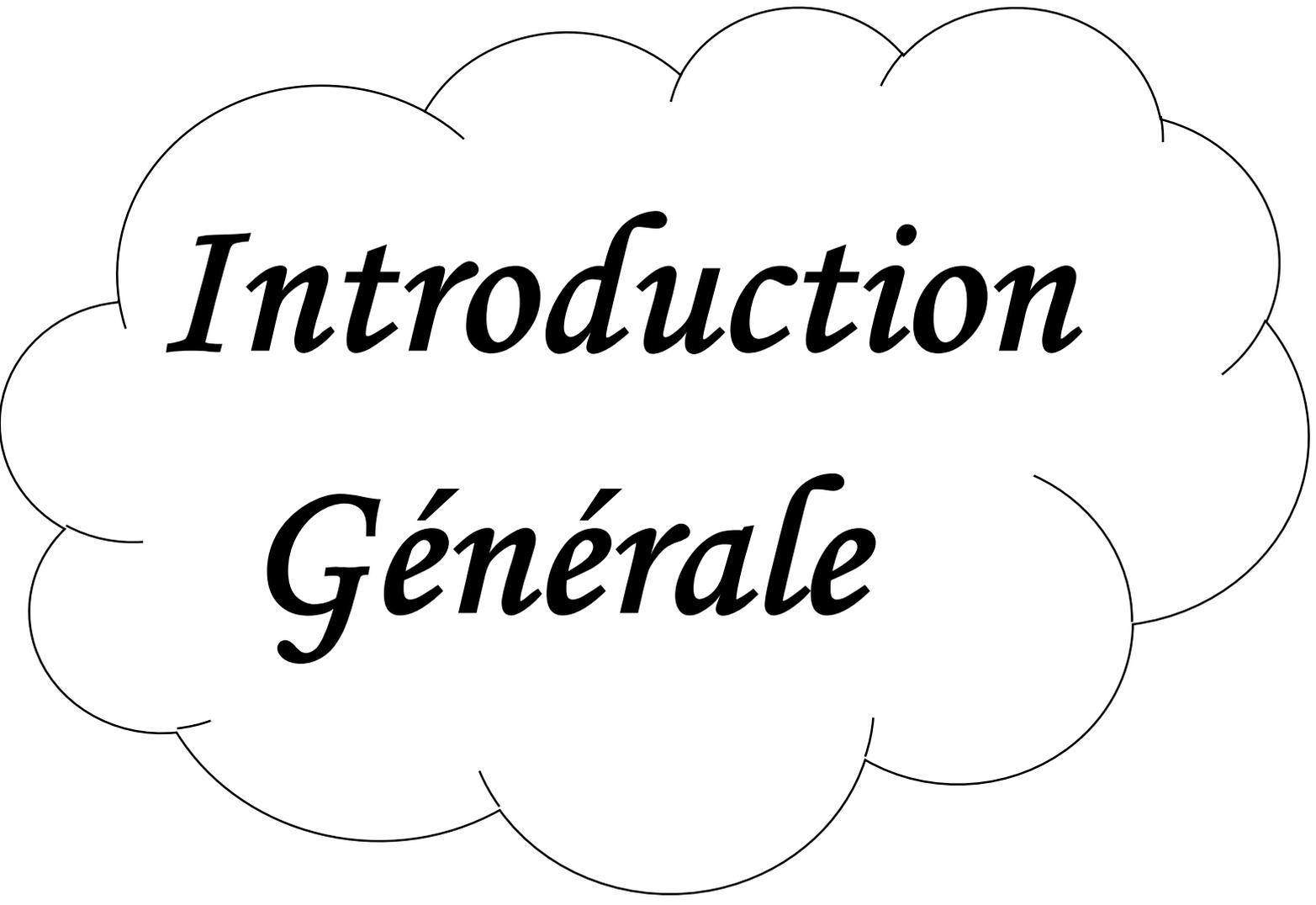
Tableau 1 : Variation de C en fonction de T pour $\beta=2$: $\eta=50$ UT : $C_f=1000$ UM et $C_p=100$ UM..... 37

Tableau 2: Variation de C en fonction de T pour $\beta=2$: $\eta=50$ UT : $C_f=1000$ UM : $C_p=100$ UM 39



*Liste des
Abréviations*

- ❖ **R(t)** : Reliability, fiabilité au temps t.
- ❖ **P(t)** : Probabilité.
- ❖ **MTBF** : Moyenne des temps entre deux défaillances (Mean Time Between Failure).
- ❖ **MUT** : Moyenne des temps de fonctionnement (Mean Up Time).
- ❖ **MDT** : Moyenne des temps de panne (Mean Down Time).
- ❖ **MTTR** : Moyenne des temps techniques de réparation (Mean Time To Repair).
- ❖ **MTTF** : Moyenne des temps jusqu'à la panne (Mean time to Failure).
- ❖ **M(t)** : Maintenabilité
- ❖ **X(t)** : Variable aléatoire
- ❖ **A(t)** : Fonction disponibilité.
- ❖ **F(t)** : Fonction de répartition de la variable aléatoire t.
- ❖ **f(t)** : Fonction de densité de la variable aléatoire t.
- ❖ **E(T)** : Espérance mathématique de la variable aléatoire t.
- ❖ **$\lambda(t)$** : Taux défaillance dépendant du temps.
- ❖ **η (eta)** : Paramètre d'échelle de la loi de Weibull.
- ❖ **B (beta)** : Paramètre de forme de la loi de Weibull.
- ❖ **γ (Gamma)** : Paramètre de position de la loi de Weibull.
- ❖ **V(t)** : Variance
- ❖ **T** : variable aléatoire, [UT : unité de temps].
- ❖ **t** : Temps, [UT : unité de temps].
- ❖ **T_0** : Période de remplacement optimale, [UT : unité de temps].
- ❖ **C_p** ; Coût de remplacement préventif d'une pièce en bon état, [UM : unité monétaire].
- ❖ **C_f** ; Coût de remplacement correctif d'une pièce défaillante, [UM : unité monétaire].
- ❖ **C(t)** : Coût total moyen prévu par pièce et par unité de temps, [UM : unité monétaire].
- ❖ **E(C)** : Espérance de coût.
- ❖ **σ** : Ecart type [UT : unité de temps].



Introduction

Générale

De nos jours, de nombreux systèmes deviennent de plus grandes envergures et plus compliquées influençant grandement notre société, tels que les centrales nucléaires, les centrales électriques, les complexes industriels, les avions, les réseaux informatiques, etc. Ces installations et équipements tendent à se détériorer dans le temps sous l'action de causes multiples telles que l'usure, la fatigue, la déformation due au fonctionnement ou l'action des agents corrosifs (agents chimiques, atmosphères, etc.). Ces détériorations peuvent provoquer l'arrêt de fonctionnement, diminuer les capacités de production, mettre en péril la sécurité des biens et des personnes, provoquer des rébus ou diminuer la qualité, augmenter les coûts de fonctionnement (augmentation de la consommation d'énergie, etc.) ou diminuer la valeur marchande de ces moyens. [6]

Maintenir l'appareil de production n'est pas une tâche facile pour toute entreprise industrialisée, ou toute erreur ou dysfonctionnement peut être un danger aux personnels. Les concepts de la maintenance sont définis pour maximiser la performance globale de l'entreprise. La mise en œuvre de ces concepts exige des ressources humaines compétentes, un système de gestion de pièces de rechange adéquat et un système d'information bien pensé, pour assurer un échange efficace entre les différents intervenants.

La stratégie de maintenance affecte fortement la performance d'une entreprise car il y a plusieurs façons de maintenir une installation. On peut jouer sur le type de maintenance (maintenance préventive, maintenance corrective,...), sur les types de tâches, sur leurs fréquences, sur le niveau d'intervention, etc. Donc le choix d'une politique de maintenance s'impose et doit conduire à trouver le meilleur compromis entre maintenance et coût car l'absence ou l'excès de maintenance se traduisent par de mauvais résultats financiers.

Nous nous intéressons, dans ce travail a déterminé la période optimale de remplacement des pièces d'usure en utilisant les lois de fiabilité.

Notre travail est organisé comme suit :

- Le concept de maintenance, ainsi que les différentes politiques de maintenance font l'objet du premier chapitre.
- Le deuxième chapitre s'intéresse aux notions de fiabilité et ses lois.
- Le troisième chapitre : on a parlé sur les modèles mathématiques pour la détermination de la politique de remplacement optimal que nous mettons en application.



Chapitre I

1. Introduction

Le maintien des équipements de production est un enjeu clé pour la productivité des usines aussi bien que pour la qualité des produits. C'est un défi industriel impliquant la remise en cause des structures figées actuelles et la promotion de méthodes adaptées à la nature nouvelle des matériels.

Nous présentons, dans ce chapitre, la notion de maintenance ainsi que son rôle et son intérêt. Un intérêt particulier a été porté à ses différents types et les principales opérations de celle-ci.

2. Historique (concepts et terminologie normalisés)

Le terme « maintenance », forgé sur les racines latines manus et tenere, est apparu dans la langue française au XII^e siècle. L'étymologiste Wace a trouvé la forme mainteneur (celui qui soutient), utilisée en 1169 : c'est une forme archaïque de « mainteneur ».

Anecdotiquement, c'est avec plaisir que j'ai retrouvé l'usage du mot « maintenance » sous la plume de François Rabelais, qui, vers 1533, parlait de la « maintenance de la loy » dans Pantagruel.

Les utilisations anglo-saxonnes du terme sont donc postérieures. À l'époque moderne, le mot est réapparu dans le vocabulaire militaire : « maintien dans des unités de combat, de l'effectif et du matériel à un niveau constant ». Définition intéressante, puisque l'industrie l'a reprise à son compte en l'adaptant aux unités de production affectées à un « combat économique » [1].

3. Généralité sur la fonction maintenance :

3.1. Définition de la maintenance :

3.1.1. Définitions AFNOR et CEN de la maintenance :

L'AFNOR faisant partie du CEN, les définitions AFNOR seront supplantées par les définitions CEN lorsque les normes « projet » deviendront définitives.

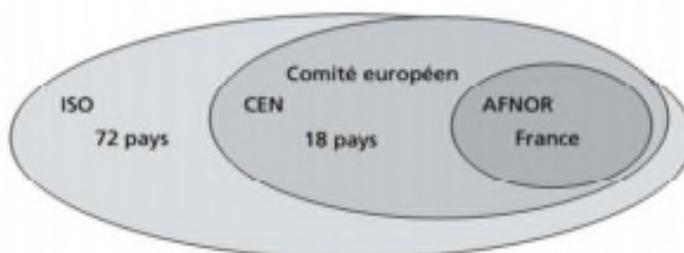


Figure 1: les organismes de normalisation [1]

Il n'existe pas actuellement de normes internationales ISO (International Standardization Organization) relatives à la fonction maintenance.

3.1.2. Définitions de la maintenance selon l'AFNOR par la norme X 60-000

La maintenance est l'ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise [2].

3.1.3. Définition de la maintenance selon l'AFNOR par la norme NF X 60-010

Ensemble des actions permettant de maintenir ou de rétablir un bien dans un état spécifié ou en mesure d'assurer un service déterminé. Bien maintenir, c'est assurer l'ensemble de ces opérations au coût optimal [1].

La définition de la maintenance fait donc apparaître 4 notions :

- ❖ Maintenir qui suppose un suivi et une surveillance.
- ❖ Rétablir qui sous-entend l'idée d'une correction de défaut.
- ❖ Etat spécifié et service déterminé qui précise le niveau de compétences et les objectifs attendus de la maintenance.
- ❖ Coût optimal qui conditionne l'ensemble des opérations dans un souci d'efficacité économique.

3.1.4. Définition de la maintenance selon Larousse

Ensemble de tout ce qui permet de maintenir ou de rétablir un système en état de fonctionnement.

3.2. Rôle de la maintenance des équipements dans l'industrie

Le rôle de la fonction maintenance dans une entreprise (quel que soit son type et son secteur d'activité) est donc de garantir la plus grande disponibilité des équipements au meilleur rendement tout en respectant le budget alloué. Pour atteindre ces objectifs, la politique de maintenance et du dépannage des équipements dans l'industrie oblige de suivre les points suivants [3] :

- a. Le service maintenance intervient principalement en cas de problème :
 - Il dépanne en urgence.
 - Il répare en atelier.
 - Il effectue l'entretien quotidien des matériels.

b. Le service maintenance est là pour éviter les pannes et les ralentissements de production :

Les interventions en urgence engendrant de coûteux arrêts de production, on met en place des procédures de prévention systématiques des pannes majeures.

c. Le service maintenance doit générer des profits :

Le service maintenance évite des pannes : il fait donc gagner de l'argent. Mais il coûte aussi : salaires, matériels de maintenance, stock de pièces de rechange, arrêt de production pour la maintenance préventive.

d. Le service maintenance est en concurrence avec les sous-traitants maintenanciers :

Après avoir fait la preuve de sa rentabilité, le service maintenance doit faire preuve de plus de rentabilité que si on avait recours à des sociétés spécialisées dans la maintenance.

