

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A/Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département Mathématique
Laboratoire de Mathématiques Appliquées

MÉMOIRE

Présenté par :

BELAIDI Amina

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Thème

**Etude d'une récurrence tridimensionnelle
symétriquement découplée à partir de l'une
de ses composantes unidimensionnelles**

Soutenu le 16/09/2020, Devant le jury composé de :

Président	A. MOUSSAOUI	Professeur	Univ. A.Mira de Bejaia
Rapporteur	H. GHAROUT	M.C.B	Univ. A.Mira de Bejaia
Examineur	R.CHEMLAL	M.C.A	Univ. A.Mira de Bejaia

Année universitaire : 2019/2020

※ Remerciements ※

Au terme de ce modeste travail, je tiens à remercier, M^r Hacene GHAROUT pour avoir accepté de m'encadrer, pour ses précieux conseils et orientations les plus précieuses. Je garderais un très bon souvenir de ses qualités profondément humaines.

J'adresse mes plus vifs remerciements à M^r Abdelkrim MOUSSAOUI en acceptant de présider le jury et à M^r Rezki CHEMLAL pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Mes sincères remerciements à tous les membres de la faculté des sciences exactes et en particulier, le département de mathématiques.

Je remercie, également, toute les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

A.BELAIDI

✱ *Dédicaces* ✱

Je dédie ce modeste travail à mes parents, ma famille
et à toute la promotion du Master Analyse Mathématique.

BELAIDI Amina

Table des matières

Table des matières	1
Table des figures	2
Principales notations utilisées	5
Introduction	6
1 Généralités sur les transformations ponctuelles tridimensionnelles	8
1.1 Introduction	8
1.2 Singularités	9
1.2.1 Points fixes et cycles d'ordre k de la transformation T	9
1.2.2 Natures des singularités	9
1.3 Courbes invariantes	12
1.3.1 Variété instable	13
1.3.2 Variété stable	13
1.4 Attracteurs, attracteurs chaotiques et bassin d'attraction	14
1.4.1 Attracteurs réguliers	14
1.4.2 Attracteurs chaotiques	14
1.4.3 Bassin d'attraction	15
1.5 Bifurcations	15
1.5.1 Bifurcation noeud-col (Fold)	16
1.5.2 Bifurcation doublement de période (Flip)	16
1.5.3 Bifurcation de Neïmark-Sacker	16
1.6 Transformations ponctuelles symétriquement découplées	17
1.6.1 Cycles homogènes	18
1.6.2 Cycles mixtes	19

2 Etude des cycles et bifurcations d'une transformation ponctuelle symétriquement découplée de dimension trois	21
2.1 Etude des Cycles d'ordre un de T et leurs bifurcations à partir de H	22
2.1.1 Recherche des points fixes de H	22
2.1.2 Construction des cycles homogènes d'ordre un de T	23
2.1.3 Stabilité des points fixes de T déduite de la stabilité de H	24
2.1.4 Bifurcations de points fixes de T à partir des bifurcations des points fixes de H	25
2.2 Cycles d'ordre deux de T	25
2.3 Cycles d'ordre supérieure à deux de T	26
2.3.1 Cycle d'ordre quatre et cinq de T	26
2.3.2 Cycle d'ordre trois de T	27
2.3.3 Cycle d'ordre six de T	29
2.3.4 Cycles d'ordre douze de T	31
3 Espace de phases de $T_{(b)}$	33
3.1 Diagramme de bifurcation	33
3.2 Etude de la nature des singularités (points fixes et cycles) dans \mathbb{R}^3	34
3.3 Etude de l'espace d'état	37
3.3.1 Plans invariants	38
3.3.2 Variétés critiques de T	38
3.3.3 Attracteurs	43
3.4 Conclusion	46
Conclusion Générale	47
Bibliographie	48

Table des figures

1.1	Plans de phases pour des valeurs propres λ_1 et λ_2 ayant une partie imaginaire non nulle.	11
1.2	Portraits de phases plans et linéaires, lorsque les valeurs propres sont réelles (ξ_1 et ξ_2 vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 , respectivement, lorsqu'ils existent).	11
1.3	Classification des points singuliers dans la dimension trois	12
2.1	Cycles d'ordre un de H	23
2.2	Les cycles d'ordre deux de H	26
2.3	Représentation des cycles d'ordre un, deux, quatre et cinq de H	27
2.4	Représentation de la partie stable du cycle d'ordre trois de H	29
2.5	Cycles d'ordre neuf de H avec les cycles d'ordre un et trois de H pour $b = -2$	30
2.6	Cycles d'ordre six de H	30
2.7	Représentation des cycles d'ordre $1 \leq k \leq 4$ et le cycle d'ordre douze de H pour $b = -1.8$	32
3.1	Diagramme de bifurcation sur le plan $[b, x]$ ($b = -0.75$ correspond à la première bifurcation).	34
3.2	Exemple des plans invariants associés à un point d'un cycle de type col.	38
3.3	Plan de phase $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ de T ($Z_0 - Z_2$). PC sépare les régions Z_0 et Z_2	39
3.4	Les huit premiers plans critiques de T pour $b = -0.5$	41
3.5	L'intersection des plans critiques PC_{-1} (couleur marron) et PC (couleur verte) de T pour $b = -0.5$	41
3.6	L'intersection des plans critiques PC (couleur verte) et PC_1 (couleur bleu) de T pour $b = -0.5$	42
3.7	Apparition d'attracteurs en variant le paramètre b [10, 12, 13].	43
3.8	Attracteur chaotique de T pour $b = -1.864$	44

3.9	Attracteur chaotique délimité par des plans critiques ($b = -1.864$).	45
3.10	Bassin d'attraction pour $b = -1.864$ avec $X_0(0, -0.5, 0.5)$	46

Principales notations utilisées

$J_1^{(b)}(x, y, z)$: la jacobienne de $T_{(b)}$ au point (x, y, z) .

$| J_1^{(b)}(x, y, z) |$: déterminant de la jacobienne $J_1^{(b)}(x, y, z)$.

$P^{(b)}$: le polynôme caractéristique associé à la jacobienne de $T_{(b)}$.

S_i : le i -ème multiplicateur (la i -ème valeur propre) de $J_1^{(b)}$.

PC_n : variété critique (plan critique) d'ordre n de $T_{(b)}$.

$PC = PC_0$: variété critique (plan critique) de rang un du plan critique PC_{-1} .

l_i : exposant de Lyapounov.

D_L : dimension de Lyapounov.

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets. C'est à dire, des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières. Ainsi, depuis plus de cent ans, les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les continus et discrets. L'objet de ce mémoire consiste à la construction des cycles d'une transformation ponctuelle symétriquement découplée de dimension trois à partir de l'une de ses composantes unidimensionnelles. Il s'agit de la récurrence de dimension trois définie par :

$$T \begin{cases} x_{n+1} = y_n, \\ y_{n+1} = z_n, \\ z_{n+1} = x_n^2 + b. \end{cases} \quad (1)$$

Une transformation ponctuelle symétriquement découplée est une transformation qui peut se mettre sous la forme :

$$T \begin{cases} x' = f(y), \\ y' = g(z), \\ z' = h(x). \end{cases} \quad (2)$$

De telles transformations se rencontrent dans différents domaines de la science, par exemple en économie, en physique et en ingénierie. On rencontre en économie le duopole de Cournot (1838) [6] qui décrit une figure du marché très intéressante, tant en micro-économie qu'en économie industrielle et internationale.

Un des exemples rencontrés en physique décrit par des transformations symétriquement découplées est celui des systèmes avec retard qui sont sous la forme $X_n = T(X_{n-\mu}, \Lambda)$, où l'entier μ représente le retard et Λ est le vecteur de paramètres du système ; on rencontre

de telles transformations dans le cas d'un système optoélectronique. Voir par exemple les travaux de L.Larger et D.Fournier-Prunaret (2005) [19] et L.Larger et Jhon M. Dudley (2010) [18]. Elles se rencontrent aussi dans le cas de la sécurité des transmissions, voir par exemple les travaux de J.Xu, D.Fournier-Prunaret, A.K.Taha et P.Chargé (2010) [33].

Peu de travaux ont été fait dans la dimension trois, en l'occurrence M.Sonis (1999) [27] G.I.Bischi et al (2000, 2013) [4, 5], G.Wen et al (2003) [31], E.Zeraoulia et al. (2010) [36], A.Djerrai et I.Djellit (2011) [8], E.Shamsara et al (2017) [26] et H.Gharout et al (2019) [10, 12, 11, 13].

Dans ce mémoire, on distingue trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une introduction générale et quelques généralités sur les transformations ponctuelles tridimensionnelles.

Nous allons d'abord définir quelques éléments essentiels relatif à la théorie de transformation ponctuelles et en donnant de différentes notions de singularités, courbes invariantes, bassins d'attractions, variétés critiques, et quelque bifurcations. Ensuite à la fin de ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes sur les transformations ponctuelles symétriquement découplée.

Le deuxième chapitre concerne l'étude des points fixes et des cycles (homogènes et mixtes) et leurs stabilités de la transformation ponctuelle symétriquement découplée T à partir de l'une de ses composantes de dimension une. Certaines bifurcations de T seront déduites à partir de la composante unidimensionnelle.

Dans Le chapitre trois, un diagramme de bifurcation (Feigenbaum) de la récurrence T nous a permis d'observer l'existence des cycles et l'apparition d'une zone chaotique. Un nouveau type des variétés critiques de la transformation tridimensionnelle, qu'est une généralisation des points et des lignes critiques introduites par Mira et ses collaborateurs [21, 15, 22, 23], sera vu dans le cas de la dimension trois, où les variétés critiques de la récurrence sont des plans dans l'espace délimitant les attracteurs obtenus [10]. Cette étude est suivie de la détermination et de la présentation du bassin d'attraction d'un attracteur chaotique.

À la fin de ce travail on trouve une conclusion générale qui résume les résultats obtenus.

N.B : La majorité des courbes sont tirées des travaux de Monsieur H.Gharout.

Chapitre 1

Généralités sur les transformations ponctuelles tridimensionnelles

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons quelques généralités sur les systèmes dynamiques discrets. Nous présentons d'abord les singularités de ces transformations. Après la présentation de la nature de ces singularités, nous donnons les définitions des courbes invariantes, bassins d'attraction, variétés critiques et quelques structures de bifurcations classiques. Nous nous intéressons aux transformations ponctuelles (réurrences) définies par :

$$X_{n+1} = T(X_n) = F(X_n, \Lambda), \quad (1.1)$$

où $X_n \in \mathbb{R}^p$, p entier non nul et Λ étant un vecteur de paramètres réels dans \mathbb{R}^m , $m = 1, 2, \dots$. L'espace \mathbb{R}^p est appelé espace d'état.

Une solution de (1.1) est formée par une suite de points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ où X_0 est appelé condition initiale; les points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ forment une trajectoire discrète de phase ou orbite.

Si F est continûment différentiable et d'inverse unique sur son domaine de définition, alors (1.1) est appelée difféomorphisme. Si F ne possède pas d'inverse unique, (1.1) est appelé un endomorphisme.

L'itéré X_{n+r} , avec $r \geq 1$, est appelé conséquent de rang r de X_n , c'est-à-dire : $X_{n+r} = T^r(X_n)$, X_n est un antécédent de rang r de X_{n+r} , noté $X_n = T^{-r}(X_{n+r})$.

Lorsque T est un endomorphisme, un même point peut avoir plusieurs antécédents de rang un ou aucun.

1.2 Singularités

Nous présentons dans cette section certaines singularités, ainsi que, leurs natures.

1.2.1 Points fixes et cycles d'ordre k de la transformation T

Les transformations ponctuelles peuvent posséder différents types de singularités :

Définition 1.1. X^* est dit point fixe d'une transformation ponctuelle T , si :

$$X^* = T(X^*). \quad (1.2)$$

Définition 1.2. Un cycle d'ordre k (k entier non nul) est un ensemble de k points, $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$, vérifiant :

$$\begin{cases} X_{i+1} = T(X_i), & i = 1, \dots, k-1; \\ X_1 = T(X_k); \\ X_i = T^k(X_i), & i = 1, 2, \dots, k; \\ X_i \neq T^h(X_i), & i = 1, 2, \dots, k, 1 \leq h < k. \end{cases}$$

Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses k points X_i par applications successives de T .

1.2.2 Natures des singularités

Pour caractériser la nature de ces singularités (points fixes et cycles), on introduit la notion du multiplicateur :

a) Lorsque la dimension de la récurrence est $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe X^* est $S = T'(X^*)$ où $T' = \frac{dT}{dX}$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre k , formé des points $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$ est $S = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*)$.

Un point fixe ou un cycle est dit stable si $|S| < 1$ et instable si $|S| > 1$.

b) Lorsque $p > 1$, les multiplicateurs d'un point fixe d'un cycle d'ordre k , $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*\}$, sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $T(X^*)$ ou de $T^k(X_i^*), i = 1, \dots, k$.

Lorsque $p = 2$, on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs S_1 et S_2 .

Définition 1.3. Dans le cas de la dimension deux, on distingue alors les singularités suivantes :

1. **Col** : S_1 et S_2 sont réels, $|S_1| < 1$ et $|S_2| > 1$. Un col est point instable :

- de type 1 si $S_1 > 0$ et $S_2 > 0$;
 - de type 2 si $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$ (ou $S_1 < 0$ et $S_2 > 0$);
 - de type 3 si $S_1 < 0$ et $S_2 < 0$.
2. **Noeud** : S_1 et S_2 sont réels.
- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$;
 - instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$.
3. **Foyer** : S_1 et S_2 sont complexes conjugués.
- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$;
 - instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$.

En dimension deux, les principaux cas sont illustrés sur les figures (1.1, 1.2). Où, λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres (multiplicateurs) de T et ξ_1 et ξ_2 sont les vecteurs propres réels de T associés quand ils existent. On appelle ici plan de phases l'espace \mathbb{R}^2 correspondant à x .

Lorsque $p = 3$, on associe à un point fixe ou à un cycle d'ordre k , trois multiplicateurs S_1 , S_2 et S_3 , qui sont les valeurs propres de la linéarisation de T^k , k entier non nul.

