

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA BEJAÏA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de master en mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par

BENMOUHOUB DYHIA et IDIR IBTISSEM

Thème

Modélisation des écoulements à surface libre

Soutenu le 18 octobre 2020 devant le jury composé de :

Mme Saadia TAS	Professeur	Université de Bejaia	<i>Présidente.</i>
Mme Halima ZEROUATI	M.C.A	Université de Bejaia	<i>Éxaminatrice.</i>
Mme Hassina TOUNSI-ARROUDJ	M.C.B	Université de Bejaia	<i>Encadrante.</i>

Promotion 2019/2020

Remerciements

*Nous désirons exprimer notre reconnaissance et notre appréciation à Madame **H. TOUNSI**, notre encadrante qui nous a initiée à la recherche. Un grand merci pour vos encouragements, votre disponibilité, votre confiance, votre soutien et votre gentillesse sans limite, tout autant que pour vos avis et vos conseils toujours très éclairants.*

Nos remerciements sont également anticipés aux membres de jury qui ont accepté de lire et d'évaluer notre travail.

Enfin, nos plus vifs remerciements sont à tous ceux qui de près ou de loin nous ont aidées à réaliser ce modeste travail.

Dédicaces

Aucun mot ne saurait exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance . . . , etc.

Aussi, c'est tout simplement que je dédie ce travail :

✓ À mes chers parents, aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour leurs sacrifices, leurs encouragements, leur soutien et prières.

✓ À mes chères sœurs SIHAM, FARAH, AMINA et AICHA.

✓ À mes chers petits neveux AMIR et RACIM.

✓ À mes chers grands parents dont j'aurais tant aimé leur présence aujourd'hui, particulièrement à ma grand mère maternelle décédée tout récemment à laquelle j'accorde un amour exceptionnel.

✓ À ma famille et chers amis qui m'ont accordé leur soutien dans les instants les plus difficiles.

✓ Toute personne qui de près ou de loin a participé à ma formation depuis ma première année élémentaire jusqu'aujourd'hui.

✓ À toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce travail et tous ceux que j'ai omis de citer.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour :

- ✓ À mes chers parents pour leur amour, pour leurs sacrifices, pour leurs encouragements et leurs soutiens.
- ✓ À mes chers frères Fares, Halim, Riad et Siffedine.
- ✓ À mes chères sœurs Badra, Sabah.
- ✓ À mes nièces et à mes neveux.
- ✓ À toute ma famille, mes amies.
- ✓ À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Ibtissem

TABLE DES FIGURES

1.1	Types d'écoulements.	13
2.1	Milieus peu profonds.	18
3.1	Notations du schéma explicite à différences centrées.	39
3.2	Notations du schéma de Leap-Frog.	40
3.3	Notations du schéma Vasiliev.	40
3.4	Notations du schéma de Preissman.	41
4.1	La couleur brune bien distinctive de cette rivière est due au nombre important de sédiments qui sont charriés.	43
4.2	Continuité sédimentaire.	44
4.3	Milieu peu profond.	44
4.4	Volume de contrôle de l'équation de continuité.	48
4.5	Volume de contrôle de l'équation de dynamique.	50

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	8
1 Introduction à la mécanique des fluides : Écoulements à surface libre	10
1.1 Introduction à la mécanique des fluides	11
1.2 Les différents types d'écoulements	12
1.3 Introduction aux écoulements à surface libre	13
1.3.1 Régimes d'écoulements à surface libre	14
1.4 Equation de Saint-Venant	14
2 Système de Saint Venant : Formulation mathématique	16
2.1 Équation de Navier-Stockes	17
2.1.1 Notations et définitions	18
2.1.2 Quelques rappels et définitions	19
2.1.3 Formule de divergence	20
2.1.4 La règle de Leibnitz	20
2.1.5 La deuxième loi de Newton	20
2.1.6 Loi de conservation de la masse	20
2.1.7 Équation de continuité	21
2.1.8 Équation de la quantité de mouvement	23
2.1.9 Hypothèses et approximations simplificatrices	26
2.2 Moyenne des équations de Navier Stockes	27
2.2.1 Principe	27
2.2.2 Moyenne de l'équation de continuité	27

2.2.3	Moyenne de l'équation de la quantité de mouvement	28
2.2.4	Formule de Chézy	34
2.2.5	Formule de Manning	34
2.2.6	Formule de Strickler	34
2.3	Forme finale des équations de Saint Venant	35
2.3.1	Forme conservative	35
2.3.2	Forme non conservative	35
2.3.3	Équation de base de Saint Venant	35
3	Techniques numériques pour les équations de Saint Venant	37
3.1	La résolution analytique des équations de Saint Venant	38
3.2	La résolution numérique de ce système	38
3.2.1	Méthode des différences finies	38
3.2.2	Méthode des éléments finis	41
3.2.3	Méthode des volumes finis	41
4	Exemple d'application : Transport de sédiment	42
4.1	Introduction : Transport de sédiments	43
4.2	Modélisation de transport de sédiment	44
4.2.1	Équation de Saint-Venant	45
4.2.2	Équation d'Exner	45
4.3	Solution directe	46
4.4	Résolution numérique	46
4.4.1	Conclusion	55
	Conclusion Générale	56

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce travail se veut une modeste contribution à la modélisation des écoulements à surface libre en eaux peu profondes. Ce type de phénomènes est régi par les modèles de Saint-Venant. C'est en 1871 que le mathématicien et hydraulicien : Adhémar Barré de Saint Venant a publié ces équations, pour la première fois, dans un compte rendu à l'académie des sciences. Du point de vue mathématique ; les équations de Saint Venant sont déduites, par intégration des équations de Navier Stokes sur toute la profondeur, en adoptant certaines hypothèses et approximations simplificatrices. De nos jours, l'approximation numérique des équations (SV), (appelées aussi Shallow water en anglais) est d'une très grande importance dans le domaine de la simulation des écoulements en hydrodynamique fluviale et maritime, ainsi que la prédiction de catastrophes naturelles tels que : la pollution environnementale, inondations, tsunami, rupture de barrage et mouvement des avalanches . . . , etc.

Pour une meilleure compréhension de la formulation mathématique des systèmes shallow water, nous avons jugé utile de consacrer le premier chapitre de ce mémoire à un bref rappel sur les fondements et concepts généraux de la mécanique des fluides. Nous y avons aussi exposé les différents types d'écoulements et leurs caractéristiques physiques. Une attention particulière a été accordée à la définition des écoulements en eaux peu profondes et leurs champs d'applications.

Le deuxième chapitre constitue le cœur de ce travail, il est consacré à la formulation mathématique des équations de Saint-Venant. Les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible y sont décrites dans le détail, ainsi que les différents paramètres et variables de l'écoulement. Nous avons ensuite déroulé dans le détail, les différentes étapes qui ont permis le

passage des équations de Navier-Stokes vers le système final de Saint-Venant. Nous avons d'abord procédé à l'intégration sur la verticale (profondeur de l'eau) des équations locales de la masse et de la quantité de mouvement, pour les moyenner. Des hypothèses et approximations telles que : l'hypothèse de pression hydrostatique et l'hypothèse de Boussinesq . . . , etc, nous ont permis d'annuler des termes de faibles influences et d'aboutir ainsi au système final de Shallow water unidimensionnel (1D) et bidimensionnel (2D).

Le système de Saint-Venant est non linéaire et hyperbolique, sa résolution analytique est en général difficile voire impossible. Les méthodes numériques constituent alors l'ultime recours pour la simulation des solutions approchées de notre système afin de calculer les hauteurs d'eau et les débits d'écoulements. A cet effet, une brève revue des principales méthodes numériques est donnée dans le troisième chapitre. Il s'agit de la méthode des différences finies, éléments finis et volumes finis. Notre intérêt s'est principalement porté sur les schémas aux différences finies sous leur formulation implicites et explicites et leurs variantes.

Le quatrième chapitre est dédié à l'illustration des systèmes de Saint-Venant, à travers un exemple d'application, à savoir le problème de transport de sédiments. La modélisation des phénomènes de transport de sédiments dans les lits d'écoulements (boue, sable, gravats . . . , etc) nécessite l'introduction d'une autre équation qui prend en compte la présence de solides dans l'eau. Dans notre cas, nous nous sommes intéressés au système couplé Saint-Venant-Exner, afin de mieux comprendre le phénomène de charriage des sédiments et son interaction avec la phase liquide de l'écoulement.

CHAPITRE

1

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE DES
FLUIDES : ÉCOULEMENTS À SURFACE
LIBRE

1.1 Introduction à la mécanique des fluides

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui étudie les milieux continus. Elle consiste en l'étude du comportement des fluides (liquides, gaz et plasmas) qui perdent leurs formes au cours du temps.

Définition 1.1.1. (*Fluide*) :

Un fluide est un ensemble de particules matérielles continues, déformables, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les fluides peuvent se classer en deux familles, relativement à la viscosité. La viscosité est une caractéristique physio-chimique qui définit le frottement interne des fluides :

- *La famille des fluides « newtoniens » : Ces fluides ont une viscosité constante qui ne varie qu'en fonction de la température. (par exemple : l'eau, l'air et la plupart des gaz).*
- *La famille des fluides « non newtoniens » : Ces fluides ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent (par exemple : le sang, les boues, les gels . . . , etc).*

L'évolution de la mécanique des fluides :

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la grèce antique, avec le célèbre savant Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides.

Nous citons aussi Héron d'Alexandrie qui s'est intéressé au concept de la pression des fluides.

Au XV^e siècle, Léonardo De Vinci fût le premier à se lancer dans l'étude de l'évolution des fluides au cours du temps avec une classification de différents types de fluides. Il a aussi proposé de nombreuses descriptions d'écoulements (jets, tourbillons . . . , etc) ainsi que la formule de conservation de la masse.

Au XVI^e siècle, le développement de l'algèbre a permis une plus grande mathématisation de la physique.

Puis en 1738, D. Bernoulli a étudié les fluides non visqueux, fondant son analyse sur la conservation de l'énergie.

Plus tard, en 1757, Leonahard Euler a établi des équations aux dérivées partielles non linéaires pour les écoulements incompressibles¹ qui décrivent l'écoulement des fluides dans l'approximation des milieux continus.

Que veut-on dire par « la mathématisation de la mécanique » des fluides ?

La mathématisation de la mécanique des fluides s'est faite par :

- L'introduction des dérivées partielles.
- La notion de pression interne d'un fluide.

1. Lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides sont considérés comme des fluides incompressibles (comme : eau, huile . . . , etc). Quand la divergence de la vitesse est nulle, le fluide est dit incompressible.

- L'introduction de la notion du champs de vitesse.

De nos jours, la science des lois de l'écoulement des fluides est un domaine actif dans la recherche, avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

Domaine d'application de la mécanique des fluides :

Tous les domaines industriels et scientifiques comme : la géologie, l'aéronautique, la météorologie, les industries chimiques et alimentaires, centrales nucléaires, l'océanographie, l'ingénierie navale . . . , etc. Tous les domaines où l'utilisation des liquides (particulièrement l'eau) intervient, font appel à la mécanique des fluides.

1.2 Les différents types d'écoulements

Un écoulement est caractérisé par son régime.

D'après les expériences de Reynolds en 1883, on a deux types d'écoulements :

1. Écoulement laminaire : lorsque le nombre de Reynolds² est inférieur à 2000 et son flux est lisse. En dynamique des fluides, ce genre d'écoulement est caractérisé par des trajets lisses ou réguliers de particules du fluide. Les fluides s'écoulent en couches parallèles sans perturbation entre les couches. De ce fait, l'écoulement laminaire est appelé aussi écoulement fluide ou visqueux. Les écoulements visqueux génèrent très peu de bruit à cause de leur structure de vitesse bien ordonnée.
2. Écoulement turbulent : lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 3000 et son flux est chaotique. En dynamique des fluides, ce type d'écoulement est particularisé par le mouvement irrégulier des particules de fluide. L'écoulement turbulent s'écoule avec des variations de vitesses brusques et aléatoires en chaque point. De tels écoulements engendrent du bruit à cause de leur structure chaotique.

Remarque 1.2.1. *Lorsque le nombre de Reynolds est entre 2000 et 3000 l'écoulement est dit transitoire (intermédiaire). C'est la phase entre les deux états laminaires et turbulents.*

2. Ce nombre a été présenté en 1883 par Osborne Reynolds. C'est un nombre sans dimension utilisé dans la mécanique des fluides qui caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire et turbulent).