Le service maintenance doit mettre en œuvre la politique de maintenance définie par la direction de l'entreprise ; cette politique devant permettre d'atteindre le rendement maximal des systèmes de production. Cependant, tous les équipements n'ont pas le même degré d'importance d'un point de vue maintenance. Le service devra donc, dans le cadre de la politique globale, définir les stratégies les mieux adaptées aux diverses situations.

La fonction maintenance sera alors amenée à établir des prévisions ciblées :

- ❖ **Prévisions à long terme** : elles concernent les investissements lourds ou les travaux durables. Ce sont des prévisions qui sont le plus souvent dictées par la politique globale de l'entreprise.
- ❖ **Prévisions à moyen terme** : la maintenance doit se faire la plus discrète possible dans le planning de charge de la production. Il lui est donc nécessaire d'anticiper, autant que faire se peut, ses interventions en fonction des programmes de production. La production doit elle aussi prendre en compte les impératifs de suivi des matériels.
- ❖ **Prévisions à courts termes** : elles peuvent être de l'ordre de la semaine, de la journée, voire de quelques heures. Même dans ce cas, avec le souci de perturber le moins possible la production, les interventions devront elles aussi avoir subi un minimum de préparation.

3.3. Intérêt de la maintenance

La maintenance se montre très importante pour les 4 domaines suivants :

A. La productivité

En limitant le nombre de défaillances, la maintenance permet de conserver une bonne productivité en réduisant le nombre d'arrêts de la production ou son ralentissement.

B. La qualité

En limitant la dérive des systèmes due au vieillissement ou l'usure d'une pièce, la qualité de la production est conservée.

C. La sécurité

En limitant les défaillances la maintenance permet de prévenir certains accidents.

D. La durabilité des biens :

En limitant les effets de l'usure et du vieillissement, la maintenance permet de conserver les équipements en bon état plus longtemps et ainsi permet des économies de rachat de matériel et éviter les problèmes dues par l'intégration de nouveaux matériels.

3.4. Structure du service maintenance

Un exemple d'organigramme .Ce n'est qu'une possibilité, chaque directeur technique étant libre de l'organiser selon sa propre conviction. Il fait apparaître par contre fonction indispensable pour que la fonction maintenance soit efficace.

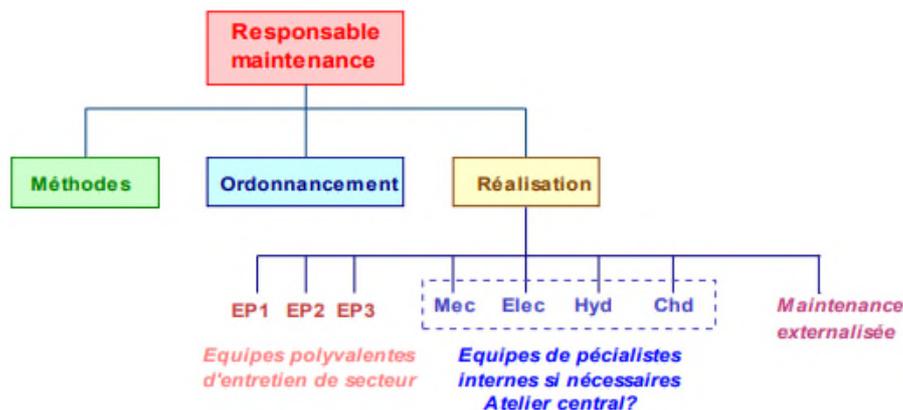


Figure 2: structure type avec sectorisation partielle

3.5. Fonctions d'un service maintenance

3.5.1. Fonction étude et méthode

Elle consiste à mettre en place des études techniques pour :

- Rechercher des améliorations.
- Participer à la conception de travaux neufs.

- Participer à l'analyse des accidents de travail.
- Etablir des fiches d'instructions pour les interventions.
- Etablir les plannings d'intervention.
- Analyser les coûts de maintenance.
- Définir des stratégies de maintenance.

3.5.2. Fonction exécution et mise en œuvre

Son aspect pluri-technique nécessite une bonne connaissance des matériels ainsi qu'une bonne maîtrise des diverses technologies.

3.6. Politique de maintenance

Lorsque la politique ou la stratégie de maintenance est définie, on doit choisir ensuite la méthode la plus appropriée pour atteindre les objectifs fixes. Le choix de cette méthode dépendra également d'autres paramètres à savoir :

- ❖ La connaissance du matériel, de son âge, de son état et de la durée de vie de ces différents organes.
- ❖ La probabilité de pannes ; faible ou élevée.
- ❖ La facilité d'intervention.
- ❖ La possession en stock de pièces de rechange.
- ❖ Les moyens disponibles au moment de l'intervention.

3.6. 1.Types de maintenance

Le choix entre les types de maintenance s'effectue dans le cadre de la politique de maintenance et doit s'opérer en accord avec la direction de l'entreprise.

Pour choisir un type de maintenance, il faut être informé des objectifs de la direction, des décisions politiques de maintenance, mais il faut aussi connaître le fonctionnement et les caractéristiques des matériels ; le comportement du matériel en exploitation ; les conditions d'application de chaque type ; les coûts de maintenance et les coûts de perte de production. Nous présentons, ci-après, les types de maintenance les plus utilisées :

A. Maintenance préventive :

C'est une maintenance effectuée selon des critères prédéterminés, dans l'intention de réduire la probabilité de défaillance d'un bien ou la dégradation d'un service rendu.

Elle doit permettre à éviter des défaillances de matériels en cours d'utilisation.

L'analyse des coûts doit mettre en évidence un gain par rapport aux défaillances qu'elle permet à éviter.

A.1. La maintenance préventive systématique

C'est une maintenance préventive effectuée selon un échéancier établi selon le temps ou le nombre d'unités d'usage.

Cette périodicité d'intervention est déterminée à partir de la mise en service ou après une révision partielle ou complète.

Cette méthode nécessite de connaître : le comportement du matériel ; les usures ; les modes de dégradations ; le temps moyen de bon fonctionnement entre deux avaries. La maintenance systématique peut être appliquée dans les cas suivants :

- Equipements soumis à la législation en vigueur (sécurité réglementée). Par exemples : appareil de lavage, extincteur (incendie), réservoir sous pression, convoyeurs, ascenseurs, monte-charge, etc.
- Equipements dont la panne risque de provoquer des accidents graves. Par exemples : tous les matériels assurant le transport en commun des personnes, avion, trains, etc.
- Equipements ayant un coût de défaillance élevé. Par exemples : éléments d'une chaîne automatisée, systèmes fonctionnant en continu.
- Equipements dont les dépenses de fonctionnement deviennent anormalement élevées au cours de leur temps de service. Par exemples : consommation excessive d'énergie, allumage et carburation dérèglent pour les véhicules à moteurs thermiques.

A.2. La maintenance préventive conditionnelle

C'est une maintenance préventive subordonnée à un type d'événement prédéterminé, (autodiagnostic, information d'un capteur, mesure d'une usure, etc.), révélateur de l'état de dégradation du bien.

La maintenance préventive conditionnelle se caractérise par la mise en évidence des points faibles. Suivant les cas, il est souhaitable de les mettre sous surveillance et à partir de là, nous pouvons décider d'une intervention lorsqu'un certain seuil est atteint, mais les contrôles demeurent systématiques et font partie des moyens de contrôle non destructifs.

Cette maintenance préventive conditionnelle se fait par des mesures pertinentes sur le matériel en fonctionnement.

A.3. But de la maintenance préventive

- Augmenter la durée de vie des matériels ;
- Diminuer la probabilité des défaillances en service ;
- Diminuer le temps d'arrêt en cas de révision ou de panne ;
- Prévenir et aussi prévoir les interventions de la maintenance corrective coûteuse ;

- Permettre de décider la maintenance corrective dans de bonnes conditions ;
- Eviter les consommations anormales d'énergie, de lubrifiant, etc. ;
- Diminuer le budget de la maintenance ;
- Supprimer les causes d'accidents graves.

B. La maintenance corrective

Elle est effectuée après défaillance. La défaillance peut être totale ou partielle.

La maintenance corrective a pour objet de redonner au matériel des qualités perdues nécessaires à son utilisation.

Les défauts, pannes ou avaries diverses exigeant une maintenance corrective entraînent une indisponibilité immédiate ou à très brève échéance des matériels affectés ou / et une dépréciation en quantité ou / et en qualité des services rendus.

C. Autres politiques de maintenance pour systèmes mono-composants

Nous citons, ci-après, d'autres politiques de maintenance moins populaires mais importantes [4] :

❖ Politique de la limite de défaillance

Sous cette politique, la maintenance préventive a lieu seulement lorsque le taux de défaillance ou autres indices de fiabilité atteignent un niveau prédéterminé et les défaillances sont corrigées par des réparations.

❖ Politique de maintenance préventive séquentielle :

Sous cette politique, un élément est préventivement maintenu à des intervalles de temps inégaux. Souvent les intervalles deviennent de plus en plus courts avec le temps, sachant que la majorité des éléments nécessitent des maintenances plus fréquentes avec l'âge.

❖ Politique de la limite de réparation :

Lorsqu'un élément tombe en panne, le coût de réparation est estimé. La réparation est entreprise si le coût estimé est inférieur à une limite prédéterminée ; sinon l'élément est remplacé, cette politique est connue sous le nom de "la limite du coût de réparation".

3.6.2. Les opérations de maintenance

A. Les opérations de la maintenance corrective

Dans le cas de la maintenance corrective (curative) il s'agit d'utiliser les opérations suivantes :

❖ La rénovation

Inspection complète de tous les organes, reprise complète ou remplacement des Pièces déformées, vérification des caractéristiques et éventuellement réparation des pièces et sous-ensembles défaillants, conservation des pièces bonnes.

La rénovation apparaît donc comme l'une des suites possibles d'une révision générale au sens strict de sa définition.

❖ La réparation

C'est une intervention définitive et limitée de maintenance corrective après défaillance. L'application de la réparation, opération de maintenance corrective, peut être décidée, soit immédiatement à la suite d'un incident, ou d'une défaillance, soit après dépannage, soit après une visite de maintenance préventive conditionnelle ou systématique. Tous les équipements sont concernés par cette opération.

❖ Le dépannage

C'est une action sur un bien en panne, en vue de le remettre en état de fonctionnement. Compte tenu de l'objectif, une action de dépannage peut s'accommoder de résultats provisoires et de conditions 3de réalisation hors règles de procédures, de couts et de qualité, et dans ce cas sera suivie de la réparation.

Le dépannage, opération de maintenance corrective, n'a pas de conditions d'applications particulières. La connaissance du comportement du matériel et des modes de dégradation n'est pas indispensable même si cette connaissance permet souvent de gagner du temps. Souvent les interventions de dépannage sont de courtes durées mais peuvent être nombreuses.

Ainsi le dépannage peut être appliqué par exemple sur des équipements fonctionnant en continu dont les impératifs de production interdisent toute visite ou intervention à l'arrêt. En plus des opérations de la maintenance curative on distingue :

B. Les opérations de la maintenance préventive

Les opérations suivantes sont effectuées de manière continue ou à des intervalles prédéterminés calculés sur le temps ou le nombre d'unités d'usage.

❖ **L'inspection :**

C'est une activité de surveillance s'exerçant dans le cadre d'une mission définie. Elle n'est pas obligatoirement limitée à la comparaison avec des données préétablies. Cette activité peut s'exercer notamment au moyen de ronde.

❖ **Le contrôle :**

C'est une vérification de la conformité à des données préétablies, suivie d'un jugement. Le contrôle peut :

- Comporter une activité d'information ;
- Inclure une décision : acceptation, rejet, ajournement ;
- Déboucher sur des actions correctives.

❖ **La visite :**

Activité consistant en un examen détaillé et prédéterminé de tous ou une partie des équipements. Elle peut entraîner certains démontages et déclencher des opérations correctives des anomalies constatées. Ce sont des opérations de surveillance qui dans le cadre de la maintenance préventive systématique s'opèrent selon une périodicité prédéterminée.

C. Autres opérations du service maintenance

❖ **La révision :**

C'est l'ensemble des actions d'examen, de contrôles et des interventions effectuées en vue d'assurer le bien contre toute défaillance majeure ou critique pendant un temps ou pour un nombre d'unités d'usage donné. Il est d'usage de distinguer suivant l'étendue de cette opération les révisions partielles des révisions générales.