Définition 1.4. [32] Dans la dimension 3, les singularités sont telles que :

1. **Col** : S_1 , S_2 et S_3 sont réels.
 - de type 1 si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$;
 - de type 2 si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$.
2. **Col-foyer** : S_1 et S_2 sont complexes conjugués et S_3 est réel.
 - de type 1 si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$;
 - de type 2 si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$.
3. **Noeud** : S_1, S_2 et S_3 sont réels.
 - stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$;
 - instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$.
4. **Noeud-foyer** : S_1 et S_2 sont complexes conjugués et S_3 est réel.
 - stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$;
 - instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$.

Une illustration de certaines singularités, dans le cas tridimensionnel, est donnée dans la figure (1.3). On constate, si T a deux valeurs propres conjuguées à parties réelles négatives et une valeur propre réelle négative, on a convergence suivant une direction et enroulement avec convergence (typique d'un foyer stable) suivant deux autres directions.

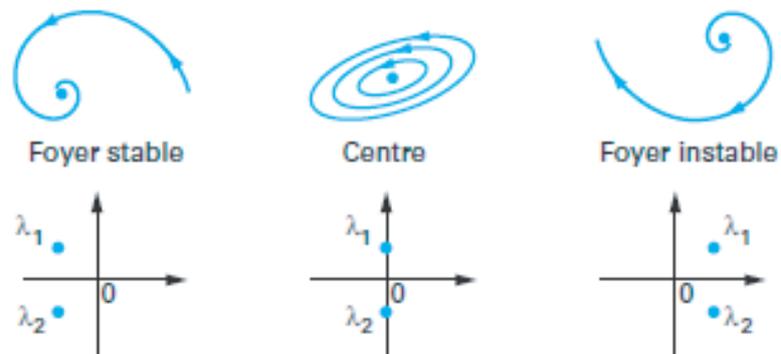


FIGURE 1.1 – Plans de phases pour des valeurs propres λ_1 et λ_2 ayant une partie imaginaire non nulle.

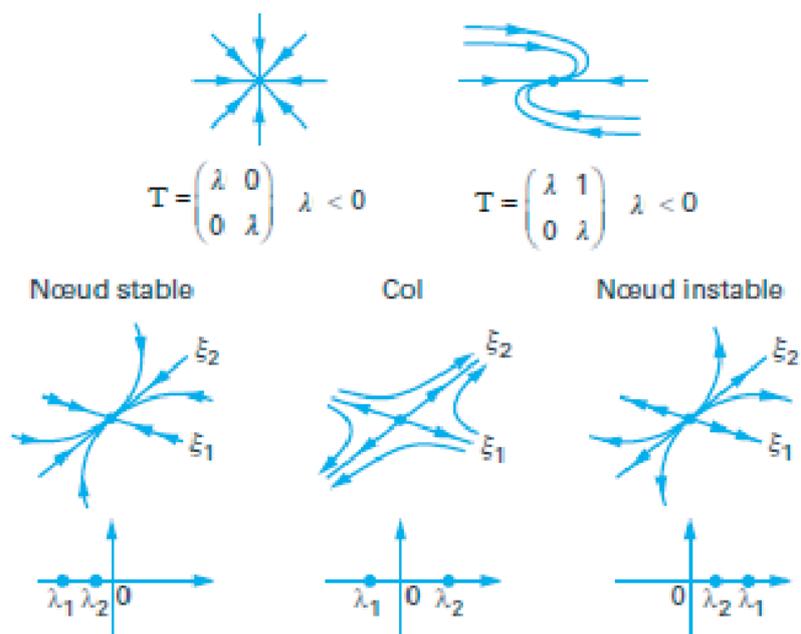


FIGURE 1.2 – Portraits de phases plans et linéaires, lorsque les valeurs propres sont réelles (ξ_1 et ξ_2 vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 , respectivement, lorsqu'ils existent).

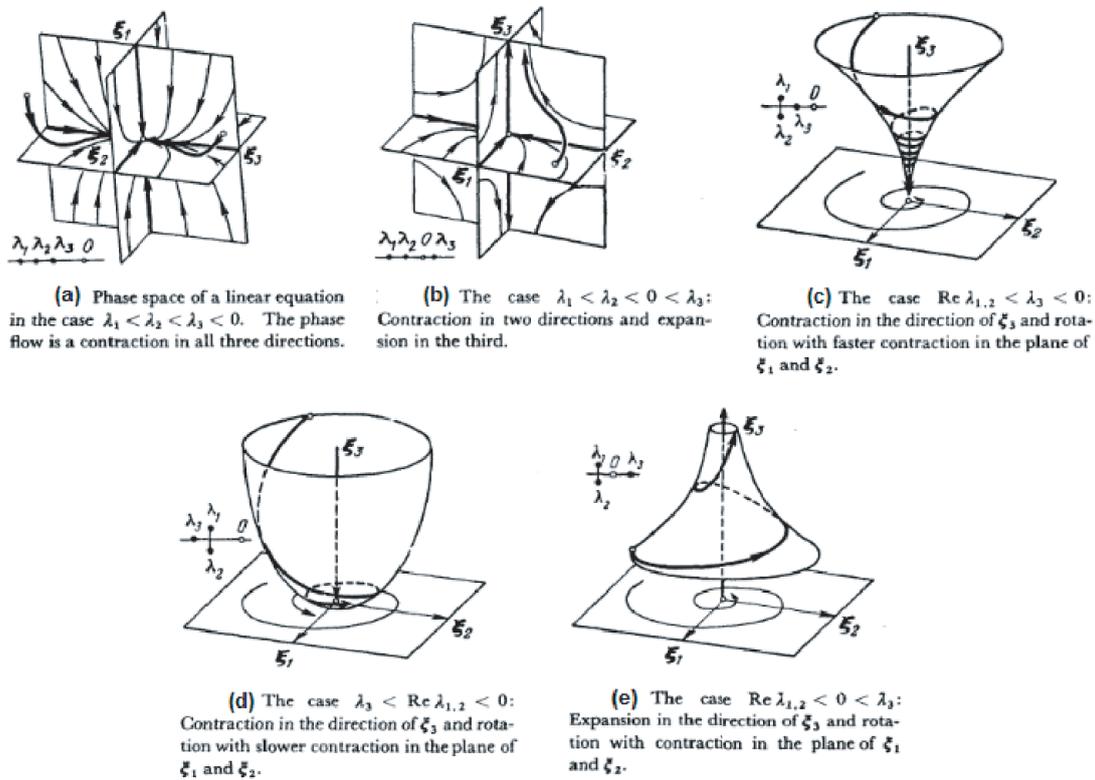


FIGURE 1.3 – Classification des points singuliers dans la dimension trois

1.3 Courbes invariantes

Une récurrence T peut admettre d'autres singularités que les points fixes ou les cycles d'ordre k , les courbes invariantes.

Définition 1.5. [32] une courbe invariante $Q(X) = C$, où C étant une constante réelle, est invariante par la transformation T définie par (1.1), si Q satisfait l'équation fonctionnelle :

$$Q[T(X)] = Q(X), \quad (1.3)$$

c'est-à-dire,

$$Q(X_{n+1}) = Q(X_n). \quad (1.4)$$

En général, un ensemble A de \mathbb{R}^p est invariant par T , si et seulement si :

$$T(A) = A. \quad (1.5)$$

Dans le cas d'un point fixe (ou d'un cycle d'ordre k) de type col, on note W^S les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module inférieur à 1 et W^U les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module supérieur à 1.

1.3.1 Variété instable

Soit T une récurrence définie dans \mathbb{R}^n et X^* un point répulsif (instable) de T et U un voisinage de X^* .

Définition 1.6. Variété instable locale [25]

On appelle $W_{loc}^u(X^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c-à-dire dans U) de X^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U , qui converge vers X^* .

$$W_{loc}^u(X^*) = \{X \in U : X_{-p} \in T^{-p}(X) \longrightarrow X^* \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, X_{-p} \in U\}. \quad (1.6)$$

Définition 1.7. Variété instable globale [25]

On appelle $W^u(X^*)$ ensemble instable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^n ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers X^* .

$$W^u(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^n : X_{-p} \in T^{-p}(X) \longrightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^u(X^*)). \quad (1.7)$$

Propriété 1.1. *Les propriétés d'ensemble instable global :*

1. $W^u(X^*)$ est invariant par $T : T(W^u(X^*)) = W^u(X^*)$.
2. Si T est un endomorphisme, en général, $W^u(X^*)$ n'est pas invariant par T^{-1} et on a : $T^{-1}(W^u(X^*)) \supseteq W^u(X^*)$.
3. L'invariance de $W^u(X^*)$ par T^{-1} a lieu lorsque T est inversible.

1.3.2 Variété stable

Soit T une récurrence définie dans \mathbb{R}^n et $X^* \in U$, un point fixe de T , attractif ou répulsif.

Définition 1.8. Variété stable locale [25]

On appelle $W_{loc}^s(X^*)$ ensemble stable local ou variété stable locale de X^* dans U , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives appartient à U et converge vers X^* .

$$W_{loc}^s(X^*) = \{X \in U : X_p = T^p(X) \longrightarrow X^* \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, X_p \in U\}. \quad (1.8)$$

Définition 1.9. Variété stable globale [25]

On appelle $W^s(X^*)$ ensemble stable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^n , dont la séquence d'images successives converge vers X^* .

$$W^s(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^n : X_p = T^p(X) \longrightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(X^*)). \quad (1.9)$$

Si X^* est un point fixe attractif, l'ensemble stable globale est son bassin d'attraction.

1.4 Attracteurs, attracteurs chaotiques et bassin d'attraction

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités plus générales que les points fixes et les cycles ; sont les attracteurs. Dans ce mémoire, on se contentera de la définition donnée par I.Gumowski et C.Mira [15].

1.4.1 Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et on distingue trois types d'attracteurs réguliers [34] :

1. **Le point fixe** : C'est le plus simple attracteur, car le système évolue vers un état de repos (point).
2. **Le cycle limite périodique** : Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique et le système présente des oscillations permanentes.
3. **Le cycle limite pseudo-périodique** : C'est presque un cas particulier du précédent. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension deux (par exemple un tore).

1.4.2 Attracteurs chaotiques

Il existe des systèmes dynamiques, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ (points initiaux) dont la différence est très petite pour être observable, se séparent après un certain temps et leur distance croît de façon exponentielle. On appelle ce phénomène "sensibilité aux conditions initiales". Cette propriété du système est caractérisée par des coefficients, appelés exposants de Lyapounov. Un exposant de Lyapounov calcule la distance entre deux points de la trajectoire de deux itérés très proches.

Il indique le taux moyen de divergence par iteration. On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.), si au moins un des exposants de Lyapounov est strictement positif [7].

Définition 1.10. Un attracteur est dit chaotique, s'il a la propriété de sensibilité aux conditions initiales pour presque tout point le constituant.

Il n'existe pas de définition précise du chaos, ce phénomène est très irrégulier sur une période ou dont la période est trop grande pour être mise en évidence et il englobe divers comportements non périodiques. Un tel comportement est caractérisé par :

1. La coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
2. L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

On distingue deux types du chaos

1. **Le chaos stable ou attracteur étrange :** Le chaos est dit stable, lorsque le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir et la caractéristique de cet attracteur est sa dimension de Lyapounov qui est fractale (non entière)[9].
2. **Le chaos instable ou répulseur étrange :** Le chaos est dit instable, lorsque il y a existence d'un transitoire étrange dû à la présence d'une infinité de solutions périodiques instables ; on parle alors de répulseur chaotique, un tel ensemble peut être associé à l'existence d'un attracteur à l'infini (divergence pour les conditions initiales choisies) ou à l'existence d'une frontière floue entre les bassins de deux attracteurs.

1.4.3 Bassin d'attraction

Définition 1.11. [15] Le bassin d'attraction $D(A)$ d'un ensemble attractif A , est l'ensemble ouvert constitué de tous les points x tels que, $T^n(x)$ converge vers A , quand $n \rightarrow \infty$.

1.5 Bifurcations

Un des problèmes pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace de paramètres. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand un de ses paramètres traverse une valeur critique. Sous l'effet d'une petite variation des paramètres, ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition des singularités, soit à une modification de la nature des singularités.

Parmi les bifurcations classiques : bifurcation noeud-col (Fold), bifurcation doublement de période (Flip), bifurcation de Neïmark-Sacker, bifurcation transcritique et bifurcation fourche. Nous rappellerons que celles qui interviennent dans la suite de notre travail. Considérons la transformation ponctuelle définie en (1.1) :

$$X_{n+1} = T(X_n) = F(X_n, \Lambda), \quad F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

1.5.1 Bifurcation noeud-col (Fold)

Lorsque les multiplicateurs sont à valeurs réelles, et que l'un d'eux traverse la valeur +1, il y a naissance de deux points fixes ou deux cycles d'ordre k , l'un est stable et l'autre est instable. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\phi \longleftrightarrow^{S=+1} N_S^k(\text{resp}^t. N_I^k) + C^k \quad (1.10)$$

ϕ signifie absence de cycle d'ordre k , N_S^k cycle noeud d'ordre k stable, C^k cycle col d'ordre k et N_I^k cycle noeud d'ordre k instable. Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notés $\Lambda_{(k)_o}^j$ ($j, k \in \mathbb{N}^*$), où k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par T .

1.5.2 Bifurcation doublement de période (Flip)

Cette bifurcation se produit lorsque un des multiplicateurs S associé au cycle d'ordre k traverse -1 . Elle est représenté par le schéma suivant :

$$\begin{cases} N_S^k(\text{resp}^t. N_I^k) \longleftrightarrow^{S=-1} N_S^{2k}(\text{resp}^t. N_I^{2k}) + N_I^k(\text{resp}^t. N_S^k) \\ C^k \longleftrightarrow^{S=-1} N_S^k(\text{resp}^t. N_I^k) + C^{2k}. \end{cases} \quad (1.11)$$

N_S^{2k} signifie cycle noeud d'ordre $2k$ stable, N_I^{2k} cycle noeud d'ordre $2k$ instable et C^{2k} cycle col d'ordre $2k$. Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notés Λ_k^j ($j, k \in \mathbb{N}^*$), où k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par T [15, 20, 32].

1.5.3 Bifurcation de Neïmark-Sacker

Cette bifurcation se produit lorsque les multiplicateurs sont complexes conjuguées ($S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\theta}$). La situation $\rho = 1$ est celle d'un cas critique au sens de Lyapounov. Un cas critique est associé à une bifurcation locale obtenue par traversée des trajectoires des itérés du point ou de la courbe ayant $\rho = 1$, sous l'effet de variation des paramètres; et cette bifurcation est appelée bifurcation Neïmark-Sacker, pour laquelle un noeud foyer donne

naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que les points fixes et cycles d'origines [29]. On a le schéma suivant :

$$F_S^k(\text{resp}^t. F_I^k) \xleftrightarrow{r=1} F_I^k(\text{resp}^t. F_S^k) + CFI_S(\text{resp}^t. CFI_I), \quad (1.12)$$

où F_S^k est un cycle foyer d'ordre k stable, F_I^k est un cycle foyer d'ordre k instable, CFI_S une courbe fermée invariante stable et CFI_I une courbe fermée invariante instable. Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notés Γ_k^j .