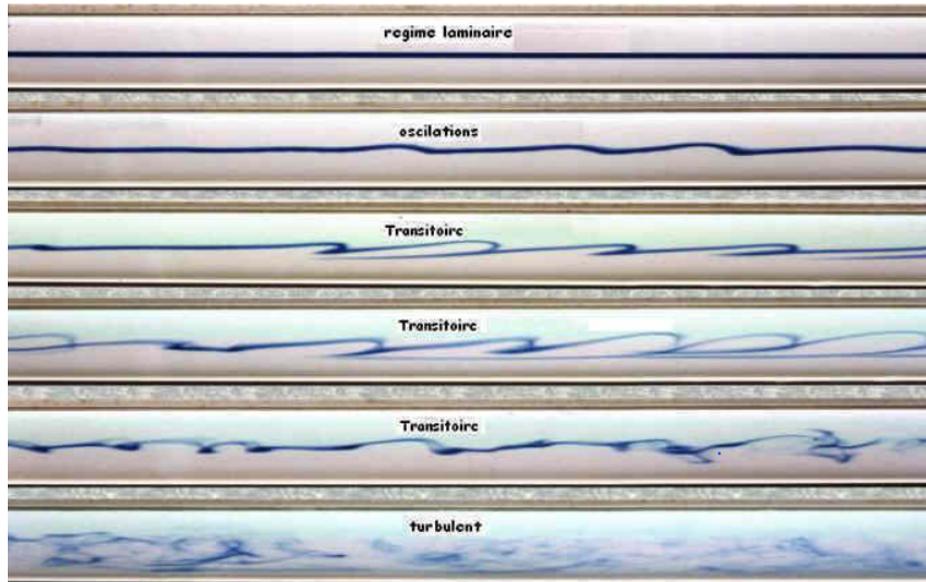


FIGURE 1.1 – Types d'écoulements.

Nous citons aussi d'autres types d'écoulements :

1. Écoulement polyphasique : C'est un écoulement comportant plusieurs phases d'écoulements, par exemple : gaz, liquides et solides.
2. Écoulement de Stokes : est un écoulement long d'un fluide visqueux en un lieu étroit ou autour d'un petit objet, les forces visqueuses dominent sur les forces d'inertie d'advections.
3. Écoulement de Poiseuille : est un écoulement qui suit la loi de Poiseuille. Cette loi décrit l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique.
4. Écoulement à surface libre : est la branche de l'hydraulique qui étudie l'écoulement de l'eau dans les canaux (hydraulique fluviale, rupture de barrage).

1.3 Introduction aux écoulements à surface libre

L'hydraulique à surface libre traite les écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une interface eau/air soumise à la pression atmosphérique. En général, ces types d'écoulements sont regis par le modèle mathématique de Saint Venant. Ce système d'équations permet de décrire les écoulements en eaux peu profondes lorsque la couche d'eau est suffisamment mince pour supposer la vitesse constante sur l'épaisseur. Les écoulements en eaux peu profondes interviennent dans plusieurs domaines d'application tels que : l'hydraulique, l'hydrologie souterraine, hydrodynamique marine . . . , etc.

Un écoulement à surface libre peut être classé et décrit de différentes manières :

- Permanent et non permanent selon le temps.
- uniforme ou non uniforme selon l'espace.

- Torrentiel ou fluvial selon l'effet de la gravité.

1.3.1 Régimes d'écoulements à surface libre

- Écoulement permanent (stationnaire) : les paramètres (pression, vitesse, masse volumique ..., etc) qui le caractérisent sont constants au cours du temps. C'est à dire $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, où u est la vitesse d'écoulement et h est la hauteur d'eau.
- Écoulement non permanent (non stationnaire) : pour ce type d'écoulement les paramètres (pression, vitesse, masse volumique ..., etc) sont variants au cours du temps. C'est à dire $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$, où u est la vitesse de l'écoulement. h est la hauteur d'eau.
- Écoulement uniforme : lorsque ses caractéristiques (la hauteur, la vitesse ..., etc) sont des valeurs invariantes dans le temps et l'espace.
- Écoulement non uniforme : lorsque ses caractéristiques (la hauteur, la vitesse ..., etc) sont variantes dans le temps et l'espace.
- Écoulement torrentiel : Cet écoulement est caractérisé par le nombre de Froude³, lorsque ce nombre est supérieur à 1, l'écoulement est dit torrentiel. Ce régime est qualifié par une faible hauteur d'eau et une vitesse importante.
- Écoulement fluvial : Dans le cas où le nombre de Froude est inférieur à 1, le régime est dit fluvial. Dans ce type d'écoulement, on observe une hauteur d'eau importante et une vitesse d'eau plus faible.

Lorsque le nombre de Froude est égal à 1 le régime est dit critique. C'est un régime qui permet le retour le plus rapide du système à l'équilibre.

1.4 Equation de Saint-Venant

En 1871, les équations des écoulements à surface libre ont été élaborées pour la première fois par le mathématicien Adhémar Jean Claud Barré de Saint Venant lors d'un compte rendu à l'Académie des sciences en présentant un premier modèle pour les canaux à surface libre. Ces équations qui portent le nom de Saint Venant sont appelées aussi Shallow Water dans le monde anglo-saxon.

Le modèle de Saint Venant (SV) est obtenu par une intégration verticale des équations de Navier Stokes et en considérant l'hypothèse de l'écoulement hydrostatique. Le système de Shallow Water est constitué de l'équation de conservation de la masse et celle de la conservation de la quantité de mouvement. C'est un système d'équations différentielles aux dérivées partielles de type non linéaire et hyperbolique. Généralement, il n'est pas aisé de trouver une solution analytique à ce

3. Ce nombre apparait dans les phénomènes à surface libre, en particulier dans l'étude de cours d'eaux, de barrage, etc. C'est un nombre sans dimension qui précise dans un fluide l'importance relative de l'énergie cinétique de ces particules par rapport à son énergie potentielle gravitationnelle.

type de système. Ainsi, c'est l'approche numérique qui est privilégiée pour résoudre le système de Saint Venant. Grâce à une bonne approximation numérique; les hauteurs d'eaux (h) et les vitesses moyennes (u) sont simulées le long de la direction d'écoulement en fonction du temps.

De nos jours, les équations de Saint Venant sont les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires graduellement et rapidement variés à surface libre.

De ce fait, la simulation numérique des modèles (SV) permet de concevoir des systèmes de protection contre les avalanches (paravalanche) ou à déterminer des zones à risques (couloirs d'avalanches, zones d'inondations, etc). Nous citons aussi d'autres domaines d'application : Les phénomènes liés à l'océanographie côtière, tsunami, ondes de crue. Les systèmes de Shallow Water sont aussi très présents dans l'étude des phénomènes de rupture de barrage et le transport de sédiment. [4]

CHAPITRE

2

SYSTÈME DE SAINT VENANT : FORMULATION MATHÉMATIQUE

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'origine mathématique des équations de l'hydraulique à surface libre, à savoir : le modèle de Saint Venant.

Le principe de base dans les modèles (SV) est de partir des équations locales de la masse et de la quantité de mouvement (équations de Naviers-Stockes), de les intégrer selon la verticale pour les moyenner.

À la fin, et grâce à certaines hypothèses simplificatrices, des termes de faibles influences sont supprimés.

D'abord un rappel sur les équations de Naviers Stockes.

2.1 Équation de Navier-Stockes

Les équations de Naviers Stockes (NS) doivent leur nom aux mathématiciens Français Claud Navier et le physicien Britannique Géorge Stokes. Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (gaz et la majeure partie des liquides) (ou le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus).

Comment s'écrivent-elles ? Quels phénomènes modélisent-elles ?

Le principal objectif de ces équations est de décrire l'évolution au cours du temps des fluides visqueux. N'importe quel mode de circulation des eaux terrestres (par exemple un écoulement dans un tuyau) sous l'effet de la pesanteur et le flux résultant de cette circulation est modélisé par le modèle de NS. Ces équations sont couramment utilisées dans la prédiction météorologique ou océanographique (le mouvement des courants dans les océans). On s'en sert aussi pour étudier la circulation du sang dans nos artères et dans de nombreux contextes.

Afin de décrire un fluide en mouvement, il faut connaître sa vitesse en un point de l'espace. Dans un fluide, nous considérons deux types de forces : les forces de pression et les forces visqueuses.

Voici l'équation de Navier Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \underbrace{-\nabla p}_{F_{\text{pression}}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{F_{\text{visqueux}}}$$

où

- v représente le champ de vitesse.
- p désigne la pression.
- ρ indique la masse volumique du fluide.
- μ exprime la viscosité dynamique.

En écoulement de fluide, nous distinguons deux grands types de comportements. Chacun de ses comportements caractérise un régime d'écoulement particulier : le régime laminaire et le régime turbulent. Un facteur important dans l'écoulement du fluide est le nombre de Reynolds.

Pourquoi l'équation de Navier Stockes est-elle compliquée ?

Il y a deux façons d'analyser la difficulté de cette équation. Du point de vue mathématique, cette équation est difficile car c'est une équation différentielle non linéaire. La complication vient du terme $v \cdot \nabla v$, ce terme varie comme le carré du champ de vitesse et c'est lui qui rend l'équation mathématique complexe. En mathématique, la non linéarité complique les choses, mais en physique aussi, car ce terme non linéaire se traduit dans la complexité des phénomènes physiques représentés. Néanmoins on ne sait toujours pas aujourd'hui si ces solutions peuvent développer des

singularités en temps fini, et cette question est d'ailleurs l'une des sept problèmes du millénaire en mathématique proposé par la fondation clay en 2000.[8]

2.1.1 Notations et définitions

Dans ce qui suit, nous considérons que l'unique fluide modélisé est l'eau, c'est-à-dire, nous supposons que les matières contenues dans l'eau n'ont aucune influence sur l'écoulement. Dans ce cas, les équations de bases sont les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible :

$$\begin{cases} \nabla \cdot U = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot UU + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mu \Delta U + F \end{cases}$$

où

- U est le vecteur vitesse.
- ρ est la masse volumique de l'eau.
- p est la pression.
- μ est la viscosité.
- F indique les forces extérieures.

D'abord, nous déterminons notre domaine d'application, et nous fixons quelques notations et rappelons certaines notions de bases que nous allons utiliser dans la présentation des équations de Saint Venant unidimensionnelles et bidimensionnelles.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux écoulements à surface libre dans des sites marqués par leurs faible profondeur. La grandeur caractéristique horizontale est supérieure aux grandeurs caractéristiques verticales. Si l'on se réfère à la figure au-dessous, la dimension caractéristique horizontale L est supérieure à la profondeur h . [4]

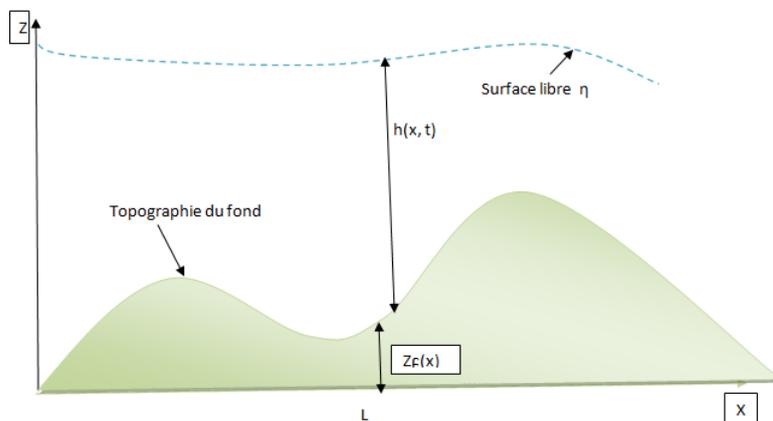


FIGURE 2.1 – Milieux peu profonds.

Notations :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $t_0 \in \mathbb{R}$, on considère :

$$\begin{aligned} b &: \Omega \times [t_0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, t) &\longmapsto b(X, t) \end{aligned}$$

On note par :

- $X = (x, y)^t$ les coordonnées dans \mathbb{R}^2 avec $t_0 \in \mathbb{R}$.
- $\frac{\partial b}{\partial t}$ la dérivée partielle de b par rapport à t .
- $\nabla_X b = (\partial_x b, \partial_y b)^t \in \mathbb{R}^2$ son gradient en X .