❖ **Amélioration :**

- ❖ Elle consiste à procéder à des modifications, des changements ou des transformations sur un matériel correspondant à la maintenance.

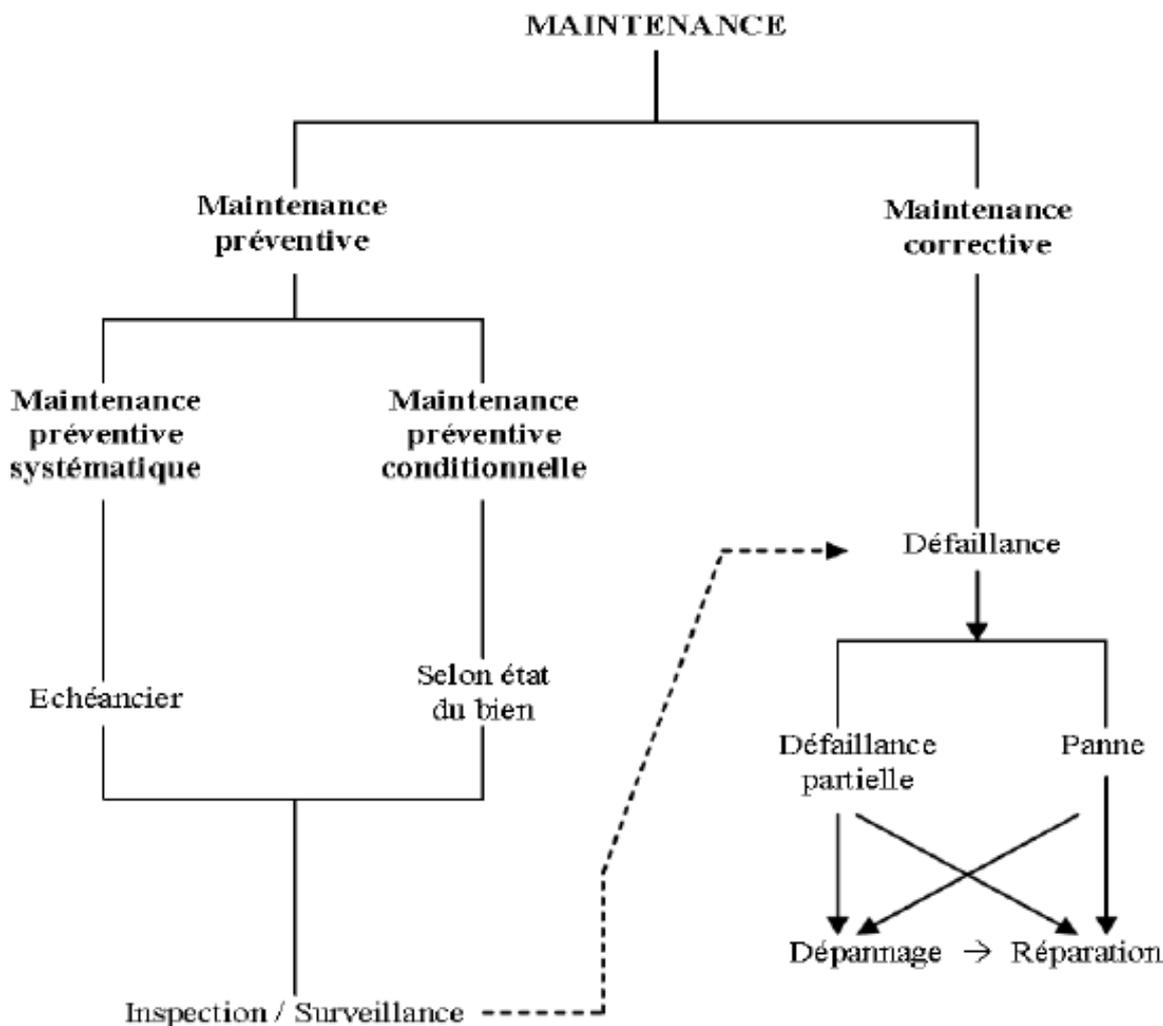


Figure 3: types de maintenance

3.7. Les stratégies de maintenance :

Tous les équipements d’une installation industrielle sont soumis à des mécanismes de dégradation pouvant entraîner leur panne et d’éventuels effets sur le fonctionnement de l’installation.

Les mécanismes de dégradation peuvent être de plusieurs types : usure, fatigue, vieillissement, altérations physico-chimiques divers...etc. Leur vitesse d’évolution dépend de plusieurs facteurs (condition de fonctionnement, taches de maintenance mal exécutées,...).

Cinq types de défaillance sont définis pour les équipements : perte de la fonction, fonctionnement intempestif, refus de s’arrêter, refus de démarrage et fonctionnement dégradé.

Face à la diversité des équipements d’une installation et de leurs comportements, les responsables de maintenance doivent envisager de véritables stratégies. Ils peuvent décider, par exemple, de pratiquer une maintenance corrective à la suite de la défaillance d’un

équipement, mais cela ne permet pas d'éviter les conséquences des pannes sur le fonctionnement de l'installation. Une autre attitude consiste à mettre en œuvre une maintenance préventive systématique selon laquelle la décision d'intervenir précède l'apparition de la panne. Cela permet de diminuer le nombre de défaillances et de faire des gains économiques. La maintenance préventive conditionnelle est de plus en plus utilisée. Elle présente l'avantage de limiter le nombre d'interventions sur les équipements. En effet, la remise en état de matériel est réalisée uniquement lorsque celui-ci présente des signes de dysfonctionnement (dégradation, apparition de symptômes, ...). L'importance de l'impact de la politique de maintenance sur les performances du système considéré rend nécessaire son optimisation [5].

4. Conclusion

La maintenance est une fonction complexe qui, selon le type de processus, peut être déterminante pour la réussite d'une entreprise. Les fonctions qui la composent et les actions qui les réalisent doivent être soigneusement dosées pour que les performances globales de l'outil de production soient optimisées.



Chapitre II

1. Introduction

La fiabilité est l'étude des défaillances des systèmes. Un système est dit « fiable » lorsque la probabilité de remplir sa mission sur une durée donnée correspond à celle spécifiée dans le cahier des charges.

2. Notions de fiabilité

2.1 Définition du concept de fiabilité

La fiabilité est l'aptitude d'un système (équipement mécanique, électronique, informatique, . . .) à accomplir une fonction (ou mission) donnée durant une période déterminée dans des conditions spécifiées d'exploitation [7,8]. Les conditions sont toutes les contraintes externes, qu'elles soient d'origine mécanique, chimique, atmosphérique, humaine, autres.

Le terme " fiabilité " est un néologisme (mot de création récente). En effet, ce terme, traduit du mot anglo-saxon "reliability", a été introduit aux U.S.A. en 1960 par la Commission Electrotechnique Internationale.

La fiabilité fait partie intégrante du concept de qualité d'un produit ou du service qui repose sur :

Sa conformité à l'instant de l'achat ($t = 0$).

Sa fiabilité n notée $R(t)$.

Dans la définition de la fiabilité, on retient 4 notions fondamentales :

❖ Notion de bien

Ces biens peuvent être classés en biens d'équipements, biens intermédiaires et biens de consommation. En outre ils peuvent être classés en fonction de leur durabilité.

❖ Notion "accomplir une fonction"

Exigence d'un niveau minimum de performances en deçà duquel le bien est considéré comme défaillant (critère de défaillance, taux de défaillance, mode de défaillance,...).

❖ Notion de probabilité

La probabilité p de réalisation d'un événement A est définie par le rapport entre le nombre de cas favorables (m) et nombre de cas possibles (n) :

$$P = \text{prob}\{_ \} = h/n$$

❖ Notion de “temps donné”

La fiabilité est une fonction probabiliste associée à une variable aléatoire X dépendante du temps (Nombre de tours, de cycles, ...).

La notion de fiabilité se distingue selon l'étape étudiée de la vie du système [9,10] :

- A. Fiabilité prévisionnelle :** C'est celle qui est déterminée durant la phase de conception sur la base d'un modèle mathématique, définie à partir des données de fiabilité de ses composants.
- B. Fiabilité estimée :** C'est la fiabilité mesurée après avoir conçu le système et ceci à l'aide d'un ensemble d'essais.
- C. Fiabilité opérationnelle :** C'est la fiabilité mesurée sur un matériel en exploitation.

Elle dépend des conditions réelles d'exploitation et de support logistique.

2.2 Défaillance de matériel ou système

La défaillance est une perte partielle ou totale des propriétés d'un élément qui diminuent significativement et entraîne la perte totale de sa capacité de fonctionnement [7,10].

2.2.1. Paramètres d'identification des défaillances

On pourra identifier les défaillances et les classer à partir d'une combinaison de paramètres repartis en six groupes en fonction de :

a. Causes fondamentales d'apparition

❖ La faiblesse inhérente (intrinsèque)

Défaillance attribuable à une faiblesse inhérente au matériel lui-même lorsque les contraintes sont dépassées les capacités du matériel au-delà des possibilités données de celui-ci.

❖ Le mauvais emploi (extrinsèque)

Défaillance attribuable à l'application de contraintes au-delà des possibilités données du matériel.

❖ Défaillance première

Défaillance d'un matériel dont la cause directe ou indirecte n'est pas due à la défaillance d'un autre équipement.

❖ Défaillance seconde

Défaillance d'un matériel dont la cause directe ou indirecte est due à la défaillance d'un autre équipement.

b. La vitesse de manifestation des défaillances**❖ Les défaillances graduelles**

Elles se caractérisent par une variation progressive des paramètres déterminant la fiabilité du système. Ce type de défaillance est prépondérant pour le matériel mécanique, pour lequel se manifeste l'usure des composants après une certaine durée de bon fonctionnement.

❖ Les défaillances subites

Elles sont dues à une perte totale des propriétés du système entraînant une incapacité de fonctionnement. Ce type de défaillance caractérise spécialement un matériel électronique.

c. En fonction de leur amplitude**❖ Les défaillances partielles**

Elles résultent de déviations d'une ou des caractéristiques au-delà des limites spécifiées, mais telles qu'elles n'entraînent pas une disparition complète de la fonction requise.

❖ Les défaillances complètes

Elles résultent de déviations d'une ou des caractéristiques, telles qu'elles entraînent une disparition complète de la fonction requise.

d. L'âge :**❖ Les défaillances précoces :**

Elles surviennent durant la période de jeunesse de l'équipement, c'est-à-dire juste après sa mise en fonctionnement. Ces défaillances peuvent être attribuées à la conception, la fabrication ou la mauvaise utilisation de l'équipement.

Généralement, un contrôle rigoureux est effectué avant la mise en service pour détecter les éléments présentant ce type de défaillance.

❖ Les défaillances aléatoires :

Elles apparaissent durant la période de vie utile de l'équipement. Ce sont des défaillances accidentelles. Elles ont la même probabilité d'apparition et sont généralement cataclysmiques (c'est-à-dire à la fois soudaines et complètes).

❖ Les défaillances par usures

Ce sont des pannes progressives et elles apparaissent suite à la fatigue, l'usure et la dégradation de l'équipement après une longue période de fonctionnement, de processus de détérioration ou de corrosion.

e. L'aptitude à être constatée**❖ Défaillance fugitive (systématique)**

Défaillance de courte durée difficilement constatable et non reproductible à volonté.

❖ Défaillance intermittente

Défaillance non permanente, mais plus au moins facilement reproductible.

❖ Défaillances permanente

Défaillance constatable à tout moment.

f. Conséquences**❖ Défaillance critique**

Défaillance qui risque de causer des blessures à des personnes ou des dégâts importants au matériel.

❖ Défaillance majeure

Défaillance qui n'est pas critique mais qui risque de réduire l'aptitude d'un ensemble à accomplir sa fonction requise.

❖ Défaillance mineure

Défaillance qui n'est pas critique et qui ne réduit pas l'aptitude d'un ensemble à accomplir sa fonction requise.

2.3 Matériel réparable

C'est un matériel qui peut être remis en fonctionnement après avoir subi une défaillance.