1.6 Transformations ponctuelles symétriquement découplées

Dans cette section, nous donnons certaines définitions et propriétés des transformations ponctuelles symétriquement découplée T de dimension trois. On parlera de transformation symétriquement découplée T si cette transformation peut se mettre sous la forme :

$$T \begin{cases} x' = f(y), \\ y' = g(z), \\ z' = h(x), \end{cases} \quad (1.13)$$

où f ; g et h sont des fonctions unidimensionnelles et T une transformation ponctuelle tridimensionnelle.

L'étude des cycles de la transformation ponctuelle symétriquement découplée définie par (1.13), se fera en utilisant les fonctions unidimensionnelles H , F et G , définies par :

$$H(x) = f(g(h(x))); \quad (1.14)$$

$$F(y) = g(h(f(y))); \quad (1.15)$$

$$G(z) = h(f(g(z))). \quad (1.16)$$

A l'aide des transformations unidimensionnelles H , F et G il est possible de construire les itérés de T , en effet :

$$T^{3k}(x, y, z) = (H^k(x), F^k(y), G^k(z)), \quad (1.17)$$

$$T^{3k+1}(x, y, z) = (f(F^k(y)), g(G^k(z)), h(H^k(x))), \quad (1.18)$$

$$T^{3k+2}(x, y, z) = (f(g(G^k(z))), g(h(H^k(x))), h(f(F^k(y)))). \quad (1.19)$$

pour $k \geq 0$, où H^0 , F^0 et G^0 sont les fonctions identités.

Les cycles des fonctions unidimensionnelles H , F et G sont liés; en effet, si x est un point fixe de H , alors $y = g(h(x))$ est un point fixe de F et $z = h(x)$ est point fixe de G .

Propriété 1.2. [1] Pour tout $n \geq 1$, les trois fonctions de dimension 1, H , F et G vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} h \circ H^n(x) &= G^n \circ h(x), & g \circ h \circ H^n(x) &= F^n \circ g \circ h(x), \\ g \circ G^n(z) &= F^n \circ g(z), & f \circ g \circ G^n(z) &= H^n \circ f \circ g(z), \\ f \circ F^n(y) &= H^n \circ f(y). & h \circ f \circ F^n(y) &= G^n \circ h \circ f(y). \end{aligned}$$

La correspondance entre les cycles des trois fonctions est donnée dans la propriété (1.3).

Propriété 1.3. [1]

- Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction H , alors $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \{h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction G et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{g(h(x_1)), g(h(x_2)), \dots, g(h(x_n))\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction F .
- Si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction F , alors $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n)\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction H et $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \{h(f(y_1)), h(f(y_2)), \dots, h(f(y_n))\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction G .
- Si $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction G , alors $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{g(z_1), g(z_2), \dots, g(z_n)\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction F et $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{f(g(z_1)), f(g(z_2)), \dots, f(g(z_n))\}$ est un cycle d'ordre n de la fonction H .

En tenant compte d'un cycle d'ordre n de H , les cycles des fonctions F et G seront appelés cycles conjugués, et sont tels que, si $X = \{x_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ est un cycle d'ordre n de H , alors un cycle conjugué de F , existe, est donné par $Y = g(h(X))$ et le cycle conjugué de G est donné par $Z = h(X)$.

1.6.1 Cycles homogènes

Définition 1.12. Un cycle de la fonction T est appelé cycle homogène si les composantes de ses points périodiques sont des cycles conjugués de H , F et G . Sinon, il est appelé cycle mixte.

Proposition 1.1. [1] Si n n'est pas un multiple de 3 (il s'écrit sous la forme $n = 3s + 1$ ou $n = 3s + 2$ avec s un entier naturel), les cycles homogènes de période n de T associés au cycle $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de H de même période, ont toujours un point périodique avec la première composante x_1 . Ce point périodique a pour composantes :

$$(x_1, y_{2s+1}, z_{s+1}) \text{ pour } n = 3s + 1,$$

$$(x_1, y_{s+1}, z_{2s+2}) \text{ pour } n = 3s + 2.$$

Proposition 1.2. [1] *Tous les cycles homogènes de période $3n$ de T obtenus à partir des cycles de période n de H avec $n \geq 2$, peuvent être obtenus à partir des points périodiques :*

$$(x_1, y_j, z_{j+h}) \text{ avec } h \leq j \leq n - 2h \text{ et } 1 \leq h \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor,$$

$$(x_1, y_j, z_{j+1-h}) \text{ avec } 2h - 1 \leq j \leq n - h \text{ et } 1 \leq h \leq \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière supérieure de x et j et h sont des entiers.

Le nombre N_{cyc} des différents cycles homogènes de période $3n$, obtenus à partir des cycles de période n de H [1], est :

$$N_{cyc} = n \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \frac{3}{2} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor^2 + \frac{1}{2} \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor + n \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - \frac{3}{2} \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor^2. \quad (1.20)$$

Dés lors $N_{cyc} = \frac{n^2}{3}$ si n est multiple de trois, et si non $N_{cyc} = \frac{n^2-1}{3}$.

Théorème 1.1. [1] *Soit $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ un cycle de H de période $n \geq 1$, alors T admet :*

- Un cycle homogène de période n et $\frac{n^2-1}{3}$ cycles homogènes de période $3n$, si n n'est pas multiple de 3.
- n^2 cycles homogènes de période n , si n est un multiple de 9.
- Trois cycles homogènes de période $\frac{n}{3}$ et $n^2 - 1$ cycles de période n , si n est un multiple de 3 et $\frac{n}{3}$ n'est pas multiple de 3.

1.6.2 Cycles mixtes

Soient $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{a_j\}_{j=\overline{1,m}}$ et $\{\alpha_l\}_{l=\overline{1,p}}$ trois cycles de H de période n , m et p (respectivement), avec leurs cycles conjugués ($y_i = g \circ h(x_i)$, $b_j = g \circ h(a_j)$ et $\beta_l = g \circ h(\alpha_l)$) sont les points périodiques des cycles de F , avec $z_i = h(x_i)$, $c_j = h(a_j)$ et $\gamma_l = h(\alpha_l)$) et $s = p.p.m.c(n, m)$, $S = p.p.m.c(n, m, p)$ et $d = p.g.c.d(n, m)$, on a :

Proposition 1.3. [1] *Si la fonction unidimensionnelle H , admet deux cycles coexistant de périodes n et m , alors T possède $(n + m) \frac{n \cdot m}{s}$ cycles mixtes distincts d'ordre $3s$ en plus des cycles homogènes. Tous les cycles mixtes distincts, peuvent être obtenus à partir des points périodiques :*

$$(x_1, b_j, z_l) \text{ avec } 1 \leq j \leq d \text{ et } 1 \leq l \leq n,$$

$$(x_1, b_j, c_l) \text{ avec } 1 \leq j \leq d \text{ et } 1 \leq l \leq m.$$

Proposition 1.4. [1] Si la fonction unidimensionnelle H , admet trois cycles coexistants de périodes n , m et p , alors T possède $2\frac{n.m.p}{S}$ cycles mixtes distincts d'ordre $3S$, sans compter les cycles homogènes. Tous les cycles mixtes, peuvent être obtenu par mixage des composantes des trois cycles existants, à partir des points périodiques :

$$(x_1, b_j, \gamma_l) \text{ avec } 1 \leq j \leq d \text{ et } 1 \leq l \leq p\frac{p.p.m.c(m,n)}{S},$$

$$(x_1, \beta_l, c_j) \text{ avec } 1 \leq j \leq d \text{ et } 1 \leq l \leq p\frac{p.p.m.c(m,n)}{S}.$$

Théorème 1.2. [1] Si H admet deux cycles coexistants de période n et m , et $s = \text{ppcm}(n, m)$, alors T admet :

1. $(n + m)\frac{n.m}{s}$ cycles mixtes de période $3s$, si s n'est pas multiple de 3.
2. $3(n + m)\frac{n.m}{s}$ cycles mixtes de période s , si s est multiple de 3.

Théorème 1.3. [1] Si H admet trois cycles coexistants de période n , m et p , alors T admet :

- $2\frac{n.m.p}{S}$ cycles mixtes de période $3S$, si S n'est pas un multiple de 3.
- $6\frac{n.m.p}{S}$ cycles mixtes de période S , si S est un multiple de 3.

Chapitre 2

Etude des cycles et bifurcations d'une transformation ponctuelle symétriquement découplée de dimension trois

Dans ce chapitre, nous donnons quelque résultats obtenus sur la dynamique d'une transformation ponctuelle tridimensionnelle symétriquement découplée (notée TPSD) déduite à partir de l'une de ses composantes unidimensionnelle. On s'intéressera à la transformation ponctuelle de dimension trois (2.1) étudiée par H.Gharout [10, 11, 12, 13] :

$$T \begin{cases} x_{n+1} = y_n, \\ y_{n+1} = z_n, \\ z_{n+1} = x_n^2 + b. \end{cases} \quad (2.1)$$

La transformation ponctuelle T définie par (2.1) est une transformation ponctuelle symétriquement découplée, qui s'écrit sous la forme [1, 10] :

$$T \begin{cases} x' = f(y), \\ y' = g(z), \\ z' = h(x). \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $x = x_n$, $y = y_n$ et $z = z_n$, ainsi $x' = x_{n+1}$, $y' = y_{n+1}$ et $z' = z_{n+1}$, et les fonctions f , g et h sont :

$$f(y) = y, \quad (2.3)$$

$$g(z) = z, \quad (2.4)$$

$$h(x) = x^2 + b. \quad (2.5)$$

L'étude des cycles du système défini par (2.1) se fait, en utilisant les fonctions :

$$H(x) = f(g(h(x))) , F(y) = g(h(f(y))) \text{ et } G(z) = h(f(g(z))). \quad (2.6)$$

$$H(x) = f(g(h(x))) = f(g(x^2 + b)) = f(x^2 + b) = x^2 + b. \quad (2.7)$$

$$F(y) = g(h(f(y))) = g(h(y)) = g(y^2 + b) = y^2 + b. \quad (2.8)$$

$$G(z) = h(f(g(z))) = h(f(z)) = h(z) = z^2 + b. \quad (2.9)$$

2.1 Etude des Cycles d'ordre un de T et leurs bifurcations à partir de H

La construction des transformations ponctuelles d'ordre $3k$, $3k+1$ et $3k+2$ (avec $k \in \mathbb{N}$) en utilisant les fonctions unidimensionnelles H , F et G se fera de la manière suivante :

On a :

$$\begin{aligned} T^{3k}(x, y, z) &= (H^k(x), F^k(y), G^k(z)); \\ T^{3k+1}(x, y, z) &= (f(F^k(y)), g(G^k(z)), h(H^k(x))) = (H^k(f(y)), F^k(g(z)), G^k(h(x))); \\ T^{3k+2}(x, y, z) &= (f(g(G^k(z))), g(h(H^k(x))), h(f(F^k(y)))). \end{aligned}$$

Dès lors, pour $k = 1$:

$$T^3(x, y, z) = (H(x), F(y), G(z)) = (x^2 + b, y^2 + b, z^2 + b); \quad (2.10)$$

$$T^4(x, y, z) = (f(F(y)), g(G(z)), h(H(x))) = (y^2 + b, z^2 + b, (x^2 + b)^2 + b); \quad (2.11)$$

$$T^5(x, y, z) = (f(g(G(z))), g(h(H(x))), h(f(F(y)))) = (z^2 + b, (x^2 + b)^2 + b, (y^2 + b)^2 + b). \quad (2.12)$$

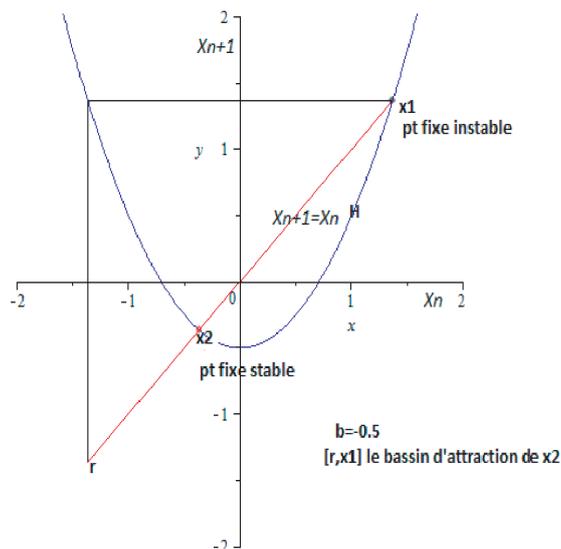
2.1.1 Recherche des points fixes de H

Les points fixes de H sont tels que :

$$H(x) = x \Leftrightarrow f(g(h(x))) - x = 0 \quad (2.13)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + b - x = 0 \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4b}, & \text{ou} \\ x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4b}, & \text{pour } b \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (2.15)$$

FIGURE 2.1 – Cycles d'ordre un de H .

2.1.2 Construction des cycles homogènes d'ordre un de T

La transformation ponctuelle T , est définie comme suit :

$$T(x, y, z) = (y, z, x^2 + b) = (y, z, H(x)). \quad (2.16)$$

La recherche de ses points fixes se ramène à :

$$\begin{aligned} x &= y \\ y &= z \\ z &= H(x) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} x = y &= z \\ H(x) &= x. \end{aligned}$$

Dès lors, les points fixes de T , s'obtiennent à partir des points fixes de H :

$$\begin{aligned} X1 &= (x_1, x_1, x_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}\right), \\ X2 &= (x_2, x_2, x_2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}\right). \end{aligned}$$

Les deux points fixes de T peuvent être obtenu à partir de H et ses cycles conjugués F et G [10, 13]. En effet ;

- Pour $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}$, on a

$$\begin{aligned} y_1 &= g(h(x_1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, & \text{point fixe de } F; \\ z_1 &= h(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, & \text{point fixe de } G. \end{aligned}$$

- Pour $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}$, on a

$$\begin{aligned} y_2 &= g(h(x_2)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, & \text{point fixe de } F; \\ z_2 &= h(x_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, & \text{point fixe de } G. \end{aligned}$$

En vertu de la proposition (1.1), les points fixes (cycles homogènes d'ordre un) de T , sont :

$$\begin{aligned} X1 &= (x_1, g(h(x_1)), h(x_1)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}\right), \\ X2 &= (x_2, g(h(x_2)), h(x_2)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}\right). \end{aligned}$$

T admet deux cycles homogènes d'ordre un.