Pour toute fonction vectorielle :

$$\begin{aligned} W &: \Omega \times [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, t) &\longmapsto W(X, t) = \begin{pmatrix} u(X, t) \\ v(X, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On note aussi

$$\nabla_X \cdot W = \operatorname{div} W = \partial_x u + \partial_y v \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) représente la divergence de W qui est défini sur \mathbb{R} , sa matrice jacobienne est donnée par :

$$\nabla_X W = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

2.1.2 Quelques rappels et définitions

Lemme 2.1.1. Soit ϕ de classe \mathcal{C}^1 , alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $X_0 \in \Omega_0$:

$$\det(J_\phi(X_0, t_0; t)) > 0, \quad \forall t. \quad (\text{voir [15]})$$

De plus, J_ϕ vérifie :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\det(J_\phi(X_0, t_0; t))) = \nabla_X \cdot U(\phi(X_0, t_0; t), t) \det(J_\phi(X_0, t_0; t)), \quad \forall t \\ \det(J_\phi(X_0, t_0; t)) = 1. \end{cases}$$

Théorème 2.1.1. Si φ est une application intégrable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) et si pour toute boule ouverte $B \subset \Omega$, on a :

$$\int_B \varphi(X) dX = 0 \quad \text{alors } \varphi(X) = 0, \quad \forall X \in \Omega. \quad (\text{voir [15]})$$

Dérivée particulière : [11]

La dérivée matérielle d'une intégrale de volume est définie par :

$$\frac{D}{Dt} \int_\Omega f(\vec{x}, t) dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t} dx + \int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$$

2.1.3 Formule de divergence

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit u et v deux fonctions régulières et w un champ de vecteurs définis sur Ω , alors :

$$\int_{\Omega} w dx = \int_{\Gamma} w \cdot n d\sigma$$

où $\Gamma = \partial\Omega$. (voir [6])

2.1.4 La règle de Leibnitz

Cette formule est appliquée pour permuter les opérateurs différentiels et d'intégration. Cette règle précise que la dérivée d'une intégrale aux bornes variables fait apparaître une dérivée à l'intérieur de l'intégrale et des termes de flux (f) suivant la formule (voir [13]) :

$$\frac{\partial}{\partial X} \int_{Z_f}^{\eta} f dZ = \int_{Z_f}^{\eta} \frac{\partial f}{\partial X} dZ + F(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial X} - F(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial X}$$

Équations de bases :

2.1.5 La deuxième loi de Newton

La seconde loi de Newton est une loi très importante dans la mécanique classique. Lorsqu'un système est soumis à des actions mécanique extérieures, l'application de cette loi permet de prévoir le mouvement de ce système au cours du temps. On la nomme aussi le principe fondamental de la dynamique (PFD) ou relation fondamentale de la dynamique (RFD). Et s'énonce ainsi :

Dans un référentiel galiléen, la variation temporelle de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur le système :

$$m \cdot a = \frac{\partial P}{\partial t} = \sum F_i,$$

où

- F_i désigne les forces extérieures exercées sur l'objet.
- m est la masse de l'objet.
- a correspond à l'accélération.
- P est la quantité de mouvement.

2.1.6 Loi de conservation de la masse

La masse est préservée au cours du temps, que ça soit avec un fluide ou un solide. Le principe de conservation de la masse impose :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0, \text{ avec : } m = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX$$

où ρ est la densité du fluide.

2.1.7 Équation de continuité

L'équation de continuité est une conséquence de la conservation de la masse du fluide pour un milieu continu, elle traduit ce principe au sein d'un écoulement. Par exemple, cette équation met en évidence le fait que la quantité du fluide qui entre dans un tube est la même que celle qui sort de celui-ci.

Soit

$$\Omega_t = \{\phi(X_0, t_0; t); X_0 \in \Omega_0\}$$

$\forall t$, on a :

$$m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX$$

Et l'équation de conservation de la masse est donnée par :

$$\frac{dm(t)}{dt} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, t_0; t) : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t \\ X_0 &\mapsto X = \phi(X_0, t_0; t) \end{aligned}$$

bijective.

où ϕ et ϕ^{-1} étant de classe \mathcal{C}^1 . Avec ϕ est un changement de variable.

On a :

$$U(\phi(X_0, t_0; t)) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t_0; t)$$

Notons $J_\phi(X_0, t_0; t)$ la jacobienne de ϕ en X_0 , et $X_0 = (x_0, y_0)$ les composantes de X_0 et $\phi = (\phi_x, \phi_y)$ les composantes de ϕ , alors :

$$J_\phi(X_0, t_0; t) = D_{X_0} \phi(X_0, t_0; t) = \begin{pmatrix} \partial_{x_0} \phi_x & \partial_{y_0} \phi_x \\ \partial_{x_0} \phi_y & \partial_{y_0} \phi_y \end{pmatrix} (X_0, t_0; t)$$

Ainsi

$$m(t) = \int_{\Omega_{t_0}} \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \left| \det \left(J_\phi(X_0, t_0; t) \right) \right| dX_0$$

Comme ϕ et ϕ^{-1} sont de classe \mathcal{C}^2 , le jacobien dérivable et l'équation de la conservation de la masse qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} = \int_{\Omega_{t_0}} \left\{ \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(\phi(X_0, t_0; t), t) + \nabla_X \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t_0; t) \right] \left| \det \left(J_\phi(X_0, t_0; t) \right) \right| + \right. \\ \left. \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \frac{\partial \left| \det \left(J_\phi(X_0, t_0; t) \right) \right|}{\partial t} \right\} dX_0 = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la vitesse

$$\left(U \left(\phi(X_0, t_0; t) \right) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t_0; t) \right)$$

et grâce au lemme énoncé auparavant, l'équation précédente devient :

$$\int_{\Omega_{t_0}} \left[\frac{\partial \rho(\phi(X_0, t_0; t), t)}{\partial t} + \nabla_X \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) U(\phi(X_0, t_0; t), t) + \rho(\phi(X_0, t_0; t), t) \nabla_X U(\phi(X_0, t_0; t)) \right] \left| \det \left(J_\phi(X_0, t_0; t) \right) \right| = 0.$$

En utilisant le changement de variable inverse ϕ^{-1} , on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho(X, t)}{\partial t} + \nabla_X \rho(X, t) U(X, t) + \rho(X, t) \nabla_X \cdot U(X, t) \right] dX = 0$$

où encore (d'après la définition de la divergence) :

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho(X, t)}{\partial t} + \nabla_X \cdot (\rho(X, t) U(X, t)) \right] dX = 0 \quad (2.2)$$

L'application du **théorème 2.1.1** à l'équation (2.2), permet d'aboutir à la version locale de l'équation de conservation de la masse (équation de continuité) sous une forme différentielle, c'est à dire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(X, t) + \nabla_X \cdot (\rho(X, t) U(X, t)) = 0, \quad \forall X \in \Omega_t \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

En utilisant la définition de la divergence, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(X, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(X, t) U(X, t)) &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(X, t) + U \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot U) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(X, t) + \rho(X, t) (\nabla \cdot U(X, t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot U \quad (2.4)$$

Dans notre étude, les variations de densité sont supposées faibles, grâce à la définition d'un écoulement incompressible ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), et d'après l'équation (2.4), nous obtenons l'équation de continuité d'un écoulement incompressible :

$$\nabla_X \cdot U(X, t) = 0, \quad \forall X \in \Omega_t \text{ et } \forall t. \quad (2.5)$$

L'écriture de l'équation (2.5) (équation de continuité) sous la forme algébrique en dimension deux est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

où U et V sont les composantes de la vitesse dans la direction x et y .

2.1.8 Équation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement résulte de la relation fondamentale de la dynamique des fluides (la deuxième loi de Newton) :

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

où

- m est la masse.
- \vec{a} est son accélération.
- \vec{F}_i sont les forces exercées sur le système considéré.

Si la masse ne change pas au cours du temps, cette dernière équation devient :

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.7)$$

où

$\vec{P} = m\vec{U}$ est la quantité de mouvement.

Puisque nous travaillons dans un milieu continu, alors la quantité de mouvement du système est donnée par :

$$P = \int_{\Omega} \rho(X, t) U(X, t) dX, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^2)$$

où

- ρ est la masse volumique.
- U est la vitesse du milieu continu.

Alors

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho(X, t) U(X, t) dX \right) = \sum_i F_i \quad (2.8)$$

En utilisant la dérivée matérielle de ρU et en utilisant le théorème de divergence, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho(X,t)U(X,t)dX \right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho(X,t)U(X,t))}{\partial t} + \rho(X,t)U(X,t) \int_{\Gamma} U.nd\sigma \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial\rho U}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho(\nabla.UU)dX \\ &= \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla.UU \right) dX \end{aligned}$$

où $\Gamma = \partial\Omega$

Le terme UU désigne un tenseur d'ordre deux.

L'équation (2.8) peut s'écrire aussi :

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla.UU \right) dX = \sum_i F_i, \quad (2.9)$$

Avant d'écrire l'équation de la quantité de mouvement, nous devons préciser les forces appliquées sur le système. Les forces F qui activent le fluide dans le domaine Ω sont les forces massiques (poids) et les forces surfaciques.

Il s'ensuit que l'équation (2.9) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla.UU \right) dX = \underbrace{mf}_{\text{poids}} + \underbrace{\int_{\Gamma} \gamma dX}_{\text{force de surface}}$$

ou encore

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla.UU \right) dX = \int_{\Omega} \rho f dX + \int_{\Omega} \Sigma.ndX, \quad (2.10)$$

où $\gamma = \Sigma.n$, avec :

- Σ représente le tenseur de contrainte.
- n est la normale unitaire.
- f représente la densité massique des forces massiques.
- ρ est la masse volumique.

Le tenseur des contraintes s'écrit sous la forme :

$$\Sigma = -p\mathbb{1} + T$$

où

- $\mathbb{1}$ est le tenseur d'identité.
- p représente la pression.
- T est le vecteur des contraintes.

Et puisque nous avons considéré des fluides newtoniens incompressibles, alors :

$$T = 2\rho\nu D$$

où ν est le coefficient de viscosité cinématique et D est le tenseur des taux de déformations donné par :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En utilisant le **théorème 2.1.1** dans l'équation (2.10), nous aurons :

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla.UU\right) &= \rho f + \underbrace{\Sigma.n}_{=\nabla.\Sigma} \\ &= \rho f + \nabla.(-p\mathbb{1} + T) \\ &= \rho f - \nabla p + \nabla.T; \quad \left(\text{car : } \nabla.(p\mathbb{1}) = p\nabla.\mathbb{1} + \mathbb{1}.\nabla p = \nabla p\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla.\rho UU = \rho f - \nabla p + \nabla.T, \quad (2.11)$$

Comme

$$\nabla.\rho UU = \rho U\nabla U + U\nabla.\rho U$$

Et puisque nous considérons des fluides newtoniens incompressibles ($\nabla.\rho U = 0$), alors l'équation (2.11) s'écrit :

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t} + \rho U\nabla U = \rho f - \nabla p + 2\rho\nu\nabla.D \quad (2.12)$$

où

- ν indique le coefficient de viscosité cinématique.
- f représente la densité massique des forces massiques.
- D est le tenseur de taux de déformations.

Remarque 2.1.1. La notation $(U\nabla U)$ ne signifie pas le produit entre le vecteur U et le tenseur (matrice) ∇U . Il faut écrire $(U\nabla)U$ c'est-à-dire l'opérateur $U\nabla$ est appliqué au vecteur U .

En dimension deux, la formule (2.12) qui représente l'équation de la quantité de mouvement peut s'écrire de la manière suivante dans un repère cartésien :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta(U) + fV \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta(V) - fU \quad (2.14)$$

Dans la partie qui suit, nous décrivons les hypothèses et les moyens d'approximations considérés pour simplifier les équations de Naviers-Stokes afin d'aboutir aux équations finales de Saint Venant régissant les écoulements à surface libre.

2.1.9 Hypothèses et approximations simplificatrices

Les équations de Saint Venant peuvent être déduites par une intégration verticale des équations de Navier-Stokes et en optant pour un certain nombre d'hypothèses :

- La pente de la surface libre est faible.
- Les variations d'écoulements sont toujours progressives. Les hauteurs d'eau changent doucement d'un point à l'autre sur un même bief.
- Les variations de masse sont négligeables durant l'écoulement (apport ou perte d'eau).

Nous considérons les hypothèses fondamentales suivantes :

1. Hypothèse de pression hydrostatique : Cette hypothèse est essentielle pour traduire la pression en terme de hauteur d'eau. Nous supposons que l'accélération du mouvement sur la verticale est négligeable devant l'accélération due à la gravité. [13]

La pression n'étant donc que les forces de pression sous gravité :

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = -\rho g. \quad (2.15)$$

Les équations de Saint Venant ne sont qu'une perturbation de cet état de base. Nous indiquons par $Z = Z_f$ la côte du fond, le fond varie lentement en x et y dans la description de Saint Venant et on définit $Z = \eta$ comme étant la côte de la surface libre. La hauteur d'eau est $h = \eta - Z_f$.

Au-dessus de la surface libre, l'air assure une pression atmosphérique p_0 que nous supposerons comme constante et uniforme.

Par intégration de l'équation (2.15) sur la verticale, on aura donc la relation « hydrostatique » à une coordonnée verticale ascendante z quelconque :

$$p = p_0 + \rho g h_z.$$

où $h_z = \eta - z$ est la hauteur de plongement (immersion).

2. Hypothèse d'imperméabilité du fond et de la surface libre : à travers le fond et la surface libre, nous supposons qu'il n'y a pas de transfert de masse, et qu'une particule d'eau située sur une de ces deux surfaces restera au cours du temps. D'après les hypothèses et les remarques

précédentes, nous pouvons écrire :

$$U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + V(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

$$U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

où

- $U(x, y, \eta)$ et $V(x, y, \eta)$ sont des composantes du vecteur vitesse en surface.
- $U(x, y, Z_f)$ et $V(x, y, Z_f)$ sont celles du vecteur vitesse au fond.[13]

Les expressions (2.16) et (2.17) assurent que la surface libre ou le fond soient une ligne de courants.