La vie d'un tel matériel peut être décrite à l'aide de ce chronogramme [5] :

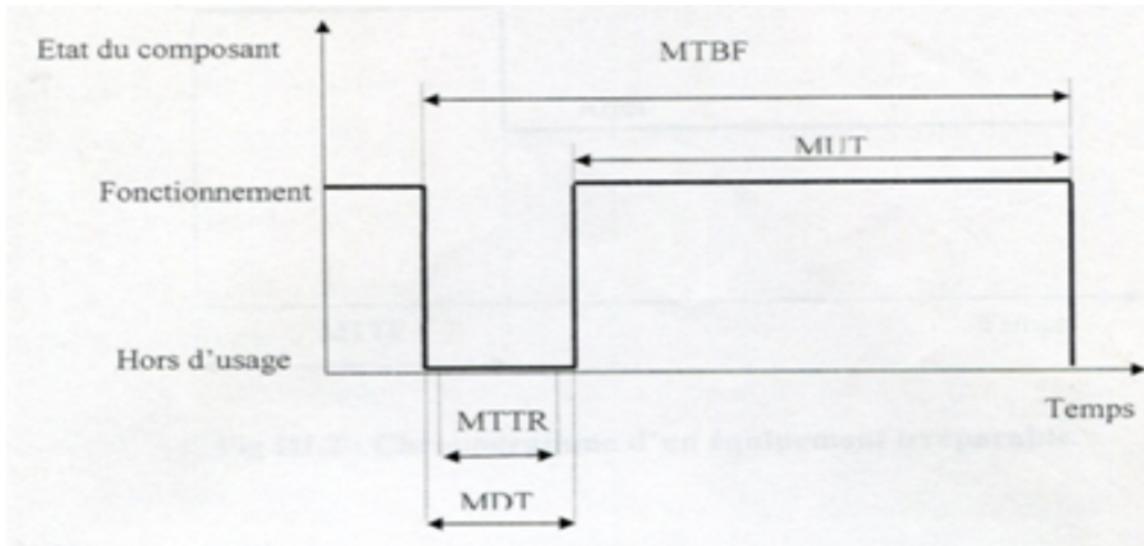


Figure 1: Chronogramme d'un équipement réparable

Avec,

MTBF : Moyenne des temps entre deux défaillances (Mean Time Between Failure).

MUT : Moyenne des temps de fonctionnement (Mean Up Time).

MDT : Moyenne des temps de panne (Mean Down Time).

MTTR : Moyenne des temps techniques de réparation (Mean Time To Repair).

2.4 Matériel irréparable (non réparable)

Le matériel ne peut être remis en fonctionnement. Le chronogramme correspondant est [5]

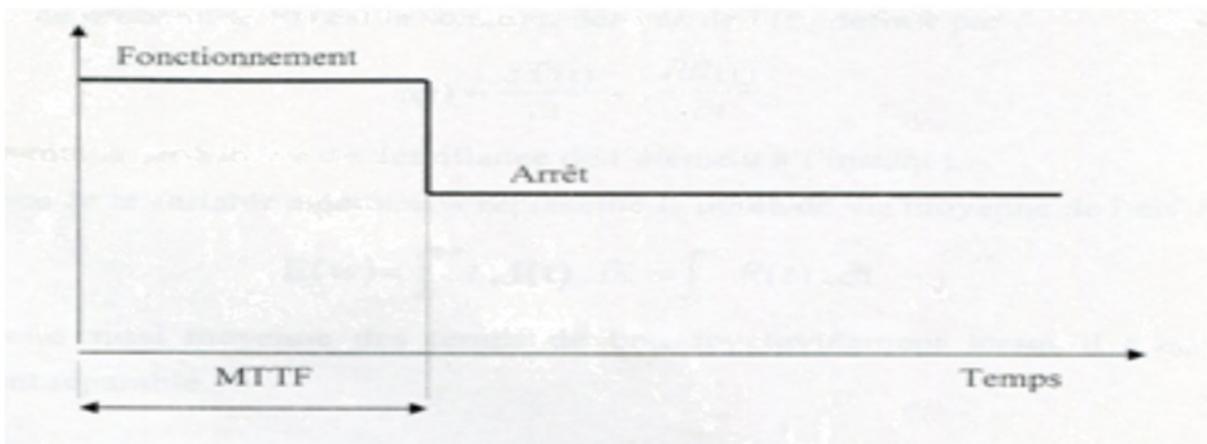


Figure 2: Chronogramme d'un équipement irréparable

Avec :

MTTF : Moyenne des temps jusqu'à la panne (Mean time to Failure).

2.5. Sûreté de fonctionnement

La sûreté de fonctionnement d'un système peut être définie comme étant la propriété qui permet à ses utilisateurs de placer une confiance justifiée dans le service qu'il leur délivre. L'utilisateur peut être un individu tel que l'Opérateur ou le Superviseur, ou un autre système matériel / logiciel ayant des interactions avec le système considéré.

La sûreté de fonctionnement regroupe les activités d'évaluation de la **Fiabilité**, de la **Disponibilité**, de la **Maintenabilité** et de la Sécurité (**FDMS**) d'une organisation, d'un système, d'un produit ou d'un moyen. Ces propriétés sont différentes mais complémentaires.

2.6. La maintenabilité

Dans des conditions données, la maintenabilité est l'aptitude d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état où il peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, en utilisant des procédures et des moyens prescrits [11]. **Maintenabilité = être rapidement dépanné**

C'est aussi la probabilité de rétablir un système dans des conditions de fonctionnement spécifiées, en des limites de temps désirées, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, en utilisant des procédures et des moyens prescrits.

A partir de ces définitions, on distingue :

- ❖ **La maintenabilité intrinsèque** : elle est « construite » dès la phase de conception à partir d'un cahier des charges prenant en compte les critères de maintenabilité (modularité, accessibilité, etc.).
- ❖ **La maintenabilité prévisionnelle** : elle est également « construite », mais à partir de l'objectif de disponibilité.
- ❖ **La maintenabilité opérationnelle** : elle sera mesurée à partir des historiques d'interventions.

L'analyse de maintenabilité permettra d'estimer la **MTTR** ainsi que les lois probabilistes de maintenabilité (sur les mêmes modèles que la fiabilité).

- ❖ **Commentaires** : La maintenabilité caractérise la facilité à remettre ou de maintenir un bien en bon état de fonctionnement. Cette notion ne peut s'appliquer qu'à du matériel maintenable, donc réparable. « Les moyens prescrits » englobent des notions très diverses : moyens en personnel, appareillages, outillages, etc.

La maintenabilité d'un équipement dépend de nombreux facteurs.

Tableau 1 : Les facteurs de maintenabilité [1]

Facteurs liés à L'EQUIPEMENT	Facteurs liés au CONSTRUCTEUR	Facteurs liés à la MAINTENANCE
<ul style="list-style-type: none"> · Documentation · Aptitude au démontage · Facilité d'utilisation 	<ul style="list-style-type: none"> · Conception · Qualité du service après-vente · Facilité d'obtention des pièces de rechange · Coût des pièces de rechange 	<ul style="list-style-type: none"> · Préparation et formation des personnels · Moyens adéquats · Etudes d'améliorations (maintenance améliorative)

En ce qui concerne la maintenabilité, le temps de réparation est une variable aléatoire qui résulte de différents facteurs tels que l'habileté des agents de maintenance et la disponibilité des pièces de rechange.

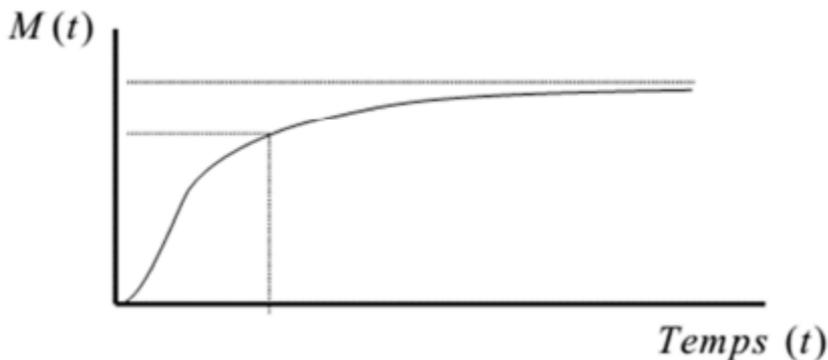


Figure 3: Évolution de maintenabilité d'un système en fonction de temps [12]

❖ **Remarque** : On peut améliorer la maintenabilité en :

- Développant les documents d'aide à l'intervention.
- Améliorant l'aptitude de la machine au démontage (modifications risquant de coûter cher).
- Améliorant l'interchangeabilité des pièces et sous ensemble.

2.7. Disponibilité

2.7.1. Définition 1. [9]

Soit $X(t)$ une variable aléatoire décrivant l'état d'un élément, avec :

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{si l'élément fonctionne;} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

On appelle disponibilité de l'élément à la date t et on la note $A(t)$, la probabilité que l'élément fonctionne à cet instant :

$$A(t) = P(X(t) = 1) = E(X(t)), \quad (2.1)$$

2.7.2. Définition 2.

On appelle disponibilité moyenne au cours de la période $(0, T)$, la quantité :

$$D(t) = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \quad (2.2)$$

Où $A(t)$ est la proportion de temps (au cours de la période $(0, T)$) pendant laquelle l'élément fonctionne.

Lorsqu'on étudie la fiabilité, on s'intéresse non seulement à la probabilité de panne, mais aussi au nombre de pannes et, en particulier, au temps requis pour faire les réparations. Dans cette perspective, deux nouveaux paramètres de la fiabilité deviennent notre centre d'intérêt [1].

- ❖ **La disponibilité** est la probabilité qu'un système soit disponible pour être utilisé à un moment donné du temps.
- ❖ **La disponibilité** est l'aptitude d'une entité à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données, à un instant donné ou durant un intervalle de temps donné, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs est assurée.
- ❖ **Autrement la disponibilité** est la probabilité qu'un système soit disponible pour être utilisé à un moment donné du temps. Cette définition est proche de celle de la fiabilité, sauf que le système demandé doit fonctionner à l'instant (t) et non sur une période de temps (0 à t).

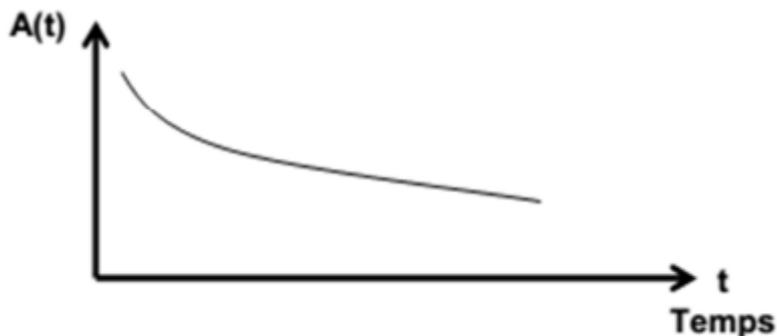


Figure 4: Évolution de disponibilité d'un équipement en fonction de temps [12]

Lorsqu'un système est réparé de manière continue, soit par un programme d'entretien ou de maintenance, la disponibilité de l'équipement tend à devenir constante.



Figure 5: Évolution de disponibilité d'un équipement réparé de manière continue en fonction de temps [12]

Pour des systèmes réparables, une quantité fondamentale est la disponibilité. Elle est définie comme suit :

$A(t)$ = probabilité qu'un système fonctionne de façon satisfaisante au moment t .

Remarque : Cette aptitude dépend de la combinaison de la fiabilité, de la maintenabilité et de la logistique de maintenance.

3. Indices de fiabilité

3.1. Fonction fiabilité

Admettons qu'à la date $t = 0$ un élément est mis en fonctionnement et qu'à la date $t = T$ il tombe en panne. La durée de vie T de cet élément est assimilée à une variable aléatoire non négative, vu que la défaillance est la conséquence de divers facteurs aléatoires.

La fonction de répartition $F(t) = P(T \leq t)$ de la variable aléatoire ω représente la probabilité que l'élément tombe en panne avant l'instant t .

La fonction de fiabilité, notée $R(t)$, représente la probabilité que l'élément fonctionne sans défaillance dans l'intervalle $[0, t]$. Elle est donnée par :

$$R(t) = p(T > t) = 1 - F(t). \quad (2.3)$$

La densité de probabilité $f(t)$ est la fonction dérivée de $F(t)$, définie par :

$$f(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = -\frac{\partial R(t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

Elle représente la probabilité de défaillance de l'élément à l'instant t . L'espérance de la variable aléatoire ω représente la durée de vie moyenne de l'élément :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} R(t) \cdot dt \quad (2.5)$$

On l'appelle aussi moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF) lorsqu'il s'agit d'un équipement réparable.

3.2 Taux de défaillance

Soit l'événement :

$A_{t,t+h} = \{ \text{" l'element fonctionne sans defaillance durant l'intervalle } [t, t + h] \}$.