2.1.3 Stabilité des points fixes de T déduite de la stabilité de H

Les valeurs propres définies pour chacune des fonctions correspondants aux points fixes x_i de H , $y_i = g(h(x_i))$ de F et $z_i = h(x_i)$ de G , pour $i \in \{1, 2\}$, sont :

$$\lambda_{\{x\}} = (H(x_i))' = (x_i^2 + b)' = 2x_i, \quad (2.17)$$

$$\lambda_{\{z\}} = (G(h(x_i)))' = (z_i^2 + b)' = 2z_i, \quad (2.18)$$

$$\lambda_{\{y\}} = (F(g(h(x_i))))' = (y_i^2 + b)' = 2y_i. \quad (2.19)$$

Les cycles mixtes d'ordre trois sont construits à partir des points fixes de la fonction unidimensionnelle H [1, 13].

En utilisant la jacobienne de T^3 , on peut obtenir ces mêmes valeurs propres [13]. La jacobienne de T est :

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Et le polynôme caractéristique correspondant est : $P_3(\lambda) = (2x - \lambda)(2y - \lambda)(2z - \lambda)$.

$$P_3(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2x, & \text{ou;} \\ \lambda_2 = 2y, & \text{ou;} \\ \lambda_3 = 2z, & . \end{cases}$$

La stabilité des points fixes de H induit celle des fonctions conjuguées F et G , elles ont les mêmes valeurs propres et la même propriété de stabilité. De même pour les transformations ponctuelles tridimensionnelles T et T^3 , la stabilité des points fixes de H induit celle des

cycles d'ordre un et d'ordre trois de T [1, 10]. Sachant que les points fixes $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}$ et $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}$ de H sont instable et stable respectivement pour $\frac{-3}{4} < b < \frac{1}{4}$, alors le point fixe X_1 de T généré par x_1 est instable et X_2 généré par x_2 est stable sous les mêmes conditions sur b [10].

2.1.4 Bifurcations de points fixes de T à partir des bifurcations des points fixes de H

De même, les bifurcations de la transformation T se déduisent de celle de H [13].

Bifurcation Fold :

La bifurcation Fold de H correspond à $H(x) = x$ et $H'(x) = 1$, dès lors, T subit une bifurcation Fold pour $b = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{1}{2}$, $y = g(h(x)) = \frac{1}{2}$ et $z = h(x) = \frac{1}{2}$.

Bifurcation Flip :

La bifurcation Flip de H correspond à $H(x) = x$ et $H'(x) = -1$, dès lors, T subit une bifurcation Flip pour $b = \frac{-3}{4}$ et $x = \frac{-1}{2}$, $y = g(h(x)) = \frac{-1}{2}$ et $z = h(x) = \frac{-1}{2}$.

Bifurcation transcritique des points fixes de T :

Une bifurcation transcritique des points fixes x_1 et x_2 de H se produit lorsque il existe un b^* tel que pour $b > b^*$ les deux points fixes échangent leurs stabilité avec $H'(x_1) = H'(x_2) = 1$, pour $b = b^*$. Ici T vérifie cette propriété pour $b^* = \frac{1}{4}$.

2.2 Cycles d'ordre deux de T

En vertu de la proposition 1.1, la transformation T admet un cycle homogène d'ordre deux $C_2 = \{V_1, V_2\}$, déduit du cycle d'ordre deux $c_2 = \{V_{1x}, V_{2x}\}$ de H , où

$$V_{1x} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b}, \quad (2.21)$$

$$V_{2x} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b}. \quad (2.22)$$

Le cycle homogène d'ordre deux C_2 de T , qui a pour composantes $V_1 = (V_{1x}, V_{2x}, V_{1x})$ et $V_2 = (V_{2x}, V_{1x}, V_{2x})$, est stable pour $\frac{-5}{4} < b < \frac{-3}{4}$.

Avec :

$$V_1 = (V_{1x}, g(h(V_{1x})), h(V_{1x})) = \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b}, \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b}, \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b}\right),$$

$$V_2 = (V_{2x}, g(h(V_{2x})), h(V_{2x})) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b}, \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b}, \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3-4b} \right).$$

La bifurcation Flip du cycle d'ordre deux de T se déduit de la bifurcation Flip du cycle d'ordre deux de H ($H^2(x) = x$ et $(H^2)' = -1$) : $b = \frac{-5}{4}$ pour $x \in \{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\}$. [10, 13]

On verra par suite, la construction des cycles d'ordre six de T à partir des cycles d'ordre deux de H , et cycle d'ordre deux de H mixé avec un cycle d'ordre un de H .

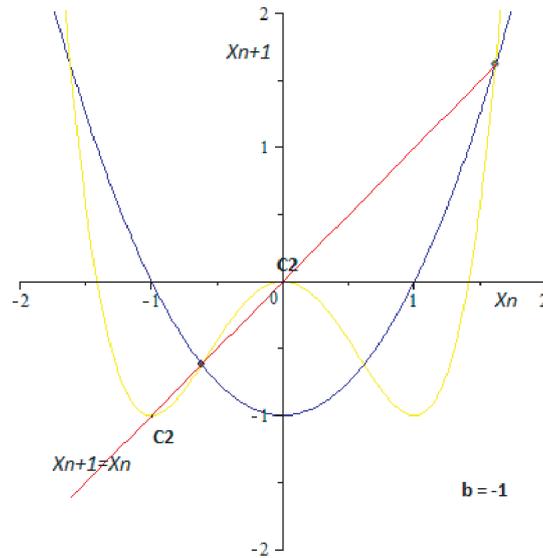


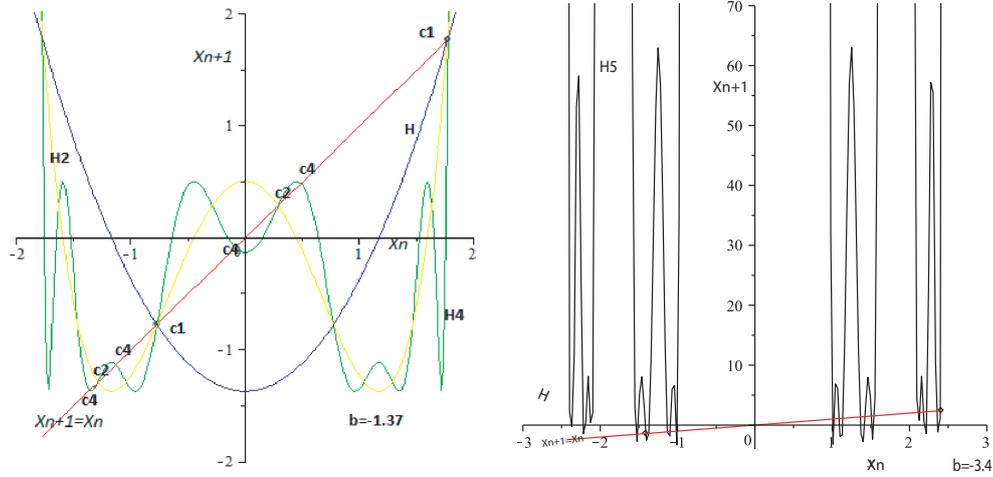
FIGURE 2.2 – Les cycles d'ordre deux de H .

2.3 Cycles d'ordre supérieure à deux de T

2.3.1 Cycle d'ordre quatre et cinq de T

En vertu de la proposition (1.1), la transformation T admet un unique cycle homogène d'ordre quatre $C4$ et ses composantes sont déduites du cycle d'ordre quatre de H , noté $c4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (points notés $c4$ sur la figure 2.3(a)), en utilisant le point périodique (a_1, a_4, a_3) . Le cycle d'ordre quatre de T est stable pour $-1.38 < b < \frac{-5}{4}$.

De même, il existe un unique cycle homogène d'ordre cinq $C5$ de T et ses composantes sont déduites du cycle d'ordre cinq de H , noté $c5 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ (figure 2.3(b)). Les composantes du cycle d'ordre cinq $C5$ de T sont construits en utilisant le point périodique (b_1, b_3, b_5) . [1, 10, 13]



(a) Cycles d'ordre un, deux et quatre de H (b) Cycles d'ordre cinq de H

FIGURE 2.3 – Représentation des cycles d'ordre un, deux, quatre et cinq de H .

2.3.2 Cycle d'ordre trois de T

En vertu de la proposition (1.2) et du théorème (1.1), la transformation ponctuelle T admet uniquement deux cycles mixtes d'ordre trois, déduits des points fixes x_1 et x_2 de H [13].

Les coordonnées des cycles d'ordre trois de T , sont :

- $C3_1 = \{V3_1, V3_2, V3_3\}$:

$$V3_1 = (x_2, x_1, x_2) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right],$$

$$V3_2 = T(V3_1) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right]$$

$$V3_3 = T(V3_2) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right].$$

- $C3_2 = \{V3_4, V3_5, V3_6\}$:

$$V3_4 = (x_2, x_1, x_1) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right],$$

$$V3_5 = T(V3_4) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right]$$

$$V3_6 = T(V3_5) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right].$$

Bifurcations

La bifurcation Flip associée au cycle d'ordre trois de T se produit pour $b = -1.768529152$ et la bifurcation Fold se produit pour $b = \frac{-7}{4}$.

La bifurcation transcritique associée à $b = \frac{1}{4}$, correspond à un échange de stabilité entre deux points fixes du même ordre de cycle.

Entre autre, les deux points fixes d'ordre trois change de nombre de valeurs propres supérieures à 1. On a :

1. Le point périodique $(x_2, y_2, z_1) = (x_2, x_2, x_1)$ est un col de type 1, a deux valeurs propres inférieures à 1 et une supérieure à 1 :

$$\begin{aligned}\lambda_x &= 1 - \sqrt{1 - 4b} < 1 \\ \lambda_y &= 1 - \sqrt{1 - 4b} < 1 \\ \lambda_z &= 1 + \sqrt{1 - 4b} > 1.\end{aligned}$$

2. Par contre le point périodique $(x_2, y_1, z_1) = (x_2, x_1, x_1)$ est un col de type deux, a une seule de ses valeurs propres qui est inférieure à 1 :

$$\begin{aligned}\lambda_x &= 1 - \sqrt{1 - 4b} < 1 \\ \lambda_y &= 1 + \sqrt{1 - 4b} > 1 \\ \lambda_z &= 1 + \sqrt{1 - 4b} > 1.\end{aligned}$$

En particulier, pour $b = 0$, nous avons :

$$(x_2, y_2, z_1) = (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1), \text{ avec } \begin{cases} \lambda_x = 0, \\ \lambda_y = 0, \\ \lambda_z = 2. \end{cases} \quad (2.23)$$

$$S(x_2, y_1, z_1) = (0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1), \text{ avec } \begin{cases} \lambda_x = 0, \\ \lambda_y = 2, \\ \lambda_z = 2. \end{cases} \quad (2.24)$$

Le cycle stable d'ordre trois de H a pour valeurs $-1.768529152 < b < -7/4$ (figure 2.4), où $b = -1.768529152$ est la bifurcation Flip du cycle d'ordre trois de H et $b = -7/4$ est une bifurcation Fold du cycle d'ordre trois de H . De même, la bifurcation Flip du cycle d'ordre trois de T est $b = -1.768529152$ et la bifurcation Fold du cycle d'ordre trois de T est $b = -7/4$ [10].

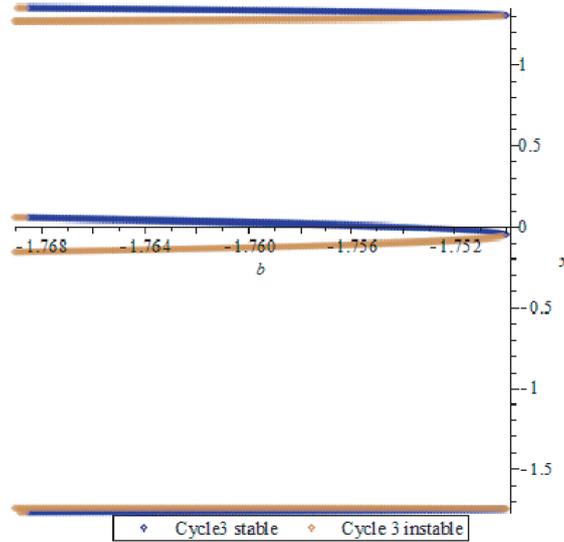


FIGURE 2.4 – Représentation de la partie stable du cycle d'ordre trois de H .

Un cycle d'ordre trois non homogène peut donner naissance à un cycle homogène, en l'occurrence des cycles d'ordre neuf.

Notons le cycle stable d'ordre trois $C3^s = \{x_1^s, x_2^s, x_3^s\}$ de H ; et le cycle instable d'ordre trois de H $C3^r = \{x_1^r, x_2^r, x_3^r\}$.

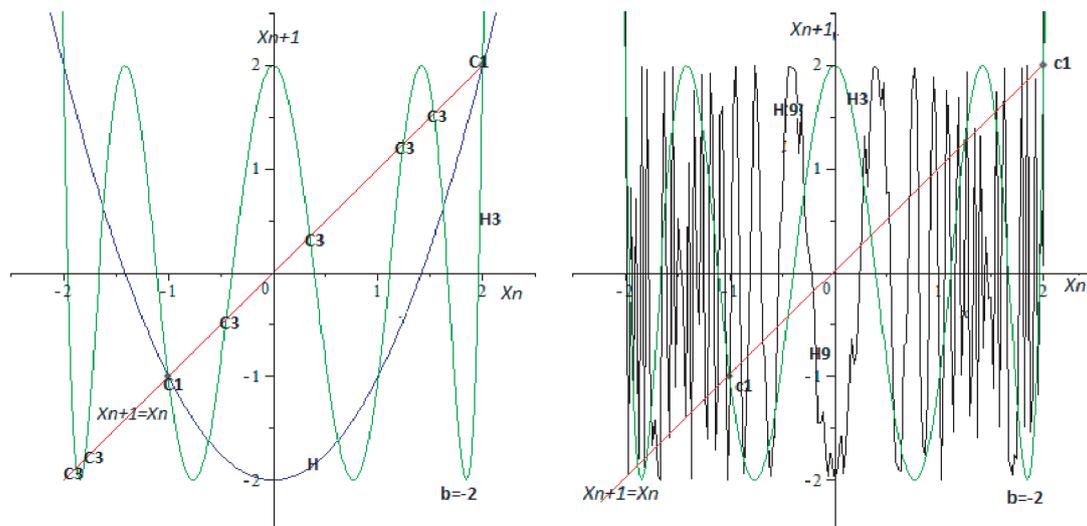
La proposition (1.2), nous permet d'obtenir trois cycles d'ordre neuf homogènes stables en utilisant $C3^s$. Les points périodiques utilisés sont : (x_1^s, x_2^s, x_3^s) , (x_1^s, x_2^s, x_2^s) et (x_1^s, x_3^s, x_3^s) . Également trois cycles d'ordre neuf instables à partir de (x_1^r, x_2^r, x_3^r) , (x_1^r, x_2^r, x_2^r) et (x_1^r, x_3^r, x_3^r) . Ce qui nous permet de dire que la stabilité des cycles d'ordre trois de H induit celle des cycles homogènes d'ordre neuf de T .