3. Hypothèse de Boussinesq : Cette approximation consiste à négliger les variations de densité de l'eau $\Delta\rho$ par rapport à la densité de référence ρ_0 ($\Delta\rho \ll \rho_0$), à l'exclusion de celles croisées dans le terme de gravitation [13]. De plus, nous avons supposé que le fluide est incompressible :

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho = \rho_0$$

2.2 Moyenne des équations de Navier Stokes

2.2.1 Principe

Dans cette partie, nous allons intégrer les équations de Navier-Stokes sur la verticale entre le fond de la côte Z_f et la surface de la côte η en utilisant les hypothèses de pression hydrostatique et l'approximation de Boussinesq.

On note par u et v les vitesses moyennes sur une verticale suivant x et y . Alors, deux nouvelles variables vont apparaitre :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{\eta} U dZ \\ v = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{\eta} V dZ \end{cases} \quad (2.18)$$

où $h = \eta - Z_f$ est la profondeur d'eau totale.

2.2.2 Moyenne de l'équation de continuité

Nous intégrons l'équation de la continuité sur toute la profondeur totale, nous obtenons :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dZ = 0 \quad (2.19)$$

Nous utilisons la règle de Leibniz, l'équation (2.19) devient :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dZ &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} U dZ - U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} V dZ \\ -V(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.20)$$

En tenant compte des hypothèses d'imperméabilité, on aura :

– Pour la surface libre

$$-U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - V(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.21)$$

– Pour le fond

$$-U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} - V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} = \frac{\partial Z_f}{\partial t} \quad (2.22)$$

Nous remplaçons les équations (2.21) et (2.22) dans l'équation (2.20), nous obtenons :

$$-d \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^{Z_f} U dZ + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial Z_f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^{Z_f} V dZ = 0$$

ou encore

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^{Z_f} U dZ + \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^{Z_f} V dZ = 0$$

En substituant (2.18) dans cette dernière formule, nous aurons l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

où l'équation (2.23) représente la forme intégrale de l'équation de continuité, avec :

- u et v sont les vitesses moyennes.
- h est la hauteur d'eau.

2.2.3 Moyenne de l'équation de la quantité de mouvement

Nous intégrons les équations de la quantité de mouvement sur toute la profondeur totale.

Nous utilisons l'hypothèse de pression hydrostatique $p(x, y) = \rho g(\eta - z)$ pour les équations correspondant aux projections sur x et y respectivement .

Nous commençons par développer et intégrer l'équation en U , c'est-à-dire :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} \right) dZ = \int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g(\eta - z)) + \nu \Delta(U) + fV \right) dZ \quad (2.24)$$

Nous appliquons la règle de Leibniz afin d'évaluer la moyenne de chacun des termes, nous obtenons les expressions suivante pour l'équation en U .

– **Dérivée en temps :**

$$\int_{Z_f}^{\eta} \frac{\partial U}{\partial t} dZ = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Z_f}^{\eta} U dz - U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial t}$$

Comme

$$u = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{\eta} U dZ$$

Nous obtenons :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \frac{\partial U}{\partial t} dZ = \frac{\partial}{\partial t} (hu) - U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial t} \quad (2.25)$$

– **Terme d'advection :** C'est un cheminement de modélisation en eau peu profonde, qui ne se base pas sur une déduction exacte des équations de Navier-Stokes. En effet, toute la caractérisation découle d'une série de paramétrisation de phénomènes physiques. On pose :

$$\begin{cases} u'' = U - u \\ v'' = V - v \end{cases} \quad (2.26)$$

Nous aurons :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \frac{\partial U^2}{\partial x} dZ = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} U^2 dZ - U^2(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + U^2(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (2.27)$$

et

$$\int_{Z_f}^{\eta} \frac{\partial UV}{\partial y} dZ = \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} UV dZ - U(x, y, \eta) V(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + U(x, y, Z_f) V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \quad (2.28)$$

Nous simplifions les équations (2.27) et (2.28) :

• En développant l'expression (2.27) en U^2 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} U^2 dZ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} (u + U - u)(u + U - u) dZ \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u^2 dZ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} (U - u)^2 dZ + 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} (uU - u^2) dZ \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ + \frac{\partial}{\partial x} 2u(hu - hu), \quad (\text{car } \int_{Z_f}^{\eta} u^2 dZ = hu^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ \end{aligned}$$

• En développant l'expression (2.28) en UV , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} UV dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} (u + U - u)(v + V - v) dZ \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} (U - u)(V - v) dZ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} (uV + vU - 2uv) dZ \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ + \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) - 2 \frac{\partial}{\partial y} (huv) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ
\end{aligned}$$

En substituant ces deux résultats dans les équations (2.27) et (2.28), nous obtenons :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \frac{\partial U^2}{\partial x} dZ = \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ - U^2(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + U^2(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (2.29)$$

et

$$\int_{Z_f}^{\eta} \frac{\partial UV}{\partial y} dZ = \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ - U(x, y, \eta) V(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + U(x, y, Z_f) V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \quad (2.30)$$

En remplaçant les équations (2.25), (2.29) et (2.30) dans le premier membre de l'équation (2.24), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} \right) dZ = \\
&\frac{\partial}{\partial t} (hu) - U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ - U^2(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\
&U^2(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ - U(x, y, \eta) V(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + U(x, y, Z_f) V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) - U(x, y, \eta) \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + V(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + \\
&U(x, y, Z_f) \left[\frac{\partial Z_f}{\partial t} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ
\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de l'imperméabilité du fond et de la surface libre, nous aurons :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} \right) dZ = \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ$$

Les termes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ$$

expriment le changement des composantes de vitesse (U, V) autour de sa valeur moyennée (u, v) sur la profondeur h . En général, ces éléments sont interprétés comme une diffusion supplémentaire,

et appelés termes de dispersion. La paramétrisation de cette fluctuation de vitesse est fondée sur la notion de dispersion qui est identique à la notion de la viscosité turbulente :

$$\int_{Z_f}^{\eta} u''^2 dZ = v_d \frac{\partial hu}{\partial x} \text{ et } \int_{Z_f}^{\eta} u'' v'' dZ = v_d \frac{\partial hu}{\partial y}$$

où v_d est le coefficient de dispersion.

Nous remplaçons ceci dans la dernière équation, nous aurons :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} \right) dZ &= \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_d \frac{\partial hu}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_d \frac{\partial hu}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \nabla \cdot \left(v_d \nabla(hu) \right) \end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons le premier membre de l'équation de la quantité de mouvement pour la composante de vitesse dans la direction y :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{\eta} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VU}{\partial x} \right) dZ &= \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_d \frac{\partial hv}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_d \frac{\partial hv}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \nabla \cdot \left(v_d \nabla(hv) \right) \end{aligned}$$

Nous simplifions maintenant le second membre de l'équation de la quantité de mouvement en U :

- **Gradient de pression** : nous appliquons l'hypothèse de la pression hydrostatique à ce terme, nous aurons :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \frac{-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g(\eta - z)) dZ = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.31)$$

Comme le fluide est supposé newtonien, alors la masse volumique (ρ) est constante.

- **Terme de diffusion** : nous utilisons encore une fois la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{\eta} \nu \Delta(U) dZ &= \int_{Z_f}^{\eta} \nu \nabla \cdot (\nabla U) dZ \\ &= \nabla \cdot \int_{Z_f}^{\eta} \nu \nabla U dZ - \nu \nabla U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \nabla U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{Z_f}^{\eta} \nu \Delta(u) dZ = \nabla \cdot \left(\nu \nabla(hu) \right) - \nu \nabla U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \nabla U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (2.32)$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, avec :

- μ est la viscosité dynamique.
- ρ est la masse volumique.

Contraintes dues au frottement

Les deux derniers termes de l'équation (2.32) sont des forces superficielles (des forces de volume), elles apparaissent dans les équations de Saint Venant comme des « termes sources » appliquées à la masse d'eau, puisque ces équations représentent une moyenne sur la verticale.

Ces termes expriment les contraintes de cisaillement à la surface dûe au fond et au frottement sur le fond.

Nous notons par $\vec{\tau}_f$ la contrainte de cisaillement du fluide agissant sur le fond.

Et par $\vec{\tau}_\eta$ la contrainte due au vent de la surface.

a) Contrainte dûe au frottement sur le fond ($\vec{\tau}_f$) : Elle est déterminée par la loi de Newton :

$$\vec{\tau}_f = \mu \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{z_f} = \rho \nu \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{z_f}$$

où U est La vitesse du fluide à une hauteur η .

avec η la coordonnée de la surface libre repérant la position du fluide.

La contrainte entraînée par le fond sur le fluide est opposée au vecteur vitesse du fluide :

$$\frac{-1}{\rho h} \vec{\tau}_f$$

En hydrodynamique, la contrainte de frottement est donnée par :

$$\vec{\tau}_f(\tau_{fx}, \tau_{fy}) = \frac{1}{2} \rho C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u} \quad (2.33)$$

Où

C_f est le coefficient de frottement.

On peut écrire aussi :

$$\nu \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{z_f} = \frac{-1}{2} \rho C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u}$$

En général, le coefficient C_f est explicité par les formules de Chézy, de Strickler, et de Manning (voir la **remarque 2.2.1**).

Nous déterminons les composantes de la contrainte de frottement sur le fond par :

$$\tau_{fx} = \rho \frac{g}{C_h^2} \sqrt{u^2 + v^2} u$$

$$\tau_{fy} = \rho \frac{g}{C_h^2} \sqrt{u^2 + v^2} v$$

On a :

$$\nu \nabla U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} = \frac{-1}{2} C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\nu \nabla U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} &= \int_{Z_f}^{\eta} \frac{-1}{\rho h} \vec{\tau}_f dZ \\ &= \frac{-\vec{\tau}_f}{\rho}\end{aligned}$$

Par conséquent, nous trouvons :

$$\nu \nabla U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} = -\frac{\tau_f}{\rho}$$

b) Contraintes dues au vent de la surface $\vec{\tau}_\eta$: nous exprimons cette contrainte d'une manière similaire à la formule (2.33) à part que la vitesse du fluide est remplacée par la vitesse du vent, alors :

$$-\nu \nabla U(x, y, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\vec{\tau}_\eta}{\rho}$$

– **Terme de coriolis :**

$$\int_{Z_f}^{\eta} fV dZ = f(hv) \quad (2.34)$$

L'intégration du second terme de l'équation de la quantité de mouvement dans la direction de x nous donne :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \left[\frac{-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g(\eta - z)) + \nu \Delta U + fV \right] dZ = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(hv) + \nabla \cdot (\nu \nabla(hu)) + \frac{\tau_{\eta x}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho}$$

En suivant la même procédure, nous obtenons le second membre de l'équation de la quantité de mouvement dans la direction y :

$$\int_{Z_f}^{\eta} \left[\frac{-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho g(\eta - z)) + \nu \Delta V - fU \right] dZ = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} - f(hu) + \nabla \cdot (\nu \nabla(hv)) + \frac{\tau_{\eta y}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad (2.35)$$

D'où l'équation de la quantité de mouvement pour la composante u , moyennée sur toute la profondeur :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(hv) + \nabla \cdot ((\nu + v_d) \nabla(hu)) + \frac{\tau_{\eta x}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (2.36)$$

Et l'équation de la quantité de mouvement pour la composante v , moyennée sur toute la profondeur :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} - f(hu) + \nabla \cdot ((\nu + v_d) \nabla(hv)) + \frac{\tau_{\eta y}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad (2.37)$$

On pose :

$$A_H = \nu + v_d$$

où A_H ne varie pas en espace, alors l'équation(2.36) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh\frac{\partial\eta}{\partial x} + f(hv) + \nabla \cdot (A_H \nabla(hu)) + \frac{\tau_{\eta x}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh\frac{\partial\eta}{\partial x} + f(hv) + A_H\Delta(hu) + \frac{\tau_{\eta x}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (2.38)$$

De la même manière, nous obtenons la moyenne de l'équation de la quantité de mouvement dans la direction y qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) = -gh\frac{\partial\eta}{\partial y} - f(hu) + A_H\Delta(hv) + \frac{\tau_{\eta y}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad (2.39)$$

Remarque 2.2.1. *Dans les expressions de la contrainte due au frottement sur le fond et celle due au vent en surface libre, nous avons vu l'apparition de certains paramètres fixes C_f , il s'agit des coefficients propres aux écoulements :*

2.2.4 Formule de Chézy

Elle permet d'exprimer la perte de charge d'un écoulement gravitaire. Le principe de base de la formule (2.40) est basé sur un équilibre des forces en présence.

$$C_f = \frac{2g}{C_h^2} \quad (2.40)$$

où C_h est le coefficient de Chézy.