La probabilité pour que l'élément fonctionne sans défaillance au cours de l'intervalle $[t, t+h]$ sachant qu'il n'est pas tombé en panne jusqu'à l'instant t est :

$$R(t, t + h) = \frac{P(A_{t,t+h} \cap A_{0,t})}{P(A_{0,t})} \quad (2.6)$$

$$= \frac{P(A_{0,t+h})}{P(A_{0,t})} = \frac{R(t+h)}{R(t)} \quad (2.6a)$$

La probabilité de panne au cours de l'intervalle $[t, t + h]$ est :

$$F(t, t + h) = 1 - R(t, t + h) = \frac{R(t) - R(t+h)}{R(t)} \quad (2.7)$$

On appelle taux de défaillance, la fonction $\lambda(t)$ définie par :

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t, t+h)}{h} = \frac{-R'(t)}{R(t)} \quad (2.8)$$

La notion de taux de défaillance représente la probabilité de panne pour un système dans l'intervalle infiniment petit $[t, t + h]$, sachant qu'il a fonctionné sans défaillance jusqu'à l'instant t . Les notions de fiabilité ci-dessus sont liées, la connaissance de l'une d'elles permet de déterminer les autres : En effet,

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp[- \int_0^t \lambda(u) du] \quad (2.9)$$

D'où

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.10)$$

Où $f(t) = F(t)$.

3.3. Les différentes phases du cycle de vie d'un produit

L'évolution du taux de défaillance d'un produit pendant toute sa durée de vie est caractérisée par ce qu'on appelle en analyse de fiabilité la courbe en baignoire (Figure II.6).

Le taux de défaillance est élevé au début de la vie du dispositif. Ensuite, il diminue assez rapidement avec le temps (taux de défaillance décroissant), cette phase de vie est appelée période de jeunesse. Après, il se stabilise à une valeur qu'on souhaite aussi basse que possible pendant une période appelée période de vie utile (taux de défaillance constant). A la fin, il remonte lorsque l'usure et le vieillissement font sentir leurs effets, c'est la période de Vieillessement (taux de défaillance croissant).

Dans la vie utile d'un produit, le taux de défaillance est constant, c.-à-d. La probabilité de panne est constantes, donc le remplacement préventif n'est pas justifié.

Dans la période de vieillissement, le taux de défaillance est croissant, donc le matériel rentre dans la période d'usure, la probabilité de panne augmente, donc dans cette zone le remplacement préventif doit être appliqué. Dans le prochain chapitre, la période optimale de remplacement sera déterminée.

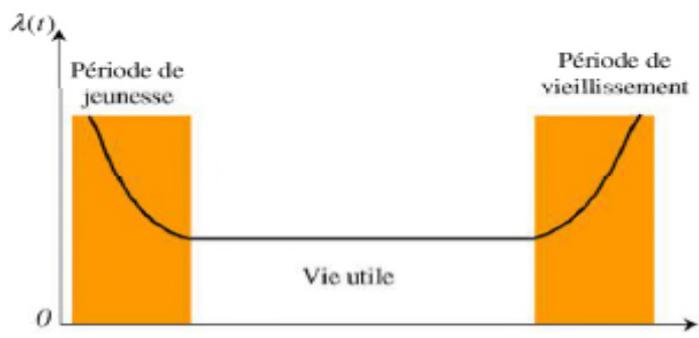


Figure 6: La courbe en baignoire [13]

De nombreux éléments, tels que les composants électroniques, ont un taux de défaillance qui évolue de cette manière-là. Pour souligner la particularité des composants

mécaniques dans l'analyse de la fiabilité par rapport aux composants mécaniques, nous allons comparer l'évolution du taux de défaillance dans les deux cas.

4. Fiabilité d'un système

Dans l'étude de fiabilité d'un système complexe, on est amené à décomposer ce système en un certain nombre d'éléments ou de sous systèmes. Ces éléments peuvent être indépendants (c-à-d que d'un point de vue fiabilité, la défaillance de l'un des éléments du système n'entraîne pas la défaillance d'un autre) ou dépendants [14,5].

La fiabilité d'un système est déterminée en fonction de la fiabilité de tous ses éléments.

Selon l'incidence de la fiabilité de l'un de ces composants sur l'état du système, on distingue les configurations suivantes :

4.1 Configuration série

La fiabilité R_s d'un ensemble de n constituants connectés en série est égale au produit des fiabilités respectives R_A, R_B, R_C, R_n de chaque composant [15] :

$$R_s = R_A * R_B * R_C * ... * R_n \tag{2.11}$$

Si les "n" composants sont identiques avec une même fiabilité R la formule sera la suivante :

$$R(s) = R^n \tag{2.11a}$$



Figure 7: Composants en série

Si les taux de défaillances sont constants au cours du temps la fiabilité sera calculée suivant la formule

$$R(s) = (e^{-\lambda_A t}) * (e^{-\lambda_B t}) * (e^{-\lambda_C t}) * ... * (e^{-\lambda_n t}) \tag{2.11b}$$

Avec :

$$MTBF(s) = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \dots + \lambda_n} \tag{2.12}$$

Si en plus, les composants sont identiques: $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \dots = \lambda_n$

Alors :

$$R(s) = (e^{-\lambda_n t}) \tag{2.11c}$$

Et $MTBF(s) = \frac{1}{n*\lambda}$ (2.12a)

4.2 Configuration parallèle

La fiabilité d'un système peut être augmentée en plaçant les composants en parallèle. Un dispositif constitué de n composants en parallèle ne peut tomber en panne que si les n composants tombent en panne au même moment. Si F_i est la probabilité de panne d'un composant, la fiabilité associée R est son complémentaire [15,16]:

$$F_i = 1 - R_i \tag{2.13}$$

F_i Représentant la fiabilité associée.

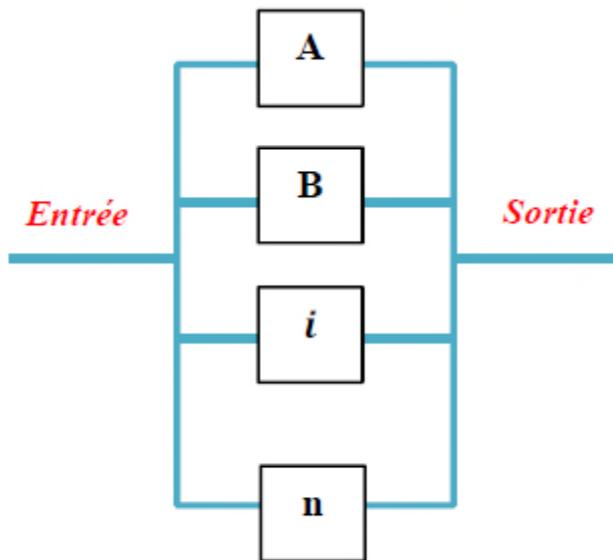


Figure 8: Composants en parallèle

Soit les “ n ” composants de la figure ci-dessous (Figure II.8) montés en parallèle. Si la probabilité de panne pour chaque composant repéré (i) est notée F_i . Alors:

$$R(s) = 1 - (1 - R)^n \tag{2.14}$$

Le cas particulier de deux dispositifs en parallèle si λ est constant R_S est obtenu par :

$$R_S = 1 - (1 - R_A) * (1 - R_B) = R_A + R_B - R_A * R_B = e^{-\lambda_A t} + e^{-\lambda_B t} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B) t} \tag{2.14a}$$

4.3 Autres configurations

Il existe d'autres configurations. Citons par exemple le système k parmi n, le système série-parallèle, parallèle-série, etc.

5. Lois de fiabilité

On distingue deux types de lois de probabilité utilisées en fiabilité : les lois discrètes et les lois continues [17].

5.1. Lois discrètes :

Une loi est dite discrète si elle prend ses valeurs dans \mathbb{N} c'est à dire des valeurs entières comme par exemple celle qui compte le nombre de pannes. Parmi les lois discrètes on peut citer :

1. Loi Uniforme
2. Loi de Bernoulli
3. Loi Binomiale
4. Loi Binomiale négative
5. Loi Géométrique
6. Loi Hypergéométrique
7. Loi de Poisson

5.2 Les lois continues :

- 1) La loi du Khi deux
- 2) La loi de Birnbaum-Saunders
- 3) La loi Gamma
- 4) Loi Inverse Gamma
- 5) La loi logistique
- 6) La loi log-logistique
- 7) La Loi de Cauchy
- 8) La loi de Student
- 9) La loi Bêta
- 10) La loi exponentielle
- 11) La Loi normal
- 12) La loi Log normale
- 13) La loi de Weibull

5.3 Modèles paramétriques de fiabilité

5.3.1 La loi exponentielle

C'est la plus couramment utilisée en fiabilité électronique pour décrire la période durant laquelle le taux de défaillance des équipements est considéré comme constant [14].

Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance ou l'intervalle de temps entre deux défaillances successives.

Elle est définie par le taux de défaillance λ ou par la moyenne des temps de bon fonctionnement $\frac{1}{\lambda}$.

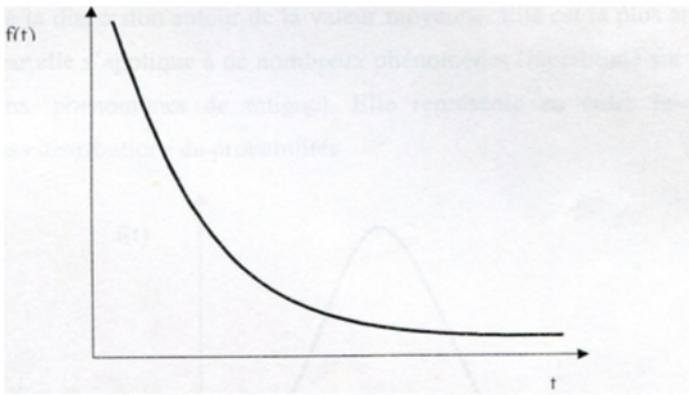


Figure 9: Densité de probabilité de la loi exponentielle.

❖ **Densité de probabilité :**

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \lambda > 0 \quad (2.15)$$

❖ **Fonction de réparation :**

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad t > 0 \quad (2.16)$$

❖ **Fonction de fiabilité :**

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \quad (2.17)$$

❖ **Taux de défaillance :**

$$\lambda(t) = \lambda \quad (2.18)$$

❖ **Espérance :**

$$E(t) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.19)$$

❖ **Variance** $V(t) = \frac{1}{\lambda^2}$

5.3.2 La loi de weibull

C'est une loi fréquemment utilisée en fiabilité des matériels mécaniques. Elle permet de représenter les différentes phases de la vie d'un matériel : jeunesse, vie utile et vieillesse.

Elle est continue à trois paramètres : γ , β et η

➤ **Le paramètre de position γ**

Il représente le décalage existant entre le début de l'observation et le début du processus que l'on observe.

➤ **Le paramètre d'échelle η , $\eta > 0$**

Ce paramètre nous renseigne sur l'étendue de la distribution.

➤ **Le paramètre de forme β , $\beta > 0$**

Il est associé à la cinétique du processus observé.

- ❖ Si $\beta < 1$: Le taux de défaillance décroît dans le temps, ce qui correspond à la période de jeunesse des matériels dans la courbe en baignoire.
- ❖ Si $\beta = 1$: Le taux de défaillance est constant, ce qui correspond à la période de vie utile.
- ❖ Si $\beta > 1$: Le taux de défaillance est croissant, ce qui correspond à la période de vieillesse ou d'usure.

Remarque 1. Pour $\beta > 3$, la loi de Weibull se rapproche de la loi Normale [9].

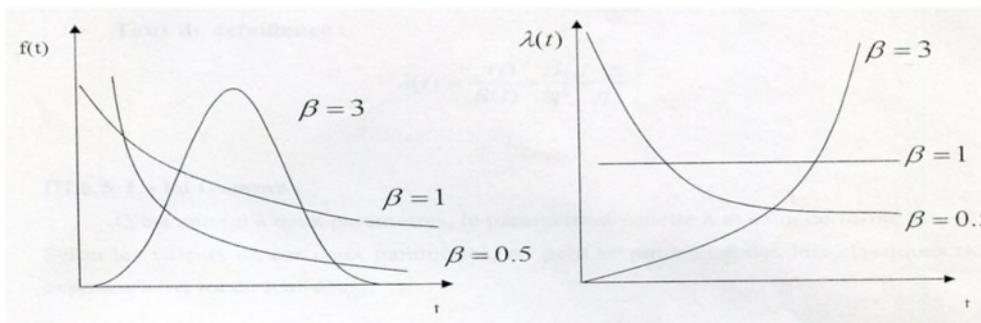


Figure 10:Influence de β sur la densité de probabilité et le taux de défaillance.