2.3.3 Cycle d'ordre six de T

La transformation T d'ordre six est définie par :

$$\begin{aligned} T^6(x, y, z) &= (H^2(x), F^2(y), G^2(z)) \\ &= (H(H(x)), F(F(y)), G(G(z))) \\ &= ((x^2 + b)^2 + b, (y^2 + b)^2 + b, (z^2 + b)^2 + b). \end{aligned}$$

En vertu des théorèmes et des propositions énoncés, on a en tout neuf cycles d'ordre six de T ; en effet :



(a) Cycles d'ordre un et trois de H

(b) Cycles d'ordre neuf de H

FIGURE 2.5 – Cycles d'ordre neuf de H avec les cycles d'ordre un et trois de H pour $b = -2$.

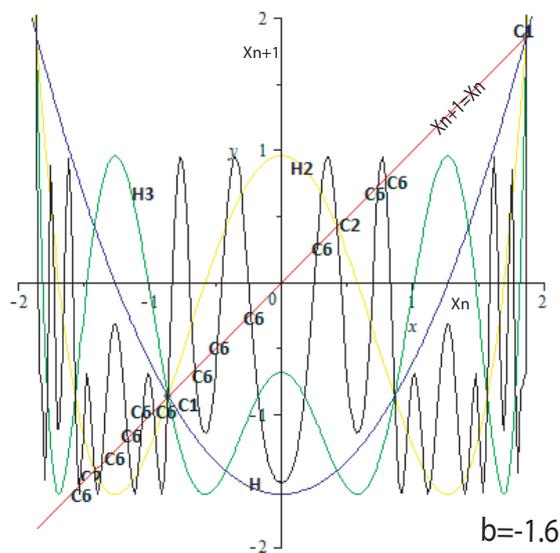


FIGURE 2.6 – Cycles d'ordre six de H .

1. En utilisant le théorème (1.1) et la proposition (1.2), un cycle homogène d'ordre six de T déduit du cycle d'ordre deux $c2 = \{V_{1x}, V_{2x}\}$ de H , est obtenu en utilisant le point périodique $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$, avec $\alpha_1 = V_{1x}$ et $\alpha_2 = V_{2x}$; stable pour $-\frac{5}{4} < b < -\frac{3}{4}$.

2. Du théorème (1.3) et de la proposition (1.4), on a l'existence de huit cycles mixtes d'ordre six de T :

- (a) Il existe deux cycles mixtes d'ordre six déduit de la coexistence des deux cycles d'ordre un, $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ et du cycle d'ordre deux $c2$ de H (ici on a $n = 1$, $m = 1$ et $p = 2$, donc $S = p.p.c.m(n, m, p) = 2$). La première composante de chacun des deux cycles d'ordre six, est (α_1, x_2, x_1) et (α_1, x_1, x_2) respectivement.
- (b) De la coexistence des cycles $\{x_1\}$ et $c2$ de H , trois cycles périodiques d'ordre six sont obtenus à partir des points périodiques : $(\alpha_1, x_1, \alpha_1)$, $(\alpha_1, x_1, \alpha_2)$ et (α_1, x_1, x_1) .
- (c) Et de la coexistence des cycles $\{x_2\}$ et $c2$ de H , trois autres cycles périodiques d'ordre six sont obtenus à partir de : $(\alpha_1, x_2, \alpha_1)$, $(\alpha_1, x_2, \alpha_2)$ et (α_1, x_2, x_2) .

Remarquons que il nous est toujours possible de construire les cycles mixtes d'ordre supérieure à six par le théorème (1.3) et de la proposition (1.4).

2.3.4 Cycles d'ordre douze de T

La construction des cycles mixtes de T , dépend de celle des cycles coexistants de H . Avec le cycle d'ordre quatre $C4$ et les cycles d'ordre un et deux de H , on peut obtenir facilement les cycles mixtes d'ordre douze de T , juste en faisant appel aux propositions énoncées [1, 10].

Commençons par la coexistence de deux cycles et l'application du théorème (1.2) et de la proposition (1.3).

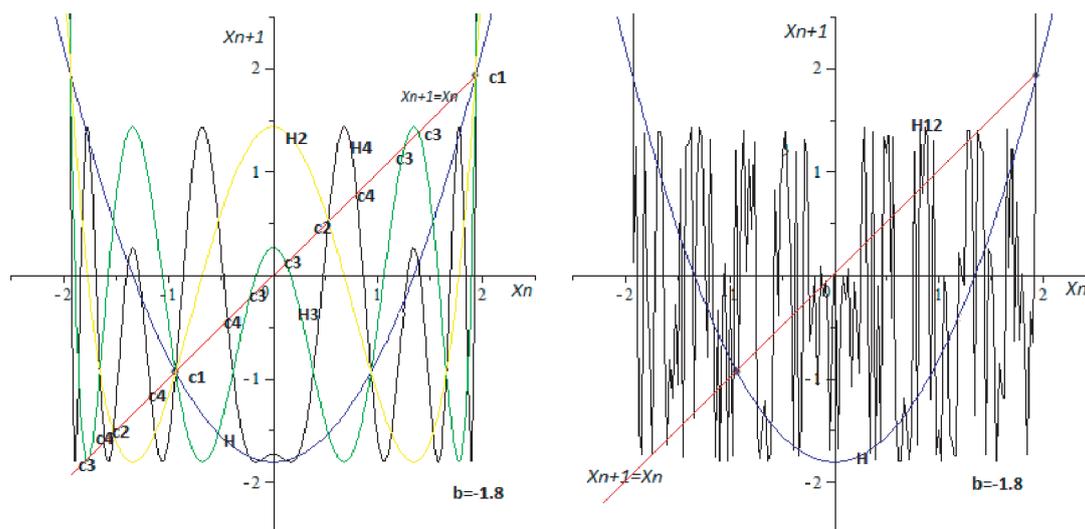
- La coexistence de $C4$ et $\{x_1\}$, donne naissance à cinq cycles d'ordre douze de T , en utilisant les points périodiques : (a_1, x_1, a_{l+1}) , $l = 1, 2, 3, 4$, et (a_1, x_1, x_1) ;
- La coexistence de $C4$ et $\{x_2\}$, nous permet d'avoir cinq cycles d'ordre douze de T , avec les points périodiques : (a_1, x_2, a_{l+1}) , $l = 1, 2, 3, 4$ et (a_1, x_2, x_2) ;
- Et la coexistence de $C4$ et le cycle d'ordre deux $C2$ de H , nous permet d'avoir 12 cycles d'ordre douze, avec les points périodiques : $(a_1, \alpha_{j+1}, a_{l+1})$, avec $j = 1, 2$ et $l = 1, 2, 3, 4$ et $(a_1, \alpha_{j+1}, \alpha_{l+1})$, avec $j = 1, 2$ et $l = 1, 2$.

Du théorème (1.3) et de la proposition (1.4), on déduit l'existence de deux autres cycles de chaque coexistence de trois cycles à la fois :

- La coexistence de $C4$, $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$, donne naissance à deux cycles d'ordre douze de T , en utilisant les points périodiques (a_1, x_1, x_2) , et (a_1, x_2, x_1) ;
- La coexistence de $C4$, $C2$ et $\{x_1\}$, nous donne quatre cycles d'ordre douze de T . Les points périodiques utilisés sont : (a_1, α_{j+1}, x_1) et (a_1, x_1, α_{j+1}) , avec $j = 1, 2$.

- La coexistence de $C4$, $C2$ et $\{x_2\}$, nous donne quatre cycles d'ordre douze de T . Les points périodiques utilisés sont : (a_1, α_{j+1}, x_2) et (a_1, x_2, α_{j+1}) , avec $j = 1, 2$.

La proposition (1.2), nous permet d'obtenir cinq cycles homogènes d'ordre douze de T en utilisant le cycle d'ordre quatre $C4$ de H , avec les points périodiques : (a_1, a_{j+1}, a_{j+2}) et $j = 1, 2$ et (a_1, a_{j+1}, a_{j+1}) , avec $j = 1, 2, 3$. Sachant qu'un cycle de période un, deux, trois ou quatre de T est un cycle d'ordre douze de T .



(a) Cycles d'ordre un, deux, trois et quatre de H .

(b) Cycle de période douze de H .

FIGURE 2.7 – Représentation des cycles d'ordre $1 \leq k \leq 4$ et le cycle d'ordre douze de H pour $b = -1.8$.

Conclusion

Dans ce chapitre, la construction et la stabilité des cycles mixtes et homogènes d'une transformation tridimensionnelle symétriquement découplée T a été faite à partir de l'une de ses composantes unidimensionnelle notée H .

Chapitre 3

Espace de phases de $T_{(b)}$

Dans ce chapitre, on exposera certains résultats obtenus dans l'espace d'états de la transformation ponctuelle $T_{(b)}$. Nous commençons par le diagramme de bifurcation qui résumera, d'une manière générale, le comportement de la récurrence $T_{(b)}$ en variant le paramètre b et par suite on abordera la nature des singularités en.

3.1 Diagramme de bifurcation

La figure (3.1) [10, 13], donne un exemple de diagramme de bifurcation de type Feigenbaum de la transformation ponctuelle T défini dans le plan $[b, x]$ en choisissant la valeur initiale $X_0 = (0, -0.5, 0)$. Dans la figure (3.1), lorsque le paramètre b varie en on peut observer la bifurcation d'un point fixe attractif en un cycle d'ordre deux attractif, et ensuite en un cycle d'ordre quatre attractif, etc.

Remarquons que le point fixe d'ordre un $(-0.5, -0.5, -0.5)$ pour $b = \frac{-3}{4}$, correspond aussi à un point de la bifurcation doublement de période (également, le seul point fixe d'ordre deux de T), avec deux multiplicateurs complexes conjugués de module égale à un (S_1 et S_3 , tel que, $S_3 = \overline{S_1} = \rho e^{i\theta}$ et $\rho = 1$) et d'un troisième multiplicateur $S_2 = -1$, de module égale à un. Notons aussi, que le second point fixe $(1.5, 1.5, 1.5)$, correspondant à $b = \frac{-3}{4}$, est un noeud foyer instable. La coexistence des cycles d'ordre un et du cycle d'ordre deux de H donne naissance à un cycle d'ordre six de la transformation T . A partir du diagramme de bifurcation, on peut retrouver les observations : évolution vers un point fixe pour $b = -0.4$, un cycle d'ordre deux pour une valeur de b comprise entre -0.8 et -0.75 , un cycle d'ordre quatre pour $b = -1.25$. Pour $b = -1.6$, on ne distingue plus les cycles ; le système présente un caractère chaotique qu'on verra par la suite [13].

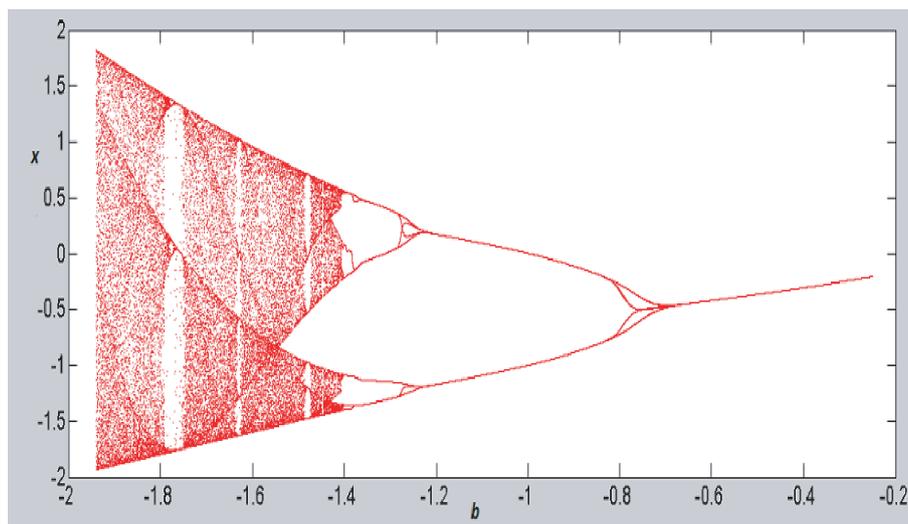


FIGURE 3.1 – Diagramme de bifurcation sur le plan $[b, x]$ ($b = -0.75$ correspond à la première bifurcation).

3.2 Etude de la nature des singularités (points fixes et cycles) dans \mathbb{R}^3

L'étude de la nature des singularités se ramène au calcul des multiplicateurs (valeurs propres) associés à la jacobienne de T .

Rappelons la transformation T (2.1) :

$$T \begin{cases} x_{n+1} = y_n, \\ y_{n+1} = z_n, \\ z_{n+1} = x_n^2 + b. \end{cases}$$

Soit $X = (x, y, z)$ un point de l'espace d'état. La matrice Jacobienne de T au point X est :

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

A.Agliari [1] et H.Gharout [10] ont déterminé de façon analytique la nature des points fixes et de certains cycles de T (points fixes et cycles d'ordre $k = 3p$, $k = 3p + 1$ et $k = 3p + 2$).

Soit $X^* = (x^*, y^*, z^*)$ un point d'un cycle d'ordre k .