2.2.5 Formule de Manning

C'est une formule d'évaluation de la vitesse moyenne d'un liquide s'écoulant en surface libre, qui s'écrit :

$$C_f = \frac{2gn^2}{R_h^{\frac{1}{3}}}$$

où n est le coefficient de Manning et R_h est le rayon hydraulique.

2.2.6 Formule de Strickler

Le coefficient de Strickler est déterminé empiriquement, il dépend de nombreux facteurs parmi lesquels la rugosité de la surface et la sinuosité, qui s'écrit :

$$C_f = \frac{2g}{R_h^{\frac{1}{3}} K_s^2}$$

où K_s est le coefficient de Strickler et R_h est le rayon hydraulique.

2.3 Forme finale des équations de Saint Venant

Les équations de Saint Venant bidimensionnelles sont constituées de l'équation de continuité (2.41) et les équations de la quantité de mouvement (2.42)-(2.43) qui sont de types non linéaires et hyperboliques.

Équation de continuité :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

Équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(hv) + A_H \Delta(hu) + \frac{\tau_{\eta x}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} - f(hu) + A_H \Delta(hv) + \frac{\tau_{\eta y}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad (2.43)$$

Le modèle de Saint Venant paraît sous deux formes fondamentales lorsqu'on considère ses variables d'états :

2.3.1 Forme conservative

La forme conservative est basée sur la hauteur d'eau et les composantes en (x, y) du débit spécifique $q = (q_x, q_y) = (hu, hv)$ pour le mouvement d'eau. Elle s'applique aux écoulements hyperboliques et ressaut hydraulique. Cette forme du système de Saint Venant est plus adéquate pour une résolution numérique approchée des équations de conservation de type hyperbolique. Il est conseillé d'utiliser cette forme quand les solutions discontinues sont possibles.

2.3.2 Forme non conservative

La forme non conservative se repose sur la hauteur d'eau mais aborde le mouvement à l'aide des variables primitives de vitesse (u, v) . Elle s'applique aux écoulements de rivières, des estuaires ou des zones cotières à fond irrégulier. En pratique, on utilise souvent cette forme afin d'échapper au problème de solutions discontinues. Dans le cas où le fond est irrégulier, il est préférable d'utiliser cette forme.

Remarque 2.3.1. *Ces deux formes sont équivalentes sur le plan mathématique tant que les solutions sont continues.*

2.3.3 Équation de base de Saint Venant

Les équations de Saint Venant sous la forme conservative sont les plus utilisées dans l'approche numérique. Nous présentons par ici ces équations sous forme conservative avec une formulation

en (vitesse - hauteur d'eau) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S$$

où les vecteurs W, E, G et S sont définis comme suit :

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh\eta \\ huv \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh\eta \end{pmatrix}$$

et

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -Fhu + fhv + A_H\Delta(hu) \\ -Fhv - fhu + A_H\Delta(hv) \end{pmatrix}$$

Avec : S représente le vecteur du terme source.

où

- $Fhu = \frac{\tau_{fx}}{\rho}$
- $Fhv = \frac{\tau_{fy}}{\rho}$

CHAPITRE

3

TECHNIQUES NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS DE SAINT VENANT

Les dernières décennies ont vu une exploitation très importante des méthodes et outils numériques, qui permettent de résoudre efficacement un certain nombre de problèmes d'ingénierie. Ce chapitre a pour objectif de rappeler les principales méthodes numériques (différences finies, éléments finis et volumes finis), adoptées pour l'approximation numérique des solutions du modèle (SV).

3.1 La résolution analytique des équations de Saint Venant

Les équations de Saint Venant n'ont pas de solutions exactes. Ces équations sont de type non linéaire et hyperbolique, leur résolution analytique est très difficile, voire même impossible. Avec des simplifications et en appliquant l'hypothèse de quasi-stationnarité et de quasi-uniformité de l'écoulement la résolution reste possible.

Certaines recherches ont proposé des solutions analytiques dans le cas de présence de frottements (cas d'un fluide réel) et/ou de turbulence).

La difficulté due à la résolution analytique de ces équations nous mène à la résolution numérique.

3.2 La résolution numérique de ce système

Les différences finies, les éléments finis et les volumes finis sont considérés parmi les trois grandes familles, qui permettent de passer d'un problème direct continu, régi par une équation différentielle aux dérivées partielles, au problème approché discret. Ces méthodes numériques aident à résoudre le système de Saint Venant, c'est à dire à calculer les hauteurs d'eau, les vitesses et les débits dans les tronçons de façon approchée.

Nous allons détailler la méthode aux différences finies qui est la plus facile à utiliser. Nous donnerons les définitions de bases des méthodes aux volumes finis et éléments finis qui sont plus puissantes et plus complexes.

3.2.1 Méthode des différences finies

Cette méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par les différences divisées de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. Elle repose sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables. Lorsque le pas de temps et d'espace sont petits, le développement au limite est proche de la valeur exacte. Selon l'emploi de ces développements, on obtient des expressions différentes qui génèrent trois types de schémas (centré, progressif et régressif).

On présente ci-dessous ces schémas, dans le but d'approximer la première dérivée :

1. Schéma progressif :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^j = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

2. Schéma régressif :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^j = \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

Les deux schémas précédents sont d'ordre un.

On introduit maintenant le schéma d'ordre deux qui est dit centré :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^j = \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2\Delta x} + o(\Delta x^2)$$

La classification par rapport au temps fait ressortir deux grandes familles de schémas :

- **Schéma explicite** : C'est le plus simple, on exprime ce qui se passe en temps $t + \Delta t$ en fonction de ce qui se passe au temps t . Si le pas Δt est choisi trop grand le schéma dans ce cas est instable.
- **Schéma implicite** : On exprime ce qui se passe au point x et au temps $t + \Delta t$ en fonction de ce qui se passe au point x et au temps t .

Pour résoudre les équations de Saint Venant, nous commençons par encadrer (quadriller) le plan (x, t) afin d'avoir des mailles de taille $(\Delta x, \Delta t)$ où Δx est le pas d'espace et Δt est le pas de temps.

Nous présentons quelques schémas utilisés dans la discrétisation des équations de Saint Venant :

- **Schéma explicite à différences centrées** : C'est un schéma centré en espace et progressif en temps. Quelque soit le pas de l'espace Δx et le pas de temps Δt , ce schéma est toujours stable.

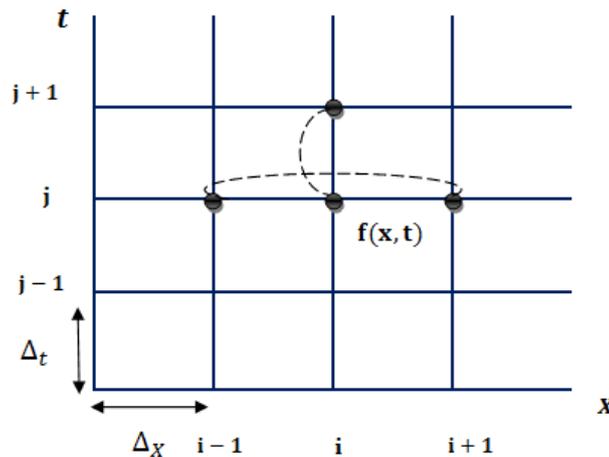


FIGURE 3.1 – Notations du schéma explicite à différences centrées.

- **Schéma explicite Leap-Frog** : C'est un schéma de second d'ordre centré en espace et en temps. Il est l'un des premiers à être utilisé.
- **Schéma implicite de Vasiliev** : Ce schéma a été mis au point par Vasiliev O.F de l'institut d'hydrodynamique, Branche Sibérienne, URSS, Académie des sciences, en 1963. C'est un schéma centré en espace et progressif en temps. Il est inconditionnellement stable.
- **Schéma implicite de Preissmann** : Ce schéma a été mis au point par Alexandre Preissmann de la société Sogreah, au début des années 1960. Il est actuellement le plus utilisé

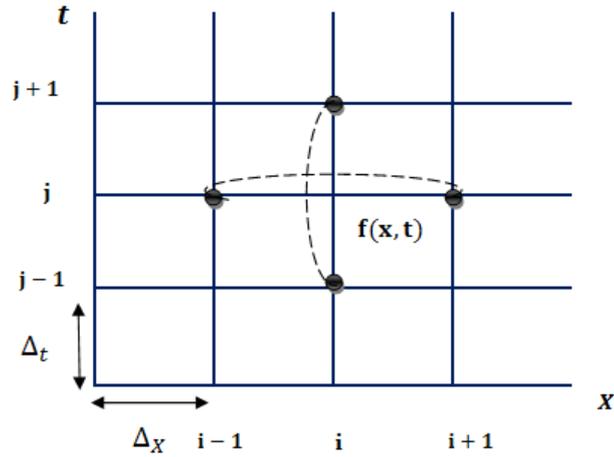


FIGURE 3.2 – Notations du schéma de Leap-Frog.

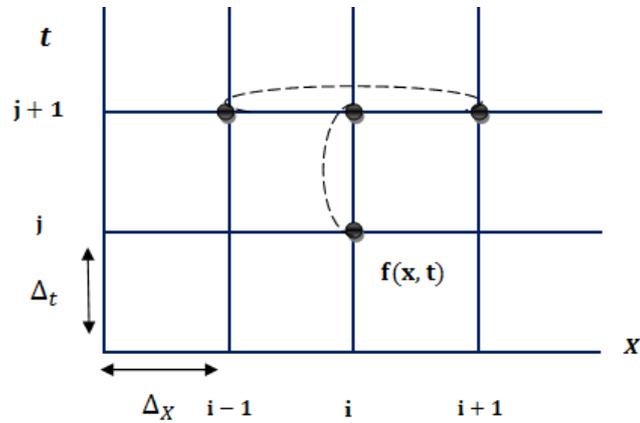


FIGURE 3.3 – Notations du schéma Vasiliev.

pour les équations de Saint Venant. Soit f une fonction définie par :

$$f(x, t) = \frac{\theta}{2}(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2}(f_{i+1}^j - f_i^j)$$

où les dérivées de f par rapport à la variable d'espace x ou par rapport à la variable de temps t sont discrétisées en :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^j + f_i^{j+1} - f_i^j}{2\Delta t}$$

où θ est un coefficient de pondération compris entre 0 et 1.

- **Schéma de Lax-Wendroff** : Ce schéma est introduit par Peter Lax et Burton Wendroff, est défini en analyse numérique comme une technique de résolution numérique des équations

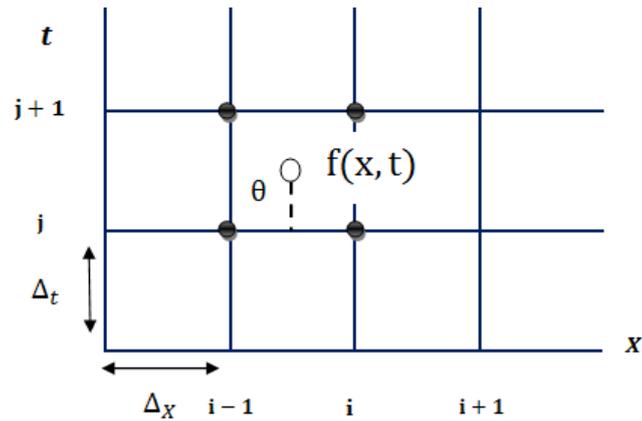


FIGURE 3.4 – Notations du schéma de Preissman.

aux dérivées partielles de type hyperbolique. C'est un schéma explicite de second ordre à la fois en temps et en espace.

3.2.2 Méthode des éléments finis

Le principe de cette méthode consiste à diviser la structure étudiée d'un domaine en éléments par exemple triangulaire ou quadrilatéraux dans le cas bidimensionnel ($2D$). Dans le cas unidimensionnel ($1D$), l'espace est divisé en segments à pas régulier (ΔX). La solution numérique approchée est ensuite recherchée dans un espace fonctionnel déterminé a priori. La solution est donc écrite à la base de fonctions connues sous le nom des fonctions d'interpolations. Le choix de ces fonctions est très important pour définir cette méthode. Elle nous donne une meilleure précision de la solution grâce au choix du nombre de nœuds qu'on veut par élément.

3.2.3 Méthode des volumes finis

Cette méthode s'appuie sur deux étapes principales : subdivision du domaine en un nombre de volumes finis, et la discrétisation intégrale des équations d'eaux peu profondes. Cette technique convient à la résolution des systèmes conservatifs, et les conditions aux limites sont mieux prise en compte.

La résolution des équations de Saint Venant à base des volumes finis utilisent principalement deux techniques : le solveur de l'approximation Riemann de Roe et la technique de projection.