• **Densité de probabilité :**

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) \quad t > \gamma;$$

(2.20)

• **Fonction de répartition :**

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) \text{ pour } t > \gamma; \quad (2.21)$$

• **Fonction de fiabilité :**

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) \text{ pour } t > \gamma; \quad (2.22)$$

• **Esperance:**

$$E(t) = \int_0^{+\infty} R(t)dt = \gamma + \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.23)$$

Tel que :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.24)$$

• **Ecart type :**

$$\sigma = \eta\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2} \quad (2.25)$$

• **Taux de défaillance :**

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (2.26)$$

Remarque2 : Il existe d'autres lois très utilisées en fiabilité telles que la loi Normale, la loi Log-Normale, la loi Gamma, etc.

6. Analyse de Pareto ou ABC

Le diagramme de Pareto est un moyen simple pour classer les phénomènes par ordre d'importance. Ce diagramme et son utilisation sont aussi connus sous le nom de "règle des 20/80" ou méthode ABC.

Vilfredo Pareto, démontra le principe d'une inégalité de la répartition des richesses et des revenus dans une population quelconque et en déduisit une loi qui peut s'énoncer ainsi : "Quand il y a un grand nombre de variantes possibles, très souvent moins de 20% de ces variantes représentent plus de 80% des cas qui peuvent se présenter dans la réalité".

Le diagramme de Pareto est un histogramme dont les plus grandes colonnes sont conventionnellement à gauche et vont décroissant vers la droite. Une ligne de cumul indique l'importance relative des colonnes. La popularité des diagrammes de Pareto provient d'une part parce que de nombreux phénomènes observés obéissent à la loi des 20/80, et que d'autre part si 20% des causes produisent 80% des effets, il suffit de travailler sur ces 20% pour influencer fortement le phénomène. En ce sens, le diagramme de Pareto est un outil efficace de prise de décision.

6.1. Classification

Pareto propose une classification en trois (3) groupes : A, B et C d'où le nom, méthode ABC

- ❖ Le groupe A est composé des causes constituant 80% des effets du phénomène (Représentant généralement 20% des causes).
- ❖ Le groupe B est composé des causes constituant 15% des effets du phénomène (Représentant généralement 30% des causes).
- ❖ Le groupe C est composé des causes constituant 5% des effets du phénomène (Représentant généralement 50% des causes.).

6.2. Construction du diagramme

A partir des données recueillies, on définit les catégories, puis :

- ❖ On répartit les données dans les catégories ;
- ❖ Les catégories sont classées dans l'ordre décroissant, (tri dans Excel par exemple) ;
- ❖ Faire le total des données
- ❖ Calculer les pourcentages pour chaque catégorie : fréquence / total
- ❖ Calculer le pourcentage cumulé ;
- ❖ Déterminer une échelle adaptée pour tracer le graphique ;
- ❖ Placer les colonnes (les barres) sur le graphique, en commençant par la plus grande à gauche ;
- ❖ Lorsque les barres y sont toutes, tracer la courbe des pourcentages cumulés.

6.3. Diagramme de Pareto

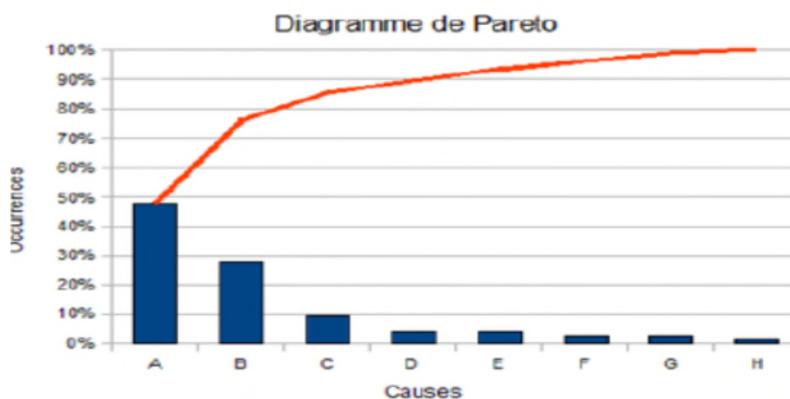


Figure 11: Diagramme de Pareto.

7. Conclusion :

Ce chapitre introduit les notions de fiabilité et de disponibilité ainsi que les indices de fiabilité. Il introduit aussi la loi exponentielle, et la loi de weibull qui ajuste, en général, la fiabilité des équipements mécaniques.



Chapitre III

1. Introduction

Il s'agit de déterminer la périodicité (T_0) avec laquelle on doit effectuer une maintenance préventive, pour minimiser le coût de l'opération.

Considérons un type de pièces présent sur n systèmes. On notera C_p le coût de remplacement d'une pièce en bon état et C_f le coût de remplacement d'une pièce défaillante.

Barlow et Hunter [18] ont proposé deux modèles mathématiques pour la détermination de la politique de remplacement optimal minimisant le coût de l'opération du système de production. Ces modèles s'appellent :

- ❖ Les modèles de remplacement par bloc (Block Replacement Model) : appelés aussi politique de remplacement à intervalle constant ou politique de type I.
- ❖ Les modèles de remplacement basé sur l'âge des pièces (Basic Age Replacement Model) : ou remplacement préventive basé sur le temps appelé aussi politique de type II.

Pour les modèles de remplacement par bloc, la maintenance préventive est exécutée périodiquement à des périodes spécifiées kT_0 ($T_0 \geq 0$) ou kN ($N = 0, 1, 2, \dots$), ($k = 1, 2, 3, \dots$). Si le système tombe en panne durant l'intervalle du temps $[(k-1) T_0, kT_0]$ ou $[(k-1) N, kN]$, alors la maintenance corrective est exécutée au moment de la défaillance.

La propriété principale du remplacement par bloc est qu'il est facile à gérer en générale, puisque le temps de remplacement préventif est programmé à l'avance et on n'a pas besoin de surveiller l'âge du système. Pour ce modèle, trois variantes peuvent être envisagés :

- La pièce défaillante est remplacée instantanément au moment de la défaillance (modèle I).
- La pièce défaillante restera inutilisable jusqu'à l'arrivée du prochain remplacement planifié (modèle II).
- La pièce défaillante subie des réparations mineures (modèle III).

Concernant les modèles de remplacement basé sur l'âge ; comme il est bien connu, dans ces modèles, si la pièce ne tombe pas en panne jusqu'au temps T_0 ($T_0 \geq 0$) ou N ($N=1, 2, 3, \dots$), alors elle est remplacée par une nouvelle pièce à la date prévue, sinon, elle est remplacée au moment de la défaillance. On remarque, en général, que dans ce cas, $C_f > C_p$. Par ailleurs, ces modèles jouent un rôle fondamental dans tous les modèles de remplacement, puisque l'optimal du modèle de remplacement d'âge a été prouvé par **Bergman** [19] si le

remplacement par une pièce nouvelle est la seule option de maintenance (c'est-à-dire si la réparation n'est pas considérée comme option) [6].

2. Modélisation mathématique

2.1 Modèles de remplacements par block: Toutes les pièces sont changées avec la même périodicité $T_0=Cst$ quelque soit l'âge de la pièce.

Toutes les pièces sont changées avec la même périodicité T_0 quelque soit l'âge de la pièce et une pièce défaillante est remplacée instantanément au moment de la défaillance (fig.1).[6]

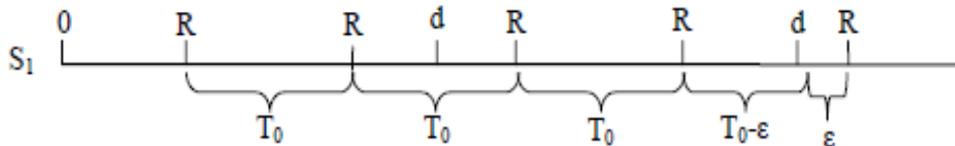


Figure 1 : Remplacement à période fixe T_0 .

S1 : système 1

R : remplacement

d : défaillance

T_0 : périodicité de remplacement

Le coût total de maintenance pour une durée déterminée est égal :

$$C(t) = C_p R(t) + C_f(1 - R(t)) \tag{3.1}$$

$C_p \cdot R(T_0)$ Est le coût de l'opération et $C_f(1 - R(T_0))$ est le coût de remplacement éventuel dû à une défaillance de la pièce pendant la durée T_0 .

Si la période de remplacement est T donc le cout horaire (par unité de temps) est égal

$$\frac{C(T)}{T} = C(T)/h \tag{3.2}$$

De $C(T)/h =$ coût horaire de remplacement

$$C(t) = \frac{C_f(1-R(T_0))+C_pR(T_0)}{T_0} \tag{3.3}$$

Le cout optimal est donné par l'annulation de la dérivée,

$$C'(t) = \left[\frac{C_f(1-R(T_0)) + C_p R(T_0)}{T_0} \right]' = 0 \quad (3.4)$$

2.2 Modèles de remplacements basés sur l'âge : L'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint la valeur T_0 :

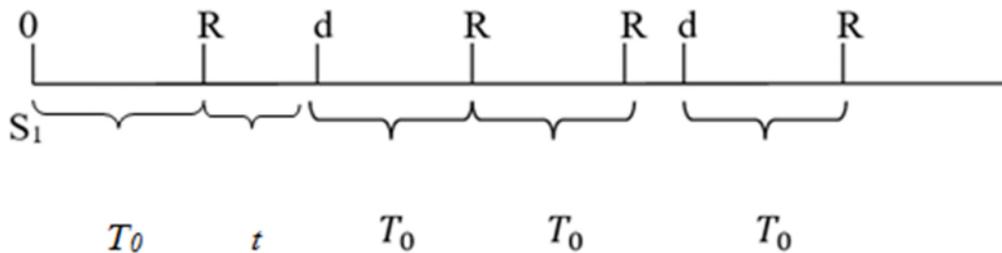


Figure 2 : Remplacement lorsque l'âge de la pièce (T_0) est atteint

S_1 : système 1.

R : remplacement.

d : défaillance.

T_0 : Âge de la pièce.

Cette étude consiste à faire un remplacement préventif lorsque l'équipement a atteint l'âge T_0 soit la période de remplacement préventif choisie. La durée de la période T_0 a été déterminée de façon à effectuer un remplacement préventif un peu avant le moment où on estime que l'équipement risque de tomber en panne. Cela permet de minimiser les coûts. Si toutefois une panne survient, l'équipement défaillant est remplacé par du neuf.

Les différences par rapport au cas précédent sont les suivants :

- Le nombre de pièces à changer est réduit car on ne risque pas de changer une pièce qui vient d'être défaillante et remplacée.
- Il faut connaître l'âge de chaque pièce, ce qui nécessite une organisation spéciale.
- Les échanges préventifs sont plus coûteux car ils ne portent que sur une pièce à chaque fois.

Ce cas se place dans le cas d'une durée de vie avec limite de fonctionnement. Donc nous allons raisonner ce cas en procédant de la manière suivante.

Le cout moyen par dispositif et par l unité de temps :

$$C(t_0) = \frac{E(C)}{E(T)} \tag{3.5}$$

Avec E(C) espérance du coût et E(T) espérance de la durée de vie.

Donc

$$E(c) = C_f(1 - R(T_0)) + C_p R(T_0) \tag{3.6}$$

$C_p \cdot R(T_0)$ Est le coût de l'opération et $C_f(1 - R(T_0))$ est le coût de remplacement éventuel dû à une défaillance de la pièce pendant la durée T_0 .

$$\text{Avec } E(T) = \int_0^{+\infty} R(t)dt \text{ (le remplacement est périodique)} \tag{3.7}$$

Donc

$$C(T_0) = \frac{C_f(1-R(T_0))+C_p \cdot R(T_0)}{\int_0^{T_0} R(t)dt} \tag{3.8}$$

Donc, la valeur T_0 qui correspond à la périodicité de maintenance préventive est celle qui minimise C(t) :

$$C(t) = \frac{C_f(1-R(t))+C_p R(t)}{\int_0^t R(u)du} \tag{3.9}$$

Le cout optimal est donné par l'annulation de la dérivée :

$$\rightarrow c'(t) = \frac{[C_f f(t) - C_p f(t)] \int_0^t R(u)du - [C_f(1-R(t)) + C_p R(t)] R(t)}{(\int_0^t R(u)du)^2} \tag{3.9a}$$

$$C'(t) = 0$$

3. Application

On utilise la loi de Weibull avec $\gamma = 0$ (pour simplifier les calculs ; le matériel est mis en service à $t = 0$) pour déterminer la période optimale T_0 pour le remplacement alors : on utilise la relation (2.22) :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$$

Avec : $\beta = 2$; $\eta=50$ UT [UT : unité de temps].

Nous avons pris $\beta = 2$, car dans le cas où le remplacement ne se fait pas à des dates fixe, le dénominateur qui intervient dans le coût est de la forme suivante $\int R(u)du$;

Pour cela pour profiter de la tabulation de la loi normale, nous avons $\beta = 2$.