On a vu, au début du chapitre, les points des cycles d'ordre $k = 3p$, $k = 3p + 1$ et $k = 3p + 2$,

vérifient :

$$\begin{aligned} T^{3p}(x, y, z) &= (H^p(x), F^p(y), G^p(z)); \\ T^{3p+1}(x, y, z) &= (H^p(f(y)), F^p(g(z)), G^p(h(x))); \\ T^{3p+2}(x, y, z) &= (f(g(G^p(z))), g(h(H^p(x))), h(f(F^p(y)))). \end{aligned}$$

avec H , F et G sont définies par les equations (2.2) et (2.6).

1. Les points des cycles d'ordre $k = 3p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, vérifient l'expression :

$$T^{3p+1}(x^*, y^*, z^*) = (H^p \circ f(y^*), F^p \circ g(z^*), G^p \circ h(x^*)) = (x^*, y^*, z^*). \quad (3.2)$$

La matrice Jacobienne est :

$$J^{3p+1}(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & A'_y & 0 \\ 0 & 0 & A'_z \\ B'_x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

avec

$$A'_y = \frac{\partial(H^p \circ f)}{\partial y}(y)_{/y=y^*}; \quad (3.4)$$

$$A'_z = \frac{\partial(F^p \circ g)}{\partial z}(z)_{/z=z^*}; \quad (3.5)$$

$$B'_x = \frac{\partial(G^p \circ h)}{\partial x}(x)_{/x=x^*}. \quad (3.6)$$

L'équation des valeurs propres est

$$\lambda^3 - A'_y A'_z B'_x = 0. \quad (3.7)$$

A'_y , A'_z et B'_x sont réels, on a donc trois solutions $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ (complexes conjuguées). Selon la classification de [32], les cycles d'ordre $k = 3p + 1$ sont soit des noeuds-foyers, soit des cols-foyers.

Nous donnons, ici, un exemple de deux matrices jacobiennes des cycles d'ordre $k = 3p + 1$, pour $p = 1$ et $p = 2$ (de même forme que la jacobienne J^{3p+1} donnée dans (3.3)) :

$$J^4(X) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 4(x^2 + b)x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$J^7(X) = \begin{pmatrix} 0 & 4(y^2 + b)y & 0 \\ 0 & 0 & 4(z^2 + b)z \\ 8((x^2 + b)^2 + b)(x^2 + b)x & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

2. Les points des cycles d'ordre $k = 3p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$, vérifient l'expression :

$$T^{3p+2}(x^*, y^*, z^*) = (f(g(G^p(z^*))), g(h(H^p(x^*))), h(f(F^p(y^*)))) \quad (3.10)$$

$$= (f \circ g \circ G^p(z^*), g \circ h \circ H^p(x^*), h \circ f \circ F^p(y^*)) \quad (3.11)$$

$$= (x^*, y^*, z^*). \quad (3.12)$$

La matrice Jacobienne correspondante au point X^* est :

$$J^{3p+2}(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C'_z \\ D'_x & 0 & 0 \\ 0 & D'_y & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

avec

$$C'_z = \frac{\partial(f \circ g \circ G^p)}{\partial z}(z)_{/z=z^*}; \quad (3.14)$$

$$D'_x = \frac{\partial(g \circ h \circ H^p)}{\partial x}(x)_{/x=x^*}; \quad (3.15)$$

$$D'_y = \frac{\partial(h \circ f \circ F^p)}{\partial y}(y)_{/y=y^*}. \quad (3.16)$$

L'équation des valeurs propres (multiplicateurs) est

$$\lambda^3 - C'_z D'_x D'_y = 0. \quad (3.17)$$

Sachant que, C'_z , D'_x et D'_y sont réels, on a donc trois solutions $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ (complexes conjuguées). Alors, selon la même classification, les cycles d'ordre $k = 3p + 2$ sont soit des noeuds-foyers, soit des cols-foyers.

De même, un exemple de deux matrices jacobienne des cycles d'ordre $k = 3p + 2$, pour $p = 0$ et $p = 1$ (même forme que la jacobienne J^{3p+2} donnée dans (3.13)) :

$$J^2(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$J^5(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2z \\ 4(x^2 + b)x & 0 & 0 \\ 0 & 4(y^2 + b)y & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

3. Les points des cycles d'ordre $k = 3p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, vérifient l'expression :

$$T^{3p}(x^*, y^*, z^*) = (H^p(x^*), F^p(y^*), G^p(z^*)) = (x^*, y^*, z^*). \quad (3.20)$$

La matrice Jacobienne de T^{3p} au point X^* est :

$$J^{3p}(X^*) = \begin{pmatrix} E'_x & 0 & 0 \\ 0 & E'_y & 0 \\ 0 & 0 & E'_z \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

avec

$$E'_x = \frac{\partial H^p}{\partial x}(x)_{/x=x^*}; \quad (3.22)$$

$$E'_y = \frac{\partial F^p}{\partial y}(y)_{/y=y^*}; \quad (3.23)$$

$$E'_z = \frac{\partial G^p}{\partial z}(z)_{/z=z^*}. \quad (3.24)$$

L'équation des valeurs propres obtenue (le polynôme caractéristique), est

$$(\lambda - E'_x)(\lambda - E'_y)(\lambda - E'_z) = 0. \quad (3.25)$$

Les valeurs propres sont réelles : $\lambda_1 = E'_x$, $\lambda_2 = E'_y$ et $\lambda_3 = E'_z$. Les cycles d'ordre $k = 3p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) peuvent être de type noeud ou col.

Ici, nous donnons deux matrices jacobienne des cycles d'ordre trois et six (de même forme que la jacobienne J^{3p} donnée dans la formule 3.21) des cycles d'ordre $k = 3p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) :

$$J^3(X) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$$J^6(X) = \begin{pmatrix} 4(x^2 + b)x & 0 & 0 \\ 0 & 4(y^2 + b)y & 0 \\ 0 & 0 & 4(z^2 + b)z \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

3.3 Etude de l'espace d'état

Dans cette section, nous donnerons quelques attracteurs de la transformation ponctuelle tridimensionnelle T , délimités par des variétés critiques. Afin d'illustrer ceci, nous donnerons quelques attracteurs chaotiques pour des valeurs de b fixé, ainsi que leurs bassins d'attraction.

3.3.1 Plans invariants

L'étude des plans invariants dans \mathbb{R}^3 demeure d'une complexité bien supérieure à celle dans les cas de la dimension une et deux. Nous restreindrons notre étude aux plans invariants associés aux cycles d'ordre $k = 3p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Comme indiqué précédemment, les valeurs propres des cycles d'ordre $k = 3p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sont $\lambda_1 = E'_x$, $\lambda_2 = E'_y$ et $\lambda_3 = E'_z$, et les cycles peuvent être des noeuds ou des cols. Les vecteurs propres associés, sont :

$$\vec{V}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{V}_2 = (0, 1, 0), \quad \text{et} \quad \vec{V}_3 = (0, 0, 1),$$

donc un plan invariant est parallèle à l'un des axes de l'espace tridimensionnel, soit parallèle à l'axe des x , soit parallèle à l'axe des y , ou parallèle à l'axe des z (voir figure 3.2, le plan invariant d'un point X_f d'un cycle col)).

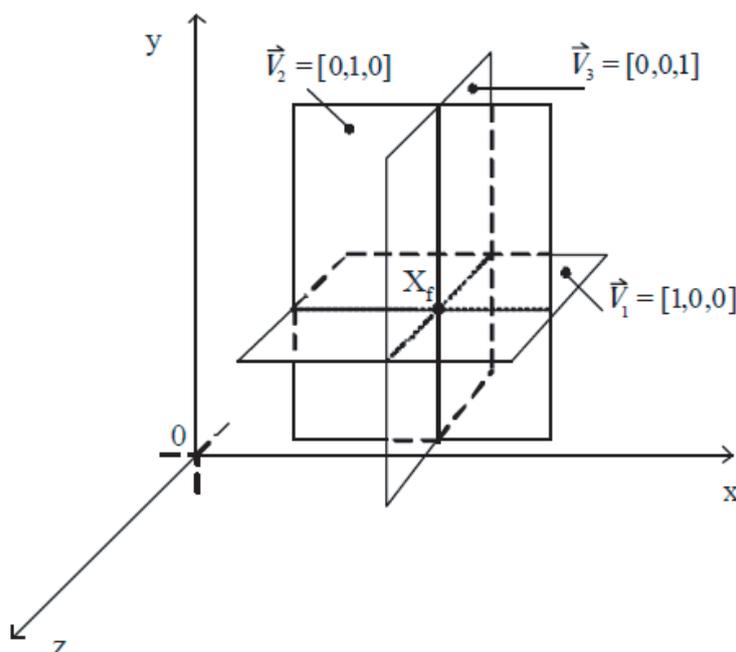


FIGURE 3.2 – Exemple des plans invariants associés à un point d'un cycle de type col.

3.3.2 Variétés critiques de T

Nous remarquons dans le cas de la transformation ponctuelle T , que les variétés critiques sont des plans [10, 13, 4]. C'est la généralisation à la dimension trois des notions de point critique et de ligne critique définies en dimension une et deux. Un plan

critique de rang $k + 1$ noté PC_k est le plan conséquent de rang k de PC_0 , $k = 1, 2, \dots$. PC_{-1} est l'antécédent de rang un de PC_0 . L'équation de la variété critique PC_{-1} de T vérifie $|J_1(x, y, z)| = 0$, où $J_1(x, y, z)$ est la jacobienne de T au point (x, y, z) définie par :

$$J_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

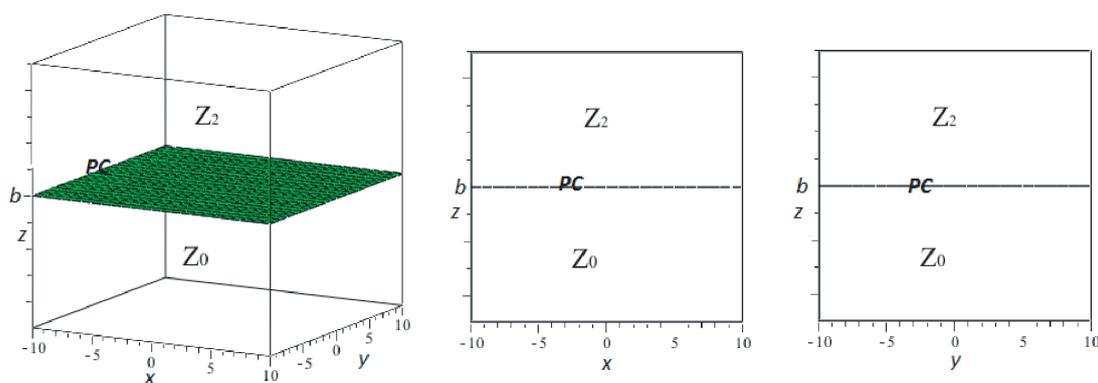
Cette variété critique est le plan

$$PC_{-1} = \{(0, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}. \quad (3.29)$$

Le plan critique $PC = PC_0$ est donc

$$PC_0 = T(PC_{-1}) = \{(y, z, b), y, z \in \mathbb{R}\}, \quad (3.30)$$

c'est un plan parallèle au plan $[x, y]$ qui coupe l'axe des z en b ; PC sépare l'espace de phase en deux régions. Une région Z_2 vérifiant $z - b > 0$ et constituée de l'ensemble des points qui possèdent deux antécédents de rang 1; et une région notée Z_0 telle que $z - b < 0$ et dont les points ne possèdent pas d'antécédents (voir figure 3.3).



(a) $Z_0 - Z_2$ dans l'espace (b) Projection sur le plan (x, z) (c) Projection sur le plan (y, z)

FIGURE 3.3 – Plan de phase $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ de T ($Z_0 - Z_2$). PC sépare les régions Z_0 et Z_2 .

Les plans critiques d'ordre $n + 1$, sont définis par $PC_{n+1} = T(PC_n)$ pour tout $n \geq 0$. D'une manière équivalente pour un ordre n , $n \geq 0$, sont définis par $PC_n = T^{n+1}(PC_{-1})$.

Tous les plans critiques de T , dépendent du paramètre réel b , à part PC_{-1} . Les plans critiques de T sont tous parallèles à l'un des plans de l'espace de dimension trois (x, y, z) , comme le montre la figure (3.4 obtenue par H.Gharout [10, 13]).

La distance entre deux plans critiques parallèles dépend de la valeur de b . Pour $b = 0$, on peut avoir des plans critiques confondus, en l'occurrence, PC_{-1} , PC_2 , PC_5 et PC_8 ; qui sont définis par :

$$\begin{aligned}
PC_1 &= T(PC_0) = \{(z, b, y^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \\
PC_2 &= T(PC_1) = \{(b, y^2 + b, z^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \\
PC_3 &= T(PC_2) = \{(y^2 + b, z^2 + b, b^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \\
PC_4 &= T(PC_3) = \{(z^2 + b, b^2 + b, (y^2 + b)^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \\
PC_5 &= T(PC_4) = \{(b^2 + b, (y^2 + b)^2 + b, (z^2 + b)^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \\
PC_6 &= T(PC_5) = \{((y^2 + b)^2 + b, (z^2 + b)^2 + b, (b^2 + b)^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \\
PC_7 &= T(PC_6) = \{((z^2 + b)^2 + b, (b^2 + b)^2 + b, ((y^2 + b)^2 + b)^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \\
PC_8 &= T(PC_7) = \{((b^2 + b)^2 + b, ((y^2 + b)^2 + b)^2 + b, ((z^2 + b)^2 + b)^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Intersection de deux plans critiques

Dans le cas étudié, l'intersection de deux variétés critiques (plans critiques) est un segment de droite, contrairement au cas de la dimension une, où l'intersection de deux variétés critiques (lignes critiques) se réduit en un point (voir les travaux de A.Barugla dans la dimension deux [2]). Le conséquent de rang un d'intersection de PC_{-1} et PC_j , $j \in \mathbb{N}$, est une droite de tangence (d'intersection de plans dans notre cas) entre PC et PC_{j+1} ; PC_{j+1} étant situé au moins dans le voisinage de la droite de contact du côté de PC où le nombre d'antécédents de rang un est le plus grand (voir les travaux de H.Gharout dans le cas de la dimension trois [10, 13]). Autrement dit,

$$\Delta_J = PC_{-1} \cap PC_j \implies T(\Delta_J) = PC \cap PC_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.31)$$