Actuellement, la méthode des volumes finis est la plus utilisée. Selon le constat fait par les ingénieurs, la méthode des différences finies est la mieux recommandée quand on traite un écoulement unidimensionnel ($1D$). Et pour étudier des structures tridimensionnelles, les méthodes des éléments finis et volumes finis sont les plus adaptées.

CHAPITRE

4

EXEMPLE D'APPLICATION : TRANSPORT DE SÉDIMENT

Les équations de Saint Venant gouvernent les phénomènes d'écoulement en surface libre tels que les avalanches, rupture de barrage, les écoulements à travers les tubulures, écoulement en rivière ou en canaux artificiels, mais encore le comportement des grandes étendues d'eau. Dans notre application, nous allons nous contenter du cas unidimensionnel (1D)(càd : des rivières rectilignes de section invariable). Pour cela, nous avons choisi comme exemple d'application **le transport de sédiments**, que nous trouvons généralement dans les rivières, canaux, les zones côtières . . . , etc.



FIGURE 4.1 – La couleur brune bien distinctive de cette rivière est due au nombre important de sédiments qui sont charriés.

4.1 Introduction : Transport de sédiments

L'étude du transport de sédiments (de particule, de sable, d'alluvion, de boues) joue un rôle très important dans tous les problèmes d'hydraulique fluviale et dans la distribution des cours d'eaux. Afin de décrire le mouvement de sédiments, il est utile de différencier les matériaux cohésifs (vases) des matériaux non cohésifs (sable ou élément plus grossiers). Nous avons deux types de transport :

- Un transport près du fond (par charriage / saltation) qui est caractérisé par une vitesse horizontale variante.
- Un transport dans la colonne d'eau (par suspension) qui est caractérisé par une vitesse horizontale identique.

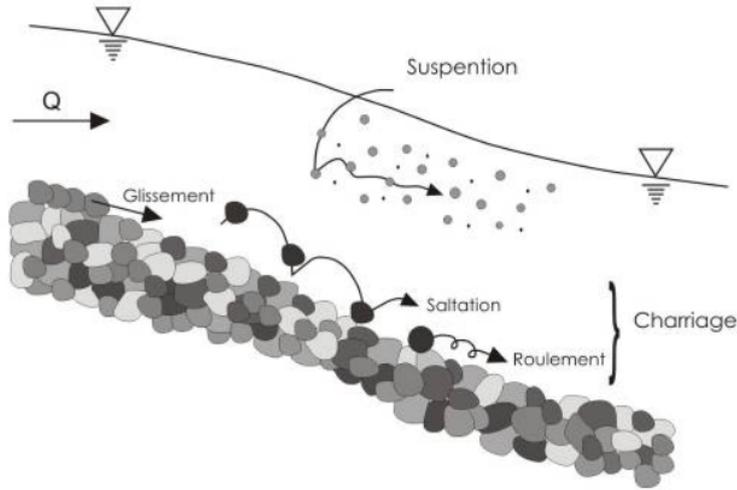


FIGURE 4.2 – Continuité sédimentaire.

Il existe un modèle mathématique qui représente cette **action-réaction** (i.e : transport de sédiments) connu sous le nom du modèle Saint-Venant-Exner. Ce phénomène est modélisé comme suit :

4.2 Modélisation de transport de sédiment

La modélisation du transport de sédiments nécessite d'ajouter aux équations de Saint Venant unidimensionnelles, l'équation de conservation de sédiment connue sous le nom d'Exner. Ce système permet de calculer l'évolution du niveau moyen du fond. Ce phénomène de transport est modélisé par le système couplée Saint Venant Exner.

couplage

modèle hydrodynamique
Équation Saint-Venant

modèle morphodynamique
Équation de continuité du sédiment.

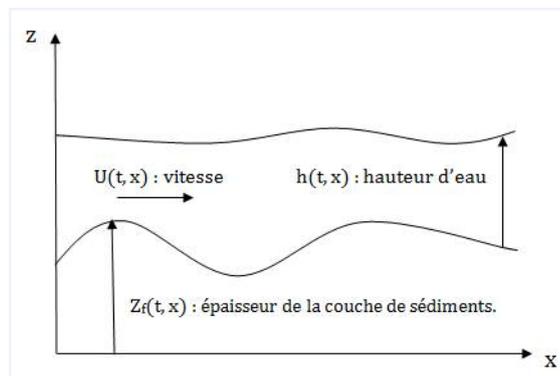


FIGURE 4.3 – Milieu peu profond.

4.2.1 Équation de Saint-Venant

Nous énonçons ici les équations de Saint-Venant pour un écoulement non permanent non uniforme, dans un canal prismatique¹rectangulaire pour une pente à fond mobile :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0. \\ \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - J_f = -J_e. \end{cases} \quad (4.1)$$

où

- g est l'accélération de la pesanteur.
- u est la vitesse moyenne.
- J_f représente la pente du fond.
- J_e indique la pente d'énergie.
- h est la hauteur de l'eau.

Avec J_f et J_e sont exprimés en fonction de u , h et Z_f .

Tels que :

$$\begin{aligned} J_f &= -\frac{\partial Z_f}{\partial x} \\ J_e &= \frac{u^2 \cdot n^2}{(R_h)^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

où n désigne le coefficient de manning et R_h est le rayon hydraulique.

Le système (4.1) décrit l'écoulement de la phase liquide sur un fond mobile.

La première équation du système (4.1) exprime l'équation de continuité et la seconde équation représente celle de la dynamique.

4.2.2 Équation d'Exner

En présence de transport de solides, le système de Saint Venant (4.1) est complété par l'équation d'Exner. Cette équation est la forme finale de l'équation de la conservation de la masse (l'équation de continuité) du sédiments. l'équation d'Exner traduit l'instabilité entre le flux des sédiments entrant et sortant d'un tronçon de rivière entraînant un changement de la côte du fond. Ainsi, elle décrit l'érosion ou l'engravement du lit d'écoulement.

L'équation d'Exner est donnée par :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{1}{1-P} \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

1. est un canal dont la pente et la géométrie de la section restent constantes dans la direction horizontale du canal.

où

- q_s est le flux du sédiment.
- P est la porosité (la perméabilité) du fond.
- Z_f est la côte du fond.

Nous combinons les équations de Saint-Venant et celle d'Exner, nous obtenons les équations de Saint-Venant-Exner :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - J_f = -J_e \\ \frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{1}{1-P} \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce système contient trois inconnues, $u(x, t)$, $h(x, t)$ et Z_f , avec leurs variables indépendantes x et t .

où

- u est la vitesse moyenne.
- h est la profondeur d'écoulement du mélange eau sédiment (phase liquide), ou d'eau seulement si la concentration du sédiment est négligeable.
- q_s désigne le flux de sédiment.

Le système couplé Saint Venant Exner (4.3) exprime trois principes fondamentaux :

- La conservation de la masse du fluide (L'eau).
- La conservation de la masse du sédiment.
- La conservation de l'énergie.

4.3 Solution directe

Les équations de Saint Venant Exner de type hyperbolique n'ont pas de solution exacte, leur résolution est très difficile. Pour cela, la recherche des solutions approchées s'impose.

4.4 Résolution numérique

Actuellement, deux approches existent pour aborder la question de résolution numérique du système Saint-Venant-Exner :

- L'approche découplée des équations consiste à résoudre séparément la partie hydraulique (système de Saint Venant) et la partie solide (équation d'Exner). les inconnues hydrodynamiques et morphodynamique sont échangées à des pas de temps particuliers.
- La seconde repose sur un traitement couplé du système.

D'une part, le traitement découplé est justifié entre autres par les échelles de temps différentes caractérisant l'écoulement et le transport de solide. L'hypothèse qu'une modification du lit a une influence négligeable sur l'écoulement de l'eau permet le découplage des équations Saint Venant et Exner (discuté par Cunge et al.) [14]. En effet, cette méthode offre l'avantage de conserver toutes les propriétés pour la phase liquide. Cependant, au moment où les échelles du temps sont comparables, ce traitement de découplage devient inadapté. La littérature s'accorde à dire que ce problème est corrigé par une approche couplée.

Il est important de préciser qu'en général, le système par une approche numérique couplée ne dispose pas de formulation conservative, et donc il est nécessaire de travailler avec des formulations non conservatives. Or la formulation non conservative présente un inconvénient du point de vue numérique.

Nous allons tenter de résoudre le système (4.3) en utilisant la méthode des différences finies. Dans notre étude, nous utiliserons la démarche implicite aux différences finies associant les deux phases par une résolution simultanée.

D'abord, nous considérons un tronçon qui doit être discrétisé en un maillage régulier à partir des sections en travers bien choisies. Il n'est pas nécessaire de multiplier le nombre de sections à l'infini. Sur la base de ce maillage, les modèles numériques résolvent de proche en proche les équations de l'hydraulique (équations de Saint Venant associées à une loi de frottement) et du transport (équation d'Exner associée à une formule de transport). Pour chaque pas de temps (celui choisi pour propager l'hydrogramme) et d'espace (celui choisi pour le maillage), ces modèles calculent les valeurs des caractéristiques hydrauliques (vitesse, hauteur d'eau, topographie du fond) et une valeur du transport solide associé. C'est la différence entre ce qui sort d'une maille et la capacité de transport de la maille suivante qu'il détermine s'il y a dépôt d'une érosion dans cette dernière.

Approximation aux différences finies des équations de Saint-Venant-Exner : Dans notre discrétisation, nous allons utiliser l'exposant $(j + 1)$ afin de désigner le temps $(t + \Delta t)$, quand la variable n'est pas connue explicitement. L'exposant j désigne le temps t quand la variable est connue explicitement. l'indice i indique l'abscisse du point concerné, un pas de Δx en avance indique l'indice $(i + 1)$. Nous prendrons un schéma implicite inconditionnellement stable, car la stabilité est très importante dans la validation des résultats numériques.

Nous choisissons un schéma du premier ordre progressif en temps et centré en espace, afin d'assurer le schéma implicite.

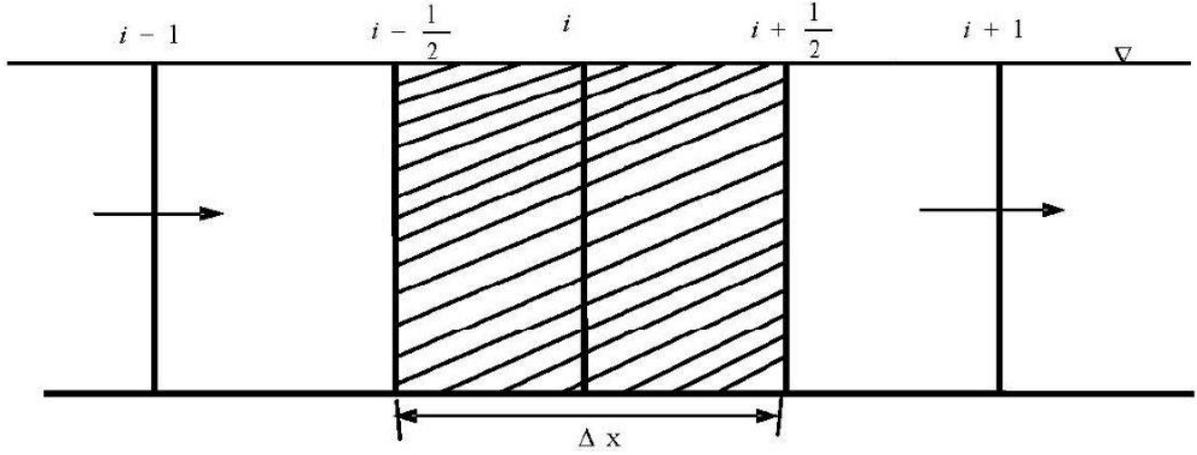


FIGURE 4.4 – Volume de contrôle de l'équation de continuité.

La discrétisation de l'équation de continuité : Nous donnons l'équation de continuité d'une façon équivalente à la première formule du système (4.3), afin de faciliter sa discrétisation.

Alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

Tel que :

$$Q = u.S$$

où

- Q représente le débit liquide par unité de largeur.
- S est la surface mouillée.
- B représente la largeur du miroir.
- h indique la hauteur d'eau.
- u désigne la vitesse moyenne.