3.1 Le taux de défaillance

On utilise la relation (2.26) :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Pour : $\beta = 2$; $\eta=50$ UT [UT : unité de temps]. ; $\gamma = 0$

$$\lambda(t) = \frac{1}{125} t$$

On constate que le taux de défaillance est croissant de manière linéaire (droite).

3.2 Esperance

On utilise la relation (2.23) :

$$E(t) = \int_0^{+\infty} R(t)dt = \gamma + \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Pour : $\beta = 2$; $\eta=50$ UT [UT : unité de temps]. ; $\gamma = 0$

$E(t)=MTBF$

$$= \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (\text{Voir l'annexe 1})$$

$$=50*0.8862$$

$E(t)=44.31$ UT [UT : unité de temps].

3.3 Ecart type

On utilise la relation (2.23) :

$$\sigma = \eta \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2}$$

Pour : $\beta = 2$; $\eta=50$ UT [UT : unité de temps]. ; $\gamma = 0$

$\sigma = \eta\gamma$ (Voire l'annexe 1)

$=50*0.4633$

$\sigma = 23.16$ UT [UT : unité de temps].

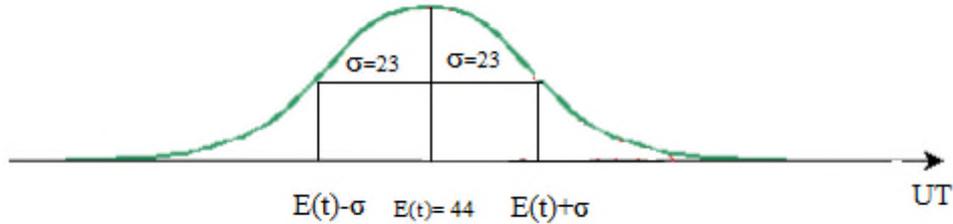


Figure 3 : courbe de l'écart type et MTBF

3.4 Détermination de la période optimale par modèle de remplacement par block:

$$C(t) = \frac{(C_p - C_f)e^{-\left(\frac{T_0}{\eta}\right)^\beta} + C_f}{T_0} \tag{3.10}$$

À titre d'exemple nous prenons : C_p

$C_f = 1000$ UM [UM : unité monétaire]. $C_f = 10C_p$

$\beta = 2$; $\eta=50$ UT [UT : unité de temps] ;

A.N:

T	10	20	40	60	80	100	120	140	160	180
C(t)	13.52	11.65	13.13	13.11	11.63	9.83	8.30	7.14	6.25	5.55

Tableau 1: Variation de C en fonction de T pour $\beta=2$; $\eta=50$ UT [UT : unité de temps] ; $C_f=1000$ UM [UM : unité monétaire] ; $C_p=100$ UM [UM : unité monétaire].

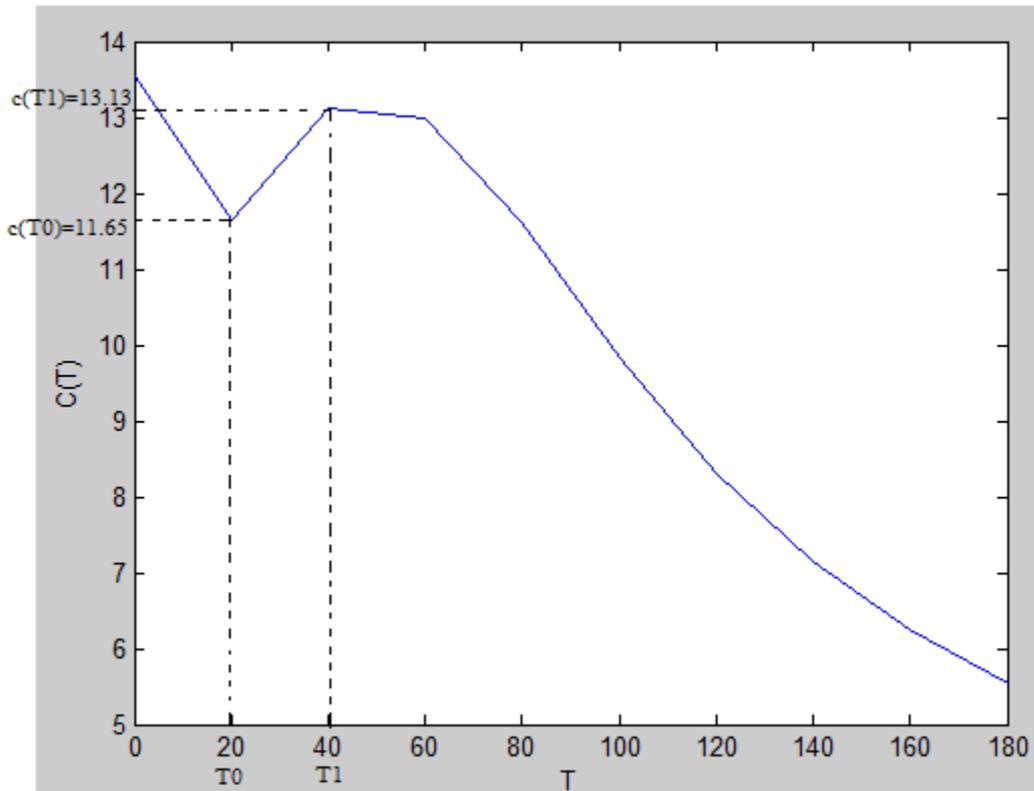


Figure 4 : allures de C en fonction de T

➤ **Commentaire :**

La courbe présente deux optimums, celui qui minimise les couts est donné par la valeur $T_0 = 20$ UT [UT : unité de temps].

Calculons la fiabilité :

$$R(t = 20) = e^{-\left(\frac{20}{50}\right)^2}$$

$$R(t = 20) = 0.85$$

Pour le cas des roulements, les calculs sont faits pour des fiabilités égales à 90%. Donc dans notre cas le remplacement sera fait a une fiabilité de 85% ce qui relativement réaliste pour les valeurs considérées dans les calculs

3.5. Détermination de la période optimale par Modèle de remplacement basé sur l'âge :

$$C(T_0) = \frac{C_f(1-R(T_0))+C_p.R(T_0)}{\int_0^{T_0} R(t)dt} \tag{3.11}$$

À titre d'exemple nous prenons :

$$C_f = 1000 \text{ UM [UM : unité monétaire].} \quad C_p = 10C_p$$

$$\beta = 2 ; \eta = 50 \text{ UT [UT : unité de temps];}$$

$$C(T_0) = \frac{(C_p - C_f)e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} + C_f}{\int_0^{T_0} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} dt} \tag{3.11a}$$

A.N:

T	5	10	20	30	∞
C(t)	22.01	14.08	13.67	17.77	22.56

Tableau 2 : Variation de C en fonction de T pour β=2 : η=50 UT : C_f=1000UM [UM : unité monétaire]. Et C_p=100 UM [UM : unité monétaire].

NB : $\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{C_f}{\eta \Gamma\left[1 + \frac{1}{\beta}\right]}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 22.56 \text{ UM}$

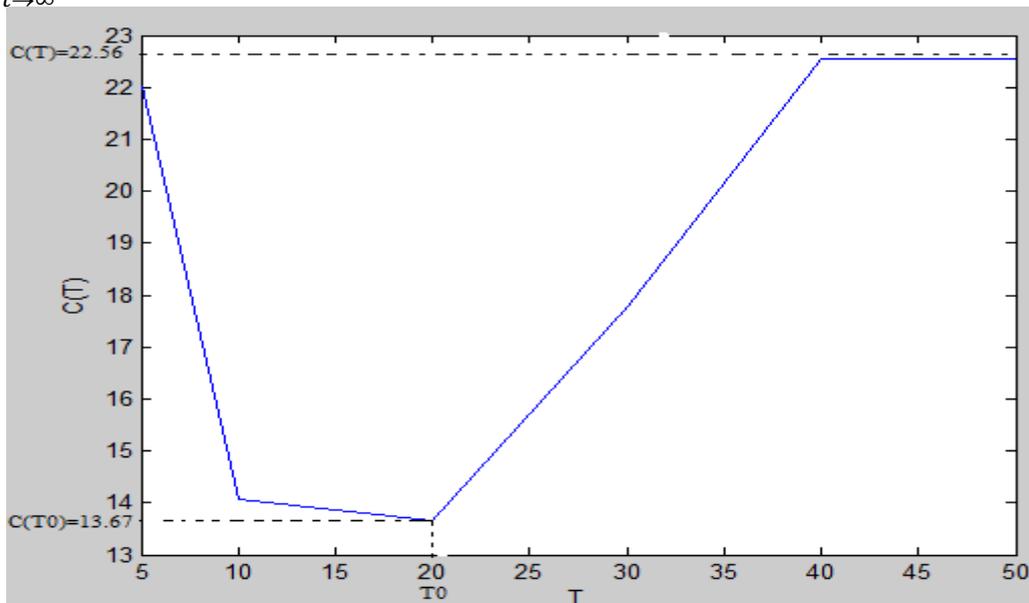


Figure 5 : allure de C(T) en fonction de T

➤ **Commentaire**

La courbe présente un seul optimum, celui qui minimise les coûts est donné par la valeur

T₀ = 20 UT [UT : unité de temps].

Pour :

$$R(t = 20) = 0.85$$

3.6. Comparaison entre les deux modèles :

La période optimale de remplacement est la même dans les deux cas ($T_0=20$ UT) ce que donne la même fiabilité

$$R(t = 20) = 0.85$$

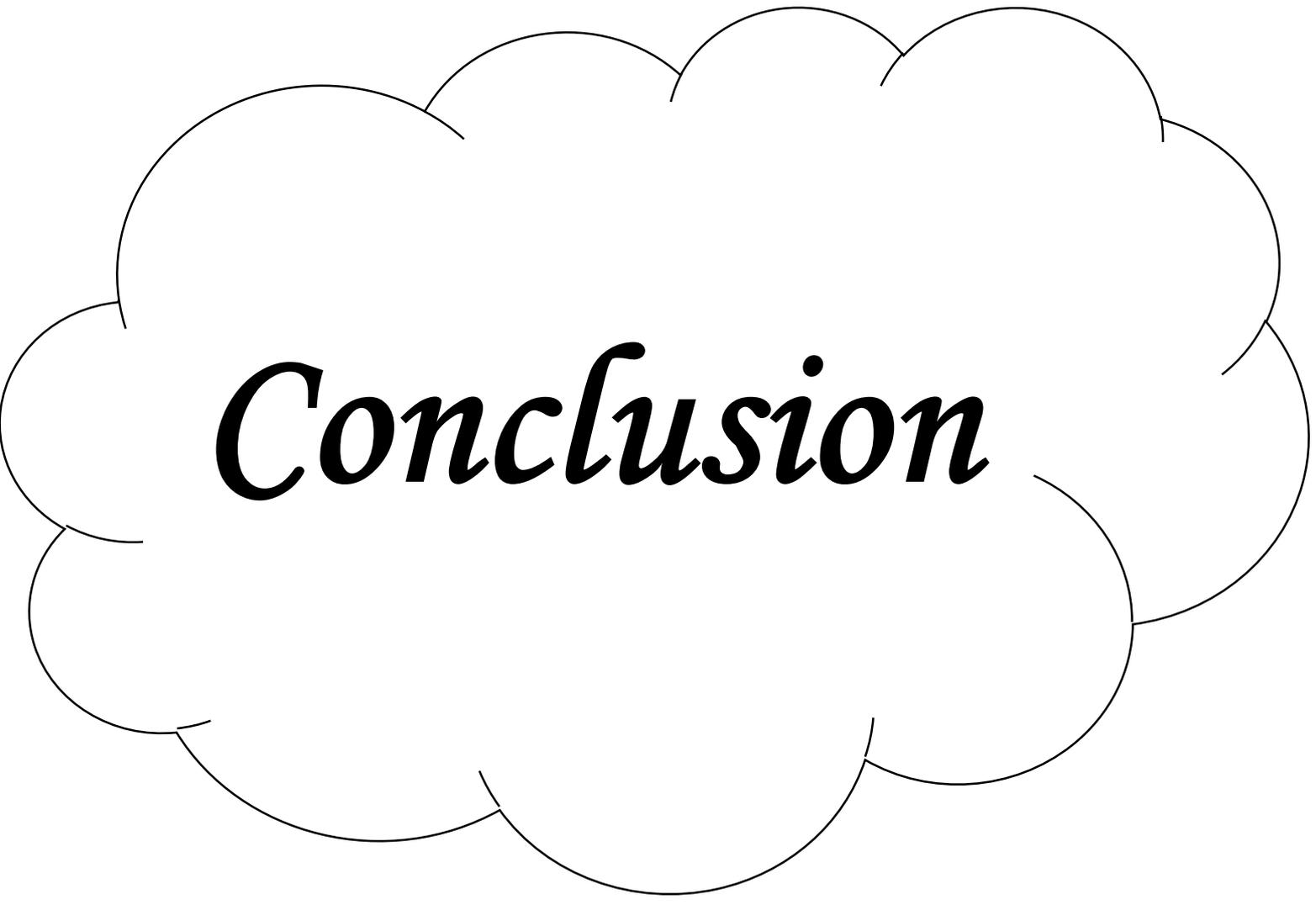
Pour les coûts optimaux on a trouvé que le modèle basé sur l'âge est chère par rapport à modèle par bloc.