Nous donnons ici, le cas correspondant à $j = 0$ comme une petite illustration (voir les figures ?? et 3.4). Soit Δ_0 , la droite d'intersection des deux plans critiques PC_{-1} et PC . Δ_0 est une droite formée de tous les points communs entre ces deux plans critiques :

$$\Delta_0 = PC_{-1} \cap PC, \quad (3.32)$$

$$= \{(0, y, z), y \in \mathbb{R}\} \cap \{(y, z, b), y, z \in \mathbb{R}\}, \quad (3.33)$$

$$= \{(0, y, b), y \in \mathbb{R}\}. \quad (3.34)$$

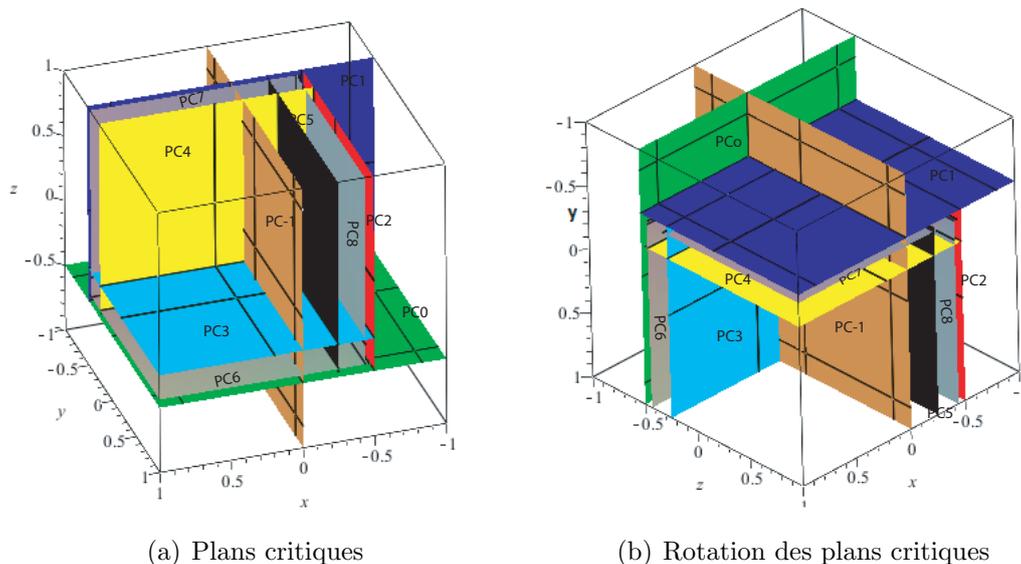


FIGURE 3.4 – Les huit premiers plans critiques de T pour $b = -0.5$

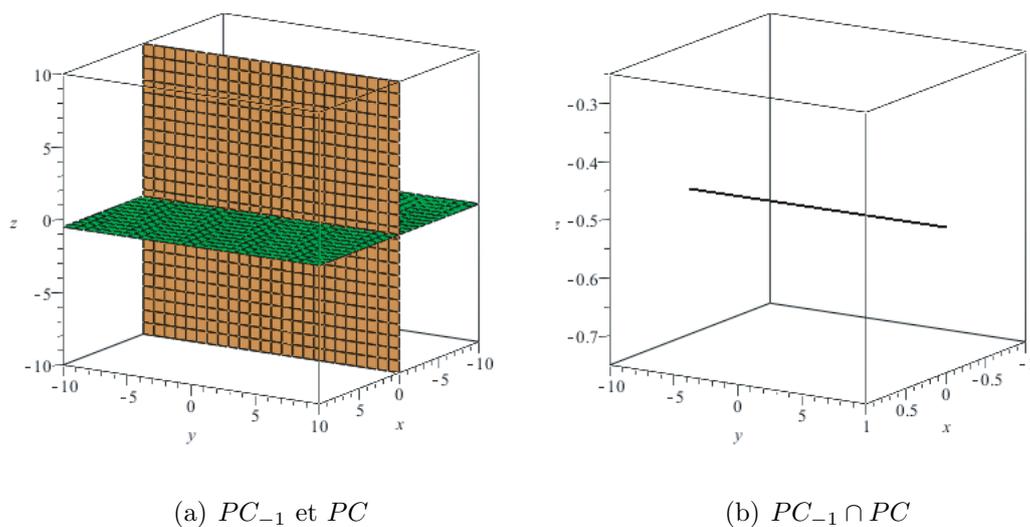


FIGURE 3.5 – L'intersection des plans critiques PC_{-1} (couleur marron) et PC (couleur verte) de T pour $b = -0.5$.

Δ_0 est une droite parallèle à l'axe des y et perpendiculaire au plan $[x, z]$, avec $x = 0$ et $z = b$ (voir figure 3.5).

Notons Δ^1 la droite d'intersection des deux plans critiques PC et PC_1 ,

$$\Delta^1 = PC \cap PC_1, \quad (3.35)$$

$$= \{(y, z, b), y, z \in \mathbb{R}\} \cap \{(z, b, y^2 + b), y, z \in \mathbb{R}\}, \quad (3.36)$$

$$= \{(y, b, b), y \in \mathbb{R}\}. \quad (3.37)$$

Or,

$$T(\Delta_0) = \{T(0, y, b), y \in \mathbb{R}\} = \{(y, b, b), y \in \mathbb{R}\}, \quad (3.38)$$

alors

$$T(\Delta_0) = \Delta^1 = PC \cap PC_1. \quad (3.39)$$

$T(\Delta_0)$ est une droite parallèle à l'axe des x et perpendiculaire au plan $[y, z]$, avec $y = b$ et $z = b$ (voir figure 3.6).

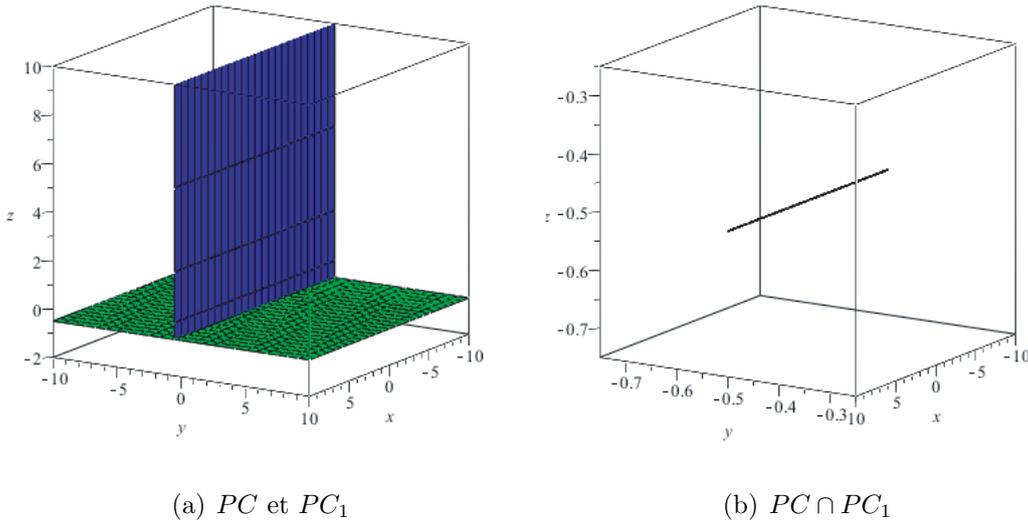


FIGURE 3.6 – L'intersection des plans critiques PC (couleur verte) et PC_1 (couleur bleu) de T pour $b = -0.5$.

Remarque 3.1. Si les plans PC_{-1} et PC_j sont parallèles, alors de même les plans PC et PC_{j+1} , $j \in \mathbb{N}$ seront parallèles. De plus, on a

$$PC_{-1} \text{ et } PC_j \text{ sont parallèles} \implies \Delta_j = PC_{-1} \cap PC_j = \emptyset, \quad (3.40)$$

$$\implies T(\Delta_j) = PC \cap PC_{j+1} = \emptyset. \quad (3.41)$$

3.3.3 Attracteurs

Dans le chapitre précédent, on a vu que la coexistence des cycles de différents ordres de T donne naissance à d'autres cycles (cycles mixtes) ; un phénomène qui peut être observé pour la coexistence d'attracteurs sensibles aux changements des conditions initiales.

En choisissant la valeur initiale $X_0 = (0, 0, -0.5)$ et en variant le paramètre b , on a l'apparition d'un attracteur d'ordre trois formé par une surface et deux plans sécants pour la valeur de -1.864 (voir figure 3.7(a)) qui changera de forme pour $b = -2$ (l'attracteur sera formé uniquement de trois segments de droites(voir figure) [10, 12, 13].

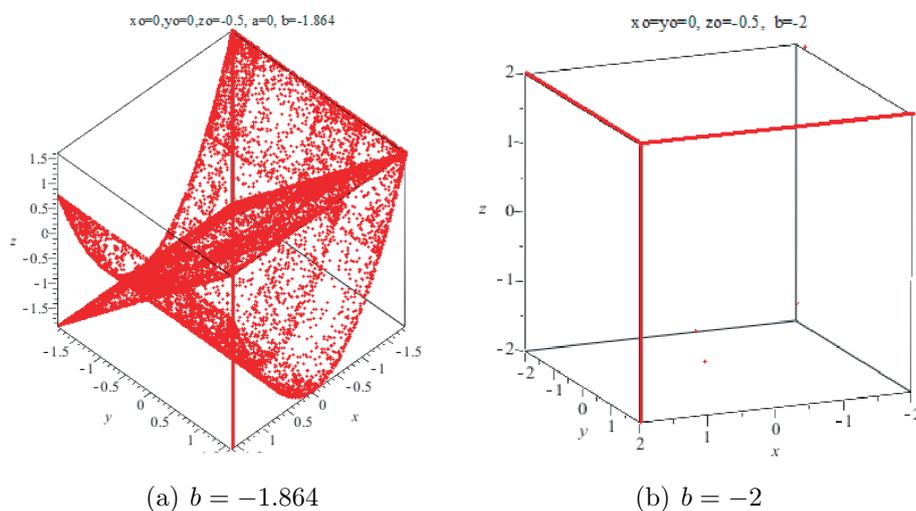


FIGURE 3.7 – Apparition d'attracteurs en variant le paramètre b [10, 12, 13].

Sachant qu'un attracteur dont les points génèrent des itérés qui vérifient la propriété de sensibilité aux conditions initiales, est dit chaotique. Chose qu'on peut confirmer avec les exposants de Lyapounov. Un exposant de Lyapounov calcule la distance entre deux points de la trajectoire de deux itérés très proches et il indique le taux moyen de divergence par iteration. Si ce nombre est positif, il y a sensibilité aux conditions initiales. S'il est négatif, on perd de l'information sur les conditions initiales et les trajectoires se rapprochent.

Les exposants de Lyapounov nous ont permis de conclure, pour $b = -1.864$, que l'attracteur obtenu est un attracteur chaotiques.

En effet, pour $b = -1.864$, les exposants de Lyapounov, calculés numériquement, ont pour valeurs : $l_1 = 0.1535$, $l_2 = 0.1532$ et $l_3 = 0.1532$, qui sont tous positifs. Une petite

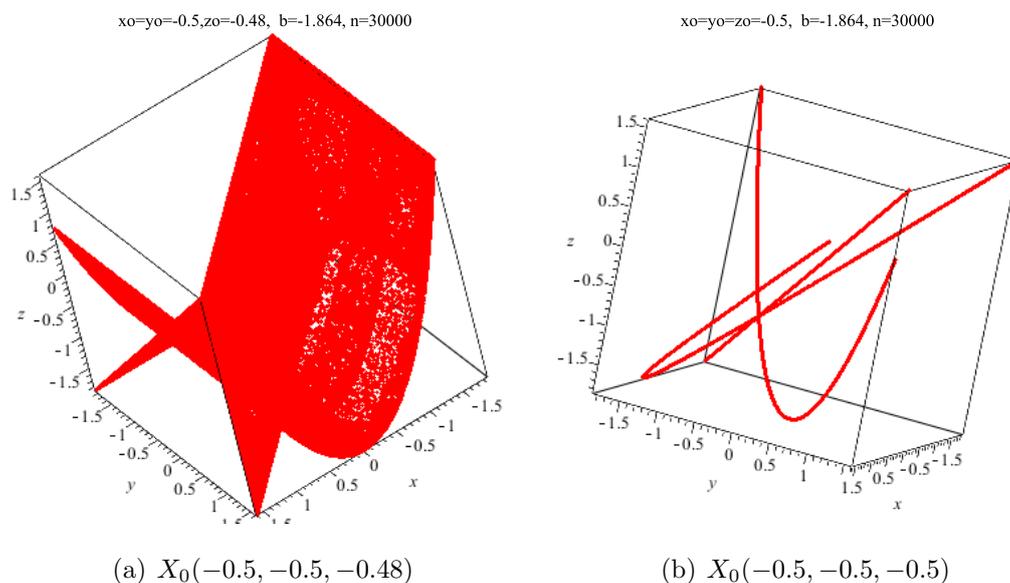


FIGURE 3.8 – Attracteur chaotique de T pour $b = -1.864$.

perturbation du vecteur initial, nous donne deux trajectoires différentes de l'attracteur d'ordre six comme le montre la figure 3.8 (voir réf. [10, 13]).

Les exposants de Lyapounov ont été calculés en utilisant le logiciel Dynamics [24].

La figure 3.9 représente une orbite de 30000 points, ainsi que, quelques plans critiques qui délimitent l'attracteur chaotique définis pour $b = -1.864$, en prenant pour valeur initiale $X_0 = (0, -0.5, 0.5)$. Les plans critiques sont représentés en différentes couleurs : PC_{-1} en marron, PC en vert, PC_1 en bleu, PC_2 en gris, PC_3 en cyan, PC_5 en noir, PC_6 en blanc et PC_8 en jaune.

L'attracteur chaotique défini pour ces conditions, correspond au chaos instable. Le chaos est dit instable, lorsqu'il y a existence d'un transitoire étrange dû à la présence d'une infinité de solutions périodiques instables ; on parle alors de répulseur chaotique, un tel ensemble peut être associé à l'existence d'un attracteur à l'infini (divergence pour les conditions initiales choisies) ou à l'existence d'une frontière floue entre les bassins de deux attracteurs. Pour $b = -1.864$, tous les points fixes sont des nœuds instables ou des nœuds foyers instables [10] ; en l'occurrence, pour $b = -1.864$, les cycles d'ordre un, deux, quatre et cinq sont des nœuds foyers instables, et les cycles d'ordre trois et six sont formés des nœuds instables.