En s'appuyant sur le volume de contrôle de l'équation de continuité (**figure 4.4**), discrétisant l'équation (4.4), nous aurons :

$$\frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} = \frac{-1}{\Delta x . B_i^j} \left(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} . S_{i+\frac{1}{2}}^j - u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} . S_{i-\frac{1}{2}}^j \right) \quad (4.5)$$

La discrétisation de l'équation de dynamique : Nous pouvons écrire la seconde équation du système (4.3) de la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial Z_f}{\partial x} - g J_e \quad (4.6)$$

En se servant du volume de contrôle de l'équation de dynamique (**figure 4.5**), et en discrétisant tous les éléments de l'équation (4.6), nous trouvons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} = \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta t} \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}}^j = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^j - u_{i-\frac{3}{2}}^j}{2\Delta x} \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_i^j = \frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial Z_f}{\partial x} \right|_i^j = \frac{Z_{f,i}^{j+1} - Z_{f,i-1}^{j+1}}{\Delta x} \quad (4.10)$$

Nous remplaçons ces formules (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10) dans l'équation (4.6), nous obtenons :

$$\frac{u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta t} = -u_{i-\frac{1}{2}}^j \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^j - u_{i-\frac{3}{2}}^j}{2\Delta x} \right) - g \left(\frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} \right) + g \left(\frac{Z_{f,i-1}^{j+1} - Z_{f,i}^{j+1}}{\Delta x} \right) - gJ_e \quad (4.11)$$

Tel que :

$$J_e = C_f \frac{1}{4R_h} \frac{u^2}{2g}$$

où C_f est le coefficient de frottement de type Manning, ou encore

$$J_e = \frac{n^2 (u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}) |u_{i-\frac{1}{2}}^j|}{(R_{h,i-\frac{1}{2}}^j)^{\frac{4}{3}}}$$

L'équation (4.11) devient :

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} = u_{i-\frac{1}{2}}^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[u_{i-\frac{1}{2}}^j (u_{i-\frac{3}{2}}^j - u_{i+\frac{1}{2}}^j) \right] \\ + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{i-1}^{j+1} - h_i^{j+1}) + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (Z_{f,i-1}^{j+1} - Z_{f,i}^{j+1}) \\ - g\Delta t \frac{n^2}{(R_{h,i-\frac{1}{2}}^j)^{\frac{4}{3}}} (u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}) |u_{i-\frac{1}{2}}^j| \end{aligned} \quad (4.12)$$

De même, la discrétisation de l'élément u au point $(i + \frac{1}{2}, j + 1)$ de l'équation (4.6), nous donne :

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^j + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[u_{i+\frac{1}{2}}^j (u_{i-\frac{1}{2}}^j - u_{i+\frac{3}{2}}^j) \right] \\ + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_i^{j+1} - h_{i+1}^{j+1}) + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (Z_{f,i}^{j+1} - Z_{f,i+1}^{j+1}) - g\Delta t \frac{n^2}{(R_{h,i+\frac{1}{2}}^j)^{\frac{4}{3}}} (u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}) |u_{i+\frac{1}{2}}^j| \end{aligned} \quad (4.13)$$

posons :

$$\alpha_{i-\frac{1}{2}}^j = 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}}^j - u_{i-\frac{3}{2}}^j) + g\Delta t \frac{n^2}{(R_{h,i-\frac{1}{2}}^j)^{\frac{4}{3}}} |u_{i-\frac{1}{2}}^j| \quad (4.14)$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^j = 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+\frac{3}{2}}^j - u_{i-\frac{1}{2}}^j) + g\Delta t \frac{n^2}{(R_{h,i+\frac{1}{2}}^j)^{\frac{4}{3}}} |u_{i+\frac{1}{2}}^j| \quad (4.15)$$

En substituant (4.14) et (4.15) dans les équations (4.12) et (4.13), nous aurons :

$$w_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} (h_{i-1}^{j+1} - h_i^{j+1}) + \frac{w_{i-\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} + g \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} (Z_{f,i-1}^{j+1} - Z_{f,i}^{j+1}) \quad (4.16)$$

$$w_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} (h_i^{j+1} - h_{i+1}^{j+1}) + \frac{w_{i+\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} + g \frac{\Delta t}{\Delta x \cdot \alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} (Z_{f,i}^{j+1} - Z_{f,i+1}^{j+1}) \quad (4.17)$$

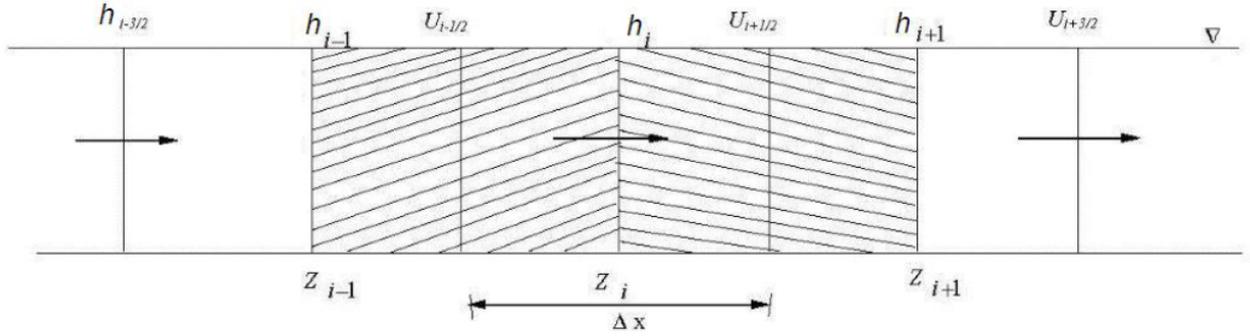


FIGURE 4.5 – Volume de contrôle de l'équation de dynamique.

Discrétisation de l'équation d'Exner : Nous écrivons l'équation (4.2) sous cette forme :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} = -E \frac{\partial q_s}{\partial x} \quad (4.18)$$

Avec :

$$E = -\frac{1}{1-P}$$

La discrétisation de (4.18) donne :

$$\frac{Z_{f,i}^{j+1} - Z_{f,i}^j}{\Delta t} = E \frac{q_{s,i+\frac{1}{2}}^j - q_{s,i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta x} \quad (4.19)$$

Il existe plusieurs formules pour modéliser le transport par charriage. Chacune d'elle exprime une utilité pratique en absence de jaugeages, qui nécessite d'être justifiée par des mesures en matière de pente et de granulométrie. Nous donnons la formule de charriage d'Einstien-Born (GRACIA, 1982) [3], qui prend en considération la vitesse d'écoulement, par :

$$q_s = Ku^6 \quad (4.20)$$

Tel que :

$$K = \frac{40Fg^{\frac{1}{2}}}{(S_s - 1)^{\frac{5}{2}} d_{50}^{\frac{3}{2}}} \frac{n^6}{R_h}$$

où

- F représente le facteur dépendant du diamètre d_{50} .
- $S_s = \rho_s$ est la masse volumique du sédiment et ρ_0 est la masse volumique de l'eau.

La résolution de l'expression q_s donne des équations algébriques non linéaire en type de puissance, entraînant des difficultés de calcul. Afin d'éviter le problème de convergence en calcul numérique, linéairisons d'abord l'équation (4.20), alors :

$$q_{s,i+\frac{1}{2}}^j = -5K_{i+\frac{1}{2}}^j \left(u_{i+\frac{1}{2}}^j \right)^6 + 6K_{i+\frac{1}{2}}^j \left(u_{i+\frac{1}{2}}^j \right)^5 u_{i+\frac{1}{2}}^j \quad (4.21)$$

De même,

$$q_{s,i-\frac{1}{2}}^j = -5K_{i-\frac{1}{2}}^j \left(u_{i-\frac{1}{2}}^j \right)^6 + 6K_{i-\frac{1}{2}}^j \left(u_{i-\frac{1}{2}}^j \right)^5 u_{i-\frac{1}{2}}^j \quad (4.22)$$

Nous posons :

$$W1_{i+\frac{1}{2}}^j = 5EK_{i+\frac{1}{2}}^j \left(u_{i+\frac{1}{2}}^j \right)^6 \quad (4.23)$$

$$W2_{i+\frac{1}{2}}^j = 6EK \left(u_{i+\frac{1}{2}}^j \right)^5 \quad (4.24)$$

Nous allons déduire ces équations discrétisées en différence finie avec un schéma implicite :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \left(Z_{f,i}^{j+1} - Z_{f,i}^j \right) = -W1_{i+\frac{1}{2}}^j + W2_{i+\frac{1}{2}}^j u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + W1_{i-\frac{1}{2}}^j - W2_{i-\frac{1}{2}}^j u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}$$

D'où :

$$W2_{i-\frac{1}{2}}^j u_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} - W2_{i+\frac{1}{2}}^j u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} = W1_{i-\frac{1}{2}}^j - W1_{i+\frac{1}{2}}^j - \frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,i}^{j+1} + \frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,i}^j \quad (4.25)$$

Maintenant, Nous remplaçons les formules (4.16) et (4.17) dans les équations (4.25) et (4.5), nous aurons :

$$\begin{aligned} & W2_{i-\frac{1}{2}}^j \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} \left(h_{i-1}^{j+1} - h_i^{j+1} \right) + \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} + g \frac{\Delta t}{\Delta x \times \alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} \left(Z_{f,i-1}^{j+1} - Z_{f,i}^{j+1} \right) \right] - \\ & W2_{i+\frac{1}{2}}^j \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} \left(h_i^{j+1} - h_{i+1}^{j+1} \right) + \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} + g \frac{\Delta t}{\Delta x \times \alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} \left(Z_{f,i}^{j+1} - Z_{f,i+1}^{j+1} \right) \right] = \\ & W1_{i-\frac{1}{2}}^j - W1_{i+\frac{1}{2}}^j - \frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,i}^{j+1} + \frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,i}^j \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \eta_{i-\frac{1}{2}}^j h_{i-1}^{j+1} + \eta_{i-\frac{1}{2}}^j Z_{f,i-1}^{j+1} + \left(-\eta_{i-\frac{1}{2}}^j - \eta_{i+\frac{1}{2}}^j \right) h_i^{j+1} + \left(\frac{-\Delta x}{\Delta t} - \eta_{i-\frac{1}{2}}^j - \eta_{i+\frac{1}{2}}^j \right) Z_{f,i}^{j+1} + \eta_{i+\frac{1}{2}}^j h_{i+1}^{j+1} + \eta_{i+\frac{1}{2}}^j Z_{f,i+1}^{j+1} = \\ & \frac{-\Delta x}{\Delta t} Z_{f,i}^j - W1_{i+\frac{1}{2}}^j - W1_{i-\frac{1}{2}}^j + \frac{W2_{i+\frac{1}{2}}^j u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} + \frac{W2_{i-\frac{1}{2}}^j u_{i-\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} \end{aligned}$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -\beta_{i-\frac{1}{2}}^j h_{i-1}^{j+1} - \beta_{i-\frac{1}{2}}^j Z_{f,i-1}^{j+1} + \left(B_i^j + \beta_{i+\frac{1}{2}}^j + \beta_{i-\frac{1}{2}}^j \right) h_i^{j+1} + \left(\beta_{i+\frac{1}{2}}^j + \beta_{i-\frac{1}{2}}^j \right) Z_{f,i}^{j+1} - \beta_{i+\frac{1}{2}}^j h_{i+1}^{j+1} - \beta_{i+\frac{1}{2}}^j Z_{f,i+1}^{j+1} = \\ & B_i^j h_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot S_{i+\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^j \cdot S_{i-\frac{1}{2}}^j}{\alpha_{i-\frac{1}{2}}^j} \end{aligned}$$

où

$$\eta_i^j = g \frac{W 2_i^j \Delta t}{\alpha_i^j \Delta x}$$

et

$$\beta_i^j = g \cdot \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{S_i^j}{\alpha_i^j}$$