- Modèle de remplacement basé sur l'âge des pièces $C(T_0)=13.67UM$. [UM : unité monétaire].
- Modèle de remplacement par bloc $C(T_0)=11.65UM$. [UM : unité monétaire].

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux modèles mathématiques pour la détermination de la politique de remplacement optimal minimisant le coût de l'opération de système de production (modèle de remplacement par bloc et modèle de remplacement basé sur l'âge des pièces).

Après on a fait une application numérique pour les deux types de politiques dans laquelle on a calculé le taux de défaillance et la variance, l'écart type puis on a déterminé la période optimale de remplacement des équipements dans chaque modèle, on a calculé la fiabilité pour cette période à la fin on fait une comparaison entre ces deux modèles.



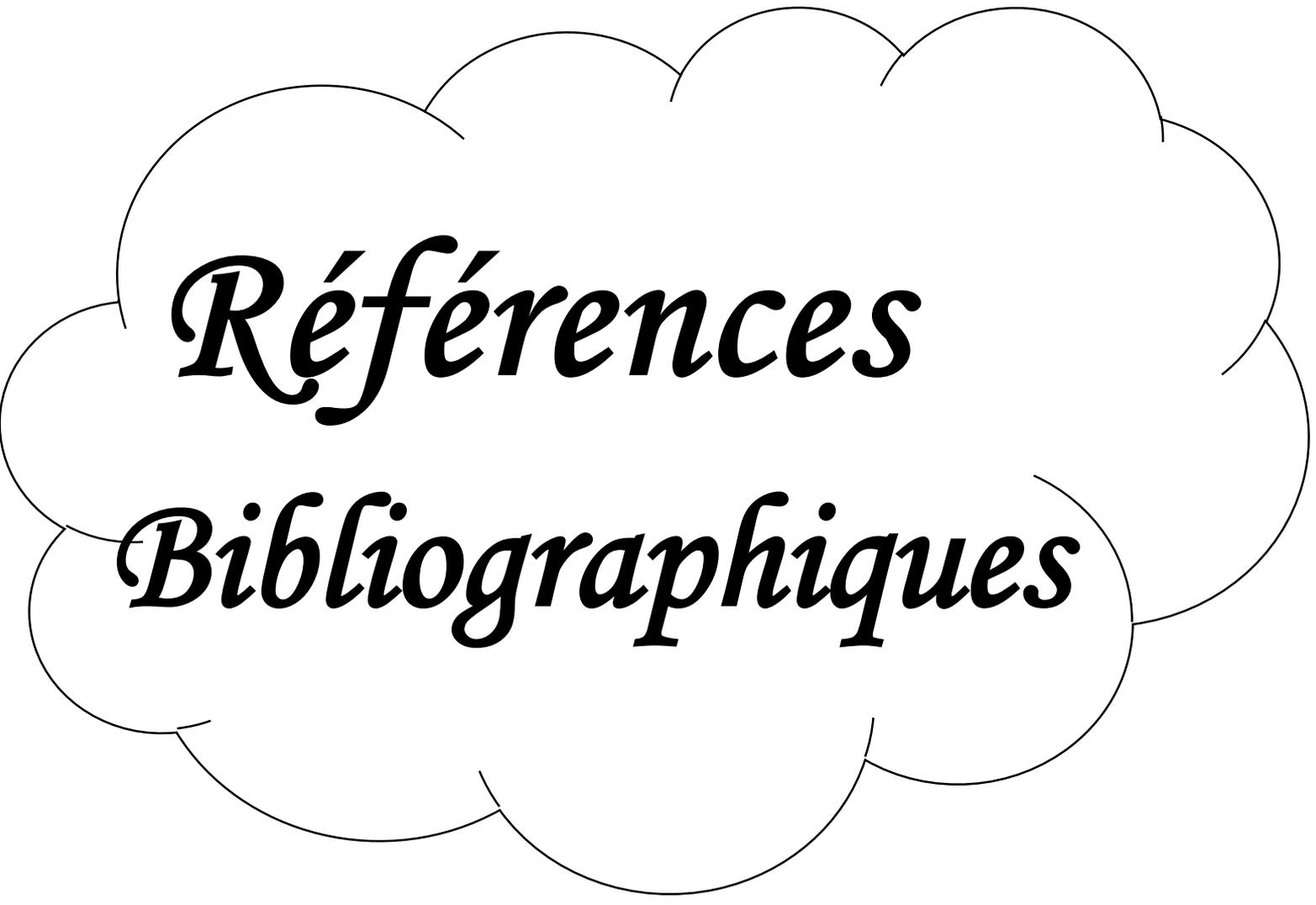
Conclusion

On s'intéresse dans ce mémoire à déterminer la période optimale de remplacement des pièces d'usure.

Après avoir introduit le concept de maintenance ainsi que les différentes politiques de maintenance, nous avons abordé, ensuite, les principales méthodes d'optimisation de la maintenance. Nous avons présenté les notions de base de la théorie de fiabilité, les différentes phases du cycle de vie d'un produit, nous avons indiqué les différentes lois de fiabilité dont laquelle nous avons concentré sur les lois les plus couramment utilisés (la loi exponentielle et la loi weibull).

Dans ce travail nous avons étudié deux modèles simplifiés de remplacement préventif à savoir : le remplacement par bloc, c'est à-dire que nous avons supposé qu'entre deux remplacements préventifs, il ne peut y avoir qu'une seule panne, qu'est le cas le plus courant en pratique ; Le remplacement basé sur l'âge, c'est-à-dire que l'âge de chaque pièce est connu et on change la pièce dès que son âge atteint cette valeur. Le principe consiste à calculer le coût total moyen par pièce et par unité de temps, à chercher son minimum et prendre la période correspondant à ce minimum comme période optimale pour effectuer la maintenance préventive. Ce coût est composé du coût de maintenance préventive et de celui de la maintenance corrective pondérée de la probabilité de défaillance. Après a fait une application numérique pour les deux types de politiques dont laquelle on a calculé le taux défaillance et la variance, l'écart type puis on a déterminé la période optimale de remplacement des équipements dans chaque modèle, on a calculé la fiabilité pour cette période a la fin on fait une comparaison entre ces deux modèles.

Les résultats obtenus ; leurs applications à des cas réels peuvent fournir au service de maintenance un élément-clef pour choisir la période la plus appropriée pour effectuer la maintenance préventive au coût minimum.



Références

Bibliographiques

- [1]. Vernier, François Monchy Jean-Pierre. "MAINTENANCE Méthodes et organisations, 3ème édition, l'USINE NOUVELLE DUNOD."
- [2]. Monchy, François. "maintenance, Méthodes et Organisation, dunod." (2000).
- [3]. Jourden, P., and J. P. Souris. "Pratique de la Maintenance Industrielle." Dunod ed., Paris (1998).
- [4].R. Laggoune. *Les Modèles de Maintenance basés sur la Distribution des durées de Vie*. Cours, Université de Bejaia, 08 Septembre 2008.
- [5].P. Lionnet. *Optimisation d'une politique de maintenance. Ed. Techniques et documentation (Lavoisier)*, 1993.
- [6].R Berrehal .*Détermination da la période optimal pour le remplacement préventif*, thèse doctorant université Constantine 02/07/2017
- [7].D. Aïssani, *Cours de modélisation. Département de Recherche Opérationnelle et Informatique*, Université de Bejaia 2010,.
- [8]. P. Lionnet. *La maintenance, mathématique et méthodes. Ed. Techniques et documentation (Lavoisier)*, 1988.
- [9]. A. Aïssani, *Modèles Stochastiques de la théorie de fiabilité*. O.P.U, 1992.
- [10]. H. Procaccia, L. Piepszownik. *Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne*. Ed. Eyrolle, 1992.
- [11]. Zwingelstein, Gilles. "La maintenance basée sur la fiabilité." Hermès 199 (1996).
- [12]. BENSAAIDA, S., MT BOUZIANE, and D. FELLIACHI. "LA MAINTENANCE MAINTENANT."
- [13]. G. Zwingelstein, *Diagnostic de défaillance*, Hermès Paris 1997
- [14]. J. C. Ligeron, P. Lionnet. *La fiabilité en exploitation, organisation et traitement des données*. Ed. Techniques et documentation (Lavoisier), 1993.
- [15]. Zwingelstein, Gilles. "La maintenance basée sur la fiabilité." Hermès 199 (1996).
- [16]. Javel, Georges. *Pratique de la gestion industrielle: organisation, méthodes et outils*. Dunod, 2003.
- [17]. CHAPOUILLE, Pierre. *Fiabilité. Maintenabilité*. Ed. Techniques Ingénieur, 1980.
- [18].R.E. Barlow, L.C. Hunter, *Optimum preventive maintenance policies*, *Oper. Res.* 8 (1960) 90–100.
- [19].B. Bergman, *On the optimality of stationary replacement strategies*, *J. App. Prob.* 17 (1980) 78–86



Annexe

LOI DE WEIBULL

Table des valeurs de x et de y

$$\text{MTBF} = E(T) = \gamma + \eta x$$

$$\text{Écart type} : \sigma = \eta y$$

$$x = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad y = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2}$$

β	x	y	β	x	y	β	x	y
0,20	120,0000	1901,2000	1,50	0,9027	0,6129	4,0	0,9064	0,2543
0,25	24,0000	199,3600	1,55	0,8994	0,5925	4,1	0,9077	0,2490
0,30	9,2605	50,0780	1,60	0,8966	0,5737	4,2	0,9089	0,2440
0,35	5,0291	19,9760	1,65	0,8942	0,5564	4,3	0,9102	0,2392
0,40	3,3234	10,4380	1,70	0,8922	0,5402	4,4	0,9114	0,2345
0,45	2,4786	6,4601	1,75	0,8906	0,5252	4,5	0,9126	0,2301
0,50	2,0000	4,4721	1,80	0,8893	0,5112	4,6	0,9137	0,2258
0,55	1,7024	3,3453	1,85	0,8882	0,4981	4,7	0,9149	0,2217
0,60	1,5046	2,6451	1,90	0,8874	0,4858	4,8	0,9160	0,2178
0,65	1,3663	2,1789	1,95	0,8867	0,4742	4,9	0,9171	0,2140
0,70	1,2608	1,8512	2,0	0,8862	0,4633	5,0	0,9182	0,2103
0,75	1,1930	1,6108	2,1	0,8807	0,4431	5,1	0,9192	0,2070
0,80	1,1380	1,4282	2,2	0,8856	0,4249	5,2	0,9202	0,2034
0,85	1,0880	1,2854	2,3	0,8859	0,4085	5,3	0,9213	0,2001
0,90	1,0522	1,1711	2,4	0,8865	0,3935	5,4	0,9222	0,1969
0,95	1,0234	1,0777	2,5	0,8873	0,3797	5,5	0,9232	0,1938
1,00	1,0000	1,0000	2,6	0,8882	0,3670	5,6	0,9241	0,1908
1,05	0,9808	0,9344	2,7	0,8893	0,3552	5,7	0,9251	0,1879
1,10	0,9649	0,8783	2,8	0,8905	0,3443	5,8	0,9260	0,1851
1,15	0,9517	0,8297	2,9	0,8917	0,3341	5,9	0,9269	0,1824
1,20	0,9407	0,7872	3,0	0,8930	0,3245	6,0	0,9277	0,1798
1,25	0,9314	0,7498	3,1	0,8942	0,3156	6,1	0,9286	0,1772
1,30	0,9236	0,7164	3,2	0,8957	0,3072	6,2	0,9294	0,1747
1,35	0,9130	0,6866	3,3	0,8970	0,2993	6,3	0,9302	0,1723
1,40	0,9114	0,6596	3,4	0,8984	0,2918	6,4	0,9310	0,1700
1,45	0,9067	0,6352	3,5	0,8997	0,2847	6,5	0,9318	0,1677
			3,6	0,9011	0,2780	6,6	0,9325	0,1655
			3,7	0,9025	0,2710	6,7	0,9333	0,1633
			3,8	0,9038	0,2656	6,8	0,9340	0,1612
			3,9	0,9091	0,2656	6,9	0,9347	0,1592