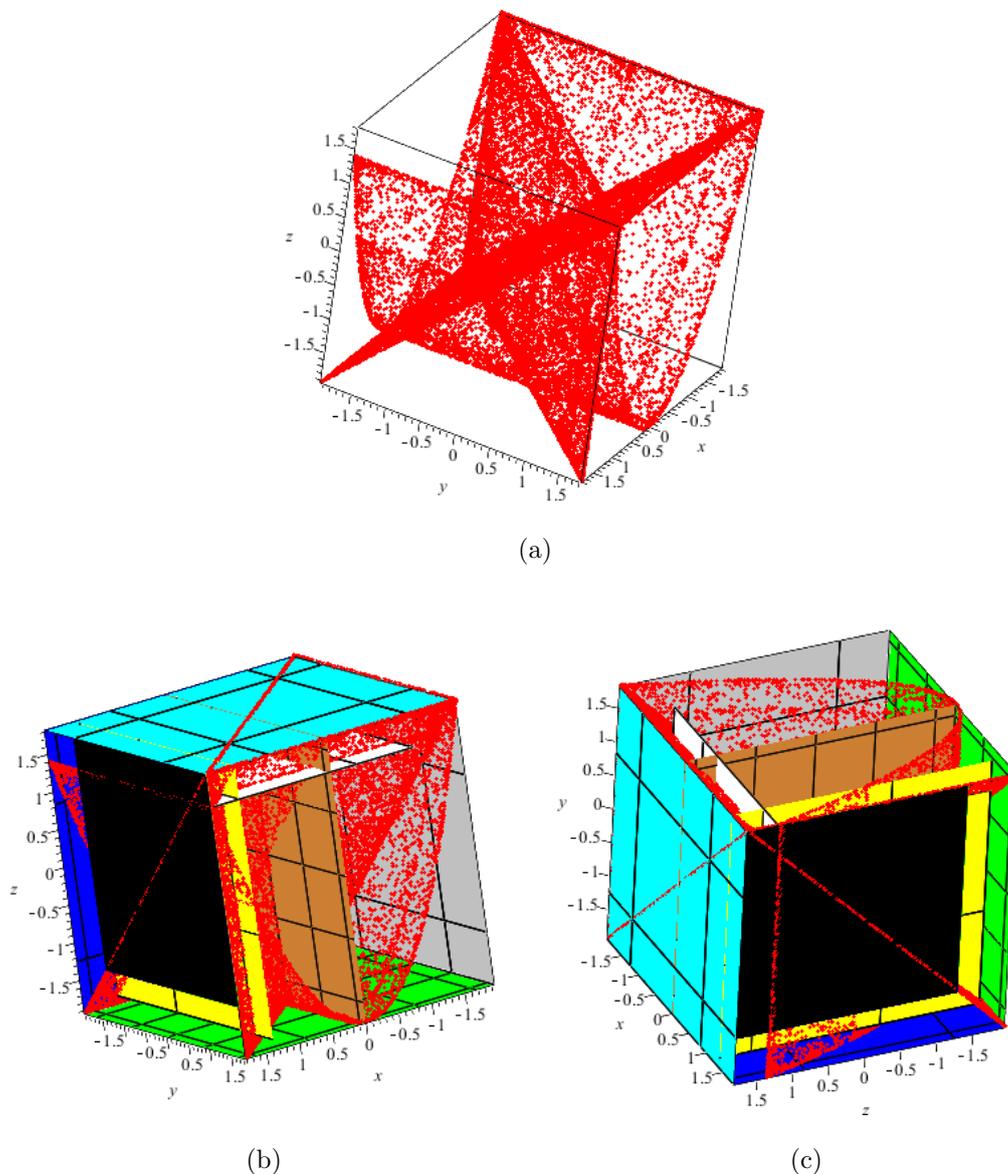


FIGURE 3.9 – Attracteur chaotique délimité par des plans critiques ($b = -1.864$).

La représentation graphique du bassin d'attraction d'une orbite dense dans l'attracteur chaotique défini pour la valeur de $b = -1.864$ en prenant $X_0 = (0, -0.5, 0.5)$ en utilisant Maple, est donnée dans la figure (3.10).

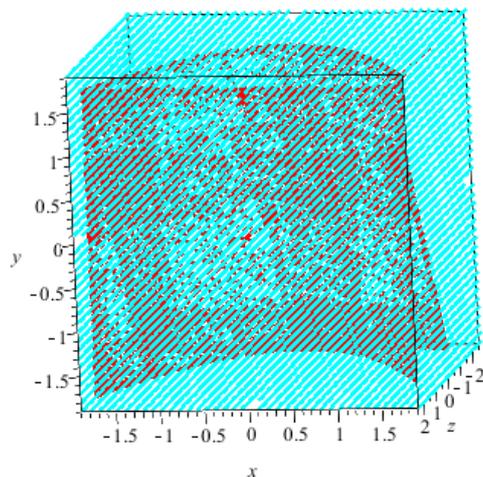


FIGURE 3.10 – Bassin d'attraction pour $b = -1.864$ avec $X_0(0, -0.5, 0.5)$.

3.4 Conclusion

Ce chapitre, résume le comportement chaotique de la récurrence tridimensionnelle symétriquement découplée T à travers le diagramme de bifurcation ; un comportement qui est dû à la coexistence d'attracteurs et des points fixes (nœuds et nœuds foyers). Les variétés critiques observées sont des plans, différentes de celles connues dans la dimension une (points) et la dimension deux (segments de droites).

Conclusion Générale

L'objectif assigné à ce mémoire est l'étude de la dynamique des transformations ponctuelles symétriquement découplées de dimension trois à partir de l'une de ses composantes unidimensionnelle en s'inspirant des travaux de A.Agliari et de H.Gharout.

On s'est intéressé à l'étude de la dynamique de la transformation ponctuelle tridimensionnelle symétriquement découplée T et à la construction des cycles mixtes et homogènes à partir d'une de ses composantes unidimensionnelle. L'existence et la stabilité des cycles de différents ordres de la composante de T de dimension une, nous a permis de déduire la stabilité des cycles de T et de construire le diagramme de bifurcation de type Feigenbaum, ainsi que, la stabilité des cycles de T par rapport au paramètre défini.

A partir d'une étude analytique, la nature des singularités dans la dimension trois des cycles d'ordre $3k+1$, $3k+2$ et $3k$, $k \in \mathbb{N}^*$ a été illustrée. Une illustration d'un nouveau type d'ensembles invariants (dit aussi variétés critiques) de la transformation tridimensionnelle est observé par H.Gharout, qui est une généralisation des points et des lignes critiques introduites par C.Mira est constaté, qui prend la forme de plans parallèles aux plans des axes x , y et z dans \mathbb{R}^3 . Ainsi, la présence du comportement chaotique illustré avec quelque représentations graphiques (attracteurs chaotiques et bassin d'attraction).

En perspectives :

Etude de la construction des cycles pour d'autre type de transformations tridimensionnelles à partir de l'une de ses composantes unidimensionnelle.

Bibliographie

- [1] A. Agliari, D. Fournier-Prunaret, and A.K. Taha. Periodic orbits and their bifurcations in 3d maps with separate third iterate. *Global Analysis of Dynamics Models in Economics and Finance*, pages 397–427, 2013.
- [2] A. Barugla. Quelques propriétés des lignes critiques d’une récurrence du second ordre à inverse non unique et détermination d’une zone absorbante. *RAIRO. Analyse Numérique*, 18(2) :137–151, 1984.
- [3] G.I. Bischi, L. Gardini, and M. Kopel. Analysis of global bifurcations in a market share attraction model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24 :855–879, 2000.
- [4] G.I. Bischi, L. Gardini, and C. Mammana. Multistability and cyclic attractors in duopoly games. *Chaos Solitons and Fractals*, 11 :543–565, 2000.
- [5] G.I. Bischi and F. Lamantia. Routes to complexity induced by constraints in cournot oligopoly games with linear reaction functions. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 16(2) :1558–3708, Avril 2012.
- [6] A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Number 12. Hachette, Paris, 1838.
- [7] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [8] A. Djerrai and I. Djellit. Dynamics of three dimensional maps. *Facta Universitatis*, 24(01) :107–119, 2011.
- [9] D. Fournier-Prunaret, C. Mira, and L. Gardini. Some contact bifurcations in two dimensional exemples. *Grazer Mathematische Berichte (Special issue Proceedings ECIT94)*, (334) :77–96, 1997.
- [10] H. GHAROUT. *Transformation ponctuelle de type polynomiale de dimension trois*. Doctorat, Département des Mathématiques, Université de Bejaia, Université de Bejaia, Algérie, Décembre 2018.

- [11] H. GHAROUT, N. Akroune, and A.K. Taha. *Etude de la dynamique chaotique d'une transformation ponctuelle non linéaire et non inversible de dimension trois*. 8ème Ecole sur les Equations Différentielles Abstraites, Université de Bejaia, Algérie, 2015.
- [12] H. GHAROUT, N. Akroune, A.K. Taha, and D. Fournier-Prunaret. Chaotic dynamics of a three-dimensional endomorphism. *Journal of Siberian Federal University Mathematics and Physics*, 12(1) :36–50, 2019.
- [13] H. GHAROUT, A.K. Taha, and N. Akroune. Dynamics of a symmetrically decoupled three-dimensional map. *Preprint*, 2020.
- [14] C. Grebogi, E. Ott, and J.A. Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 7(1-3) :181–200, Mai 1983.
- [15] I. Gumowski and C. Mira. *Dynamique chaotique, Transformations ponctuelles Transition Ordre-Désordre*. Cepadus editions, 1980.
- [16] Morris W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier, 2004.
- [17] Y.A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 12. Springer Verlag, New York, 1997.
- [18] L. Larger and J.M. Dudley. Nonlinear dynamics optoelectronic chaos. *Nature*, 465 :41–42, 2010.
- [19] L. Larger and D. Fournier-Prunaret. *Route to chaos in an optoelectronic system*. Cork, Irlande, IEEE Publishers, 2005.
- [20] G. Millerioux. *Modèles par Transformations Non Inversibles et Application à la Sécurité des Communications. Synchronisation du Chaos*. Doctorat, INSA de Toulouse, Octobre 1997.
- [21] C. Mira. *Chaotic Dynamics : From the One-dimensional Endomorphism to the Two-Dimensional Diffeomorphism*. World Scientific Publishing. Singapore, 1987.
- [22] C. Mira, D. Fournier-Prunaret, L. Gardini, H. Kawakami, and J.C. Cathala. Basin bifurcations of two-dimensional non invertible maps. fractalization of basins. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 4(2) :343–382, 1994.
- [23] C. Mira, M. Touzani-Qriouet, and H. Kawakami. Bifurcation structures generated by the nonautonomous duffing equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(7) :1363–1379, 1999.
- [24] H.E. Nusse and J.A. Yorke. *Dynamics : Numerical Explorations*. Number 2. Springer-Verlag New York, 1998.

- [25] T. Puu and I. Sushko. *Oligopoly Dynamics : Models and Tools*. Springer Verlag, New York, 2002.
- [26] E. Shamsara, Z. Afsharnezhad, and R. Mostolizadeh. Hopf bifurcation for a discontinuous htlv-1 model. *Filomat*, 31(20) :6247–6267, 2017.
- [27] M. Sonis. Critical bifurcation surfaces of 3d discrete dynamics. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 4 :333–343, 1999.
- [28] Y. Soula. *Bifurcation et symétrie dans les systèmes dynamiques discrets couplés*. Doctorat, Départements de mathématiques, Université de Constantine. Algérie, 06 Juin 2014.
- [29] T. Ueta, S. Tsuji, T. Yoshinaga, and H. Kawakami. Calculation of the isocline for the fixed point with a specified argument of complex multipliers. *IEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2001)*, 3 :755–758, 2001.
- [30] Q. Wang, Y. Liu, and C. Du. Small limit cycles bifurcating from fine focus points in quartic order z_3 -equivariant vector fields. *Mathematical Analysis And Applications*, 337 :524–536, 2008.
- [31] G. Wen, D. Xu, and J. Xie. Control of degenerate hopf bifurcations in threedimensional maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, 13 :486–494, 2003.
- [32] J. Xu. *Dynamique chaotique en vue d'applications aux télécommunications : étude d'une transformation ponctuelle symétriquement découplée définie à partir d'une fonction sinus carré*. Doctorat, Ecole Doctorale Systèmes, Université de Toulouse. France, 07 Février 2008.
- [33] J. Xu, D. Fournier-Prunaret, A.K. Taha, and P. Chargé. Chaos generator for secure transmission using a sine map and a rlc series circuit. *Science China*, 53(1) :129–136, 2010.
- [34] O. Zehrou. *Contribution à l'étude et à la classification du chaos dans les systèmes dynamiques*. Doctorat, Départements de mathématiques appliquées, Université de Constantine. Algérie, 2013.
- [35] E. Zeraoulia. *Etude de quelques types de systemes chaotiques : generalisation d'un modele issu du modele de chen*. Doctorat, Départements de mathématiques, Université de Constantine. Algérie, 20 Février 2006.
- [36] E. Zeraoulia and J.C. Sprott. The unified chaotic system describing the lorenz and chua systems. *Facta universitatis serie : Elec. Energ.*, 23(3) :345–355, 2010.

Résumé

L'objectif assigné à ce travail est l'étude d'une transformation ponctuelle symétriquement découplée de dimension trois T et la construction de ses cycles (homogènes et mixtes) à partir de l'une de ses composantes unidimensionnelles, notée H . L'étude des cycles et bifurcations de T est déduite de celle de la fonction unidimensionnelle H , suivie d'une cascade de bifurcations qui nous permet de voir le passage de T des cycles attractifs vers une zone chaotique. Un nouveau type de variétés critiques (plans critiques) de la transformation est vu et qui partage l'espace de phases en deux parties. En variant le paramètre b de la récurrence T un attracteur chaotique apparaît.

Mots clés : transformation ponctuelle symétriquement découplée, bifurcation, variétés critiques, chaos.

Abstract

The objective assigned to this work thesis is the study of symmetrically decoupled three-dimensional point transformation was made from one of its one-dimensional components, denoted H . The study of the cycles and bifurcations of T is deduced from that of the one-dimensional function H , followed by a cascade of bifurcations which allows us to see the passage of T from the attractive cycles towards a chaotic zone. A new type of critical manifolds (critical planes) of the transformation is seen that divides the phase space into two parts. By varying the parameter b of the recurrence T a chaotic attractor appears.

Key words : symmetrically decoupled point transformation, bifurcation, critical manifolds, chaos.