Ces deux dernières équations entièrement discrétisées, exercées d'une manière symétrique à tout point du maillage, (formant le système $AX = b$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (B_1^j + \beta_2^j + \beta_0^j)h_1^{j+1} + (\beta_2^j + \beta_0^j)Z_{f,1}^{j+1} - \beta_2^j h_2^{j+1} - \beta_2^j Z_{f,2}^{j+1} \\ = B_1^j h_1^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_2^j \cdot S_2^j}{\alpha_2^j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_0^j \cdot S_0^j}{\alpha_0^j} + \beta_0^j \cdot h_0^{j+1} + \beta_0^j \cdot Z_{f,0}^{j+1} \\ (-\eta_0^j - \eta_2^j)h_1^{j+1} + \left(-\frac{\Delta x}{\Delta t} - \eta_0^j - \eta_2^j\right)Z_{f,1}^{j+1} + \eta_2^j h_2^{j+1} + \eta_2^j Z_{f,2}^{j+1} \\ = -\frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,1}^j - W 1_2^j - W 1_0^j + \frac{W 2_2^j \cdot u_2^j}{\alpha_2^j} + \frac{W 2_0^j \cdot u_0^j}{\alpha_0^j} \\ -\beta_1^j h_1^{j+1} - \beta_1^j Z_{f,1}^{j+1} + (B_2^j + \beta_3^j + \beta_1^j)h_2^{j+1} + (\beta_3^j + \beta_1^j)Z_{f,2}^{j+1} - \beta_3^j h_3^{j+1} - \beta_3^j Z_{f,3}^{j+1} \\ = B_2^j h_2^j - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{u_3^j \cdot S_3^j}{\alpha_3^j} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{u_1^j \cdot S_1^j}{\alpha_1^j} \\ \eta_1^j h_1^{j+1} + \eta_1^j Z_{f,1}^{j+1} + (-\eta_1^j - \eta_3^j)h_2^{j+1} + \left(-\frac{\Delta x}{\Delta t} - \eta_1^j - \eta_3^j\right)Z_{f,2}^{j+1} + \eta_3^j h_3^{j+1} + \eta_3^j Z_{f,3}^{j+1} \\ = -\frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,2}^j - W 1_3^j - W 1_1^j + \frac{W 2_3^j \cdot u_3^j}{\alpha_3^j} + \frac{W 2_1^j \cdot u_1^j}{\alpha_1^j} \\ \vdots \\ -\beta_{n-1}^j h_{n-1}^{j+1} - \beta_{n-1}^j Z_{f,n-1}^{j+1} + (B_n^j + \beta_{n+1}^j + \beta_{n-1}^j)h_n^{j+1} + (\beta_{n+1}^j + \beta_{n-1}^j)Z_{f,n}^{j+1} \\ = B_n^j h_n^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{n+1}^j \cdot S_{n+1}^j}{\alpha_{n+1}^j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{n-1}^j \cdot S_{n-1}^j}{\alpha_{n-1}^j} + \beta_{n+1}^j h_{n+1}^{j+1} + \beta_{n+1}^j Z_{f,n+1}^{j+1} \\ \eta_{n-1}^j h_{n-1}^{j+1} + \eta_{n-1}^j Z_{f,n-1}^{j+1} + (-\eta_{n-1}^j - \eta_{n+1}^j)h_n^{j+1} + \left(-\frac{\Delta x}{\Delta t} - \eta_{n-1}^j - \eta_{n+1}^j\right)Z_{f,n}^{j+1} \\ = -\frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,n}^j - W 1_{n+1}^j - W 1_{n-1}^j + \frac{W 2_{n+1}^j \cdot u_{n+1}^j}{\alpha_{n+1}^j} + \frac{W 2_{n-1}^j \cdot u_{n-1}^j}{\alpha_{n-1}^j} - \eta_{n+1}^j h_{n+1}^{j+1} - \eta_{n+1}^j Z_{f,n+1}^{j+1} \end{array} \right.$$

Avec : h_i^{j+1} et $Z_{f,i}^{j+1}$ sont les inconnus de ce système.

où

$$b = \left(\begin{array}{c} B_1^j h_1^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_2^j \cdot S_2^j}{\alpha_2^j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_0^j \cdot S_0^j}{\alpha_0^j} + \beta_0^j h_0^{j+1} + \beta_0^{j+1} Z_{f,0}^{j+1} \\ -\frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,1}^j - W 1_2^j - W 1_0^j - \frac{W 2_2^j \cdot u_2^j}{\alpha_2^j} + \frac{W 2_0^j \cdot u_0^j}{\alpha_0^j} - \eta_0^j h_0^{j+1} - \eta_0^j Z_{f,0}^{j+1} \\ B_2^j h_2^j - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{u_3^j \cdot S_3^j}{\alpha_3^j} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{u_1^j \cdot S_1^j}{\alpha_1^j} \\ -\frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,2}^j - W 1_3^j - W 1_1^j + \frac{W 2_3^j \cdot u_3^j}{\alpha_3^j} + \frac{W 2_1^j \cdot u_1^j}{\alpha_1^j} \\ \vdots \\ B_n^j h_n^j - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{u_{n+1}^j \cdot S_{n+1}^j}{\alpha_{n+1}^j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{n-1}^j \cdot S_{n-1}^j}{\alpha_{n-1}^j} + \beta_{n+1}^j h_{n+1}^{j+1} + \beta_{n+1}^j Z_{f,n+1}^{j+1} \\ -\frac{\Delta x}{\Delta t} Z_{f,n}^j - W 1_{n+1}^j - W 1_{n-1}^j + \frac{W 2_{n+1}^j \cdot u_{n+1}^j}{\alpha_{n+1}^j} + \frac{W 2_{n-1}^j \cdot u_{n-1}^j}{\alpha_{n-1}^j} - \eta_{n+1}^j h_{n+1}^{j+1} - \eta_{n+1}^j Z_{f,n+1}^{j+1} \end{array} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} h_1^{j+1} \\ Z_{f,1}^{j+1} \\ h_2^{j+1} \\ Z_{f,2}^{j+1} \\ \vdots \\ h_n^{j+1} \\ Z_{f,n}^{j+1} \end{pmatrix}$$

Le système obtenu est un système linéaire algébrique, qui peut être résolu par la méthode d'élimination de Gauss.

La programmation de ce système nécessite d'initialiser comme paramètres d'entrées certains termes qui sont : la vitesse moyenne (u_0), la surface mouillée (S), l'accélération de la pesanteur (la gravité g), la pente du fond (J_f), le rayon hydraulique (R_h), le coefficient de Manning (n), le facteur qui dépend du diamètre d_{50} (F), la masse volumique du sédiment (S_s), la porosité du fond (P), le pas de l'espace (Δx) et le pas du temps (Δt). Il nous faudra un sous-programme dans le programme principal qui permet de calculer les vitesses moyennes. Notre objectif est d'avoir comme paramètres de sorties les hauteurs d'eau (h_i^{j+1}) et la pente du fond ($Z_{f,i}^{j+1}$). Après avoir terminé ce programme nous pourrions simuler la topographie du fond initiale et la topographie du fond trouvée ce qui nous permettra de comparer l'évolution du lit des cours d'eau après une certaine période.

4.4.1 Conclusion

Pour mieux comprendre le phénomène de transport de sédiments, nous avons mis en évidence les différentes variables et paramètres de l'écoulement eau/sédiment, modélisés dans le cadre du système couplé Saint-venant-Exner. Nous avons bien constaté que la forme non conservative de l'équation d'Exner ainsi que la variation de la côte du fond Z_f complique la simulation numérique des variables de sorties du système couplé hydrodynamique et morpho-dynamique.

CONCLUSION GÉNÉRALE

La réalisation de ce mémoire nous a offert l'opportunité de nous initier au domaine des mathématiques appliquées aux phénomènes physiques. Le choix de l'étude des écoulements à surface libre nous a obligés à faire « une immersion » dans le monde ô combien vaste de la mécanique des fluides. C'était l'occasion de découvrir certaines notions de base dans la théorie des écoulements, telles : la conservation de la masse, la seconde loi de Newton, fluide compressible, incompressible, quantité de mouvement, densité, viscosité . . . , etc. L'occasion aussi de décortiquer l'équation « star » des mécaniciens : l'équation de Navier-Stokes ; l'intégration et la moyenne des équations qui en découlent a nécessité le recours à des outils mathématiques couramment utilisés en physique. Il s'agit entre autres des notions de : dérivée normale, champ de vecteur, tenseur, opérateur et formule de la divergence, gradient et jacobien . . . , etc. Enfin, et afin d'illustrer l'importance des systèmes de Saint-Venant dans la simulation de certains phénomènes naturels et la prédiction des catastrophes, nous avons mis en lumière le système couplé : Saint-Venant -Exner pour modéliser le phénomène de transport de sédiments dans les lits d'Oued. Ce phénomène induit un changement de la côte du fond de l'écoulement, ce qui complique davantage la simulation numérique des variables de sortie de ce système couplé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Ancey, *Hydraulique à surface libre phénomènes de propagation : ondes et ruptures de barrage (Bases mathématiques, outils de simulations, application)*, École polytechnique fédérale de LAUSANNE, 2010.
- [2] D. Becel, *Modélisation de l'érosion et de la sédimentation le long de la rivière pilcomayo (Bolive) : un exemple de l'évolution d'une rivière dans un contexte tectonique actif sous l'effet des fluctuations climatiques quaternaires*, Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble, 2005.
- [3] S. Bouheniche & B. Touaibia, *Modélisation numérique du transport solide du système « barrage-cours d'eau, transport-déposition » : cas du barrage de Sidi Mohamed Ben Aouda (SMBA) sur l'oued Mina, en zone semi-aride*, Revue des sciences de l'eau, Vol. 26, N 1, 2013.
- [4] E. Chaabelasri, *Contribution à la modélisation des écoulements en eaux peu profondes, avec transport de polluant (Application, à la Baie de Tanger)*, Thèse de doctorat, Université Mohamed premier-Oujda, 2011.
- [5] A. L. DISSEZ, *Modélisation numérique des écoulements tidaux au melieur peu profondes : Application à l'étude de l'hydrodynamique du bassin D'ARCARCHON*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux, 2006.
- [6] J. Dixmier. *Cours de mathématiques du premier cycles*, gauthiers-villars, 1976.
- [7] R. Ghostine, *Contribution à la résolution numérique des équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles par une méthode de type éléments finis discontinus : application à la simulation des écoulements au sein des carrefours dans la ville*, Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2009.

- [8] D. Louapre. *Science étonnante. La mystérieuse équation de Navier Stokes*, 2014. Disponible sur <https://scienceetonnante.com/2014/03/03/la-mysterieuse-equation-de-navier-stokes/>. Consulté le 29 mars 2020.
- [9] C. Lucas, *Modélisation de l'érosion*, Université d'OELÉANS, 05 octobre 2015.
- [10] A. Maher, *Sur les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint Venant pour la modélisation des écoulements de l'hydraulique en réseau d'assainissement*, Thèse de doctorat, Université Louis pasteur de Strasbourg, 2005.
- [11] G. MOLLON, *Mécanique des fluides des milieux continus*, polytech Grenoble, 2012-2013.
- [12] A. Riadht, *Développement des méthodes particulières pour la résolution des écoulements à surface libre*, Thèse de doctorat, Université du Quebec, 2007.
- [13] SHI. YU-e, *Résolution numérique des équations de Saint Venant par la technique de projection en utilisant une méthode de volume finis dans un maillage non structuré*, Thèse de doctorat, université de Caen-Basse Normandie, 2016.
- [14] P. UNG, *Simulation numérique du transport sédimentaire : Aspects déterministes et stochastiques*, Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 30 mars 2016.
- [15] M. H. Vignal, *Modélisation, équations aux dérivées partielles*, 16h de cours, 16h de TDs, Université Paul Sabatier,UPS, 01 février 2013.
- [16] J. M. Zokagon, *Modélisation numérique des écoulements à surface libre avec bancs courants-découvrant par les volumes finis et la décomposition orthogonale aux valeurs propres*, Thèse de doctorat, Université du Quebec, 2011.

Résumé :

La modélisation des écoulements à surface libre à faible profondeur, occupe de nos jours une place primordiale dans le domaine d'hydrodynamique fluviale et maritime. En effet, la simulation de ce type d'écoulements permet de prédire certains phénomènes et catastrophes naturels tels que : les inondations, la pollution environnementale, tsunami, rupture de barrage ..., etc.

Le noyau de ce travail a été consacré à la formulation mathématique des équations de Saint Venant qui décrivent les écoulements à surface libre. Ce système est obtenu par une intégration verticale des équations de Navier Stokes, en considérant certaines hypothèses et approximations simplificatrices, telles que l'hypothèse de la pression hydrostatique. Enfin, nous avons illustré le système de Shallow Water à travers un exemple d'application, à savoir le transport de sédiment qui est décrit par le système couplé Saint Venant Exner.

Abstract :

The modeling of free surface flows shallow depth now occupies a primordial place in the field of fluvial and maritime hydrodynamics. Indeed, the simulation of this type of flow makes it possible to predict certain phenomena and natural disasters, such as : floods, environmental pollution, tsunamis, dam failure, etc.

The core of this work has been devoted to the mathematical formulation of the Saint Venant equations which describe free surface flows. This system is obtained by a vertical integration of the Navier Stokes equations and by considering some simplifying assumption. Finally, we have illustrated the Shallow Water system through an application example, namely the sediment transport which is described by the coupled system of Saint Venant Exner.

الملخص:

تشغل نمذجة التدفقات السطحية الحرة على عمق ضحل في الوقت الحاضر مكانا أساسيا في مجال الديناميكا المائية النهرية والبحرية. في الواقع، فإن محاكاة هذا النوع من التدفق تجعل من الممكن التنبؤ بظواهر وكوارث طبيعية معينة، مثل: الفيضانات، التلوث البيئي، وأمواج التسونامي، وانهيار السدود... الخ.

تم تخصيص جوهر هذا النظام من خلال التكامل الراسي لمعادلات Saint Venant التي تصف التدفقات السطحية الحرة. يتم الحصول على هذا النظام من خلال التكامل الراسي لمعادلات Navier Stokes ومن خلال النظر في افتراضات وتقديرات مبسطة معينة، مثل افتراض الضغط الهيدروستاتيكي. كما أوضحنا أهمية هذا النظام من خلال مثال تطبيقي حيث سلطنا الضوء على النظام المزدوج: Saint Venant Exner نمذجة ظاهرة نقل الرواسب في أسرة واديان.

